

Научно-технологический университет Сириус  
Математическое моделирование в биомедицине  
и нефтегазовом инжиниринге

# Решение трехмерного уравнения диффузии методом конечных разностей с использованием MPI

---

Выполнили: А.Медведев, К.Попова, А.Рамазанов

Руководители: И.Н.Коньшин  
А.А.Легкий

Сириус  
2022

# Формулировка задачи диффузии

## Уравнение

$$\delta U / \delta t - \operatorname{div}(\mathbb{D} \cdot \operatorname{grad} U) = f(x, y, z, t), (x, y, z) \in \Omega = [0; 1]^3, t \in [0, 1]$$

Начальное и граничное условия:

$$\begin{cases} U(x, y, z, t) = 0, & (x, y, z) \in \delta\Omega \\ U(x, y, z, t) = 0, & t = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z, t) = (d_x + d_y + d_z) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$$

# Аналитическое решение

$$U^* = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) * (1 - e^{-(d_x + d_y + d_z) \cdot \pi^2 \cdot t})$$

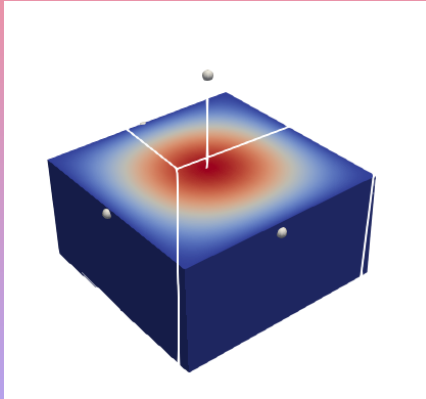


Рисунок 1: Визуализация аналитического решения в разрезе.Пакет Paraview

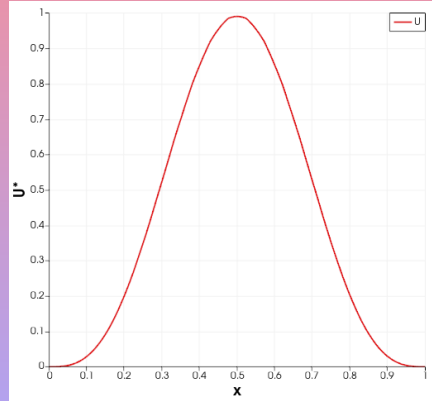


Рисунок 2: График зависимости  $U^*$  от  $x$

## Визуализация полученного решения

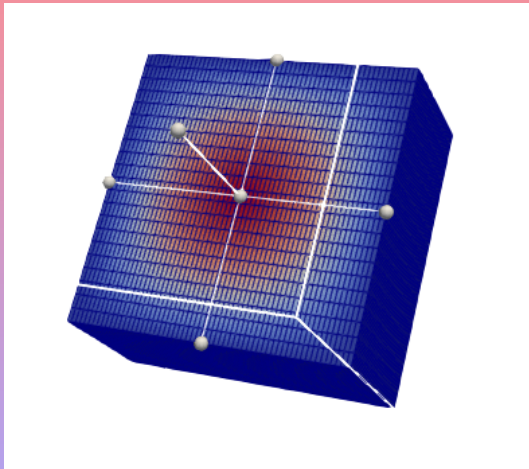


Рисунок 3: Визуализация численного решения в разрезе

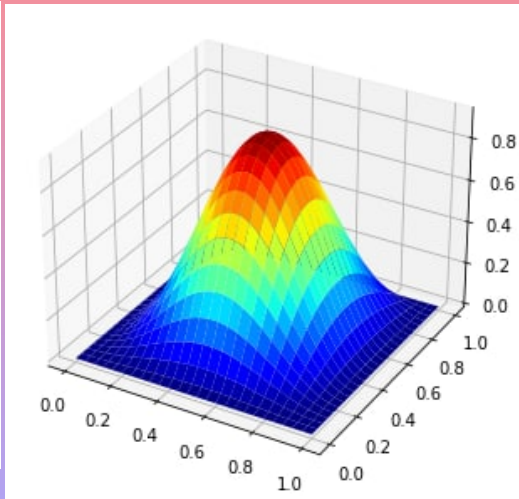


Рисунок 4: График зависимости  $U$  от  $x$  и  $y$

## Оптимальный порядок циклов

```
for (int l = 1; l * dt ≤ 1; l++) {  
    for (unsigned k = 1; k < kk-1; ++k) {  
        for (unsigned j = 1; j < m-1; ++j) {  
            for (unsigned i = 1; i < n-1; ++i) {
```

## Функции записи и считывания элемента массива

```
inline double get_u(double *const &u, int i, int j, int k) {  
    return *(u + k * n * m + j * n + i);  
}
```

```
inline void set_u(double *const &u, int i, int j, int k,  
double const &value) {  
    *(u + k * n * m + j * n + i) = value;  
}
```

Функция SWAP - обмен значений двух переменных, содержащих одинаковые типы данных

```
inline void swap(double *u_actual, double *u_next) {  
    double *temp = u_actual;  
    u_actual = u_next;  
    u_next = temp;  
}
```

## Результаты работы последовательного кода

Количество внутренних расчетных точек

$$N_x = 120, N_y = 60, N_z = 20$$

|                          | Время   | Ошибка      | Шаг по времени |
|--------------------------|---------|-------------|----------------|
| ПК                       | 43.7819 | 0.000454328 | 0.000105572    |
| Кластер, без оптимизации | 104.854 | 0.000454328 | 0.000105572    |
| Кластер, с оптимизацией  | 20.8667 | 0.000454328 | 0.000105572    |



# Результаты после использования MPI :min t = 0.24851, p = 80

