1 Número de Dígitos do Fatorial de Um Número

Pode-se utilizar a seguinte fórmula para encontrar-se o número de algarismos de um valor inteiro qualquer.

$$\text{número de digitos} = \text{parte inteira de: } \log(n) + 1 \tag{1}$$

Assim sendo, e a partir da teoria de logarítmos pode-se reescrever a fórmula acima da seguinte forma:

$$\text{número de digitos} = \text{parte inteira de: } \left(\frac{\ln n}{\ln 10}\right) + 1 \tag{2}$$

Por outro lado, conhecendo-se a a aproximacão de Stirling, tem-se

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{3}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \ln n! &\approx \ln\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] \\ &\approx \ln(\sqrt{2\pi n}) + \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n \\ &\approx \frac{\ln 2\pi + \ln n}{2} + n(\ln n - 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Por fim, sabendo-se que $n!$ é um número inteiro, vem

$$\text{número de digitos de } n! = \text{parte inteira de: } \left[\frac{\ln 2\pi + \ln n + 2n(\ln n - 1)}{2\ln 10}\right] + 1 \tag{5}$$

Por exemplo, supondo-se $n = 10.000$, então:

$$\begin{aligned} \text{número de digitos de } 10.000! &= \text{parte inteira de: } \left[\frac{\ln 2\pi + \ln 10.000 + 2n(\ln 10.000 - 1)}{2\ln 10}\right] + 1 \\ &= \text{parte inteira de: } 35.660,45 \\ &= 35.660 \text{ algarismos.} \end{aligned} \tag{6}$$