Міністерство освіти і науки України
Національний університет
"Львівська Політехніка"

Кафедра систем штучного інтелекту

Лабораторна робота № 3

з дисципліни

≪ Дискретна математика ≫

Виконала:

студент групи СШІ-12

Горішний Микола

Викладач:

Павлик Б.М.

Львів - 2024р.

Лабораторна робота №3 Тема: Побудова матриці бінарного відношення

Мета роботи: Набуття практичних вмінь та навичок при побудові матриць бінарних відношень та визначені їх типів.

Теоретичні відомості:

Декартів добуток множин A і B (позначається $A\times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), де $a \in A$, $b \in B$. При цьому вважається, що $(a1,b1) = (a2,b2)$ тоді і тільки тоді, коли $a1 = a2$, $b1 = b2$.

Бінарним відношенням R називається підмножина декартового добутку $A\times B$ (тобто $R \subset A\times B$). Якщо пара (a,b) належить відношенню R , то пишуть $(a, b)\in R$, або aRb .

Нехай задано бінарне відношення R на множині A^2: $R \subseteq A\times A = \{(a, b) | a\in A, b\in A\}$

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa , тобто $(a,a)\in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у кожній вершині. **2.** Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa , тобто $(a,a)\notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.
3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з aRb слідує bRa , тобто якщо $(a,b)\in R$ то і $(b,a)\in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.
4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a,b\in A$ з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b)\in R$ і $(b,a)\in R$, то $a = b$.

Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на симетричних місцях відносно головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою. **5.** Бінарне відношення R на множині *A* називається *транзитивним*, якщо для будь яких *a, b, c*∈ *A* з *aRb* та *bRc* слідує, що *aRc* . Тобто якщо *(a,b)*∈*R* і *(b,c)*∈ *R*, то *(a,c)*∈ *R* . Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці σ_{ij} = 1 та σ_{jm} =1, то обов'язково σ_{im} =1. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині *A* називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких *a, b, c*∈ *A* з *aRb* та *bRc* слідує що не виконується *aRc* . Тобто якщо *(a, b)*∈*R* і *(b, c)*∈ *R*, то (a, c)∉ R . Матриця антитранзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці σ_{ij} = 1 та σ_{jm} = 1, то обов'язково σ_{im} =0. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Завдання Додатку 1 варіанту №2

1. Чи є вірною рівність

$$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C)\cap(B\times D) \ ?$$

2. Знайти матрицю відношення $R \subset \mathbf{2}^{A}\times\mathbf{2}^{B}$:

$$R \ \{ (x, y) \mid x \in A \ \& \ y \subset B \ \& \ |y| = |x| \ , \ x \cap y = \otimes \};$$

де A = {1,2}, B ={1,3,5}.

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Перевірити чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

Маємо бінарне відношення $R \subset A\times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$A(R) = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним;

б) бієктивним:

$$a = \{ (x,y) \mid (x,y) \in R^2 \ \& \ y = \ln|x| \}$$

Розв'язання

1. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

$(x \in A, x \in B) \wedge (y \in C, y \in D)$
$(x \in A \ \ y \in C) \wedge (x \in B \ \ y \in D)$
$(x, y) \in A \times C \ \ \wedge \ (x, y) \in B \times D \Rightarrow$
$\Rightarrow (A \times C) \cap (B \times D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
Отже, рівність вірна

2. $R = \{ (x, y) \mid x \in A \ \& \ y \subset B \ \& \ |y| = |x| , x \cap y = \otimes \}$
$A = \{1,2\}$, $B = \{1,3,5\}$.
$R \subset 2^A * 2^B$
$2^A = \{ \emptyset , \{1\} , \{2\} , \{1,2\} \}$;
$2^B = \{ \emptyset , \{1\} , \{3\} , \{5\} , \{1,3\} , \{1,5\} , \{3,5\} , \{1,3,5\} \}$;

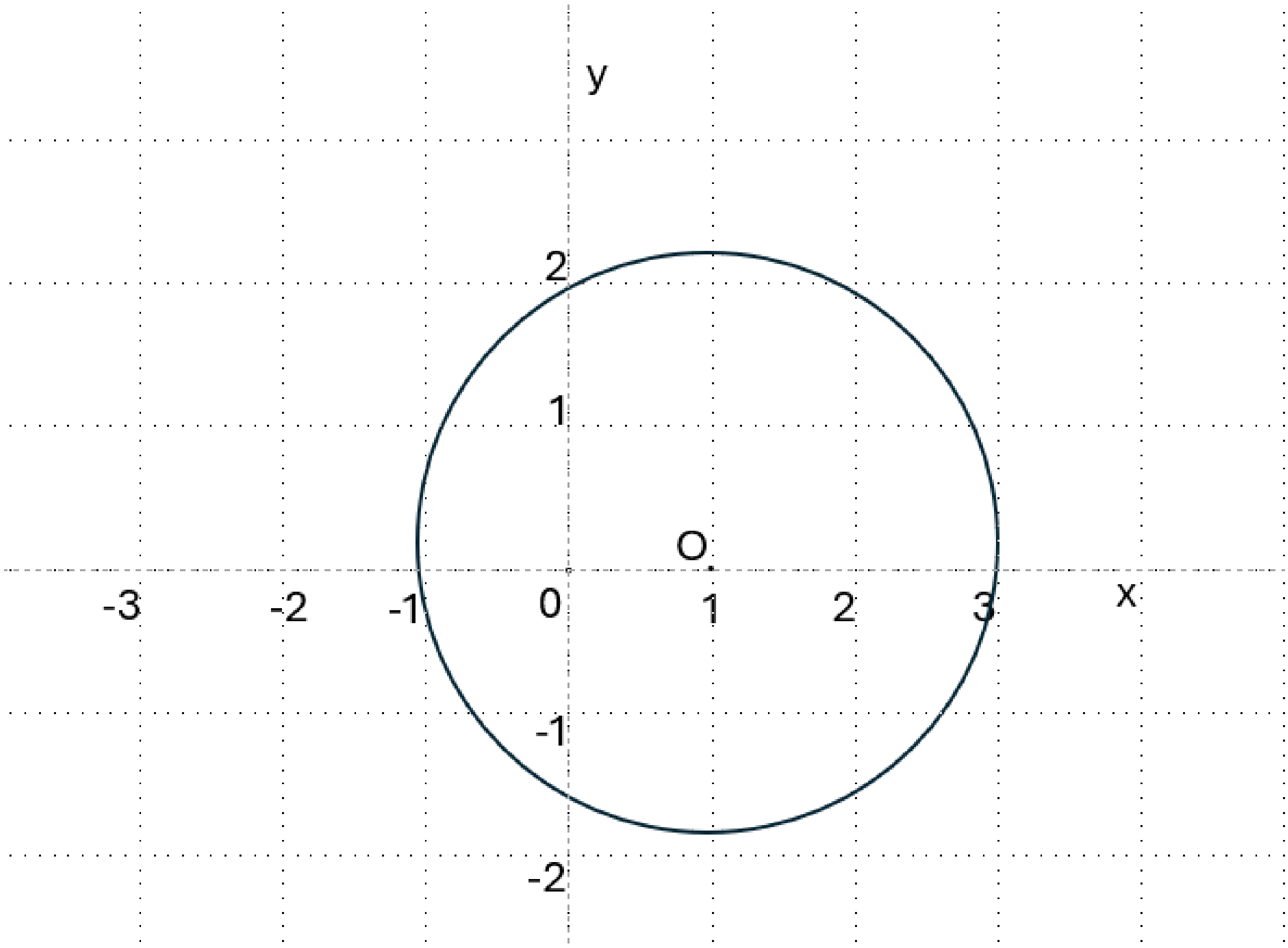
x\y	∅	{1}	{3}	{5}	{1,3}	{1,5}	{3,5}	{1,3,5}
1	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1	0

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\alpha = \{(x, y) \mid (x, y) \in R^2 \ \& \ x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$

$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 + y^2 \leq 3$

$(x-1)^2 + y^2 \leq 4$
O (1;0), R = 2;



$$4.\ A(R) = \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

1)

$A_{11} = 1$;

$A_{22} = 1$;

$A_{33} = 1$;

$A_{44} = 1$;

$A_{55} = 1$;

Отже, не є рефлективна

2) $A_{ij} = A_{ji}$;

$A_{12} = 1$; $A_{21} = 0$;
$A_{13} = 0$; $A_{31} = 1$;
$A_{14} = 0$; $A_{41} = 0$;
$A_{15} = 0$; $A_{51} = 0$;
$A_{23} = 1$; $A_{32} = 0$;
$A_{24} = 1$; $A_{42} = 0$;
$A_{25} = 0$; $A_{52} = 0$;
$A_{34} = 0$; $A_{43} = 0$;
$A_{35} = 1$; $A_{53} = 0$;
$A_{45} = 0$; $A_{54} = 1$;

Отже, не є симетрична

3) {1,2,3}
A(1,2) - 1
B(2,3) - 1 $\neq$ транзитивна
C(1,3) - 0

{2,3,4}
A(2,3) - 1
B(3,4) - 1 $\neq$ транзитивна
C(2,4) – 0

Отже, не є транзитивна

4) $A_{ij} \neq A_{ji}$, тоді вона антисиметрична
A(1,2) - 1 A_2 (2,1) - 0 => антисиметрична;
A(2,3) -1 A_2 (3,2) – 0 => антисиметрична;
A(1,3) -1 A_2 (3,1) – 0 => антисиметрична;
A(2,4) -1 A_2 (4,2) – 0 => антисиметрична;
A(3,5) -1 A_2 (5,3) – 0 => антисиметрична;
A(5,4) -1 A_2 (4,5) – 0 => антисиметрична;

Отже, є антисиметрична

5. $a = \{ (x,y) \mid (x,y) \in R^2 \ \& \ y = \ln|x| \}$
a) Функціональне: (коли для x існує єдине значення y)
Функція ln|x| визначена для всіх $x \in R \setminus \{0\}$
Для кожного $x \neq 0$, відповідне значення y є єдиним, тому це відношення є функцією на множині $R \setminus \{0\}$

Отже, відношення є функціональним на множині R / {0}.

б) Бієктивне: (коли воно і ін'єктивне і сур'єктивне)
Ін'єктивне - коли кожному у відповідає лише одне х,
Сур'єктивне - для кожного у має бути хоча б одне х, таке яке $y = \ln|x|$;

Відношення не є ін'єктивним, тому що у буде однаковим для двох різних х, наприклад для $x = 2$ та $x = -2x$

Функція $y = \ln|x|$ може приймати будь-які значення, оскільки для будь-якого у існує $x = e^y$, яке завжди додане.
Отже, відношення є сур'єктивним будь-коли.

Висновок: наше відношення є бієктивне, тому що виконуються 2-і умови.

Завдання Додатку 2

Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Перевірити програмно якого типу задане відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

$p = \{ (a, b) \mid a \in A \ \& \ b \in B \ \& \ a < b \}$

```
main.py
1  def get_input_set ( set_matrix):
2   while True :
3          user_number = input( f"Введіть числа для {set_matrix}:")
4          try :
5              return set ( map(int, user_number.split()))
6          except ValueError:
7              print ("Введи нармально")
8
9
10 def create_relation_matrix (A,B):
11     rows = len(A)
12     cols = len(B)
13     matrix = [[0] * cols for _ in range (rows) ]
14
15     for i, a in enumerate(A):
16         for j, b in enumerate(B):
17             if a < b:
18                 matrix[i][j] = 1
19
20     return matrix
21
22
23
24 def display_matrix(matrix, A, B):
25     print("\nМатриця бінарного відношення:")
26     print("    ", end="")
27     print(" ".join(map(str, B)))
28
29     for i, row in enumerate(matrix):
30         print(f"{list(A)[i]}: {' '.join(map(str, row))}")
31
32
33
34
35 def check_matrix(matrix, A, B):
36     n = len(matrix)
37    #13 рядок ми задали розміри matrix, тому matrix вже готова і має певні розміри.
38
39
40
41     Reflective = all(matrix[i][i] == 1 for i in range(n))
42     Symmetric = all(matrix[i][j] == matrix[j][i] for i in range (n)   for j in range (n))
43
```

```python
    Reflective = all(matrix[i][i] == 1 for i in range(n))
    Symmetric = all(matrix[i][j] == matrix[j][i] for i in range (n)   for j in range (n))


    Transitive = True
    for i in range (n):
        for j in range (n):
            for k in range (n):
                if matrix[i][j] and matrix[j][k] and not matrix[i][k]:
                    Transitive = False
                    break
            if not Transitive:
                break

    print (f" Рефлетивна -> {Reflective}")
    print (f" Симетрична -> {Symmetric}")
    print (f"Транзитивна -> {Transitive}")

def main ():
    A = get_input_set("A")
    B = get_input_set("B")


    relation_matrix = create_relation_matrix(A,B)
    display_matrix(relation_matrix, A, B)
    check_matrix(relation_matrix, A, B)


if __name__ == "__main__":
    main()
```

```
Output
Введіть числа для A:1 3 5 7
Введіть числа для B:1 3 4 6

Матриця бінарного відношення:
   1 3 4 6
1: 0 1 1 1
3: 0 0 1 1
5: 0 0 0 1
7: 0 0 0 0
 Рефлетивна -> False
 Симетрична -> False
Транзитивна -> True

=== Code Execution Successful ===
```

<u>Висновок</u>:

У процесі виконання лабораторної роботи з теми "Побудова матриці бінарного відношення" були здобуті практичні вміння у формуванні матриць для представлення бінарних відношень. Вивчення властивостей відношень, таких як рефлексивність, симетричність, транзитивність та антисиметричність, допомогло зрозуміти їх структуру та поведінку. Також набуті навички в роботі з декартовим добутком множин стали основою для побудови та аналізу матриць. Загалом, лабораторна робота сприяла глибшому розумінню концепцій дискретної математики та їх практичного застосування.і