Cálculo diferencial

Pablo Pallàs

5 de junio de 2023

Índice

1. Continuidad

2. Diferenciablidad

2.1. Conceptos básicos

En esta sección definiremos y estudiaremos el concepto de derivada para funciones de varias variables. Partiremos de la definición de derivada para funciones de una variable:

Definición 2.1. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, con $a \in I$. La* ***derivada*** *de f en a es el límite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

cuando dicho límite existe.

Sin embargo, cuando tengamos una función de n variables, $x - a$ es un vector y no tiene sentido la división en el límite anterior. Por lo tanto, esta definición tal cómo está no se puede copiar en el contexto de varias variables. Manipularemos la definición anterior para encontrar alguna forma equivalente que sí se pueda extender. La existencia del anterior límite es equivalente a que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0,$$

que se puede expresar así:

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(|x-a|), \;\; x \to a.$$

Como sabemos, esta forma de ver la derivabilidad tiene una interpretración geométrica bastante interesante. Y es que la ecuación general de una recta que pasa por el punto del plano $(a, f(a))$ (excluida la recta vertical) es

$$y_m(x) = f(a) + m(x-a),$$

con m la pendiente. Todas estas rectas pasan por el punto $(a, f(a))$, con lo que

$$\lim_{x\to a}(f(x) - y_m(x)) = 0,$$

pero sólo una recta (la que cumple $m = f'(a)$) que cumple la condición más fuerte de

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - y_m(x)}{x-a} = 0.$$

Es decir, esta recta especial entre todas las que pasan por el punto $(a, f(a))$ tiene un mayor contacto con la función cerca de a y su existencia asegura que la gráfica de f es suave en dicho punto.

Ahora pensemos que las rectas que pasan por el origen (exceptuando la vertical $x = 0$) no son sino aplicaciones lineales de la forma

$$L_m(x) = mx,$$

y para conseguir que pasen por otro punto no hay más que trasladarlas (y entonces serán aplicaciones afines)

$$y_m(x) = f(a) + L_m(x-a).$$

Esta propiedad geométrica la podemos expresar analíticamente tal que así: *Una función f es derivable en a si y sólo si existe una aplicación lineal L ($L(x) = f'(a)x$) tal que*

$$f(x) - f(a) - L(x-a) = o(|x-a|), \;\; x \to a.$$

Y esta idea sí podemos llevarla al caso de funciones de varias variables. Podemos pensar en una función de dos variables $f(x, y)$ y en un punto (a, b). Podríamos decir que f tiene una gráfica suave en el punto $(a, b, f(a, b))$ si entre todos los planos que pasan por dicho punto hay uno que se "pega"más a la gráfica de la función.

Expresemos esto correctamente: todos los planos que pasan por el origen $(0, 0, 0)$ (exceptuando los verticales) vienen dados por las aplicaciones lineales

$$L(x, y) = \lambda x + \mu y.$$

Los que pasan por el punto $(a, b, f(a, b))$ son las aplicaciones afines

$$z_{\lambda,\mu}(x, y) = f(a, b) + \lambda(x - a) + \mu(y - b).$$

Y que una de estas se pegue quiere decir que existan λ, μ tales que

$$f(x, y) - z_{\lambda,\mu}(x, y) = o(\|(x, y) - (a, b)\|), \ \ (x, y) \to (a, b),$$

ó dicho de otra forma:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - z_{\lambda,\mu}(x, y)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0,$$

y este límite tiene perfecto sentido plantearlo en $\mathbb{R}^2$. Así pues, llegamos a una especie de definición que nos servirá de forma provisional:

Diremos que $f(x, y)$ es derivable en el punto (a, b) si existe una aplicación lineal $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - L(x - a, y - b)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = 0.$$

Esta definición, que no tiene ningún problema en extenderse al caso de más de dos variables, dará lugar a una productiva teoría similar a la de una variable.

Con esta introducción, pasamos directamente a $\mathbb{R}^n$ y empezamos a dar rigor a todos estos conceptos.

Al hablar de aspectos relacionados con la derivabilidad, trataremos solamente con conjuntos abiertos que denotaremos por la letra Ω.

Definición 2.2. *Un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice* ***abierto*** *si todo punto $a \in \Omega$ es interior, es decir, si*

$$\forall a \in \Omega \ \exists \delta > 0 \ni B(a, \delta) \subseteq \Omega.$$

Llamaremos ***dirección*** en $\mathbb{R}^n$ a todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ de norma 1. Entonces, dado $a \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de puntos

$$R_v(a) = \{a + tv : t \in \mathbb{R}\}$$

constituyen la recta que pasa por a con dirección v.

Si tenemos una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \Omega$, considerar la función f restringida a $\Omega \cap R_v(a)$ es tener la función de una variable

$$g(t) = f(a + tv).$$

Como Ω es abierto se sigue que existe un $\delta > 0$ tal que g está definida para aquellos t' tales que $|t| < \delta$. Es decir, g está definida en un entorno del origen y cabe plantearse si es derivable en 0. Si lo es, diremos que f es derivable en a según la dirección v.

Definición 2.3. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y v un dirección en $\mathbb{R}^n$. Diremos que f es* ***derivable en*** *a* ***según la dirección*** *v si existe el límite*

$$f_v(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \in \mathbb{R}$$

y este límite se llama ***derivada direccional de f en a, según la dirección v.***

Otra notación que se puede emplear para la derivada direccional es $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Unos vectores muy significativos son los que señalan los ejes de coordenadas, es decir, los vectores e_i, con $i = 1, \dots, n$ de la base canónica. Las derivadas según estas direcciones se llaman derivadas parciales.

Definición 2.4. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Si existe, se llama* ***derivada parcial i-ésima de f en*** *a a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{e_i}(a) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_i - a_i}.$$

Hacer una derivada parcial es muy sencillo, si $a = (a_1, \dots, a_n)$ y consideramos la función de una variable

$$g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g'(a_i)$.

Ejemplo 2.4.1. *Sea la función de dos variables*

$$f(x,y) = e^x \sin y + x^2 y.$$

Entonces, hacer la derivada parcial de f con respecto a x en un punto genérico (x,y) es pensar que la y está fija y derivar la función de variable x. Así,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \sin y + 2xy.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x \cos y + x^2.$$

■

Ejemplo 2.4.2. *Sea la función de tres variables*

$$f(x,y,z) = \cos(xyz) + (xy)^2 + z.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -yz\sin(xyz) + 2y(xy) = 2xy^2 - yz\sin(xyz),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -xz\sin(xyz) + 2x(xy) = 2x^2y - xz\sin(xyz),\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -xy\sin(xyz) + 1 = 1 - xy\sin(xyz).
\end{aligned}$$

■

Las derivadas parciales pueden existir todas, alguna o ninguna y su existencia no asegura ninguna clase de continuidad. Por ejemplo:

Ejemplo 2.4.3. *En $n = 2$,*

$$f(x, y) = x + |y|.$$

La derivada parcial de f respecto a x en $(0, 0)$ existe, es 1. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 1.$$

Sin embargo, con respecto a y tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t},$$

que es un límite que no existe.

■

Definición 2.5. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Si existe alguna aplicación lineal $L \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0,$$

entonces diremos que f es ***diferenciable en*** *a. A L lo denominaremos* ***diferencial de*** *f* ***en*** *a.*

Proposición 2.6. *Sean Ω abierto en $\mathbb{R}^n$ y $a \in \Omega$. Si $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a con diferencial L, entonces para toda dirección v en $\mathbb{R}^n$ existe $f_v(a)$ y $f_v(a) = L(v)$.*

Demostración: Partimos de la existencia del límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x - a\|} = 0.$$

La existencia de un límite es una condición muy fuerte, en particular tiene que existir de cualquier forma que nos acerquemos al punto a. Si v es una dirección y nos acercamos a a por los puntos de la recta $x = a + tv$, $t \longrightarrow 0$, tiene que ocurrir

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(a) - L(tv)}{\|tv\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(a) - tL(v)}{|t|} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(a) - tL(v)}{t} = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(a)}{t} = L(v).$$

□

Como las derivadas parciales están unívocamente definidas al ser un límite, la diferencial cuando exista es única y también sabemos que sus componentes son las derivadas parciales. Es decir,

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i,$$

y su aplicación a un vector de $\mathbb{R}^n$ será

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)x_i.$$

Debido a la unicidad, podemos dar una notación a la diferencial. Pues bien, escribiremos $L = df(a)$ y así tendremos la siguiente igualdad:

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Ejemplo 2.6.1. *Estudiemos la diferenciabilidad en* $(0,0,0)$ *de* $f(x,y,z) = xy + z$.

La diferencial, si existe, debe tener por componentes las derivadas parciales en $(0,0,0)$. *En este caso es inmediato hallarlas:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1,$$

luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1.$$

Así, si la diferencial existe debe ser la aplicación lineal $L = dz$, *es decir,* $L(x,y,z) = z$. *Comprobemos ahora si*

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - L(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy + z - z}{\|(x,y,z)\|} = 0.$$

Lo cual es cierto usando que $|x|, |y| \leq \|(x,y,z)\|$. *Así,* f *es diferenciable en* $(0,0,0)$ *y su diferencial es la aplicación lineal* $df(0,0,0) = dz$.

■

Antes de estudiar las propiedades de la diferenciabilidad, pongamos la definición en alguna forma equivalente. Primero, y es sólo cuestión de notación, f es diferenciable en a si y sólo si existe una aplicación lineal L tal que

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + o(\|x-a\|), \; x \longrightarrow a.$$

Si denotamos

$$f^* = \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|},$$

en principio, el dominio de esta función es $\Omega \setminus \{a\}$. Pero si f es diferenciable en a y L es la diferencial, existirá

$$\lim_{x \to a} f^*(x) = 0.$$

Con lo cual f^* se puede extender de forma continua a a, definiendo $f^*(a) = 0$. Resumiendo, se puede afirmar que si f es diferenciable, entonces existe una función $f^* \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en a, con $f^*(a) = 0$ tal que se puede poner

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + f^*(x)\|x-a\|, \ x \in \Omega.$$

Esta igualdad será muy interesante en el siguiente resultado:

Proposición 2.7. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ y $f, g \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en a. Entonces f es continua en a*

Demostración. Si aplicamos límites a $f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + f^*(x)\|x-a\|$, como

$$\lim_{x \to a} df(a)(x-a) = df(a)(0) = 0$$

al ser toda aplicación lineal continua, tenemos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

□

Otras propiedades son:

Proposición 2.8. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $a \in \Omega$, $f, g \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en a y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *$f + g$ es diferenciable en a, con $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.*
2. *λf es diferenciable en a, con $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$.*

Proposición 2.9. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$ y $f, g \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en a. Entonces fg es diferenciable en a, con $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos

$$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + f^*(x)\|x-a\|, x \in \Omega \tag{1}$$

$$g(x) = g(a) + dg(a)(x-a) + g^*(x)\|x-a\|, x \in \Omega \tag{2}$$

con f^* y g^* funciones continuas en a y $f^*(a) = g^*(a) = 0$. Tenemos que ver que la función

$$F(x) = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a) - f(a)dg(a)(x-a) - g(a)df(a)(x-a)}{\|x-a\|}$$

tiende a 0 cuando x tiende a a. Usando (1) y (2) llegamos a que

$$F(x) = f(a)g^*(x) + g(a)f^*(x) + \frac{df(a)(x-a)dg(a)(x-a)}{\|x-a\|} + df(a)(x-a)g^*(x) + dg(a)(x-a)f^*(x) + f^*(x)g^*(x)\|x-a\|$$

Cada uno de estos seis sumandos tiende a 0 cuando x tiende a a. El primero, el segundo y el sexto son claros. Para el tercero usamos que como $df(a)$ y $dg(a)$ son aplicaciones lineales, existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que

$$|df(a)(x-a)| \leq K_1\|x-a\|, \quad |dg(a)(x-a)| \leq K_2\|x-a\|$$

y por tanto

$$\left|\frac{df(a)(x-a)dg(a)(x-a)}{\|x-a\|}\right| \leq K_1K_2\|x-a\|,$$

con lo que queda claro que tiende a 0. Para el cuarto y el quinto hacemos acotaciones similares.

□

Ejemplo 2.9.1. *1. Si $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante, de manera que existe algún $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces en todo $x \in \mathbb{R}^n$ f es diferenciable y $df(x) = 0$.*

2. Si $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal, entonces en todo $x \in \mathbb{R}^n$ f es diferenciable, con $df(x) = f$.

3. Toda función polinómica en n variables es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

■

Los dos primeros ejemplos anteriores son inmediatos, y el tercero es porque todo polinomio es producto de constantes y aplicaciones lineales π^i.

Ejemplo 2.9.2. *Algunos ejemplos:*

1. *La función $f(x,y) = x + |y|$ no es diferenciable en $(0,0)$ porque no existe la derivada parcial con respecto a y en $(0,0)$.*

2. *La función*

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad si\ (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0,$$

no es diferenciable en $(0,0)$. A pesar de que existen todas las derivadas parciales en $(0,0)$, no es continua.

■

Este último ejemplo nos asegura que hemos definido por diferenciable una condición más fuerte que el de la existencia de todas las derivadas parciales. Y esto es importante remarcarlo, la existencia de las derivadas parciales no garantiza la condición de diferenciable.

Ahora, veamos el concepto de vector gradiente. Éste va a ser el vector de $\mathbb{R}^n$ que tenga por coordenadas las componentes de la diferencial.

Definición 2.10. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a, llamaremos* ***gradiente*** *de f en a al vector*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Notar que, como hemos mencionado antes, el operador gradiente podría definirse aunque f no fuera diferenciable, con la sola existencia de las derivadas parciales. Sin embargo, sólo lo utilizaremos cuando f sea diferenciable.

También remarcar que no se debe confundir el gradiente con la diferencial. El gradiente es un elemento de $\mathbb{R}^n$, mientras que la diferencial es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Es decir, si f es diferenciable en a,

$$\nabla f(a) \in \mathbb{R}^n \quad \nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot e_i$$

$$df(a) \in (\mathbb{R}^n)^* \quad df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot e_i^*.$$

Notar que si tenemos un Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $a \in \Omega$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a, entonces si v es una dirección en $\mathbb{R}^n$ tenemos que

$$f_v(a) = df(a)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Definición 2.11. *Supongamos que $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en a. El* ***grafo*** *de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$*

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}.$$

2.2. Diferenciabilidad de funciones vectoriales

Recordemos que dar una función $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ equivale a dar m funciones $f^i\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, m$, donde $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ y calcular un límite para la función f equivale a calcular los m límites para las funciones f^i. Así que, con esto, daremos definiciones similares a las de la sección anterior.

Definición 2.12 (*Derivada direccional*). *Sean Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$, v una dirección en $\mathbb{R}^n$, se dice que f es* ***derivable en*** *a* ***en la dirección*** *v si existe el límite*

$$f_v(a) = \lim_{t=0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Y en caso de existir, este límite se llama ***derivada direccional de*** *f* ***en*** *a**,* ***en la dirección*** *v.*

Proposición 2.13. *Sean Ω abierto en $\mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$, v una dirección en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe $f_v(a)$ si y sólo si existe $(f^i)_v(a)$, con $i = 1, 2, \dots, m$. Y en este caso, $f_v(a) = (f_v^1(a), f_v^2(a), \dots, f_v^m(a))$.*

3. Variedades diferenciables

4. Cálculo en variedades

5. Campos y formas diferenciales