Topología general

Pablo Pallàs

31 de mayo de 2023

Índice

1. Espacios topológicos

1.1. Espacios topológicos

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ el conjunto de sus partes, entonces:

Definición 1.1. *Una **topología** sobre un conjunto X es un subconjunto $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisface:*

I. *El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total X pertenecen a τ.*

II. *La unión arbitraria de elementos de τ también pertenece a τ.*

III. *La intersección finita de elementos de τ también pertenece a τ.*

*El par (X, τ) lo denominaremos **espacio topológico** y a los elementos de τ los llamaremos **abiertos**.*

Es decir, podríamos decir que una topología es una colección de subconjuntos que contiene al vacío y al total, y que es cerrada para las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas.

Ejemplo 1.1.1. *Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_D = \mathcal{P}(X)$. Entonces, τ_D es una topología en X ya que contiene a todos los subconjuntos de X, en particular al vacío y al total, es cerrada para las uniones arbitrarias y para las intersecciones finitas. A esta topología la denominaremos* ***topología discreta****, y al conjunto X dotada de esta topología* ***espacio discreto****.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea X un conjunto arbitrario y $\tau_I = \{\emptyset, X\}$. Entonces la colección τ_I es una topología sobre X: contiene al vacío y al total, la unión de ambos es $X \in \tau_I$ y la intersección es $\emptyset \in \tau_I$. Esta topología la denominaremos* ***topología indiscreta****, y es la topología más simple que puede tener un conjunto. A un conjunto X dotado con esta topología lo denominaremos* ***espacio indiscreto****.*

Definición 1.2. *Dos topologías τ_1, τ_2 sobre un conjunto X se dicen* ***comparables*** *si $\tau_1 \subset \tau_2$ ó $\tau_2 \subset \tau_1$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$ diremos que τ_2 es más* ***fina*** *(tiene más abiertos) que τ_1.*

Intuitivamente podríamos decir que una topología τ' es más fina que otra τ si tiene todos los abiertos de τ y añgunos más. Una topología más fina distingue de forma "más fina" los puntos y sus alrededores. Evidentemente, sobre un conjunto X cualquiera la topología más fina que podemos encontrar es la topología discreta τ_D. Por otra parte, la topología indiscreta τ_I es la menos fina que podemos encontrar. Luego cualquier otra topología τ se encontrará entre estas dos: $\tau_I \subseteq \tau \subseteq \tau_D$.

Notar que si τ_1 y τ_2 son dos topologías sobre X es fácil ver que $\tau_1 \cap \tau_2$ es una topología sobre X. En general, la unión $\tau_1 \cup \tau_2$ no es necesariamente una topología.

Ejemplo 1.2.1. *Consideremos el siguiente conjunto:*

$$\tau_u = \{U \subset \mathbb{R} : \forall x \in U\ \exists \epsilon > 0\ t.q\,(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U\}.$$

Entonces:

1. *$\emptyset \in \tau_u$ trivialmente y $\mathbb{R} \in \tau_u$ ya que si tenemos un $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon = 1$, entonces $(x-1, x+1) \in \mathbb{R}$.*

2. *Dada $\{U_i\}_{i \in J}$ una colección arbitraria de elementos de τ_u entonces, si consideramos un $x \in \cup_i U_i$ existirá un $i_0 \in J$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \in \tau_u$ existirá un $\epsilon > 0$ tal que $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset U_{i_0} \subset \cup_i U_i$ y así $\cup_i U_i \in \tau_u$.*

3. *Sean $U, V \in \tau_u$, $x \in U \cap V$. Como $x \in U$ existirá un $\epsilon_1 > 0$ tal que $(x-\epsilon_1, x+\epsilon_1) \subset U$. Como $x \in V$ existirá un $\epsilon_2 > 0$ tal que $(x-\epsilon_2, x+\epsilon_2) \subset V$. Ahora, si escogemos $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ entonces tendremos:*

   $$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U \subset U \cap V$$

   $$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U \subset U \cap V$$

   y así $U \cap V \in \tau_u$.

Luego τ_u es una topología, que denominaremos ***topología usual****. Al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ lo denominaremos* ***recta real****.*

□

Definición 1.3. *Sea (X,τ) un espacio topológico, un conjunto $\mathfrak{B} \subset \tau$ de abiertos se dice* ***base*** *de τ si todo elemento de τ es unión de elementos de $\mathfrak{B}$. A estos elementos de $\mathfrak{B}$ los denominaremos* ***abiertos básicos****.*

Ejemplo 1.3.1. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *La propia topología τ es base de sí misma.*
2. *Es claro que $\mathfrak{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es base de la topología discreta τ_D sobre X.*
3. *El conjunto de intervalor $\mathfrak{B}_U = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología usual sobre $\mathbb{R}$, τ_U.*

Proposición 1.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico, entonces $\mathfrak{B} \subset \tau$ es una base si y sólo si para todo $U \in \tau$ y todo $x \in U$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

Demostración: Sea $x \in U$, si $\mathfrak{B} = \{B_i : B_i \tau\}$ es una base entonces $U \cup B_i$, por lo que existirá $B_k \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_k \subset U$. Recíprocamente, dado $U \in \tau$, si para todo $x_i \in U$ existe $B_i \in \mathfrak{B}$ tal que $x_i \in B_i \subset U$ entonces es claro que $U = \cup B_i$.

□

Proposición 1.5. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $\mathfrak{B} \subset \tau$ una base, entonces $U \subset X$ es un abierto si y sólo si para todo $x \in U$ existe un $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

Luego:

Corolario 1.5.1. *Sea (X,τ) un espacio topológico y $A \subset X$, entonces A es abierto si y sólo si para todo $x \in A$ existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset A$.*

Sin embargo, no toda familia de partes de un conjunto es una base para una topología. Para identificar a estos conjuntos especiales tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.6. *Sea $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ satisfaciendo:*

1. *Para todo $x \in X$ existe un $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B$.*
2. *Dados $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2$*

Entonces, el conjunto $\tau_{\mathfrak{B}} \subset \mathcal{P}(X)$ definido por $U \in \tau_{\mathfrak{B}}$ si y sólo si para todo $x \in U$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset U$ es una topología sobre X que tiene a $\mathfrak{B}$ como base. Llamaremos a $\tau_{\mathfrak{B}}$ topología generada por $\mathfrak{B}$.

Demostración. Trivialmente se tiene que $\emptyset \in \tau_{\mathfrak{B}}$ y también está claro que $X \in \tau_{\mathfrak{B}}$.

Sea ahora $\{U_i\}_{i\in J} \subset \tau_{\mathfrak{B}}$ y $U = \cup_i U_i$, dado un $x \in U$ entonces $x \in U_k$ para algún $k \in J$ y existirá $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset U_k \subset U$, por lo que $U \in \tau_{\mathfrak{B}}$.

Sean ahora U_1 y $U_2 \in \tau_{\mathfrak{B}}$ y veamos que $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathfrak{B}}$, en efecto, dado $x \in U_1 \cap U_2$ existirán $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ tales que $x \in B_1 \subset U_1$ y $x \in B_2 \subset U_2$, entonces $x \in B_1 \cap B_2$ y así existirá un $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$, por lo que $U_1 \cap U_2 \in \tau_{\mathfrak{B}}$.

Por inducción finita se sigue para cualquier subfamilia finita $\{U_1, \ldots U_n\} \subset \tau_{\mathfrak{B}}$. Se concluye así que $\tau_{\mathfrak{B}}$ es una topología sobre X con base $\mathfrak{B}$.

□

Proposición 1.7. *Sean $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ bases de sendas topologías τ_1 y τ_2 sobre un conjunto X, entonces τ_2 es más fina que τ_1, es decir, $\tau_1 \subset \tau_2$ si y sólo si para todo $x \in X$ y todo $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tal que $x \in B_1$ existe $B_2 \in \mathfrak{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$.*

Demostración. Supongamos que $\tau_1 \subset \tau_2$, dado $x \in X$ y $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tal que $x \in B_1$, en particular $B_1 \in \tau_1$ y por tanto $B_1 \in \tau_2$, entonces existe $B_2 \in \mathfrak{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$.

Recíprocamente, si $U \in \tau_1$ existirá $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ tal que $x \in B_1 \subset U$ y como existe $B_2 \in \mathfrak{B}_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$ se tiene entonces que $x \in B_2 \subset U$ y por tanto se sigue que $U \in \tau_2$.

□

Ejemplo 1.7.1. *La familia $\mathfrak{B}_S$ de los intervalos semiabiertos de la forma $[a, b)$ satisfacen las condiciones de , luego forman base de una topología τ_S sobre $\mathbb{R}$. Al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ ó simplemente $\mathbb{R}_S$ se le conoce como **recta de Sorgenfrey**.*

Notar que para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo intervalo (a, b) tal que $x \in (a, b)$ está claro que $x \in [x, b) \subset (a, b)$, por lo que $\tau_U \subset \tau_S$, y como $[a, b) \notin \tau_U$ se sigue que la topología de Sorgenfrey es estrictamente más fina que la usual.

■

Definición 1.8.

2. Aplicaciones continuas y homeomorfismos

3. Separación y numerabilidad

4. Espacios métricos

5. Compacidad

6. Conexión