El grupo $SU(2)$ como grupo de Lie y Visión Física

Omar Corona Tejeda

omarct1989@ciencias.unam.mx

08 de Diciembre del 2025

Abstract

Este trabajo presenta un estudio detallado del grupo unitario especial $SU(2)$ desde perspectivas matemática y física. Se define $SU(2)$ como un grupo de Lie, se muestra su parametrización real y su difeomorfismo con la 3-esfera S^3. Se derivan los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ usando coordenadas locales, evidenciando su relación con las matrices de Pauli. Se introduce el mapeo exponencial en el contexto general de los grupos de Lie y se ejemplifica en $SU(2)$, incluyendo la construcción de campos vectoriales invariantes por izquierda y su papel en reproducir la estructura algebraica. Finalmente, se discute la interpretación física, mostrando cómo los generadores matemáticos se corresponden con observables medibles al usar matrices hermíticas con el factor convencional $-i$ en el exponencial. Este análisis conecta la formalización matemática con su aplicación en mecánica cuántica, particularmente en la descripción del espín y otros grados de libertad intrínsecos.

1 El Grupo $SU(2)$ como grupo de Lie

El grupo especial unitario de grado dos se define como

$$SU(2) \;=\; \left\{\, U \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, U^\dagger U = I,\; \det U = 1 \,\right\}. \tag{1}$$

1.0.1 Operaciones de grupo

La multiplicación de matrices

$$\mu : SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SU(2), \qquad \mu(U, V) = UV, \tag{2}$$

y la inversión

$$\iota : SU(2) \longrightarrow SU(2), \qquad \iota(U) = U^{-1} = U^\dagger, \tag{3}$$

son aplicaciones C^∞, de modo que $SU(2)$ es simultáneamente un grupo y una variedad diferenciable.

1.0.2 Parametrización real

Todo elemento $U \in SU(2)$ puede escribirse como

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{4}$$

Proof. Sea

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

1. De $U^\dagger U = I$ a las ecuaciones Calculamos

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{a}a + \overline{c}c & \overline{a}b + \overline{c}d \\ \overline{b}a + \overline{d}c & \overline{b}b + \overline{d}d \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Imponiendo $U^\dagger U = I$ obtenemos las igualdades de las entradas:

$$\boxed{|a|^2 + |c|^2 = 1}, \qquad \boxed{|b|^2 + |d|^2 = 1}, \qquad \boxed{\overline{a}b + \overline{c}d = 0}. \tag{8}$$

2. Forma de la segunda columna En $\mathbb{C}^2$ el subespacio ortogonal a $\vec{v_1} = (a, c)^T$ es de dimensión 1. Consideremos el vector

$$\vec{w} := (-\overline{c},\ \overline{a})^T. \tag{9}$$

Comprobamos que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v_1}$:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle = \overline{a}(-\overline{c}) + \overline{c}(\overline{a}) \tag{10}$$

$$= -\overline{ac} + \overline{ca} = 0. \tag{11}$$

Además $\|\vec{w}\|^2 = |c|^2 + |a|^2 = \|\vec{v_1}\|^2$. Por tanto, todo vector $\vec{v}_2$ que sea ortogonal a $\vec{v}_1$ y tenga la misma norma se escribe como

$$\vec{v}_2 = e^{i\theta}\,\vec{w} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\overline{c} \\ \overline{a} \end{pmatrix}, \qquad \text{para algún } \theta \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Es decir,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\overline{c} \\ \overline{a} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

3. Imposición de $\det U = 1$ Calculemos el determinante con la forma anterior:

$$\det U = ad - bc = a\big(e^{i\theta}\overline{a}\big) - \big(e^{i\theta}(-\overline{c})\big)c = e^{i\theta}\big(|a|^2 + |c|^2\big). \tag{14}$$

Por la primera ecuación $|a|^2 + |c|^2 = 1$, luego

$$\det U = e^{i\theta}. \tag{15}$$

Imponiendo $\det U = 1$ se obtiene $e^{i\theta} = 1$. Así

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{c} \\ \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

es decir $b = -\bar{c}$ y $d = \bar{a}$. Renombrando $\alpha := a$, $\beta := b$, queda

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{17}$$

4. Comprobación inversa Si tomamos

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{18}$$

entonces

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{pmatrix}, \tag{19}$$

y

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}\alpha + (-\beta)(-\overline{\beta}) & \overline{\alpha}\beta + (-\beta)\overline{\alpha} \\ \overline{\beta}\alpha + \alpha(-\overline{\beta}) & \overline{\beta}\beta + \alpha\overline{\alpha} \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 & 0 \\ 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$= I \tag{22}$$

por la hipótesis $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Además

$$\det U = \alpha\overline{\alpha} - \beta(-\overline{\beta}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \tag{23}$$

Conclusión Hemos probado que las condiciones $U^\dagger U = I$ y $\det U = 1$ son equivalentes a que U tenga la forma

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{24}$$

y viceversa. Identificando $\alpha = x_0 + ix_3$, $\beta = x_2 + ix_1$ obtenemos la identificación diferenciable $SU(2) \cong S^3 \subset \mathbb{R}^4$. □

Sea

$$\alpha = x_0 + ix_3, \qquad \beta = x_2 + ix_1, \tag{25}$$

con $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. La condición de determinante unitario se convierte en

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{26}$$

Por tanto,

$$U(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \qquad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4. \tag{27}$$

Esta parametrización exhibe explícitamente a $SU(2)$ como una variedad de dimensión 3, difeomorfa a S^3, y muestra cómo las operaciones de grupo son suaves en las coordenadas reales.

1.0.3 Generadores de $\mathfrak{su}(2)$

Sea la parametrización[1] de $SU(2)$:

$$U(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_2 + ix_1 \\ -x_2 + ix_1 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}, \quad (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3. \tag{33}$$

[1]Aunque la parametrización de $SU(2)$ utiliza cuatro números reales (x_0, x_1, x_2, x_3), estos no son independientes, ya que deben cumplir la restricción

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{28}$$

Esta ecuación impone una *restricción geométrica* que reduce el número efectivo de coordenadas independientes de cuatro a tres. En términos de geometría diferencial, podemos decir que la parametrización inicial es *redundante* y que la relación cuadrática define una *superficie de restricción* dentro del espacio $\mathbb{R}^4$, concretamente la 3-esfera S^3. Por lo tanto, aunque la matriz de $SU(2)$ se exprese en cuatro parámetros, el grupo propiamente dicho es una *variedad de dimensión 3*, y su álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$, que corresponde al espacio tangente en la identidad, también es de dimensión 3.

Una *parametrización efectiva*, que utilice únicamente tres parámetros independientes para describir todo el grupo, se puede lograr de varias formas:

1. **Ángulos de Euler:** Se definen tres ángulos (θ, ϕ, ψ) y se expresa

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi+\psi}{2}, \\ x_1 &= \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi-\psi}{2}, \\ x_2 &= \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi-\psi}{2}, \\ x_3 &= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi+\psi}{2}, \end{aligned} \tag{29}$$

   con $\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi), \psi \in [0, 4\pi)$.

2. **Eje y ángulo de rotación:** Se usa un ángulo de rotación θ y un vector unitario $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, de manera que

$$g = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\,(n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3), \quad |\mathbf{n}| = 1. \tag{30}$$

   Aquí el ángulo θ aporta un parámetro y el vector unitario $\mathbf{n}$ dos parámetros independientes, sumando tres en total.

Estas parametrizaciones efectivas eliminan la redundancia de la parametrización original y describen suavemente todo el grupo $SU(2)$.

por otro lado, es posible, al menos localmente, resolver la restricción

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{31}$$

para una de las variables, por ejemplo

$$x_3 = \pm\sqrt{1 - x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}, \tag{32}$$

y reescribir la matriz de $SU(2)$ únicamente en función de (x_0, x_1, x_2). De este modo se obtiene una carta local con tres parámetros independientes, lo que permite calcular las derivadas parciales respecto a x_0, x_1, x_2 de manera explícita. Al hacerlo, los tres vectores tangentes resultantes generan directamente el álgebra $\mathfrak{su}(2)$ y, como es de esperarse, las matrices correspondientes son de traza cero. Esta parametrización, sin embargo, es sólo local: requiere elegir el signo de la raíz y no cubre de forma global todo el grupo.

Los generadores del álgebra de Lie se obtienen como derivadas parciales evaluadas en la identidad, que corresponde a $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0, 0)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \tag{34}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1, \tag{35}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \tag{36}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3. \tag{37}$$

donde σ_j son las matrices de Pauli[2]

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Aunque derivamos respecto a 4 variables, notemos que $\frac{\partial U}{\partial x_0} = I$ es la identidad y, por lo tanto, no es un generador de $\mathfrak{su}(2)$, ya que los generadores deben ser de traza cero[3]

.

Por lo tanto, un conjunto de generadores linealmente independientes de $\mathfrak{su}(2)$ es

$$\{\, i\sigma_1,\ i\sigma_2,\ i\sigma_3 \,\}. \tag{39}$$

Esto muestra que la dimensión de la álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ es 3.

Álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

El espacio tangente en la identidad es

$$\mathfrak{su}(2) := T_I SU(2) = \left\{ X \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; X^\dagger = -X,\ \operatorname{tr} X = 0 \right\}. \tag{40}$$

ya que sea un elemento $U \in SU(2)$, entonces satisface

$$U^\dagger U = I. \tag{41}$$

[2]Las matrices de Pauli fueron introducidas por el físico Wolfgang Pauli en 1927 para describir el espín de las partículas de espín-1/2. Forman una base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ y cumplen la relación de conmutación $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$.

[3]Los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ deben ser matrices de traza cero porque $\mathfrak{su}(2)$ está definida como el conjunto de matrices 2×2 complejas X que son antihermíticas ($X^\dagger = -X$) y de traza cero ($\mathrm{Tr}(X) = 0$). La condición de traza cero asegura que los exponentes e^X generen matrices unitarias con determinante uno, es decir, que pertenezcan al grupo $SU(2)$. Si $\mathrm{Tr}(X) \neq 0$, entonces $\det(e^X) = e^{\mathrm{Tr}(X)} \neq 1$, y por lo tanto la matriz no estaría en $SU(2)$. Además, la dimensión del espacio vectorial de la álgebra de Lie es 3, y una base comúnmente usada está dada por $T_j = \frac{i}{2}\sigma_j$, donde las matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son hermíticas, de traza cero, y multiplicadas por i se convierten en los generadores antihermíticos de $\mathfrak{su}(2)$. Las matrices de Pauli puras son *hermíticas* y, por tanto, no pertenecen directamente a $\mathfrak{su}(2)$, que exige matrices *antihermíticas* y de traza cero. Sin embargo, los generadores físicos suelen escribirse como $U(\theta) = e^{\,i\theta^k \sigma_k/2}$, donde el factor i en el exponente garantiza que $i\sigma_k/2 \in \mathfrak{su}(2)$.

Si escribimos U cercano a la identidad usando el mapa exponencial

$$U = e^X, \quad X \in \mathfrak{su}(2), \tag{42}$$

entonces debemos tener

$$U^\dagger U = e^{X^\dagger} e^X = I \quad \Longrightarrow \quad e^{X^\dagger + X} = I. \tag{43}$$

Para matrices pequeñas X, esto implica

$$X^\dagger + X = 0 \quad \Longrightarrow \quad X^\dagger = -X, \tag{44}$$

es decir, los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ son anti-hermíticos.

Una base conveniente es

$$T_j := \frac{i}{2}\sigma_j, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{45}$$

ya que en física es habitual elegir como base del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ las matrices

$$T_j = \frac{i}{2}\sigma_j, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{46}$$

ya que esta convención presenta varias ventajas. Primero, las matrices de Pauli σ_j son hermíticas y de traza cero, por lo que al multiplicarlas por i se vuelven antihermíticas, garantizando que las exponentiales $e^{\theta^j T_j}$ sean unitarias sin introducir signos adicionales. Segundo, la normalización por $1/2$ simplifica los corchetes de conmutación, obteniéndose

$$[T_a, T_b] = \varepsilon_{abc} T_c, \tag{47}$$

con las constantes de estructura dadas directamente por el símbolo de Levi-Civita. Finalmente, esta elección es coherente con la mecánica cuántica y las teorías gauge: los operadores de espín se escriben como $S_j = \hbar T_j$ y en el modelo electrodébil los campos de gauge W_μ^j se acoplan exactamente con esta misma normalización.

1.1 El mapeo exponencial en grupos de Lie G

Sea G un *grupo de Lie* con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$, el espacio tangente en la identidad $e \in G$. El *mapeo exponencial* es una aplicación suave

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G \tag{48}$$

que asigna a un vector tangente $X \in \mathfrak{g}$ el elemento de G obtenido como el flujo en $t = 1$ del *campo vectorial invariante por izquierda* generado por X.

1.1.1 Campos invariantes por izquierda

Decimos que X es **invariante a la izquierda** si, para todo $g, h \in G$,

$$(L_h)_* X_g = X_{hg},$$

donde $L_h : G \to G$ es la *translación a la izquierda* definida por $L_h(g) = hg$ y $(L_h)_*$ es su diferencial.

Ejemplo 1. *Consideremos el grupo aditivo $G = \mathbb{R}$. La translación a la izquierda es $L_a(x) = a + x$. El campo vectorial constante*

$$X(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

es invariante a la izquierda, ya que

$$(L_a)_* X(x) = X(x + a) = 1 = X_{a+x}.$$

□

Otro ejemoplo más elaborado es el siguiente:

Ejemplo 2. *Sea $G = \mathrm{SO}(3)$, el grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$. Cada elemento $R \in SO(3)$ puede interpretarse como una matriz de rotación, y la translación a la izquierda es*

$$L_S(R) = SR, \quad S, R \in SO(3).$$

Consideremos el vector X definido por su valor en la identidad $I \in SO(3)$ como

$$X_I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_I SO(3).$$

Sea $R \in SO(3)$. El campo invariante a la izquierda generado por X_I es

$$X_R := (L_R)_* X_I = R X_I, \quad \forall R \in SO(3),$$

es decir, en cada punto R del grupo, el vector tangente se obtiene multiplicando X_I por R.

Este campo representa una rotación infinitesimal alrededor del eje z que se transporta a todos los puntos de $SO(3)$ de manera coherente con la estructura de grupo.

□

Dado $X \in \mathfrak{g}$, definimos el campo vectorial invariante por izquierda X^L en G mediante

$$X^L(g) := (L_g)_* X, \tag{49}$$

donde $L_g : G \to G$ es la multiplicación por la izquierda $L_g(h) = gh$ y $(L_g)_*$ es su diferencial (pushforward)

$$(L_g)_* : T_h G \to T_{gh} G. \tag{50}$$

Intuitivamente, esto significa que el vector $X \in T_e G$ se "transporta" a $T_g G$ a través de la multiplicación a la izquierda. De manera equivalente, $X^L(g)$ puede verse como la derivada en $t = 0$ de la curva

$$\gamma_g(t) := g \exp(tX), \tag{51}$$

es decir,

$$X^L(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g \exp(tX). \tag{52}$$

Esta interpretación hace evidente que la curva integral de X^L que pasa por g es $\gamma_g(t)$.

Una propiedad fundamental es la *invarianza por izquierda*:

$$(L_h)_* X^L(g) = X^L(hg), \quad \forall h, g \in G. \tag{53}$$

1.1.2 Definición del mapeo exponencial

Sea $\gamma(t)$ la curva integral única de X^L que pasa por la identidad:

$$\gamma(0) = e, \quad \dot{\gamma}(t) = X^L(\gamma(t)). \tag{54}$$

Se define entonces

$$\exp(X) := \gamma(1). \tag{55}$$

1.1.3 Propiedades

El mapeo exponencial cumple las siguientes propiedades:

1. $\exp(0) = e$.
2. $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX) = X$.
3. exp es un difeomorfismo local cerca de $0 \in \mathfrak{g}$ hacia una vecindad de $e \in G$.
4. Para grupos de Lie matriciales $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, el mapeo exponencial coincide con la *exponencial de matrices*:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{56}$$

1.1.4 Ejemplo en $SU(2)$

Tomemos un generador de $\mathfrak{su}(2)$

$$T_3 = \frac{i}{2}\sigma_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Como $T_3^2 = -\frac{1}{4}I$, la serie exponencial se suma exactamente:

$$\exp(tT_3) = \cos\left(\tfrac{t}{2}\right) I + 2T_3 \sin\left(\tfrac{t}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}t} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

1.2 Curvas integrales y pushforward

Sea $x \in G$ y escribamos $x = hU$ para algún $h, U \in G$. Entonces, aplicando la definición de X^L y la propiedad de invarianza por izquierda, se tiene

$$(L_h)_* X^L(U) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h\, U \, \exp(tX) = X^L(hU) = X^L(x), \tag{59}$$

lo que muestra cómo el pushforward transporta el vector tangente de U a $x = hU$ de manera natural usando la curva $U \exp(tX)$.

Este es un elemento genérico de $SU(2)$ que describe una rotación alrededor del eje 3.

Los campos invariantes por izquierda son fundamentales porque permiten identificar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con el espacio de campos vectoriales en G que codifican la estructura del grupo. A través de ellos, el corchete de Lie se traduce directamente en el conmutador de campos vectoriales:

$$[X^L, Y^L] = [X, Y]^L. \tag{60}$$

lo cual hace posible estudiar la geometría y la dinámica en el grupo usando sólo información local en la identidad. En particular, generan los flujos de traslación izquierda y sirven como base natural para definir derivadas covariantes, conexiones y formas de Maurer–Cartan[4] .

Ejemplo Tomemos por ejemplo $X = T_3 = \frac{i}{2}\sigma_3$. Dado un elemento genérico

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{61}$$

la curva utilizada para definir X^L es

$$\gamma(t) = U \exp\left(t \frac{i}{2}\sigma_3\right) = U \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}t} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Derivando en $t = 0$ obtenemos

$$X^L(U) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} U \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}t} \end{pmatrix} = U \left(\frac{i}{2}\sigma_3\right). \tag{63}$$

Es decir, el campo invariante por izquierda asociado a T_3 en el punto U es simplemente

$$X^L(U) = U\, T_3, \tag{64}$$

lo cual es coherente con la definición general.

De manera análoga, para T_1 o T_2 basta sustituir la matriz correspondiente. Los tres campos $\{T_1^L, T_2^L, T_3^L\}$ satisfacen las relaciones de conmutación

$$[T_i^L, T_j^L] = \varepsilon_{ijk}\, T_k^L, \tag{65}$$

heredando así la estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$.

1.3 Perspectiva física y conclusión

En física, el grupo $SU(2)$ aparece de manera natural al describir espín, isospín y otros grados de libertad cuánticos.

Por definición, los elementos de $\mathfrak{su}(2)$ son matrices *antihermíticas* y de traza cero. Sin embargo, en física resulta más conveniente trabajar con matrices *hermíticas*, ya que corresponden a

[4]Las formas de Maurer–Cartan son 1-formas diferenciales definidas en un grupo de Lie G que codifican la estructura de la álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada. En particular, la forma de Maurer–Cartan izquierda θ^L satisface la ecuación de Maurer–Cartan $d\theta^L + \frac{1}{2}[\theta^L, \theta^L] = 0$, lo que permite relacionar la geometría del grupo con la estructura algebraica de $\mathfrak{g}$. Estas formas son fundamentales en la teoría de conexiones, integrabilidad y en la construcción de lagrangianos invarianes en física teórica.

observables. La clave para conciliar ambas descripciones es modificar el mapeo exponencial con un factor $-i$:

$$U(\theta) = \exp\left[-\, i\, \theta^k H_k\right], \tag{66}$$

donde los H_k son matrices hermíticas. De esta manera, los generadores matemáticos de la álgebra son $-iH_k \in \mathfrak{su}(2)$, pero podemos pensar directamente en los H_k como los *generadores físicos*, es decir, los observables que se pueden medir.

Un ejemplo paradigmático son las matrices de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Aunque no son antihermíticas, al escribir

$$U(\theta) = \exp\left[-\, i \tfrac{\theta^k \sigma_k}{2}\right] \tag{67}$$

queda claro que el álgebra está generada por $-i\sigma_k/2$, mientras que las σ_k mismas se interpretan como los operadores de espín medibles. Este razonamiento se generaliza: *cualquier matriz hermítica de traza cero puede servir como generador físico si se incluye el factor $-i$ en el mapeo exponencial.*

La elección del signo negativo en el exponente se alinea con la convención estándar en mecánica cuántica para la evolución temporal,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\, iHt/\hbar}\, |\psi(0)\rangle\,, \tag{68}$$

donde H es el Hamiltoniano. En este contexto, las matrices hermíticas actúan como generadores de rotaciones y de la evolución temporal, manteniendo la consistencia con la estructura matemática del grupo de Lie.

En conclusión, la diferencia entre la definición matemática y el uso físico se resuelve modificando el mapeo exponencial con un factor imaginario. Esto permite tratar directamente a las matrices hermíticas—los observables—como generadores físicos, conservando la coherencia con la estructura algebraica de $SU(2)$ y de manera más general, de cualquier grupo de Lie compacto.