Formulación Matemática de las Imagenes de Heisenberg, Schrödinger y Dirac

Omar Corona Tejeda

omarct1989@ciencias.unam.mx

31 de Enero del 2026

Abstract

Se revisará la formulación matemática de las Imagenes de Schrödinger, Heisenberg y Dirac así como las pruebas de los teoremas necesarios para dicha formulación. Se enfatiza el uso de operadores de evolución temporal $\hat{U}(t)$ así como el hecho de que si el hamiltoniano $\hat{H}$ es independiente del tiempo entonces la evolución temporal de un estado $|\psi\rangle$ sólo depende de la diferencia relativa de los tiempos. En el caso del operador de evolución temporal de interacción $\hat{U}_I(t,t)$ esta condición no se satisface i.e. el hamiltoniano de interacción $H_I'(t)$ depende explícitamente del tiempo por lo que la teoría no es invariante bajo traslaciones temporales. Se presentan ejercicios que completan el texto.

1 Imagen de Schrödinger, Heisenberg y Dirac

1.1 Operador de Evolución Temporal

Consideremos un sistema cuántico definido por el hamiltoniano $\hat{H}$ independiente del tiempo. i.e. $\hat{H} \neq \hat{H}(t)$. Definimos el *operador de evolución temporal*[1] como el operador unitario definido por

$$\hat{U}(t) := e^{-it\hat{H}} \tag{1}$$

Este operador define la *dinámica de los estados cuánticos*[2] i.e.

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{2}$$

donde $|\psi(0)\rangle$ representa el estado cuántico inicial.

Dicho operador puede ser deducido directamente de la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{3}$$

[1] En todo este capitulo consideraremos la constante de Planck reducidad $\hbar \equiv 1$ por simplicidad.

[2] La *dinámica de los estados cuánticos* se refiere a la evolución temporal de los estados en un sistema cuántico, la cual está gobernada por la ecuación de Schrödinger y, de manera equivalente, por el operador de evolución temporal asociado al Hamiltoniano del sistema.

1.1.1 Deducción del Operador de Evolución Temporal

De la ecuación de Schrödinger (3) y la propiedad fundamental del operador de evolución temporal (2) tenemos:

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = i\partial_t(\hat{U}(t))|\psi(0)\rangle = \hat{H}\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{4}$$

$$i\partial_t\hat{U}|\psi(0)\rangle + \underbrace{i\hat{U}(t)\partial_t|\psi(0)\rangle}_{\equiv 0} = \hat{H}\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{5}$$

i.e.

$$i\partial_t\hat{U}|\psi(0)\rangle = \hat{H}\hat{U}(t)|\psi(0)\rangle \tag{6}$$

puesto que $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$ representa cualquier ket independiente del tiempo (estado inicial).

$$\boxed{i\partial_t\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t)} \tag{7}$$

De esta forma integrando la ecuación anterior y recordando que el hamiltoniano $\hat{H}$ es independiente del tiempo tenemos

$$\int_0^t i\partial_t\hat{U}(t_1)dt_1 = \int_0^t \hat{H}\hat{U}(t_1)dt_1 = \hat{H}\int_0^t \hat{U}(t_1)dt_1 \tag{8}$$

i.e.

$$i(\hat{U}(t) - \underbrace{\hat{U}(0)}_{\equiv 1}) = \hat{H}\int_0^t \hat{U}(t_1)dt_1 \tag{9}$$

$$i\hat{U}(t) = i + \hat{H}\int_0^t \hat{U}(t_1)dt_1 \tag{10}$$

finalmente tenemos

$$\boxed{\hat{U}(t) = 1 - i\hat{H}\int_0^t \hat{U}(t_1)dt_1} \tag{11}$$

La relación anterior se encuentra *"mal definida"* debido a que justamente lo que queremos encontrar que es el operador $\hat{U}(t)$ lo estamos expresando en términos de una integral del mismo operador. Pero esta relación nos permite *reiterar* el método. Así tenemos:

$$\hat{U}(t) = 1 - i\hat{H}t + (-i)^2\hat{H}^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2 + (-i)^3\hat{H}^3\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\int_0^{t_2} dt_3 + ... \tag{12}$$

integrando obtenemos

$$\boxed{\hat{U}(t) = 1 - i\hat{H}t + \frac{(-i)^2\hat{H}^2}{2!}t^2 + \frac{(-i)^3\hat{H}}{3!}t^3 + ...} \tag{13}$$

es decir

$$\boxed{\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}}} \tag{14}$$

que representa el *operador de evolución temporal en la teoría de Schrödinger para un hamiltoniano independiente del tiempo* $\hat{H}$.

1.2 Imagen de Heisenberg

En la sección anterior revisamos lo que es el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ para un sistema cuántico definido por el hamiltoniano $\hat{H}$. En lo subsecuente consideremos un operador $\hat{A}$ independiente del tiempo arbitrario. Usando el operador de evolución temporal tenemos lo siguiente:

$$\boxed{\langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)| \underbrace{e^{it\hat{H}}\,\hat{A}\,e^{-it\hat{H}}}_{\substack{:=\hat{A}(t) \\ \text{Imagen de Heisenberg}}} |\psi(0)\rangle} \tag{15}$$

El operador $\hat{A}(t) := e^{it\hat{H}}\,\hat{A}\,e^{-it\hat{H}}$ recibe el nombre de *Imagen de Heisenberg del operador $\hat{A}$.* El operador $\hat{A}(t)$ es un operador que depende explicitamente del tiempo y representa la evolución temporal del operador $\hat{A}$. Es posible utilizar la siguiente identidad para obtener una expresión del operador $\hat{A}(t)$.

Proposition 1 (Baker–Campbell–Hausdorff formula)**.** *Sean $\hat{A}, \hat{B}$ operadores entonces*

$$\boxed{e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}]x + \frac{1}{2!}[\hat{A},[A,\hat{B}]]x^2 + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]]x^3 + ...} \tag{16}$$

Proof. Sea $F(x) := e^{x\hat{A}}Be^{-x\hat{A}}$, entonces mediante la expansión por medio de la serie de Taylor obtenemos:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + .. \tag{17}$$

por otro lado

$$F(0) = \hat{B} \tag{18}$$

y usando la regla del producto para derivación obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{x\hat{A}}\hat{A}\hat{B}e^{-x\hat{A}} + e^{x\hat{A}}\hat{B}(-\hat{A})e^{-x\hat{A}} \\ &= e^{x\hat{A}}\hat{A}\hat{B}e^{-x\hat{A}} - e^{x\hat{A}}\hat{B}\hat{A}e^{-x\hat{A}} \\ &= e^{x\hat{A}}[\hat{A},\hat{B}]e^{-x\hat{A}} \end{aligned} \tag{19}$$

Así $F'(0) = [\hat{A},\hat{B}]$.

La expresión (19) puede interpretarse de la siguiente forma: Si $F(x) := e^{x\hat{A}}\hat{(algo)}e^{-x\hat{A}}$ entonces $F'(x) = e^{x\hat{A}}[\hat{A},(algo)]e^{-x\hat{A}}$. De esta forma aplicando esta idea a la expresión previa de $F'(x) = e^{x\hat{A}}[\hat{A},\hat{B}]e^{-x\hat{A}}$ donde $algo = [\hat{A},\hat{B}]$ obtenemos:

$$F''(x) = e^{x\hat{A}}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]e^{-x\hat{A}} \tag{20}$$

$$F''(0) = [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] \tag{21}$$

$$F'''(x) = e^{x\hat{A}}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]]e^{-x\hat{A}} \tag{22}$$

$$F'''(0) = [\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] \tag{23}$$

$$...$$

por lo que usando su expresión en serie de Taylor obtenemos:

$$F(x) = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}]x + \frac{1}{2!}[\hat{A},[A,\hat{B}]]x^2 + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]]x^3 + ... \tag{24}$$

□ □

Consideremos un ejemplo de todo lo anterior.

Ejemplo 1 (Oscilador Armónico Cuántico)**.** *Consideremos el sistema dado por el oscilador harmónico cuántico i.e. aquel cuyo hamiltoniano viene descrito por:*

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \tag{25}$$

el operador $\hat{x}$ puede ser expresado en términos de los operadores de creación y destrucción de energía $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ respectivamente como:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \tag{26}$$

y recordemos que las reglas de conmutación para estos operadores son:

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\omega a \tag{27}$$

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega a^\dagger \tag{28}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{29}$$

En este caso el operador $\hat{A} = \hat{H}$ y $\hat{B} = \hat{x}$. Así tenemos

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{x}] &= \left[\omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \sqrt{\frac{1}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\right] \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left([\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger]\right) \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}]}_{\equiv 0} + \underbrace{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]}_{\equiv -1}\hat{a} + \hat{a}^\dagger \underbrace{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]}_{\equiv 1} + \underbrace{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]}_{\equiv 0}\hat{a}\right) \\
&= \frac{\omega}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \\
&= \sqrt{\frac{\omega}{2m}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})
\end{aligned} \tag{30}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{x}]] &= \left[\hat{H}, \sqrt{\frac{\omega}{2m}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\right] \\
&= \sqrt{\frac{\omega}{2m}}\left([\hat{H}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{H}, \hat{a}]\right) \\
&= \sqrt{\frac{\omega}{2m}}(\omega \hat{a}^\dagger + \omega \hat{a}) \\
&= \sqrt{\frac{\omega}{2m}}\omega(\hat{a}^\dagger + \hat{a})
\end{aligned} \tag{31}$$

un cálculo semejante muestra que:

$$[\hat{H}, [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{x}]]] = \sqrt{\frac{\omega}{2m}}\omega^2(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{32}$$

De esta forma observamos el patrón de repetición para potencias pares e impares. Por lo que la Imagen de Heisenberg del operador $\hat{x}$ i.e. $\hat{x}(t)$ viene dada por:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \hat{x} + \sqrt{\frac{\omega}{2m}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})it + \frac{1}{2!}\sqrt{\frac{\omega}{2m}}\omega(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(it)^2 + \frac{1}{3!}\sqrt{\frac{\omega}{2m}}\omega^2(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(it)^3 + ... \\ &= \hat{x} + \frac{\omega}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})it + \frac{1}{2!}\frac{\omega^2}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})(it)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\omega^3}{\sqrt{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})(it)^3 + ... \qquad (33)\end{aligned}$$

usando (26) tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left((\hat{a} + \hat{a}^\dagger) + (\hat{a}^\dagger - \hat{a})(it\omega) + (\hat{a}^\dagger + \hat{a})\frac{(i\omega t)^2}{2!} + (\hat{a}^\dagger - \hat{a})(it\omega)^3 + ...\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left[(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\left(1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - ...\right) + i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})\left(\omega - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!}...\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left((\hat{a} + \hat{a}^\dagger)cos(\omega t) + i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})sin(\omega t)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(\hat{a}(\underbrace{cos(\omega t) - isin(\omega t)}_{\equiv e^{-\omega t}}) + \hat{a}^\dagger(\underbrace{cos(\omega t) + isin(\omega t)}_{\equiv e^{\omega t}})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(\hat{a}e^{-\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{\omega t}\right) \qquad (34)\end{aligned}$$

es decir:

$$\boxed{\hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(\hat{a}e^{-\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{\omega t}\right)} \qquad (35)$$

A partir de la expresión (35) no es difícil probar que

$$\boxed{\langle 0|\hat{x}(t)|0\rangle = 0} \qquad (36)$$

i.e. que el *promedio de la posición a lo largo del tiempo es cero.*

Ejercicio 1.1. *Prueba la ecuación anterior.*

1.3 Imagen de Dirac o Interacción

En la imagen de interacción o de Dirac se da por hecho que el hamiltoniano se descompone de la siguiente forma

$$\boxed{\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'} \qquad (37)$$

Donde H' es conocida como una pequeña *perturbación*. A partir de la ecuación de Schrödinger

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \qquad (38)$$

queremos deducir una nueva ecuación donde sólo aparezca el término perturbativo H'. Es por esta razón que los estados ya no serán los *estados originales* si no los *estados de interacción*:

$$\boxed{i\partial_t|\psi_I(t)\rangle = \hat{H}'_I|\psi_I(t)\rangle} \qquad (39)$$

$\hat{H}'_I$ debe de ser expresado en términos de la interracción $\hat{H}'$ i.e. $\hat{H}'_I = f(\hat{H}')$ para alguna función f. ψ_I esta relacionado con ψ por medio de una transformación unitaria $\hat{W}(t)$ que en principio puede depender del tiempo, es decir:

$$\boxed{|\psi_I(t)\rangle = \hat{W}(t)|\psi(t)\rangle} \tag{40}$$

con

$$\boxed{\hat{W}^\dagger(t)\hat{W}(t) = 1} \tag{41}$$

de esta forma tenemos que la ecuación (39) toma la forma

$$\boxed{i\partial_t(\hat{W}(t)|\psi(t)\rangle) = \hat{H}'_I\hat{W}(t)|\psi(t)\rangle} \tag{42}$$

desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} (i\partial_t\hat{W}(t))|\psi(t)\rangle + \hat{W}(t)i\partial_t|\psi(t)\rangle &= \hat{H}'_I\hat{W}(t)\psi(t)\rangle \\ (i\partial_t\hat{W}(t))|\psi(t)\rangle + \hat{W}\hat{H}|\psi(t)\rangle &= \hat{H}'_I\hat{W}(t)\psi(t)\rangle \end{aligned} \tag{43}$$

es decir

$$\boxed{i\partial_t\hat{W}(t) + \hat{W}(t)\hat{H} = \hat{H}'_I\hat{W}(t)} \tag{44}$$

Para continuar necesitaremos el siguiente teorema:

Theorem 1.1. *Un operador $\hat{W}$ es unitario si y solo si existe un operador autoadjunto $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ tal que*

$$\hat{W} = e^{i\hat{B}}. \tag{45}$$

Proof. ($\Rightarrow$) Supóngase que $\hat{W}$ es un operador unitario, es decir

$$\hat{W}^\dagger\hat{W} = \hat{W}\hat{W}^\dagger = 1. \tag{46}$$

Paso 1: Espectro de un operador unitario. Como $\hat{W}$ es unitario, su espectro[3] $\sigma(\hat{W})$ está contenido en el círculo unitario complejo:

$$\sigma(\hat{W}) \subset S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \tag{48}$$

[3]

Definición 1.1 (Espectro de un operador)**.** *Sea $\hat{A}$ un operador lineal acotado definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. El* espectro *de $\hat{A}$, denotado por $\sigma(\hat{A})$, se define como*

$$\sigma(\hat{A}) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \hat{A} - \lambda\mathbb{I} \text{ no es un operador lineal acotado invertible.}\right\}. \tag{47}$$

Aquí, decir que $\hat{A} - \lambda\mathbb{I}$ es invertible significa que existe un operador inverso $(\hat{A} - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ definido en todo $\mathcal{H}$, lineal y acotado.

Por tanto, todo autovalor $\lambda \in \sigma(\hat{W})$ puede escribirse como

$$\lambda = e^{i\theta}, \qquad \theta \in (-\pi, \pi]. \tag{49}$$

Paso 2: Teorema espectral para operadores unitarios. Por el teorema espectral[4] , existe una medida espectral proyectiva E_θ definida sobre $(-\pi, \pi]$ tal que

$$\hat{W} = \int_{(-\pi,\pi]} e^{i\theta}\, dE_\theta. \tag{51}$$

Esto significa que $\hat{W}$ puede escribirse como una superposición continua de proyectores ortogonales ponderados por las fases $e^{i\theta}$.

Paso 3: Definición del generador. Definimos el operador $\hat{B}$ como:

$$\hat{B} := \int_{(-\pi,\pi]} \theta\, dE_\theta. \tag{52}$$

Como la función θ es real-valuada y $E(\theta)$ es una medida proyectiva, el operador $\hat{B}$ es autoadjunto:

$$\hat{B}^\dagger = \hat{B}. \tag{53}$$

de esta forma tenemos

Paso 4: Exponenciación mediante cálculo funcional. Aplicando el cálculo funcional continuo al operador $\hat{B}$, obtenemos

$$e^{i\hat{B}} = e^{i\int_{(-\pi,\pi]} \theta\, dE_\theta} = \int_{(-\pi,\pi]} e^{i\theta} dE_\theta = \hat{W} \tag{54}$$

Por lo tanto, existe un operador autoadjunto $\hat{B}$ tal que

$$\hat{W} = e^{i\hat{B}}. \tag{55}$$

($\Leftarrow$) Supóngase ahora que existe un operador autoadjunto $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ tal que $\hat{W} = e^{i\hat{B}}$. Entonces

$$\hat{W}^\dagger = \left(e^{i\hat{B}}\right)^\dagger = e^{-i\hat{B}}, \tag{56}$$

y por lo tanto

$$\hat{W}^\dagger \hat{W} = e^{-i\hat{B}} e^{i\hat{B}} = 1. \tag{57}$$

Así, $\hat{W}$ es unitario. $\square$ $\square$

[4](**Teorema de descomposición espectral**) Sea $\hat{A}$ un operador normal densamente definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe una medida espectral proyectiva E definida sobre el espectro $\sigma(\hat{A})$ tal que

$$\hat{A} = \int_{\sigma(\hat{A})} \lambda\, dE_\lambda,$$

donde la integral se entiende en el sentido del cálculo funcional espectral. En particular, si $\hat{A}$ es autoadjunto, $\sigma(\hat{A}) \subset \mathbb{R}$, y si $\hat{A}$ es unitario, $\sigma(\hat{A}) \subset S^1$. Este teorema representa la generalización del teorema de descomposición de un operador A en términos de sus proyecciones sobre la descomposición del espacio en subespacios propios E_λ, i.e.

$$V \cong \bigoplus_\lambda E_\lambda, \qquad A = \sum_\lambda \lambda\, P_\lambda, \tag{50}$$

donde P_λ denota el proyector ortogonal sobre E_λ, es decir, $P_\lambda : V \longrightarrow E_\lambda$.

Usando el hecho de que el operador $\hat{W}(t)$ puede ser escrito como $\hat{W}(t) = e^{i\hat{B}(t)}$ con $\hat{B}(t)$ hermítico tenemos:

$$i\partial_t \hat{W}(t) = i\partial_t(e^{i\hat{B}(t)}) = i^2 e^{i\hat{B}(t)}\partial_t \hat{B}(t) = -e^{i\hat{B}(t)}\partial_t \hat{B}(t) = -\hat{W}(t)\partial_t \hat{B}(t)$$

de esta forma retomando la expresión (44) tenemos

$$i\partial_t \hat{W}(t) + \hat{W}(t)\hat{H} = \hat{H}_I'\hat{W}(t) \tag{58}$$
$$-\hat{W}(t)\partial_t \hat{B}(t) + \hat{W}(t)\hat{H} = \hat{H}_I'\hat{W}(t) \tag{59}$$

multiplicando por $\hat{W}^\dagger(t)$ ambos lados de la ecuación tenemos:

$$\hat{W}^\dagger(t)\big[-\hat{W}(t)\partial_t \hat{B}(t) + \hat{W}(t)\hat{H} = \hat{H}_I'\hat{W}(t)\big]$$
$$-\partial_t \hat{B}(t) + \hat{H} = \hat{W}^\dagger(t)\hat{H}_I'\hat{W}(t) \tag{60}$$

puesto que $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ tenemos

$$\boxed{-\partial_t \hat{B}(t) + \hat{H}_0 + \hat{H}' = \hat{W}(t)^\dagger H_I'\hat{W}(t)} \tag{61}$$

En este punto es necesario fijar o elegir el operador $\hat{B}$ de tal forma que se cumpla la siguiente identidad

$$\boxed{-\partial_t \hat{B}(t) + \hat{H}_0 \equiv 0} \tag{62}$$

esto con la finalidad que la ecuación (61) se simplifique de la siguiente forma:

$$\underbrace{-\partial_t \hat{B}(t) + \hat{H}_0}_{\equiv 0} + \hat{H}' = \hat{W}(t)^\dagger H_I'\hat{W}(t) \tag{63}$$

es decir

$$\boxed{\hat{H}' = \hat{W}(t)^\dagger H_I'\hat{W}(t)} \tag{64}$$

de la ecuación (62) obtenemos

$$\boxed{\hat{B} = \int_0^t dt\hat{H}_0 = \hat{H}_0 t} \tag{65}$$

puesto que H_0 lo consideramos *independiente del tiempo*[5]. De esta forma tenemos que

$$\boxed{\hat{W}(t) := e`i\hat{B}(t) = e^{it\hat{H}_0}} \tag{66}$$

de esta forma los estados de interacción (40) toman la forma

$$\boxed{|\psi_I(t)\rangle := e^{it\hat{H}_0}|\psi(t)\rangle} \tag{67}$$

y el *hamiltoniano de interacción* viene dado por

$$\boxed{\hat{H}_I'(t) := e^{it\hat{H}_0}\hat{H}'e^{-it\hat{H}_0}} \tag{68}$$

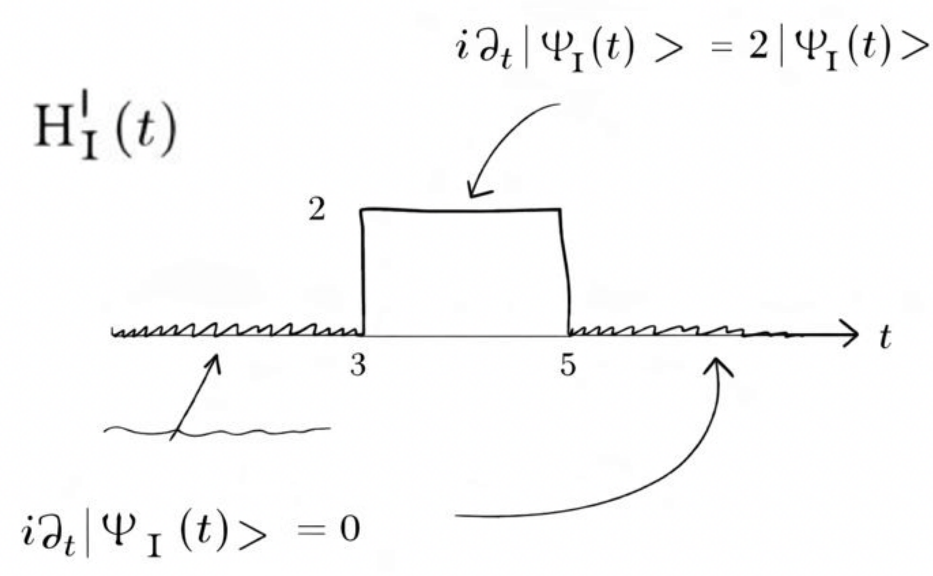

Figure 1: Hamiltoniano de interacción $\hat{H}'_I(t)$ dependiente del tiempo

de esta forma finalmente podemos escribir la ecuación de Schörodinger en la imagen de interacción como

$$\boxed{i\partial_t|\psi_I(t)\rangle = \hat{H}'_I(t)|\psi_I(t)\rangle = e^{it\hat{H}_0}\hat{H}'e^{-it\hat{H}_0}|\psi_I(t)\rangle} \tag{69}$$

Es importante observar que la ecuación anterior el hamiltoniano $H'_I(t)$ *depende explicitamente del tiempo* a diferencia de la ecuación de Schrödinger clásica. Esto tiene implicaciones importantes. Por ejemplo se pierde la *invarianza temporal en la dinámica del sistema.* Por otro lado el hecho de que el hamiltoniano de interacción dependa del tiempo implica que la teoría *no es invariante bajo translaciones temporales.*[6]

En general motivados por el hamiltoniano de interacción podemos definir para un operador $\hat{A}$ independiente del tiempo la *imagen de interacción* $\hat{A}_I(t)$ como

$$\boxed{\hat{A}_I(t) := e^{it\hat{H}_0}\hat{A}e^{-it\hat{H}_0}} \tag{71}$$

[5]Es posible considerar el caso más general donde H_0 sea dependiente del tiempo. En estas situaciones un análisis debe de ser realizado.

[6]Una teoría es invariante bajo traslaciones temporales si sus ecuaciones de movimiento permanecen invariantes bajo la transformación $t \mapsto t + t_0$, con t_0 constante. De acuerdo con el teorema de Noether, esta invarianza es equivalente a la conservación de la energía. Cuando el hamiltoniano depende explícitamente del tiempo, dicha simetría se rompe y la energía del sistema deja de ser una cantidad conservada. Esta conservación puede expresarse en términos del operador de evolución temporal $U(t)$, en el sentido de que la evolución de cualquier estado depende únicamente de las diferencias relativas de tiempo. En particular, si $0 < t < t'$, se cumple:

$$\hat{U}(t' - t)\,|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t')\,|\psi(0)\rangle. \tag{70}$$

Recordando que la Imagen de Heisenberg viene dada por la ecuación (15) tenemos

$$\boxed{\hat{A}_I(t) := e^{it\hat{H}_0}\hat{A}e^{-it\hat{H}_0} = e^{it\hat{H}_0} \underbrace{e^{-it\hat{H}}\hat{A}(t)e^{it\hat{H}}}_{\text{Imagen de Heisenberg } \hat{A}} e^{-it\hat{H}_0}} \tag{72}$$

es decir

$$\boxed{\hat{A}(t) = \underbrace{e^{itH}e^{-itH_0}}_{\equiv \hat{U}_I^\dagger(t)}\hat{A}_I(t)\underbrace{e^{itH_0}e^{-itH_0}}_{\equiv \hat{U}_I(t)}} \tag{73}$$

$\hat{U}_I(t) := e^{it\hat{H}_0}e^{-it\hat{H}_0}$ recibe el nombre de *Operador de evolución temporal en la Imagen de Interacción.* Así

$$\boxed{\hat{A}(t) = \hat{U}_I^\dagger(t)\hat{A}_I(t)\hat{U}_I(t)} \tag{74}$$

El hecho de que el hamiltoniano de interacción no sea invariante bajo traslaciones temporales implica que la evolución de los estados $|\psi_I\rangle$ dependa no de la diferencia relativa de los tiempos si no de un *atrás y adelante en los tiempos* i.e. Si $0 < t < t'$ entonces

$$\boxed{\hat{U}_I(t', t) := \hat{U}_I(t')\hat{U}_I^\dagger(t)} \tag{75}$$

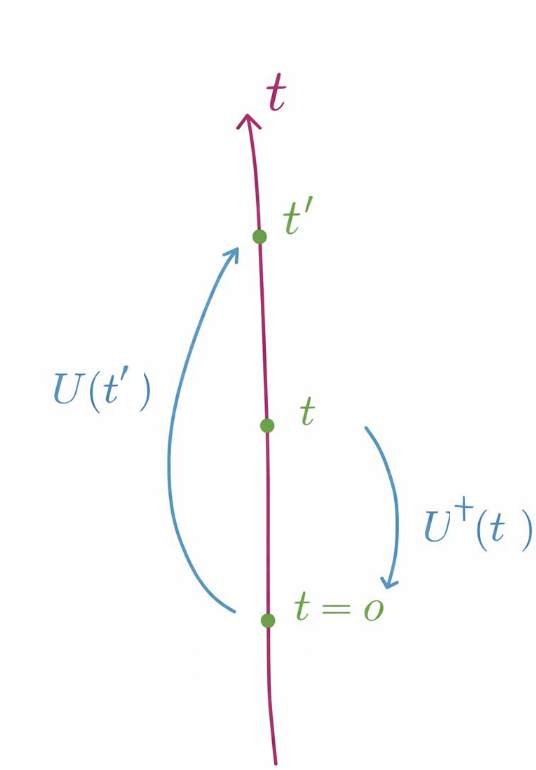

Figure 2: Operador de evolución temporal en tiempos relativos $\hat{U}_I(t', t)$

Ejercicio 1.2. *Prueba que si* $0 < t < t'$ *entonces*

$$\hat{U}_I(t', t) = e^{it'\hat{H}_0} e^{-i(t'-t)\hat{H}} e^{-it\hat{H}_0} \tag{76}$$

Ejercicio 1.3. *Prueba que el operador* $\hat{U}_I(t', t)$ *satisface*

$$i\partial_t \hat{U}_I(t', t) = \hat{H}'_I(t')\hat{U}_I(t', t) \tag{77}$$

Ejercicio 1.4. *Prueba que la si* $t_1 < t_2 < t_3$ *entonces*

$$\hat{U}_I(t_3, t_1) = \hat{U}_I(t_3, t_2)\hat{U}_I(t_2, t_1) \tag{78}$$

$$\hat{U}_I(t_2, t_1) = \hat{U}_I(t_3, t_1)\hat{U}_I^\dagger(t_2, t_1) \tag{79}$$

Ejercicio 1.5. *Prueba que*

$$\hat{U}_I(t, 0) = \hat{U}_I(t) \tag{80}$$