

# Fijación Gauge en la Integral de Camino y el Determinante de Faddeev–Popov

Omar Corona Tejeda

omarct1989@ciencias.unam.mx

15 de Noviembre del 2025

## Abstract

En las teorías Gauge, la presencia de simetrías locales introduce grados de libertad no físicos que hacen que la integral de caminos esté mal definida debido a la sobrecontabilidad de configuraciones equivalentes. Para obtener una formulación consistente de la teoría cuántica, es necesario fijar una condición de Gauge que seleccione una única configuración representativa por cada órbita de la simetría. En este trabajo se revisa el procedimiento de Faddeev–Popov, mediante el cual se inserta en la integral de caminos una identidad construida a partir de una condición de Gauge y su correspondiente jacobiano funcional. Este determinante, conocido como determinante de Faddeev–Popov, corrige precisamente el volumen redundante asociado a la simetría Gauge. Se ilustra el método tanto desde un punto de vista formal como mediante un ejemplo elemental con simetría  $SO(2)$ , destacando la interpretación geométrica del volumen asociado al grupo de Gauge y su papel en la regularización de la integral de caminos.

Las simetrías Gauge son omnipresentes en la física teórica, especialmente en la física de partículas. Ejemplos conocidos de teorías Gauge son la electrodinámica cuántica (QED) y la cromodinámica cuántica (QCD). Una característica común de las teorías Gauge es la aparición de grados de libertad no físicos en el lagrangiano. Debido a esto, la *integral de caminos o trayectorias* para teorías Gauge carecen de sentido (dando valores infinitos en los calculos), ya que integrar sobre las parametros Gauge haría infinitamente valuado el valor de la integral.

Por otro lado, las simetrías de Gauge reflejan redundancias en nuestra descripción de un sistema físico: diferentes configuraciones de campo relacionadas por una transformación de Gauge representan, en realidad, el mismo estado físico.

Sin embargo, al escribir la integral de trayectoria para una teoría Gauge<sup>1</sup> :

$$\mathcal{Z}[A_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>La integral de trayectorias puede definirse formalmente como el límite de un producto de integrales ordinarias obtenido al discretizar el espacio-tiempo. Para un campo  $\phi$  definido en una región con  $N$  puntos de una discretización (lattice), la acción  $S[\phi]$  se aproxima por una función  $S_N(\phi_1, \dots, \phi_N)$  y la medida funcional por el producto de medidas ordinarias. La integral de trayectorias se define entonces como el límite

$$\mathcal{Z}[\phi] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}} d\phi_1 \cdots \int_{\mathbb{R}} d\phi_N \exp(i S_N(\phi_1, \dots, \phi_N)) \right), \quad (1)$$

Donde  $S[A_\mu]$  representa el funcional de la teoría se incluídas aquellas que difieren solo por una transformación de Gauge. Debido a que existen infinitas configuraciones equivalentes, la integración las sobreestima: la medida  $\mathcal{D}A_\mu$  incluye un volumen infinito correspondiente a las órbitas Gauge. Por eso, la integral de trayectoria es divergente i.e. se vuelve infinito el valor.

Para solucionar esto, se introduce una condición de fijación Gauge que restringe la integral a una órbita representativa por cada órbita de Gauge. Esto se suele hacer mediante el procedimiento de Faddeev-Popov, donde se inserta una función delta que impone una condición (como  $G[A_\mu^\theta] := \partial^\mu(A_\mu + \partial_\mu\theta) = 0$ ) en el caso de la electrodinámica cuántica denominada *Fijación Gauge*<sup>2</sup> y se compensa con un determinante —el determinante de Faddeev-Popov— para preservar el valor de la integral. i.e.

$$\mathcal{Z}[A_\mu] := \int \mathcal{D}A_\mu \det\left(\frac{\delta G[A_\mu^\theta]}{\delta \theta}\right) \delta(G[A_\mu^\theta]) e^{iS[A_\mu]} \quad (4)$$

Esto es así debido a que

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G[A^\theta]) \det\left(\frac{\delta G[A^\theta]}{\delta \theta}\right). \quad (5)$$

donde  $\theta$  es el grado de libertad dado por la simetría.

Consideremos un ejemplo sencillo de todo lo anterior.

**Ejemplo 1.** Sea  $\mathbb{R}^2$  con coordenadas cartesianas  $(x, y)$  y el cambio de variable a coordenadas polares dado por

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta := \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6)$$

y consideremos la función  $Z$  dado por

$$Z = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-S(r)} \quad (7)$$

donde  $S(r)$  es una función que depende únicamente del radio i.e. preserva una simetría Gauge con respecto a las rotaciones  $SO(2)$ . Mediante el teorema de cambio de variable. Podemos escribir la ecuación anterior en términos de las variables  $(r, \theta)$ . De esta forma tenemos

$$Z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r dr d\theta) e^{-S(r)} = \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \int_0^\infty r dr e^{-S(r)} \quad (8)$$

El factor  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$  es el Volumen (en este caso finito) del Grupo de Gauge i.e

$$\text{Vol}(SO(2)) = 2\pi \quad (9)$$

---

cuando la partición se hace infinitamente fina. Formalmente esto se escribe como

$$\mathcal{Z}[\phi] := \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}. \quad (2)$$

<sup>2</sup>*Gauge Fixing* en la literatura.

## Cálculo del volumen de $\text{SO}(2)$

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana suave de dimensión  $n$ . El *volumen* de  $M$  inducido por la métrica  $g$  se define como

$$\text{Vol}(M) = \int_M dV_g, \quad (10)$$

donde  $dV_g$  es la forma de volumen asociada a  $g$ . En coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$  se tiene

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (11)$$

y por tanto

$$\text{Vol}(M) = \int_M \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^n. \quad (12)$$

Recordemos que  $\text{SO}(2)$  es difeomorfa al círculo unitario  $S^1$ . Una parametrización conveniente es

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (13)$$

Bajo la identificación  $\text{SO}(2) \simeq S^1$  podemos tomar la parametrización del círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta). \quad (14)$$

La derivada respecto. de  $\theta$  es

$$\mathbf{x}'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad (15)$$

y su norma euclídea es

$$\|\mathbf{x}'(\theta)\| = \sqrt{(-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2} = 1. \quad (16)$$

La métrica inducida en la coordenada  $\theta$  es por tanto  $g_{\theta\theta} = 1$ . El elemento de volumen (en este caso elemento de longitud, 1-forma de volumen) es

$$dV_g = \sqrt{g_{\theta\theta}} d\theta = 1 \cdot d\theta. \quad (17)$$

Finalmente, el volumen (longitud) de  $\text{SO}(2)$  es

$$\text{Vol}(\text{SO}(2)) = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \quad (18)$$

**Observación.** Si se elige otra normalización de la métrica (por ejemplo una constante de escala en la forma bilineal definida en la álgebra de Lie), el valor numérico puede escalar proporcionalmente. Con la métrica inducida por la inclusión natural en  $\mathbb{R}^2$  (o con la métrica bi-invariante normalizada de modo estándar) el resultado es  $2\pi$ .

# Derivación de Faddeev–Popov

La idea de Faddeev–Popov consiste en insertar “1” de forma que se elimine la integral sobre la dirección de simetría y se sustituya por un jacobiano, el determinante de Faddeev–Popov. Concretamente:

1. Seleccionamos una condición de gauge. En nuestro ejemplo consideremos  $\theta_0 := 0$ .
2. Recordemos que la función delta de Dirac posee las siguientes propiedades:

$$\int \delta(x - y) f(x) dx = f(y), \quad (19)$$

y que

$$\delta(f(x))_u = \sum_{x_i=f^{-1}(0)} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} u := \int \sum_{x_i=f^{-1}(0)} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} u(x) dx, \quad (20)$$

donde  $u(x)$  es una *función test* de soporte compacto, es decir,  $u(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

De esta forma, en el caso de un número finito de grados de libertad<sup>3</sup>

## Ejemplo de Faddeev–Popov en $SO(2)$

Sea  $G(R_\alpha)$  una función escalar que selecciona un representante en cada órbita de la simetría. En el ejemplo de una variable angular, tomamos:

$$G(R_\alpha) = \theta + \alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad (21)$$

donde  $\theta(x, y)$  es el ángulo asociado al punto  $(x, y)$  y  $\alpha$  es la rotación por el ángulo  $\alpha$ . De este modo, la condición de gauge queda fijada por  $G(R_\alpha) = 0$ , cuyo único punto fijo es  $\theta = 0$  en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

---

<sup>3</sup>En mecánica cuántica no relativista, un sistema físico típico posee un número finito de grados de libertad, usualmente descritos por un conjunto finito de coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados. Sin embargo, en una teoría cuántica de campos (TQC) el objeto fundamental ya no es un conjunto discreto de variables, sino un campo definido sobre el espacio o el espacio-tiempo. Esto implica que el sistema tiene efectivamente un número infinito de grados de libertad, uno por cada punto espacial, o de manera equivalente, uno por cada modo independiente en una descomposición espectral (por ejemplo, una expansión en modos de Fourier).

La referencia a “grados finitos de libertad” dentro del marco de TQC aparece generalmente en contextos aproximados o efectivos. Por ejemplo, al discretizar el espacio en una red espacial (como en teorías de gauge en el lattice), el campo queda representado por un número finito, aunque grande, de variables definidas en los sitios o enlaces de la red. De forma análoga, en aproximaciones de espacio de Hilbert truncado se retiene solo un subconjunto finito de modos, típicamente los de baja energía o baja frecuencia, descartando los demás. En las teorías efectivas, los modos de alta energía se integran fuera, lo que produce una descripción con un número finito de parámetros relevantes para la escala de energía considerada.

En todos estos casos, el sistema deja de poseer el carácter estrictamente infinitodimensional de una TQC completa y adquiere una descripción con un número finito de grados de libertad. No obstante, el límite continuo o el límite de alta energía restaura el comportamiento fundamentalmente infinitodimensional propio de la teoría cuántica de campos.

La integral de Faddeev–Popov se define como:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta_{2\pi}(G(R_\alpha)) \left| \frac{\partial G(R_\alpha)}{\partial \alpha} \right|, \quad (22)$$

donde  $\delta_{2\pi}$  es la *delta periódica* definida por

$$\delta_{2\pi}(\phi) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\phi - 2\pi n). \quad (23)$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{\partial G(R_\alpha)}{\partial \alpha} = 1. \quad (24)$$

Luego, la integral queda:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta_{2\pi}(\alpha + \theta) = \int_0^{2\pi} d\alpha \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\alpha + \theta - 2\pi n) \quad (25)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} d\alpha \delta(\alpha + \theta - 2\pi n). \quad (26)$$

La delta de Dirac ordinaria  $\delta(\alpha + \theta - 2\pi n)$  solo contribuye si su argumento se anula, es decir:

$$\alpha + \theta - 2\pi n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2\pi n - \theta. \quad (27)$$

Pero  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , por lo que solo existe un entero  $n_0$  tal que  $2\pi n_0 - \theta \in [0, 2\pi]$ . Por lo tanto, de toda la suma solo un término contribuye. Evaluando la integral de la delta ordinaria:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta(\alpha + \theta - 2\pi n_0) = 1. \quad (28)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \delta_{2\pi}(\alpha + \theta) = 1. \quad (29)$$

En este ejemplo simple de  $SO(2)$ , la integral sobre la dirección de simetría queda eliminada y la medida original en coordenadas polares se conserva:

$$dx dy = r dr d\theta.$$

## Generalización a Teorías Cuánticas de Campos

En el caso de un número infinito de grados de libertad, la generalización funcional es:

$$1 = \int \mathcal{D}\theta \delta(G[A^\theta]) \det \left( \frac{\delta G[A^\theta]}{\delta \theta} \right). \quad (30)$$

Esto nos permite, finalmente, definir la integral de caminos *modulo* la fijación de gauge:

$$\boxed{\mathcal{Z}[A_\mu] = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}A_\mu \delta(G[A_\mu^\alpha]) \det \left( \frac{\delta G[A_\mu^\alpha]}{\delta \alpha} \right) e^{iS[A_\mu]}.} \quad (31)$$