ВАРИАНТ 24

ЗАДАЧА 5. Случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (μ_1, μ_2) и ковариационной матрицей:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & \operatorname{cov}(\xi, \eta) \\ \operatorname{cov}(\eta, \xi) & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Найти: $P\{3\eta - \xi > 0\}$, если $(\mu_1, \mu_2) = (4, 2)$;

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 4/3 \\ 4/3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\text{Пусть: } \zeta = 3\eta - \xi$$

Вычислим математическое ожидание $E[\zeta]$:

$$E[\zeta] = 3E[\eta] - E[\xi]$$

Так как нам даны математические ожидания из условия:

$$E[\eta] = 2, E[\xi] = 4$$

Подставим:

$$3E[\eta] - E[\xi] = 3 \cdot 2 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$E[\zeta] = 2$$

Дисперсия вычисляется как:

$$\mathrm{D}(a\xi + b\eta) = a^2\mathrm{D}(\xi) + b^2\mathrm{D}(\eta) + 2ab\operatorname{Cov}(\xi, \eta)$$

Вычислим дисперсию $D(\zeta)$:

$$D(\zeta) = D(3\eta - \xi) = 9D(\eta) + D(\xi) - 6Cov(\xi, \eta)$$

Так как нам даны дисперсии и ковариация из условия (матрица ковариации):

$$D(\eta) = 4, D(\xi) = 4, Cov(\xi, \eta) = 4/3$$

Подставляем известные значения:

$$D(\zeta) = D(3\eta - \xi) = 9 \cdot 4 + 4 - 6 \cdot \frac{4}{3} = 36 + 4 - 8 = 32$$

$$D(\zeta) = 32$$

Получаем, что ζ нормально распределена:

$$m = E(\zeta), \sigma^2 = D(\zeta)$$

$$\zeta \sim \mathcal{N}(2, 32)$$

Найдём вероятность $P(\zeta > 0)$:

$$P(\zeta > 0) = P(\infty > \zeta > 0)$$

Приведём к стандартному нормальному виду:

$$P(\infty > \zeta > 0) = P\left(\frac{\infty - m}{\sigma} > \frac{\zeta - m}{\sigma} > \frac{0 - m}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\frac{\infty - m}{\sigma} > \frac{\zeta - m}{\sigma} > \frac{0 - m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{\infty - 2}{\sqrt{32}} > \frac{\zeta - 2}{\sqrt{32}} > \frac{0 - 2}{\sqrt{32}}\right)$$

$$P\left(\frac{\infty - 2}{\sqrt{32}} > \frac{\zeta - 2}{\sqrt{32}} > \frac{0 - 2}{\sqrt{32}}\right) = P\left(\infty > \frac{\zeta - 2}{\sqrt{32}} > -0.354\right)$$

$$\Phi(\infty) - \Phi(-0.354)$$

$$\Phi_0(\infty) + \Phi_0(0.354)$$

$$\Phi_0(\infty) = 0,5$$

По таблице значений функции Лапласа: $\Phi_0(0.354) \approx 0,1386$

Получаем: $0,5 + 0,1386 \approx 0,6386$

Ответ:

$$P\{3\eta - \xi > 0\} \approx 0,6386$$

ЗАДАЧА 6. В условиях предыдущей задачи найти условную вероятность

$$P(1 < \eta < 3|\xi = 3,5).$$

Решение:

Найти условную вероятность:

$$P(1 < \eta < 3 \mid \xi = 3,5).$$

При условии $\xi = x$, случайная величина η распределена нормально с условным математическим ожиданием и условной дисперсией:

$$E[\eta \mid \xi = x] = E(\eta) + \frac{Cov(\eta, \xi)}{D(\xi)}(x - E(\xi))$$

$$D(\eta \mid \xi = x) = D(\eta) - \frac{(Cov(\eta, \xi))^2}{D(\xi)}$$

Вычислим условное математическое ожидание $E[\eta \mid \xi = 3.5]$:

По условию: $E[\eta] = 2, E[\xi] = 4, Cov(\xi, \eta) = 4/3$

$$E[\eta \mid \xi = 3.5] = 2 + \frac{\frac{4}{3}}{4}(3.5 - 4) = 2 + \frac{1}{3} \cdot (-0.5) = 2 - \frac{1}{6} = \frac{12}{6} - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

Вычислим условную дисперсию $D(\eta \mid \xi = 3.5)$:

По условию: $D(\eta) = 4, D(\xi) = 4, Cov(\xi, \eta) = 4/3$

$$D(\eta \mid \xi = 3.5) = 4 - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = 4 - \frac{16/9}{4} = 4 - \frac{4}{9} = \frac{36}{9} - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$$

Получаем, что $\eta \mid \xi = 3.5$ нормально распределена:

$$m = E(\eta \mid \xi = 3.5), \sigma^2 = D(\eta \mid \xi = 3.5)$$

$$\eta \mid \xi = 3.5 \sim \mathcal{N}\left(\frac{11}{6}, \frac{32}{9}\right)$$

Найдём вероятность $P(1 < \eta < 3 \mid \xi = 3.5)$:
Приведём к стандартному нормальному виду:

$$P(1 < \eta < 3 \mid \xi = 3.5) = P\left(\frac{1-m}{\sigma} < \frac{\eta - m}{\sigma} < \frac{3-m}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\frac{1-m}{\sigma} < \frac{\eta - m}{\sigma} < \frac{3-m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{1-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{32}{9}}} < \frac{\eta-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{32}{9}}} < \frac{3-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{32}{9}}}\right)$$

Вычислим значения точек a^* и b^*:

$$\frac{1-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{32}{9}}} = \frac{-\frac{5}{6}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{-5}{6} \cdot \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{-5}{8\sqrt{2}} \approx -0.442$$

$$\frac{3-\frac{11}{6}}{\sqrt{\frac{32}{9}}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \approx 0.619$$

Получаем:

$$P\left(-0.442 < \eta^* < 0.619\right)$$

$$P\left(-0.442 < \eta^* < 0.619\right) = \Phi(0.619) - \Phi(-0.442)$$

$$\Phi_0(0.619) + \Phi_0(0.442)$$

По таблице значений функции Лапласа: $\Phi_0(0.619) \approx 0,2323$

По таблице значений функции Лапласа: $\Phi_0(0.442) \approx 0,1700$

Получаем: 0,2323 + 0,1700 $\approx 0,4023$

Ответ:

$$P(1 < \eta < 3 \mid \xi = 3.5) \approx 0,4023$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!