Вариант 24

ЗАДАНИЕ №3

Плотность распределения СВ ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot cos(2x), & x \in (0, \frac{\pi}{4}) \\ 0, & x \notin (0, \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Найти:

а) константу c

б) функцию распределения СВ ξ

в) построить график функции плотности распределения СВ и график функции распределения СВ

г) $\mathbb{E}(\xi - 2\xi)$

д) $\mathbb{P}(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2})$

Решение:

а)

$f_\xi(x)$ является плотностью вероятности.

Выполняется условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$$

Так как $f_\xi(x) = 0$ вне интервала $(0, \frac{\pi}{4})$, условие нормировки будет выглядеть:

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} c\cos(2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} 0\,dx = 1$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} c\cos(2x)\,dx = 1$$

Интегрирование:

$$c\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx = c\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$c\left(\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\sin(2\cdot 0)}{2}\right) = c\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 0\right) = c\cdot\frac{1}{2}$$

Получаем:

$$c \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c = 2}$$

б)

Функция распределения $F_\xi(x)$ определяется как:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

При $x < 0$:
$f_\xi(x) = 0 \implies F_\xi(x) = 0$, плотность равна нулю на этом интервале.

При $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$:

$$F_\xi(x) = \int_0^x 2\cos(2t)\,dt = [\sin(2t)]_0^x = \sin(2x) - \sin(2 \cdot 0) = \sin(2x)$$

При $x > \frac{\pi}{4}$:
$F_\xi(x) = 1$, интеграл от плотности на всём её носителе равен 1.

Функция распределения:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin(2x), & 0 \le x \le \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

в)

График функции плотности распределения СВ:

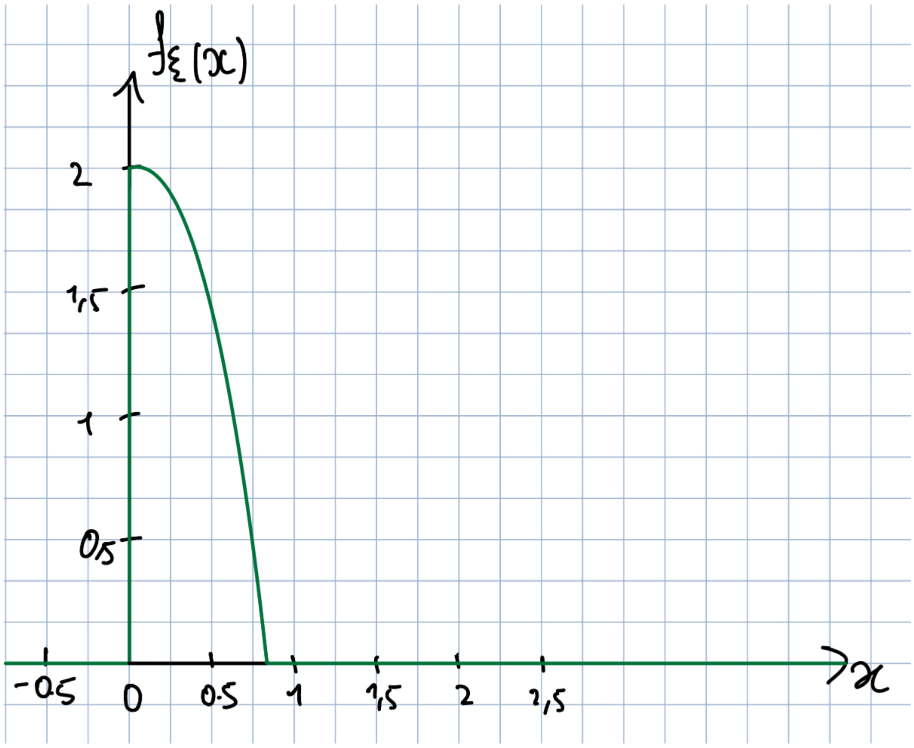

График функции распределения СВ:

г)
$E(\xi - 2\xi)$, вычислим внутри скобок: $\xi - 2\xi = -\xi$

$$E(-\xi) = -E(\xi)$$

Найдем $E(\xi)$:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot 2\cos(2x)\, dx$$

Метод интегрирования по частям:
$u = x$
$dv = \cos(2x)\, dx$
$du = dx$
$v = \frac{\sin(2x)}{2}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$2 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\, dx\right) = 2 \cdot \left(\left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{2}\, dx\right)$$

Посчитаем по отдельности:

$\left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 0 = \frac{\pi}{8}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{2}\, dx = \left[-\frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{4} + \frac{\cos(0)}{4} = \frac{1}{4}$

Получаем:

$$2 \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\, dx\right) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi - 2}{4}$$

$\Longrightarrow$

$$E(\xi) = \frac{\pi - 2}{4}$$

Так как мы ищем $E(-\xi)$,

$$E(-\xi) = -E(\xi) = -\frac{\pi - 2}{4} = \frac{2 - \pi}{4} \approx \frac{2 - 3,14}{4} \approx -0,285$$

д)

Так как плотность $f_\xi(x) = 0$ при $x > \frac{\pi}{4}$ (плотность распределения $f_\xi(x)$ определена только на интервале $(0;\frac{\pi}{4})$), то вероятность $P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2}\right)$ равна:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2}\right) = P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2x)\,dx$$

Вычислим:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2x)\,dx = 2\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

Получаем:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < \xi < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \approx 0,134$$

ЗАДАНИЕ №4

Случайные величины U и V связаны со случайными величинами X и Y соотношениями: U = X + 3Y - 2; V = 2X - Y + 1. Известно, что M(X) = 1; D(X) = 5; M(Y) = -2; D(Y) = 4; K_{XY} = 3. Найти математическое ожидание величин U и V и их ковариацию.

Решение:

Дано:
$U = X + 3Y - 2$
$V = 2X - Y + 1$
$E(X) = 1$
$D(X) = 5$
$E(Y) = -2$
$D(Y) = 4$
$K_{XY} = 3$

Нахождение математического ожидания величин U и V

1. Математическое ожидание U

$$U = X + 3Y - 2$$

$$E(U) = E(X + 3Y - 2)$$

По свойствам математического ожидания:

$$E[c\xi] = cE\xi$$
$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$
$$Ec = c$$

$\Longrightarrow$

$$E(U) = E(X) + 3E(Y) - 2$$

Подставим значения:

$$E(U) = 1 + 3 \cdot (-2) - 2 = 1 - 6 - 2 = -7$$

2. Математическое ожидание V

$$V = 2X - Y + 1$$

$$E(V) = E(2X - Y + 1)$$

По свойствам математического ожидания:

$$E[c\xi] = cE\xi$$
$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$
$$Ec = c$$

$\Longrightarrow$

$$E(V) = 2E(X) - E(Y) + 1$$

Подставим значения:

$$E(V) = 2 \cdot 1 - (-2) + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$$

Нахождение ковариации величин U и V

$$K_{UV} = \operatorname{cov}(X + 3Y - 2,\ 2X - Y + 1)$$

Используя свойства ковариации:

$\operatorname{cov}(X + Y, Z) = \operatorname{cov}(X, Z) + \operatorname{cov}(Y, Z)$
$\operatorname{cov}(aX, Y) = a \operatorname{cov}(X, Y)$
$\operatorname{cov}(X, c) = 0 \quad$ для любого c
$\operatorname{cov}(X, X) = \mathrm{D}(X)$
$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$

$$K_{UV} = \operatorname{cov}(aX + bY + c, dX + eY + f),\ \text{где:}$$

$a = 1$
$b = 3$
$c = -2$
$d = 2$
$e = -1$
$f = 1$

Применим свойства:

$\operatorname{cov}(U, V) = \operatorname{cov}(aX, dX) + \operatorname{cov}(aX, eY) + \operatorname{cov}(bY, dX) + \operatorname{cov}(bY, eY)$

$\operatorname{cov}(aX, dX) = ad \operatorname{cov}(X, X) = ad \operatorname{D}(X)$

$\operatorname{cov}(aX, eY) = ae \operatorname{cov}(X, Y)$

$\operatorname{cov}(bY, dX) = bd \operatorname{cov}(Y, X) = bd \operatorname{cov}(X, Y)$

$\operatorname{cov}(bY, eY) = be \operatorname{cov}(Y, Y) = be \operatorname{D}(Y)$

Получается:

$$K_{UV} = ad \operatorname{D}(X) + be \operatorname{D}(Y) + (ae + bd) \operatorname{cov}(X, Y)$$

Подставим:

$$K_{UV} = 1 \cdot 2 \cdot \operatorname{D}(X) + 3 \cdot (-1) \cdot \operatorname{D}(Y) + (1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) \cdot K_{XY}$$

$$K_{UV} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 4 + (-1 + 6) \cdot 3$$

$$K_{UV} = 10 - 12 + 15 = 13$$