Задача А2. Применение мастер-теоремы

Дан ряд рекуррентных соотношений, которые описывают временную сложность некоторых рекурсивных алгоритмов (при n = 1 во всех случаях принимаем $T(1) = 1$):

- $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^2$.
- $T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) + \log_2 n$.
- $T(n) = 0.5 \cdot T(\frac{n}{2}) + \frac{1}{n}$.
- $T(n) = 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}$.
- $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2 n$.

1. Для приведенных рекуррентных соотношений вычислите асимптотическую верхнюю границу временной сложности $O(g(n))$ с помощью основной теоремы о рекуррентных соотношениях (мастер–теоремы), если это возможно. Если применение мастер–теоремы невозможно, поясните причины.

Соотношение должно соответствовать форме $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

Рекуррентное соотношение 1:

$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$, где $a = 7$, $b = 3$, $f(n) = n^2$

Вычислим $\log_b a = \log_3 7 \approx 1.7712$.
Сравним $f(n)$ с $n^{\log_b a}$:
$n^{\log_3 7} \approx n^{1.7712}$
$f(n) = n^2$

Поскольку $n^2 = \Omega\left(n^{1.7712+\epsilon}\right)$ для некоторого $\epsilon > 0$ (например, $\epsilon = 0.2288$), мы находимся в третьем случае мастер-теоремы.

Проверим регулярное условие:
Вычислим $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) = 7 \cdot \left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{7n^2}{9}$
Поскольку $\frac{7n^2}{9} < n^2$ для всех $n > 0$, регулярное условие выполняется.
Следовательно, асимптотическая временная сложность $T(n) = \Theta(n^2)$

Рекуррентное соотношение 2:
$T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n$, где $a = 4$, $b = 2$, $f(n) = \log_2 n$

Вычислим $\log_b a = \log_2 4 = 2$.
Сравним $f(n)$ с $n^{\log_b a} = n^2$:
$f(n) = O\left(n^{2-\epsilon}\right)$ для любого $\epsilon > 0$
Мы находимся в первом случае мастер-теоремы.

Следовательно, асимптотическая временная сложность: $T(n) = \Theta(n^2)$

Рекуррентное соотношение 3:
$T(n) = 0.5 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$

Мастер-теорема не применима, поскольку коэффициент $a = 0.5 < 1$, а теорема требует $a \geq 1$.

Рекуррентное соотношение 4:
$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2}$, где $a = 3$, $b = 3$, $f(n) = \frac{n}{2}$

Вычислим $\log_b a = \log_3 3 = 1$.
Сравним $f(n)$ с $n^{\log_b a} = n$:
$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log^k n\right)$ при $k = 0$

Мы находимся во втором случае мастер-теоремы.
Следовательно, асимптотическая временная сложность $T(n) = \Theta(n \log n)$

Рекуррентное соотношение 5:
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2 n$

Мастер-теорема не применима, так как соотношение не имеет формы $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$.

2. Для рекуррентного(-ых) соотношения(-ий), не разрешимых с помощью мастер-теоремы, определите возможную асимптотическую верхнюю границу, используя метод итерации или метод подстановки.

Рекуррентное соотношение 3:
$T(n) = 0.5 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$

Мастер-теорема не применима, поскольку коэффициент $a = 0.5 < 1$, а теорема требует $a \geq 1$.

Используем метод итерации.
Развернем рекуррентное соотношение:
1. $T(n) = 0.5 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$
2. $T\left(\frac{n}{2}\right) = 0.5 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{2}{n}$

Подставим второе в первое $T(n) = 0.5\left(0.5 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n}$

Упрощаем $T(n) = 0.25 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$

Продолжая итерацию до k-го шага и учитывая, что $\frac{n}{2^k} = 1$ при $k = \log_2 n$, получаем:
$T(n) = (0.5)^{\log_2 n} \cdot T(1) + \frac{\log_2 n}{n}$

Так как $(0.5)^{\log_2 n} = n^{-1}$, то:

$$T(n) = \frac{1}{n} + \frac{\log_2 n}{n} = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$$

Следовательно, асимптотическая верхняя граница временной сложности $T(n) = O\left(\frac{\log n}{n}\right)$

Рекуррентное соотношение 5:
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2 n$

Мастер-теорема не применима, так как соотношение не имеет формы $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$.

Используем метод подстановки для оценки верхней границы.
Пусть, предположим, что $T(n) \leq c \cdot 2^n$ для некоторой константы $c > 0$.

Проверим индукцией:
База: Для $n = 1$ и $n = 2$, это предположение верно, если выбрать c достаточно большим.

Шаг индукции:
Предполагая, что $T(k) \leq c \cdot 2^k$ для всех $k < n$, докажем для n:
$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log n \leq c \cdot 2^{n-1} + c \cdot 2^{n-2} + n \cdot \log n$

Упрощая
$T(n) \leq c \cdot 2^{n-2}(2+1) + n \cdot \log n = c \cdot 2^{n-2} \cdot 3 + n \cdot \log n$

Поскольку $2^{n-2} \cdot 3 = \dfrac{3}{4} \cdot 2^n$, имеем $T(n) \leq \dfrac{3c}{4} \cdot 2^n + n \cdot \log n$

Для достаточно большого c и n, $n \cdot \log n \ll 2^n$, поэтому можем заключить, что $T(n) = O(2^n)$

Следовательно, асимптотическая верхняя граница временной сложности $T(n) = O(2^n)$