I

지수함수와 로그함수

이 단원에서는

거듭제곱과 거듭제곱근의 의미를 이해하고, 지수를 정수, 유리수, 실수까지 확장하여 정의합니다. 또 거듭제곱근의 성질과 지수법칙을 바탕으로 다양한 계산 방법을 익혀 지수를 포함하는 복잡한 식을 다루는 문제를 풀어 봅니다.

01

I 지수함수와 로그함수

지수

1 거듭제곱과 거듭제곱근

check point

1 거듭제곱

실수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 곱한 것을 **a의 n제곱**이라 하고, a^n으로 나타낸다.

$a,\ a^2,\ a^3,\ \cdots,\ a^n$

등을 통틀어 **a의 거듭제곱**이라고 하며, a^n에서 a를 거듭제곱의 **밑**, n을 거듭제곱의 **지수**라 한다.

지수

$$\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{개}}=a^n$$

밑

···※지수가 자연수일 때 다음 지수법칙이 성립한다.
두 실수 a, b와 두 자연수 m, n에 대하여
① $a^m a^n=a^{m+n}$
② $a^m\div a^n$
$$=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$$
(단, $a\neq 0$)
③ $(a^m)^n=a^{mn}$
④ $(ab)^n=a^n b^n$
⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
(단, $b\neq 0$)

2 거듭제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$x^n=a$

의 근 x를 **a의 n제곱근**이라 한다. 이때, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 **a의 거듭제곱근** 이라고 한다.

···※0이 아닌 실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있음이 알려져 있다.

3 $\sqrt[n]{a}$의 정의

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것, 만약 실수인 것이 두 개라면 그중 양수인 것을 기호로 $\sqrt[n]{a}$라 쓰고 **n제곱근 a**라 읽는다.

※ INDEX 8.12% ※예제 -8의 세제곱근을 구하시오.

풀이 -8의 세제곱근은 방정식 $x^3=-8$의 근이므로

$x^3+2^3=0,\qquad (x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

따라서 -8의 세제곱근은 $-2,\ 1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$이다.

···※-8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이므로
$\sqrt[3]{-8}=-2$이다.

※ INDEX 8.12% ※예제 16의 네제곱근을 구하시오.

풀이 16의 네제곱근은 방정식 $x^4=16$의 근이므로

$x^4-2^4=0,\qquad (x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore\ x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$

따라서 16의 네제곱근은 $-2,\ 2,\ 2i,\ -2i$이다.

···※16의 네제곱근 중 실수인 것은 $2, -2$이고 이중 양수인 것은 2이므로 $\sqrt[4]{16}=2$이다.

GRIP※···'a의 n제곱근'을 보면 방정식 $x^n=a$를 떠올리자.

실전 연습

실전 001 ✱ INDEX 8.12%

81의 네제곱근 중 모든 허수의 곱을 구하시오.

실전 002 ✱ INDEX 21.5%

다음 중 옳은 것은?

① 8의 세제곱근은 2뿐이다.
② -27의 세제곱근 중 실수인 것은 없다.
③ 81의 네제곱근 중 실수인 것은 3뿐이다.
④ $\sqrt[3]{125}=-5$
⑤ $\sqrt[4]{16}=2$

2 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

1 n이 홀수일 때

a의 값에 관계없이 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$ **하나뿐**이다.

2 n이 짝수일 때

① $a>0$일 때: a의 n제곱근 중 실수인 것은 양의 제곱근 $\sqrt[n]{a}$, 음의 제곱근 $-\sqrt[n]{a}$의 **2개**다.

② $a=0$일 때: 0의 n제곱근은 **0뿐이다.** 즉, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

③ $a<0$일 때: a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 **없다.**

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$-\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a}$	0	없다

check point

*n은 2 이상의 자연수

*$\sqrt[4]{-64}$와 같은 기호는 사용하지 않는다.

개념 a의 n제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

① n이 홀수일 때

함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 곡선이다. 따라서 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 하나뿐이다.

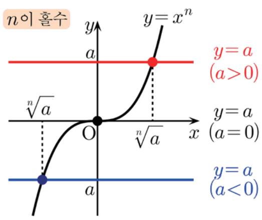
② n이 짝수일 때

함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 곡선이다. 따라서 a의 값의 부호에 따라 교점의 개수가 달라진다.

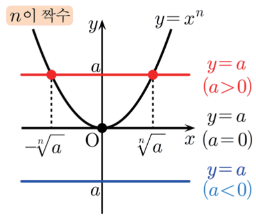
(i) $a>0$이면 교점이 2개이고, x좌표의 부호가 서로 반대이다.

(ii) $a=0$이면 교점이 1개이고, x좌표가 0이다.

(iii) $a<0$이면 교점이 없다.



*대칭성에 의하여 n이 홀수일 때, $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$가 성립한다.



INDEX 34.1%

예제 8의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 a, -7의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 b, 6의 네제곱근 중 음수인 것의 개수를 c, -5의 세제곱근 중 양수인 것의 개수를 d라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

풀이 8의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로 $a=2$

-7의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $b=1$

6의 네제곱근 중 음수인 것은 1개이므로 $c=1$

-5의 세제곱근 중 양수인 것은 0개이므로 $d=0$

$\therefore\ a+b+c+d=4$

GRIP ‘a의 n제곱근 중 실수’인 것은 a의 부호와 n의 홀·짝 여부를 확인해야 한다.

실전 003 ✱ INDEX 34.1%

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수의 개수를 $f_n(a)$라 할 때, $f_2(5)+f_3(6)+f_4(-7)+f_5(-8)$의 값을 구하시오.

실전 004 ✱ INDEX 34.1%

$2 \le n \le 20$인 자연수 n에 대하여 $10-n$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 개수를 구하시오.