



Universidade de Brasília
Departamento de Engenharia Elétrica
**Tópicos em Engenharia: Fundamentos de
Modelagem e Simulação do Canal de
Comunicações Sem Fio – ENE0332**
Trabalho 2

Professor: Higo Thaian Pereira da Silva
Aluno: Artur Padovesi Piratelli
Matrícula: 211038208
31 de maio de 2025

1 Introdução

O objetivo deste projeto é implementar os modelos de desvanecimento Rayleigh e Rice, comparando os resultados de simulação com os teóricos. Os resultados a serem analisados são: a PDF (função de distribuição de probabilidade), a CDF (função de distribuição acumulada de probabilidade) e os momentos das duas distribuições.

A implementação da simulação foi feita em código Python e disponibilizada no link github.com/artistrea/rice-and-rayl-fading.

2 Fundamentação Teórica

A envoltória do desvanecimento não seletivo em frequência pode ser modelado de acordo com as distribuições de Rayleigh e de Rice.

2.1 Desvanecimento Rayleigh

O modelo de desvanecimento Rayleigh assume que não há visada direta entre receptor e transmissor, e que as direções de chegada são isotropicamente distribuídas.

Se o sinal em banda base é $h = x + jy$ com $x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ e $y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, então a envoltória $\beta = |h|$ tem distribuição Rayleigh. Fica claro então que $\beta \geq 0$ para todas as equações a seguir.

Além disso, essa distribuição tem sua PDF dada por

$$p_\beta(\beta) = \frac{\beta}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Em termos de do ganho do canal $\Omega_c = 2\sigma^2$,

$$p_\beta(\beta) = \frac{2\beta}{\Omega_c} \exp\left(-\frac{\beta^2}{\Omega_c}\right). \quad (2)$$

Integrando a sua PDF, obtém-se a CDF

$$F_\beta(\beta) = \int_0^\beta p_\beta(u) du = 1 - \exp\left(-\frac{\beta^2}{\Omega_c}\right). \quad (3)$$

E seus momentos estatísticos são dados por:

$$E[\beta^n] = \Omega_c^{n/2} \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right). \quad (4)$$

2.2 Desvanecimento Rice

O modelo de desvanecimento Rice assume as mesmas condições do ambiente que o modelo de Rayleigh, com exceção da existência de linha de visada direta. Para o desvanecimento Rice, pode existir linha de visada direta entre transmissor e receptor, e portanto ele é uma versão mais genérica do Rayleigh.

Para o desvanecimento Rice, o sinal banda base considerado é $h = x + jy$ com $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma^2)$ e $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma^2)$, e a sua envoltória $\beta = |h|$ possui distribuição Rice. Fica claro por definição que as próximas equações valem somente para $\beta \geq 0$.

A PDF de uma V.A. (variável aleatória) Rice é dada por

$$p_\beta(\beta) = \frac{2\beta(K_R + 1)}{\Omega_c} \exp\left(-K_R - \frac{\beta^2}{\Omega_c}(K_R + 1)\right) I_0\left(2\beta\sqrt{\frac{K_R(K_R + 1)}{\Omega_c}}\right), \quad (5)$$

onde $\bar{\mu}^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2$, $\Omega_c = \bar{\mu}^2 + 2\sigma^2$ é o ganho do canal, $K_R = \bar{\mu}^2/(2\sigma^2)$ é o fator de Rice e I_0 é a função modificada de Bessel de primeira espécie e ordem zero.

Integrando a sua PDF, obtém-se a CDF

$$F_\beta(\beta) = \int_0^\beta p_\beta(u) du = 1 - Q_1 \left(\sqrt{2K_R}, \beta \sqrt{\frac{2(K_R + 1)}{\Omega_c}} \right), \quad (6)$$

onde Q_1 é a função de Marcum Q de ordem 1.

E seus momentos estatísticos são dados por:

$$E[\beta^n] = \Omega_c^{n/2} \Gamma \left(1 + \frac{n}{2} \right) L_{n/2}(), \quad (7)$$

na qual Γ é a função gama e $L_{n/2}$ é o polinômio de Laguerre generalizado de ordem $n/2$.

O fator de Rice é definido como a razão entre a potência da componente LoS (linha de visada) e a soma das potências das componentes difusas, ou NLoS (sem linha de visada). Para o caso onde não há visada direta entre transmissor e receptor, $K_R = 0 \implies \bar{\mu} = 0 \implies \mu_x = \mu_y = 0$. Ou seja, as variáveis aleatórias que definem o sinal banda base passam a possuir distribuição idêntica ao caso do desvanecimento Rayleigh. Por consequência, todos os resultados do modelo de Rice devem ficar idênticos ao modelo de Rayleigh quando $K_R = 0$. Substituindo $K_R = 0$ nas equações 5, 6 e 7 de Rice é fácil verificar que elas ficam idênticas às equações ??, ?? e ?? para Rayleigh.

3 Simulações

Para gerar a envoltória de acordo com o desvanecimento Rayleigh, variáveis aleatórias x e y são retiradas de uma distribuição $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, onde $\sigma = \sqrt{\Omega_c/2}$, e então a envoltória $\beta = \sqrt{x^2 + y^2}$ é calculada.

Para gerar a envoltória de acordo com o desvanecimento Rice, variáveis aleatórias x são retiradas de uma distribuição $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma^2)$ e y são retiradas de uma distribuição $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma^2)$, onde $\sigma = \sqrt{\Omega_c/2}$ e as médias $\mu_x = \mu_y = \mu/\sqrt{2} = \sigma\sqrt{K_R}$ foram consideradas iguais, levando ao cálculo da envoltória $\beta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

As PDFs da simulação foram realizadas por histogramas normalizados, utilizando M intervalos.

As CDFs foram feitas por soma da quantidade de ocorrências de valores menores.

Os momentos de ordem n foram calculados de acordo com $\sum_{i=1}^N x_i^n / l$, onde x_i é a i -ésima amostra, e N é o número de amostras.

Os valores então foram comparados com os resultados teóricos dados na Seção 2.

3.1 Simulações com modelo de Rayleigh

Para o modelo Rayleigh, foram utilizados três valores de Ω_c para teste:

- $\Omega_c = 1$
- $\Omega_c = 2$
- $\Omega_c = 3$

Os gráficos de PDF, CDF e Momentos podem ser vistos nas Figuras 1, 4, 7 para o caso com $\Omega = 1$, nas Figuras 2, 5, 8 para o caso com $\Omega = 2$, e nas Figuras 3, 6, 9 para o caso com $\Omega = 3$.

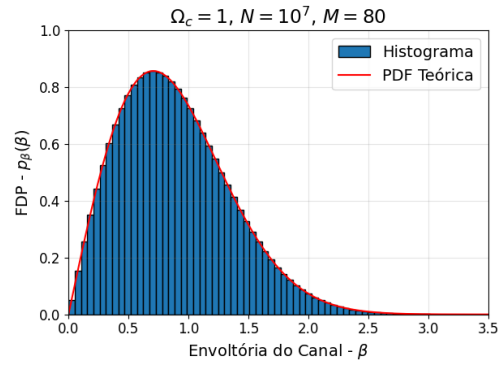


Figura 1: PDF da envoltória Rayleigh, Caso 1

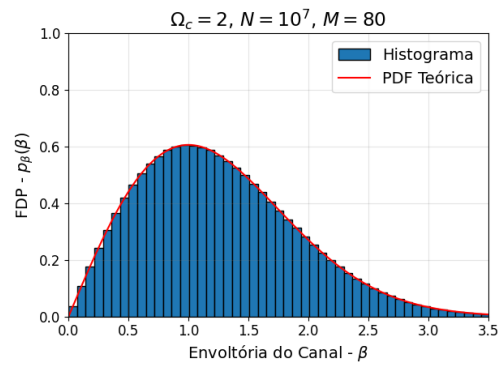


Figura 2: PDF da envoltória Rayleigh, Caso 2

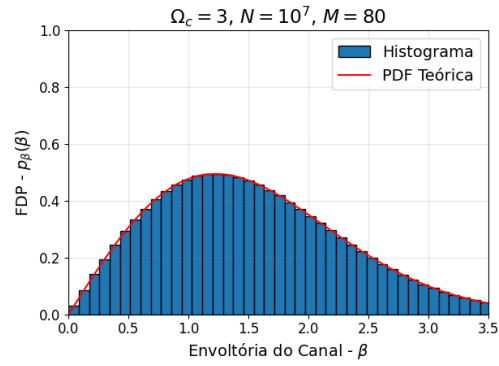


Figura 3: PDF da envoltória Rayleigh, Caso 3

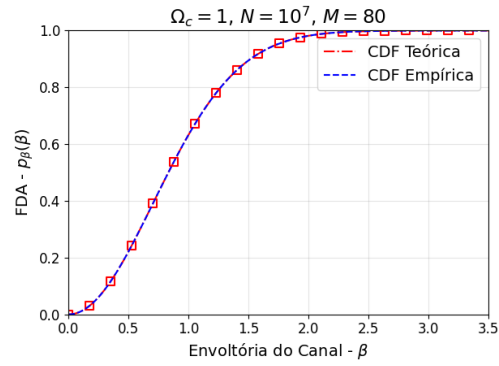


Figura 4: CDF da envoltória Rayleigh, Caso 1

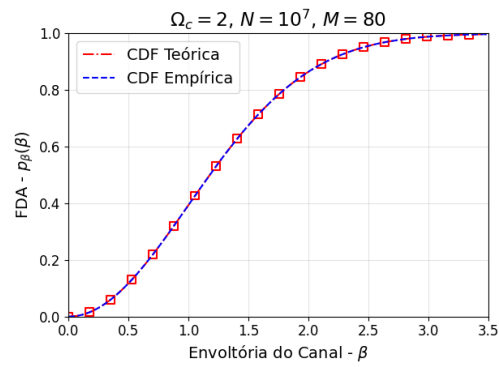


Figura 5: CDF da envoltória Rayleigh, Caso 2

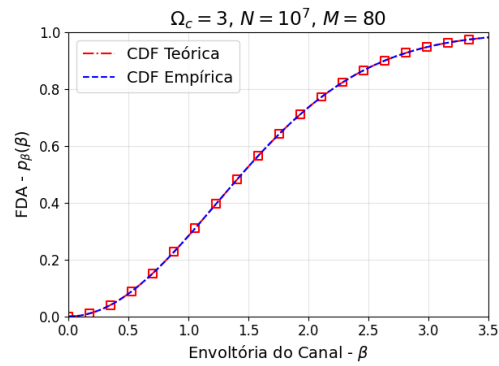


Figura 6: CDF da envoltória Rayleigh, Caso 3

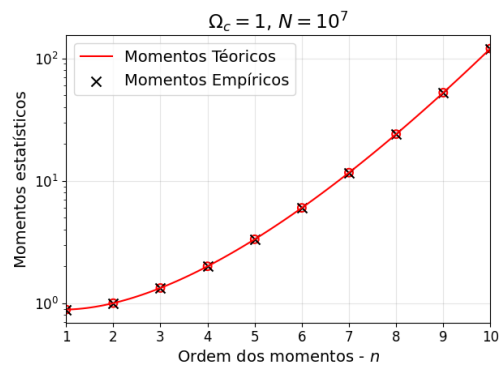


Figura 7: Momentos da envoltória Rayleigh, Caso 1

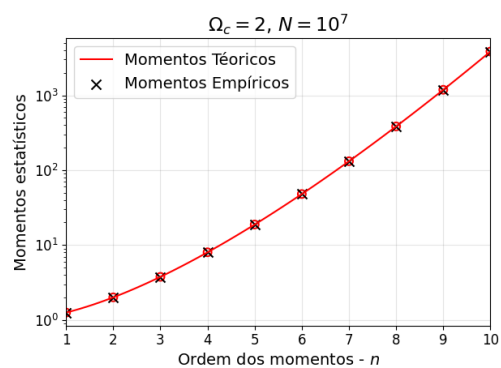


Figura 8: Momentos da envoltória Rayleigh, Caso 2

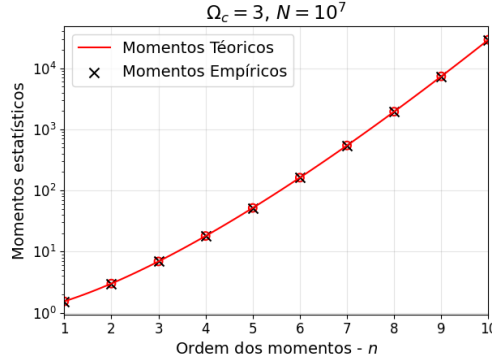


Figura 9: Momentos da envoltória Rayleigh, Caso 3

Pelas Figuras pode ser observado que os resultados teóricos e simulados estão de acordo. Além disso, fica clara a relação entre o ganho do canal Ω_c e o desvio padrão σ , pois quanto maior o ganho do canal, maior o desvio padrão observado.

3.2 Simulações com modelo de Rice

Para o modelo de desvanecimento Rice, foram utilizados quatro combinações de valores de Ω_c e K_R para teste:

- $\Omega_c = 1$ e $K_R = 1$
- $\Omega_c = 1$ e $K_R = 10$
- $\Omega_c = 3$ e $K_R = 1$
- $\Omega_c = 3$ e $K_R = 10$

Os gráficos de PDF, CDF e Momentos podem ser vistos nas Figuras 10, 14, 18 para o caso com $\Omega = 1$ e $K_R = 1$, nas Figuras 11, 15, 19 para o caso com $\Omega = 1$ e $K_R = 10$, nas Figuras 12, 16, 20 para o caso com $\Omega = 3$ e $K_R = 1$, e nas Figuras 13, 17, 21 para o caso com $\Omega = 3$ e $K_R = 10$.

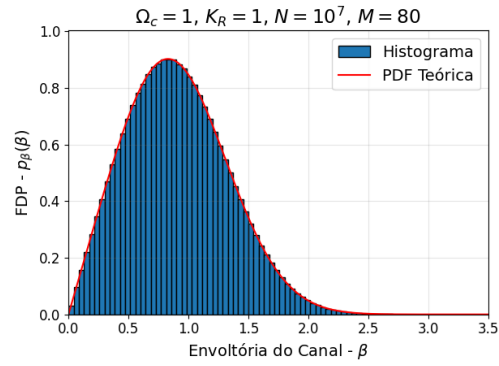


Figura 10: PDF da envoltória Rice, Caso 1

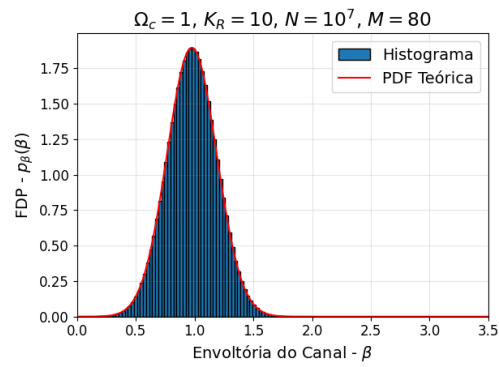


Figura 11: PDF da envoltória Rice, Caso 2

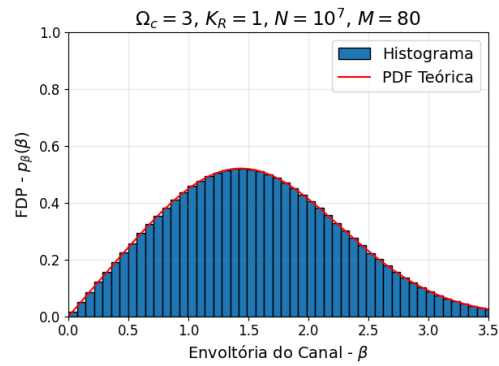


Figura 12: PDF da envoltória Rice, Caso 3

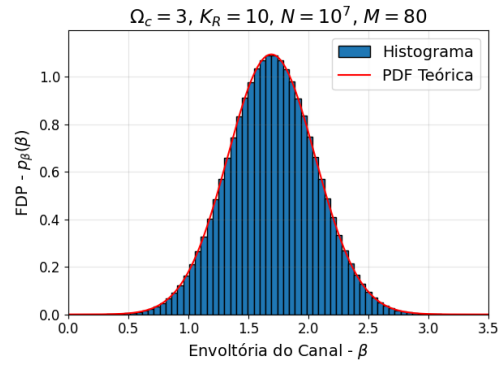


Figura 13: PDF da envoltória Rice, Caso 4

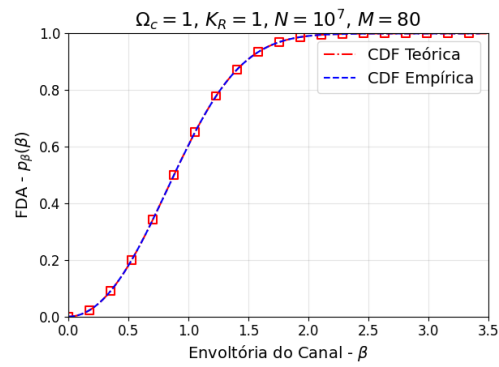


Figura 14: CDF da envoltória Rice, Caso 1

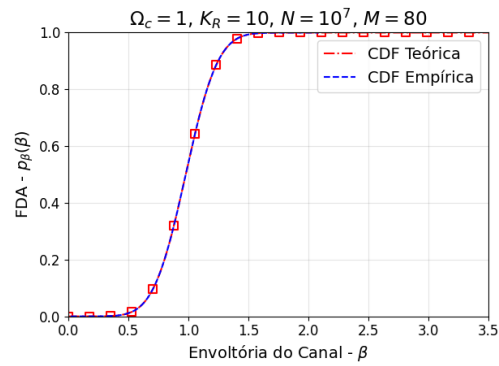


Figura 15: CDF da envoltória Rice, Caso 2

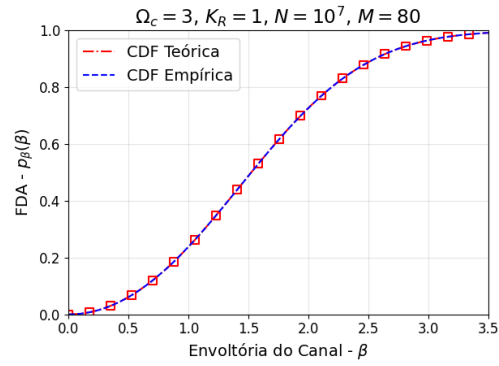


Figura 16: CDF da envoltória Rice, Caso 3

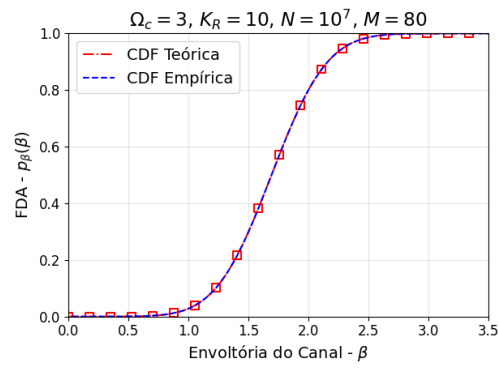


Figura 17: CDF da envoltória Rice, Caso 4

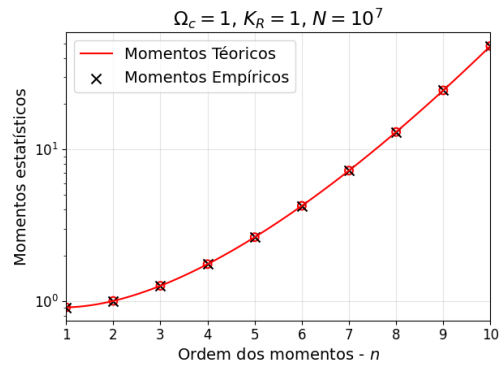


Figura 18: Momentos da envoltória Rice, Caso 1

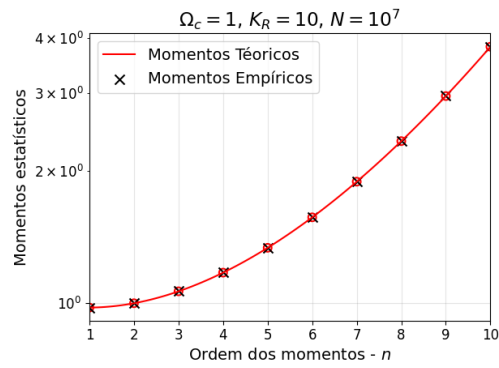


Figura 19: Momentos da envoltória Rice, Caso 2

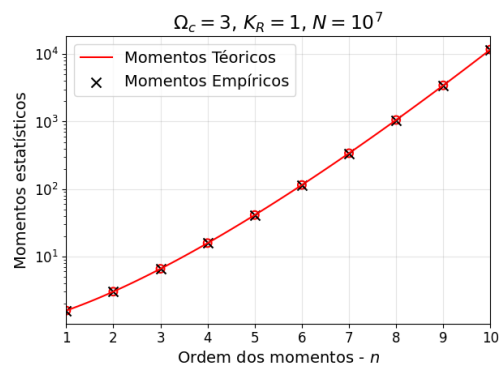


Figura 20: Momentos da envoltória Rice, Caso 3

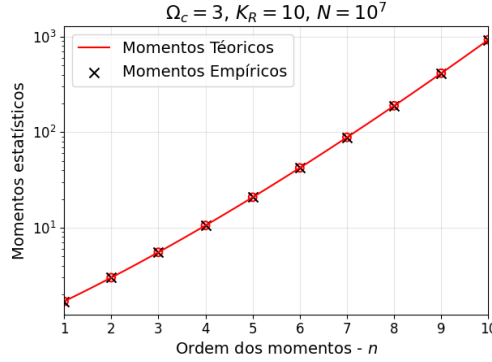


Figura 21: Momentos da envoltória Rice, Caso 4

A partir dessas Figuras, pode ser notado que um aumento no fator de Rice implica numa menor variância da envoltória. Isso faz sentido físico, pois a componente de linha de visada direta passa a ter maior impacto, diminuindo a variância da envoltória.

Também pode ser notado que um maior ganho de canal também impacta na variância, mas seu impacto é ainda mais claro na média da envoltória recebida. A média aumenta conforme o ganho do canal aumenta.

Por fim, nota-se que as Figuras 10 e 18, com $\Omega_c = 1$ e $K_R = 1$, mostra uma distribuição e momentos semelhantes às Figuras 1 e 7 do desvanecimento Rayleigh. Isso ocorre pois quanto menor o fator de Rice, mais a distribuição de Rice se aproxima da Rayleigh. No caso onde $K_R = 0$ pode ser verificado teoricamente que as duas distribuições são idênticas, com mesmos PDFs e momentos.

4 Conclusão

Os resultados simulados e teóricos estão de acordo, mostrando que os resultados teóricos de fato descrevem a envoltória do sinal banda base definido para os casos Rayleigh e Rice.

Foi possível notar que, para valores baixos de K_R o desvanecimento Rice se assemelha ao desvanecimento Rayleigh.

Sendo assim, os objetivos deste projeto foram concluídos com sucesso, tendo distribuições Rayleigh e Rice implementadas em código Python e seus resultados de acordo com os teóricos.