МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПРИМЕРЫ ПРОСТЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

άγεωμέτρητος μηδείς είσιτω

Рассмотрим несколько наиболее простых математических моделей, которые сводятся к решениям линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения обычно являются следствием каких-либо общих принципов, типа законов Ньютона, Кеплера, Архимеда, законов сохранения и т. п.

Всевозможные законы сохранения — законы, устанавливающие, что в изолированных системах определённые величины не возникают ниоткуда и не исчезают в никуда, — являются фундаментальными для физики и всего естествознания в целом. Таковы известные законы сохранения массы, энергии, импульса, заряда, барионного числа и т. д.

Эти законы ниоткуда строго логически не вытекают, они отражают всего лишь уверенность исследователей в определённом устройстве окружающего нас мира. Например, всегда до настоящего времени когда физики встречались на опыте с явным нарушением какого-либо закона сохранения, они вводили новые, поначалу только предполагаемые, формы энергии или материи, которые «восполняли утрату», и всегда в дальнейшем эти формы бывали обнаружены. Конечно, нет никаких строгих доказательств, что и дальше можно будет продолжать в том же духе, не столкнувшись в конце концов с противоречиями. Можно лишь утверждать, что этот путь *пока* оказался и успешным и плодотворным.

Законы Ньютона, как известно, являются *аксиомами* классической механики, из которых чисто логическим путём можно получить все утверждения механики, которые будут истинны для скоростей, малых по сравнению со скоростью света, и для объектов, размеры которых не слишком малы.

Вначале вспомним некоторые определения и понятия. *Импульсом* (количеством движения) $\mathbf{p}$ тела массы m называют векторную величину, определяемую соотношением

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — скорость приобретаемая телом, под действием данного импульса. Импульс — фундаментальное понятие в механике Ньютона: согласно второму закону Ньютона

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}, \tag{1}$$

т. е. сила, действующая на тело, равна *изменению* его импульса. Если же внешняя сила на тело не действует, то импульс остаётся неизменным, из (1) при $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ следует, что

$$m\mathbf{v} = \mathbf{const} \tag{2}$$

Для случая системы n тел (материальных точек) в отсутствие внешних сил справедлив *закон сохранения импульса*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i = \mathbf{const}, \tag{3}$$

где m_i, $\mathbf{v}_i$ — масса и скорость i-го тела.

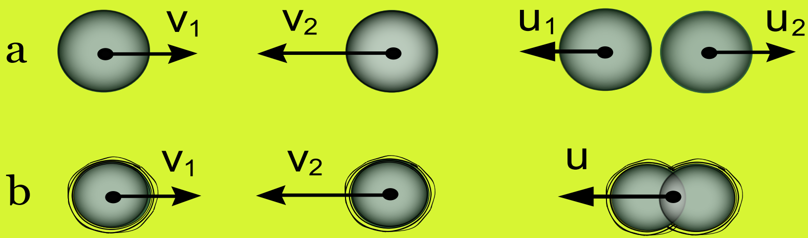
В частности для системы из двух взаимодействующих тел закон сохранения импульса принимает вид

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2, \tag{4}$$

при упругом столкновении (рис. a), и

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{u} \tag{5}$$

при неупругом (рис. b). Здесь $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}$ — скорости соответствующих тел до и после столкновения.



назад
закр.

Пример 1. Используем закон сохранения импульсов для построения простейшей модели, описывающей прямолинейное вертикальное движение ракеты. Сопротивлением воздуха и гравитацией пренебрегаем.

Пусть $m(t)$, v — масса ракеты с топливом и её скорость в момент времени t, u — скорость истечения продуктов сгорания топлива. Тогда закон сохранения, в проекциях на вертикаль, можно записать в виде

$$d(mv) + (u - v)dm = 0, \tag{6}$$

Решая (6) получим

$$v(m) = -u \ln m + C.$$

Для определения константы C положим $v(M) = 0$, где M — масса ракеты с полным запасом топлива, тогда $C = -u \ln M$ и получаем ***формулу Циолковского***

$$v(m) = u \ln \frac{M}{m(t)}. \tag{7}$$

Отметим, что данная модель, несмотря на свою простоту, позволяет сделать важный вывод относительно конструкции ракеты: даже в самых благоприятных условиях (в отсутствие гравитации и сопротивления воздуха, а также при нулевой полезной массе) ракета, как показывают расчёты по формуле (7) [1], не сможет достичь 1-й космической скорости ($\approx$ 8 км/с — скорость, которую необходимо придать телу, чтобы оно стало спутником Земли). Именно поэтому инженеры вынуждены были применить более сложные многоступенчатые конструкции ракет.

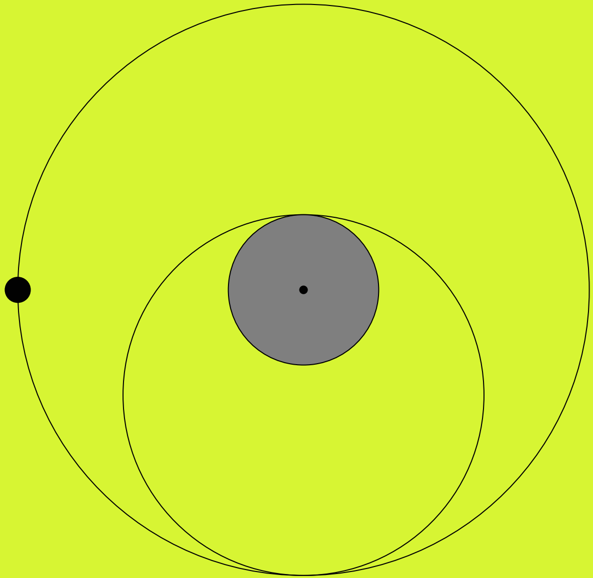
Пример 2. Рассмотрим использование *закона сохранения полной механической* (кинетическая + потенциальная) энергии и законов Кеплера на примере следующей несложной задачи [3].

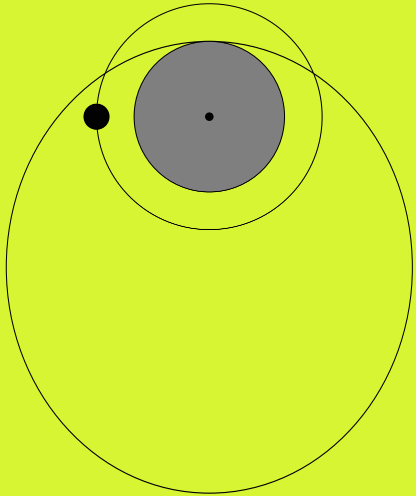
> *Космический корабль движется по круговой орбите радиуса r со скоростью v_0. Для перехода на траекторию приземления кораблю сообщают дополнительную скорость Δv, включая на короткое время тормозные двигатели. Нужно рассмотреть два способа приземления: 1) дополнительная скорость сообщается в направлении, противоположном орбитальной скорости; 2) дополнительная скорость сообщается вертикально вниз, по направлению к центру Земли. Определить дополнительную скорость, которую необходимо сообщить кораблю в обоих случаях для схода с орбиты и приземления.*

В нашей модели космический корабль и даже Земля будут фигурировать в виде материальных точек, что вполне достаточно для ответа на поставленный вопрос и даст возможность применить *законы Кеплера* и закон сохранения энергии в наиболее простой форме.

При сообщении кораблю дополнительной скорости Δv его орбита с круговой переходит на эллиптическую, один из фокусов которой, в соответствии с *первым законом Кеплера*, находится в центре Земли. Очевидно, что при любом способе торможения величина скорости будет наименьшей, если эллипс только коснётся границы плотных слоёв атмосферы.

Имеются два способа приземления: когда кораблю придаётся скорость Δv противоположно v_0 и когда Δv направляется к центру Земли, как показано на анимациях. Для определения дополнительной величины скорости Δv в каждом из случаев используем закон сохранения энергии, момента импульса и *второй закон Кеплера*, в соответствии с которыми при движении по орбите после придания дополнительной скорости секторная скорость остаётся постоянной.





назад
закр.

Для первого способа имеем

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = \frac{1}{2}mu^2 - mgR, \tag{8}$$

$$rv = Ru, \tag{9}$$

где $v = v_0 - \Delta v$ — скорость в апогее (в самой нижней точке эллиптической орбиты), R — радиус Земли, u — скорость в точке приземления. Из уравнений (8), (9) имеем

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}}\frac{1}{\sqrt{1+r/R}}. \tag{10}$$

Учитывая, что $\sqrt{gR^2/r}$ — скорость корабля на круговой орбите v_0, получаем

$$\Delta v = v_0\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+r/R}}\right). \tag{11}$$

Для второго способа при сообщении кораблю дополнительной скорости Δv, направленной к центру Земли, его секторная скорость не меняется. Для точки приземления это условие даёт

$$rv_0 = Ru. \tag{12}$$

Отсюда при учёте закона сохранения

$$\frac{1}{2}\,m\left(v_0^2 + \Delta v^2\right) - \frac{mgR^2}{r} = \frac{1}{2}\,mu^2 - mgR, \tag{13}$$

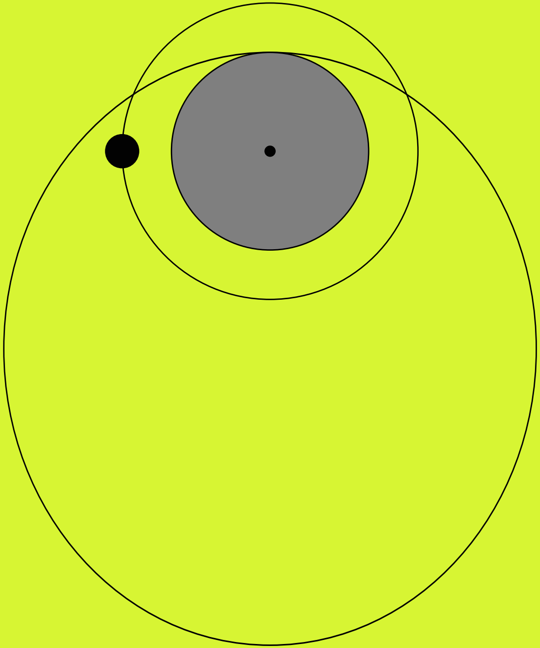
аналогично рассмотренному случаю, после несложных преобразований получаем

$$\Delta v^2 = v_0^2\left(\frac{r^2}{R^2} - 2\,\frac{r}{R} + 1\right), \tag{14}$$

откуда находим

$$\Delta v = v_0\left(\frac{r}{R} - 1\right). \tag{15}$$

Заметим также, что уравнение (14) имеет и ещё одно решение, совпадающее с найденным по абсолютной величине и противоположное по знаку. Простой



анализ показывает, что этому решению соответствует такой способ схода с орбиты, при котором дополнительная скорость будет направлена не к центру Земли, а в *противоположном* направлении, т. е. вверх. Так что в этом случае при получении этой дополнительной скорости корабль вначале станет удаляться от Земли по эллиптической орбите, а затем, двигаясь по ней всё равно попадёт в прежнюю точку приземления. Таким образом, построенная нами простая модель, кроме ответа на поставленный вопрос, «подсказывает» и ещё один способ для схода с орбиты.

Пример 3. Закон Мальтуса описывает одну из простейших моделей динамики популяций, в частности, населения Земли. В его основе лежит весьма простое утверждение: скорость изменения населения во времени t прямо пропорциональна текущей численности населения $N(t)$. Коэффициентом пропорциональности является разность рождаемости $\alpha(t)$ и смертности $\beta(t)$. Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{dN(t)}{dt} = \big(\alpha(t) - \beta(t)\big)N(t), \tag{16}$$

интегрирование которого даёт экспоненциальное решение

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \big(\alpha(t) - \beta(t)\big)dt\right), \tag{17}$$

где $N_0 = N(t_0)$ — численность населения в момент времени t_0. Очевидно, что при $\alpha = \beta$ имеем равновесие: $N(t) = N_0$, а при $\alpha > \beta$ население растёт по экспоненте, что и послужило в своё время источником опасений относительного будущего перенаселения Земли. Однако, не трудно видеть, что предложенная модель чрезвычайно груба и не отражает многих существенных черт такого сложнейшего процесса как динамика численности популяций. В частности, в ней никак не учитывается ограниченность ресурсов (например, пищи), необходимых для жизнедеятельности той или иной популяции.

Если же учитывать ограниченность ресурсов [1] и предположить, что:

— существует «равновесная» численность популяции N_p, которую могут обеспечить имеющиеся ресурсы;

— скорость изменения её численности пропорциональна численности, умноженной на величину отклонения от равновесного значения $1 - N/N_p$,

то получим

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_p}\right)N, \tag{18}$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Интегрирование (18) с учётом $N(0) = N_0$ даёт

$$N(t) = \frac{N_p N_0 e^{\alpha t}}{N_p - N_0(1 - e^{\alpha t})}. \tag{19}$$

Из последнего соотношения видно, что при любом N_0 численность стремится к своему равновесному значению, причём тем медленнее, чем N ближе к N_p, что и обеспечивает устойчивость равновесия.

Построенная модель более реалистична, чем модель Мальтуса, но при этом и более сложна, так как описывается нелинейным уравнением (18), решить которое в данном случае удалось аналитически, что является скорее исключением, а не правилом, для подавляющего большинства нелинейных уравнений. Графики соответствующих кривых приведены на следующем слайде, значения параметров: $N_0 = 1000$, $N_p = 5000$, $\alpha = 1{,}4$.

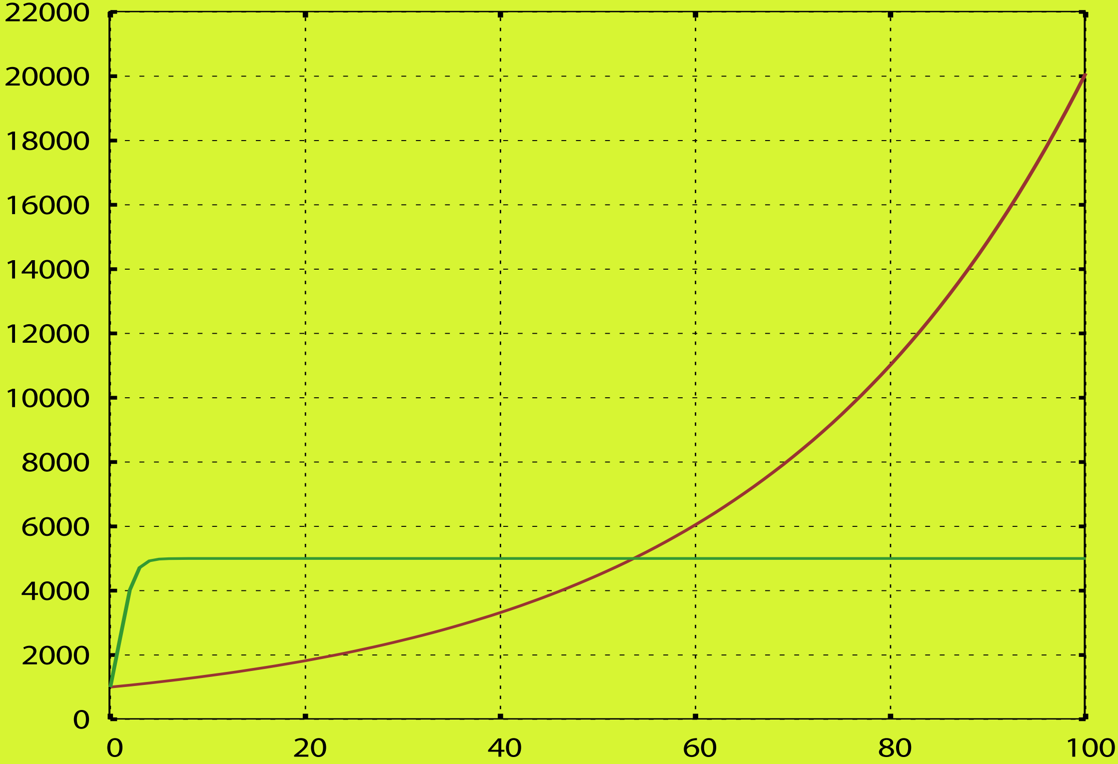


Рис. 1. Сравнение моделей роста: экспоненциальной ((17), *красная кривая*) *и равновесной при ограничениях* ((19), *зелёная кривая*).

Нужно отметить, что и последняя модель довольно груба, если её применять к человеческой популяции, так как способность человека размножаться в соответствии с имеющимися ресурсами является только частью описываемого процесса и рост населения определяется не только и не столько этими факторами, но и многими другими.

Попытки учесть эти факторы приводят к ещё более сложным моделям, например, в [4] предложена модель, в основе которой лежит предположение об однородности во времени функции $N(t)$, что выражается в масштабной инвариантности процесса роста населения, т. е. постоянстве *относительной* скорости роста

$$\lim_{\Delta N, \Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{N - N_1} \frac{t - t_1}{\Delta t} = \frac{d \ln |N - N_1|}{\ln(t - t_1)} = \alpha,$$

N_1, t_1 — опорные значения численности и времени, $\alpha = \mathrm{const}$. Указанное соотношение приводит к степенным законам роста. Анализ данной модели позволяет прогнозировать *стабилизацию* численности населения Земли на уровне примерно 14 млрд. в начале XXI-го века.

Вопросы

Вопрос 1. В чём причина смен времён года на Земле?

Вопрос 2. С одинаковой высоты падают два тела, масса одного из которых в два раза больше массы другого. На сколько быстрее упадёт более тяжёлое тело (сопротивления воздуха не учитывать)?

Вопрос 3. Два совершенно одинаковых и одинаково загруженных автомобиля двигаются с равной скоростью в противоположных направлениях, один — с востока на запад, другой — с запада на восток. Какой из них тяжелее?

Вопрос 4. Что произойдёт с уровнем воды в стакане, в котором плавает кусок льда, когда лёд растает?

Вопрос 5. В бассейне плавает лодка. Как изменится уровень воды в бассейне, если из лодки сбросить в бассейн камень?

Вопрос 6. Пружинные весы растягиваются в противоположных направлениях двумя одинаковыми силами по 100 кг. Что показывает стрелка весов?

Вопрос 7. Почему удар молотом по тяжёлой наковальне, положенной на грудь циркового артиста, оказывается для него безвредным, а такой же удар прямо по телу приводит к летальному исходу?

Вопрос 8. Можно ли запустить спутник так, чтобы он всё время находился над одним и тем же местом Земли?

Вопрос 9. При каком угле наклона к горизонту ствола пушки дальность полёта снаряда максимальна (сопротивления воздуха не учитывать)?

Список литературы

1. А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование. М, 1997.
2. В. И. Зенкин. Практический курс математического и компьютерного моделирования. Учеб. пособие. Калининград: изд. РГУ им. Канта, 2006.
3. Е. И. Бутиков и др. Физика в примерах и задачах. М.: Наука, 1983.
4. С. П. Капица. Феноменологическая теория роста населения Земли//УФН. т. 106, №1, стр. 68–79, 1996.