1. ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Пример 1. *Задачи о колебании стержня.* Упругий прямолинейный стержень длиной l выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что во время движения поперечные сечения остаются параллельными плоскости, перпендикулярной к оси стержня, поставить задачу для определения малых продольных колебаний стержня при $t > 0$. Рассмотреть случаи, когда концы стержня :

1) закреплены жестко,

2) двигаются в продольном направлениям по заданным законам,

3) свободны,

4) закреплены упруго, т.е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению.

Решение. Пусть ось x совпадает с направлением оси стержня, и пусть x – координата сечения pq, когда оно находится в покое (см. рис.1). Мы изучаем малые продольные колебания стержня. Это значит, что внешние силы и силы инерции можно считать направленными вдоль оси стержня. Обозначим через $u(x,t)$ смещение этого стержня в момент t, тогда в рамках нашего предположения смещение сечения в точке x будет

$$u(x + \Delta x, t) \approx u(x,t) + u_x(x,t)\Delta x.$$

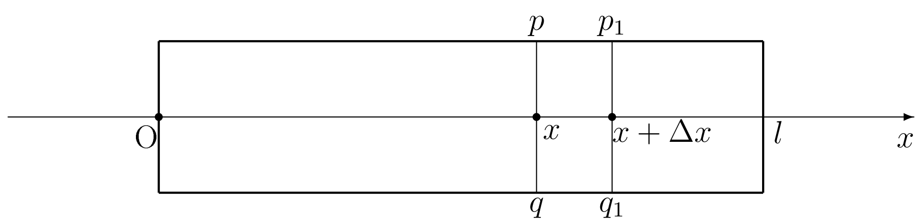

Рис.1

По закону Гука, натяжение в этом сечении равно $T = ES\delta$, где S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала стержня, а δ – относительное удлинение стержня в сечении x, т.е. предел отношения приращения длины участка стержня pq, заключенного между сечениями с координатами $x_1 = x$ и $x_2 = x + \Delta x$, — Δl, к его первоначальной длине – $x_2 - x_1 = \Delta x$.

$$\Delta l = [(x_2 + u(x_2,t)) - (x_1 + u(x_1,t)) - \Delta x] = u(x + \Delta x, t) - u(x,t).$$

Поэтому относительное удлинение стержня в сечении x будет равно $u_x(x,t)$.

Уравнение колебаний стержня получим, если приравняем к нулю сумму всех сил, включая силы инерции, действующие на участок pq p_1q_1. Равнодействующая сил натяжения равна

$$T(x + \Delta x, t) - T(x,t) = ES[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t)] \approx ESu_{xx}(x,t)\Delta x.$$

Пусть $p(x,t)$ – объемная плотность внешних сил, а ρ – объемная плотность стержня. Тогда на участок pq p_1q_1 действует внешняя сила $Sp(x,t)\Delta x$ и сила инерции – $\rho(x)Su_{tt}(x,t)\Delta x$. Сумма всех сил, по принципу Даламбера, равна нулю, т.е.

$$[ESu_{xx}(x,t) + p(x,t)S - \rho(x)Su_{tt}(x,t)]\Delta x = 0. \qquad (1.1)$$

Отсюда

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = Eu_{xx}(x,t) + p(x,t), \tag{1.2}$$

кроме того, $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям :

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{1.3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные функции. Если $\rho(x) = \rho = \mathrm{const}$ (однородный стержень), то уравнение принимает вид

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + g(x,t), \tag{1.4}$$

где

$$a^2 = E/\rho, \quad g(x,t) = p(x,t)/\rho. \tag{1.5}$$

Вывод краевых условий :

1. В случае жесткого закрепления отклонения концов не происходит и, следовательно, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$.

2. $u|_{x=0} = \mu_1(t)$, $u|_{x=l} = \mu_2(t)$, где функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ определяют закон движения концов.

3. В случае свободных концов составляем баланс действующих сил для обоих концов. На левом конце равнодействующая упругих сил натяжения равна $T(\Delta x) - T(0) = ESu_x(\Delta x, t)$, внешняя сила $Sp(0,t)\Delta x$ и сила инерции – $\rho S u_{tt}(0,t)\Delta x$. Сумма всех сил, действующих на выделенный элемент, равна нулю. Отсюда

$$ESu_x(\Delta x, t) + Sp(0,t)\Delta x - \rho S u_{tt}(0,t)\Delta x = 0, \tag{1.6}$$

и при $\Delta x \to 0$ получаем $u_x|_{x=0} = 0$. Аналогично рассуждая, на правом конце получаем условие $u_x|_{x=l} = 0$.

4. В левой части уравнения (1.6) добавится сила – $ku(0,t)$. После перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ получим

$$ESu_x(0,t) - ku(0,t) = 0 \text{ или } (u_x - hu)|_{x=0} = 0, \text{ где } h = k/ES.$$

На правом конце $T(l) - T(l - \Delta x) = -ESu_x(l - \Delta x, t)$. Следовательно,

$$-ESu_x(l - \Delta x, t) + Sp(l,t)\Delta x - \rho S u_{tt}(l,t)\Delta x - ku(l,t) = 0,$$

и при $\Delta x \to 0$ получаем второе граничное условие :

$$(u_x + hu)|_{x=l} = 0.$$

Пример 2. *Задачи о колебании струны.* Струна длиной l натянута с силой T_0 и находится в прямолинейном положении равновесия. В момент времени $t = 0$ точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости. Поставить задачу для определения малых поперечных колебаний точек струны при $t > 0$, если концы струны :

1) закреплены жестко,

2) свободны, т.е. могут свободно перемещаться по прямым, параллельным направлению отклонения u,

3) закреплены упруго, т.е. каждый конец испытывает со стороны заделки сопротивление, пропорциональное отклонению и направленное противоположно ему.

Сопротивлением среды и действием силы тяжести пренебречь.

Решение. Пусть ось x совпадает с направлением струны в положении равновесия. Под струной понимается тонкая нить, которая не сопротивляется изгибу, не связанному с изменением ее длины. Это значит, что если мысленно разрезать струну в точке x , то действие одного участка струны на другой (сила натяжения T) будет направлено по касательной к струне в точке x. Для вывода уравнения колебаний выделим участок струны от x до $x+\Delta x$ (см. рис.2) и спроектируем все действующие на этот участок силы (включая и силы инерции) на оси координат. Согласно принципу Даламбера, сумма проекций всех сил должна равняться нулю. Мы изучаем только поперечные колебания, поэтому можно считать внешние силы и силу инерции направленными вдоль оси u. Примем во внимание также, что рассматриваются малые колебания струны. Это значит, что в процессе вывода уравнения мы будем пренебрегать квадратами величины $u_x(x,t)$. Длина S дуги AB выражается интегралом $S = \int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}dx \approx \Delta x$. Это значит, что удлинения участков струны в процессе колебания не происходит, и следовательно, по закону Гука, величина натяжения $T_0 = |\vec{T}|$ не зависит ни от времени, ни от x. Найдем проекцию всех сил в момент времени t на ось u. Проекции сил натяжения равны : $T_0[\sin\alpha(x+\Delta x) - \sin\alpha(x)]$. С точностью до бесконечно малых второго порядка $\sin\alpha(x) \approx \operatorname{tg}\alpha(x) = u_x(x,t)$.

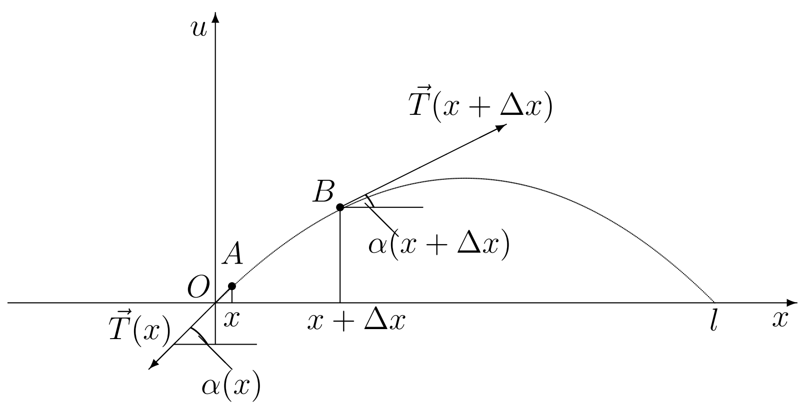

Рис.2

Поэтому

$$T_0[\sin\alpha(x+\Delta x) - \sin\alpha(x)] \approx T_0(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)) \approx T_0 u_{xx}(x,t)\Delta x.$$

Пусть $p(x,t)$ – непрерывная линейная плотность внешних сил. Тогда на участок AB вдоль оси u действует сила $p(x,t)\Delta x$. Пусть ρ – непрерывная линейная плотность струны, тогда масса m участка AB равна $m = \rho\Delta x$. Для нахождения силы инерции участка AB воспользуемся выражением $-mu_{tt}$. Таким образом, выражение $-\rho u_{tt}\Delta x$ задает проекцию на ось u силы инерции, а проекция всех сил на ось u имеет вид :

$$[T_0 u_{xx} + p(x,t) - \rho u_{tt}]\Delta x = 0.$$

Следовательно,

$$\rho u_{tt} = T_0 u_{xx} + p(x,t). \tag{1.7}$$

Это и есть уравнение вынужденных колебаний струны. Если $\rho = \mathrm{const}$, то уравнение имеет вид :

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x,t), \tag{1.8}$$

где
$$a^2 = T_0/\rho, \quad g(x,t) = f(x,t)/\rho.$$
Кроме того, функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальным условиям :
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$
где $\varphi(x),\ \psi(x)$–заданные функции.

Вывод краевых условий :

1. Если концы струны жестко закреплены, то отклонение в точках $x = 0$ и $x = l$ равно нулю. Следовательно,
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

2. Пусть левый конец струны $x = 0$ прикреплен к кольцу пренебрежимо малой массы, которое может свободно, без трения двигаться по вертикальному стержню, т.е. левый конец свободен. Тогда вертикальная составляющая силы действия стержня на левый конец равна нулю. Следовательно, по третьему закону Ньютона, вертикальная составляющая силы натяжения струны $T_0u_x(0,t) = 0$. Поэтому условие при $x = 0$ имеет вид :
$$u_x|_{x=0} = 0.$$

Аналогично получается условие на правом конце.

3. Рассмотрим участок $(0, \Delta x)$ вблизи левого конца струны и так же, как при выводе уравнения, приравняем проекцию всех сил, действующих на этот участок, на ось u, нулю. К левой части уравнения добавится еще один член $-ku(0,t)$, отвечающий за действие упругих сил заделки.Тогда
$$T_0[u_x(\Delta x,t) - u_x(0,t)] + [p(x,t) - \rho u_{tt}]\Delta x - ku(0,t) = 0.$$
Так же, как и в пункте 2, имеем $T_0u_x(0,t) = 0$, и при $\Delta x \to 0$ получим
$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad h = k/T_0.$$
На правом конце проекция всех сил имеет вид :
$$T_0[u_x(l,t) - u_x(l - \Delta x,t)] + [p(x,t) - \rho u_{tt}]\Delta x - ku(l,t) = 0.$$
Так как $T_0u_x(l,t) = 0$, то при $\Delta x \to 0$ получим $(u_x + hu)|_{x=l} = 0$.

Пример 3. *Задачи о распространении тепла.* Вывести уравнение теплопроводности в изотропной в отношении теплопроводности среде, занимающей ограниченную область W с границей Γ, если задана плотность источников тепла $F(x,t)$. Получить краевые условия для случаев :

1) на границе поддерживается заданная температура $\psi(x,t)$,

2) на границе задан тепловой поток $h(x,t)$,

3) на границе происходит теплообмен по закону Ньютона.

Решение. Возьмем какую-нибудь поверхность S и на ней малый элемент ΔS. Вывод уравнения базируется на законе Фурье, согласно которому количество тепла ΔQ, проходящее за время Δt через элемент ΔS, определяется формулой :
$$\Delta Q = -k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial \vec{n}}\Delta S\Delta t, \tag{1.9}$$
где $\vec{n}$ – нормаль к элементу, направленная в сторону передачи тепла, $k(x)$ – коэффициент внутренней теплопроводности, $u(x,t)$ – температура тела в точке $x =$

(x_1, x_2, x_3) в момент времени t. Изотропность тела в отношении теплопроводности означает, что $k(x)$ зависит только от точки x тела и не зависит от направления нормали к поверхности S в этой точке. Обозначим через q тепловой поток, т.е. количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности в единицу времени. Тогда закон Фурье можно записать в виде :

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}. \tag{1.10}$$

Для вывода уравнения выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и составим для него уравнение баланса тепла. Через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), по закону Фурье, входит количество тепла, равное

$$\Delta Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_S k(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\,S,$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S. Пусть $F(x,t)$ – плотность источников тепла, т.е. количество поглощаемого или выделяемого в единицу времени в единице объема тепла. Тогда количество тепла, поглощаемого или выделяемого в объеме V за промежуток времени (t_1, t_2), равно

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_V F(x,t)d\,x.$$

Таким образом, за промежуток времени (t_1, t_2) в объеме V прибавилось тепла $\Delta Q_3 = \Delta Q_1 + \Delta Q_2$. То же количество тепла можно определить через приращение температуры в объеме V за тот же промежуток времени. Пусть $\rho(x)$ – плотность вещества, $c(x)$ – теплоемкость. Тогда

$$\Delta Q_3 = \int\limits_V \rho(x)c(x)[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)]dx = \int\limits_V \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho(x)c(x)u_t(x,t)dtdx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_V \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho(x)c(x)u_t(x,t)d\,td\,x = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_S k(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\,S + \int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_V F(x,t)d\,x.$$

Применив ко второму интегралу формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_V [\rho(x)c(x)u_t(x,t) - \mathrm{div}(k(x)\mathrm{grad}u) - F(x,t)]d\,xd\,t = 0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, а объем V и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки x рассматриваемого тела и любого момента времени t должно быть

$$\rho(x)c(x)u_t(x,t) = \mathrm{div}(k(x)\mathrm{grad}u) + F(x,t). \tag{1.11}$$

Если тело однородно, то $\rho(x) = \mathrm{const}$, $c(x) = \mathrm{const}$, $k(x) = \mathrm{const}$, и уравнение принимает вид :

$$u_t(x,t) = a^2\Delta u + f(x,t), \tag{1.12}$$

где

$$a^2 = k/\rho c, \quad f(x,t) = F(x,t)/\rho c.$$

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса распространения тепла необходимо кроме уравнения (1.11) или (1.12), задать начальную температуру, т.е.

$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

и температурный режим на границе.

Вывод краевых условий :

1. Для случая, когда на границе Г поддерживается заданная температура $\psi(x,t)$, граничное условие выглядит так :

$$u|_\Gamma = \psi(x,t).$$

2. В том случае, когда на границе задан тепловой поток $h(x,t)$, граничное условие имеет вид :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = h(x,t),$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль. В частности, если тело теплоизолировано на границе, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = 0.$$

3. В случае, если окружающее тело пространство имеет заданную температуру u_1, то принято считать, что на границе происходит теплообмен по закону Ньютона, т.е. тепловой поток $q|_\Gamma = \alpha(u|_\Gamma - u_1)$, где α – коэффициент внешней теплопроводности. С другой стороны, согласно (1.10), $q = -k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$. Следовательно, граничное условие выглядит так :

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu\right)\right|_\Gamma = \varphi_1 \quad \text{где } h = \frac{\alpha}{k},\ \varphi_1 = \frac{\alpha u_1}{k}.$$

Пример 4. *Задачи о диффузии.* Вывести уравнение диффузии вещества в неподвижной среде, занимающей ограниченную область W с границей Г, если задана плотность источников $F(x,t)$ и диффузия происходит с поглощением (например, частицы диффундирующего вещества вступают в реакцию с веществом среды), причем скорость поглощения в каждой точке пространства $x \in W$ пропорциональна плотности $u(x,t)$ диффундирующего вещества. Получить краевые условия для случаев :

1) на границе области поддерживается заданная плотность,

2) граница непроницаема,

3) граница полупроницаема, причем диффузия через границу происходит по закону, подобному закону Ньютона для конвективного теплообмена.

Решение. Вывод уравнения основывается на законе Нэрнста для потока частиц вещества. Обозначим через q поток частиц вещества, т.е. количество вещества, проходящего через единицу площади поверхности в единицу времени. Тогда закон Нэрнста можно записать в виде :

$$q = -D(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \tag{1.13}$$

где $D(x)$ – коэффициент диффузии. Выделим, как и при решении примера 3, внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и составим для него уравнение баланса количества диффундирующего вещества. Через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), по закону Нэрнста, входит количество вещества, равное

$$\Delta Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_S D(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} d\,S.$$

Приток вещества за счет действия источников равен

$$\Delta Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_V F(x,t) d\,x,$$

а убыль вещества в выделенном объеме за счет поглощения среды–

$$\Delta Q_3 = -\int\limits_{t_1}^{t_2} d\,t \int\limits_V r(x) u(x,t) d\,x,$$

где $r(x)$ – коэффициент поглощения среды. Таким образом, за промежуток времени (t_1, t_2) в объеме V приращение количества диффундирующего вещества равно

$$\Delta Q_4 = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3.$$

Вычисляя то же количество вещества через приращение плотности за промежуток времени (t_1, t_2), получим

$$\Delta Q_4 = \int\limits_V \kappa(x)[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)] d\,x = \int\limits_V \int\limits_{t_1}^{t_2} \kappa(x) u_t(x,t) d\,t d\,x,$$

где $\kappa(x)$ – коэффициент пористости среды, характеризующий то, какую часть выделенного объема среды занимают частицы диффундирующего вещества. Поступая далее, как и в примере 3, получаем уравнение :

$$\kappa u_t(x,t) = \mathrm{div}(D(x)\mathrm{grad} u) - r(x)u(x,t) + F(x,t). \tag{1.14}$$

Это и есть искомое уравнение диффузии. Из физических соображений ясно, что для однозначного описания процесса диффузии необходимо знать начальное распределение плотности

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

и режим диффузии на границе области.

Краевые условия имеют вид :

$$1.\ u|_\Gamma = \psi(x,t),\ 2.\ \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = 0,\ 3.\ \left.\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu\right)\right|_\Gamma = \varphi_1(x,t).$$

Пример 5. *Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.*

1. Установившаяся температура в однородном теле. В примере 3 было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном теле при наличии источников тепла имеет вид :

$$u_t(x,t) = a^2 \Delta u + f(x,t). \tag{1.15}$$

Предположим, что плотность источников тепла не зависит от времени, т.е. $f(x,t) \equiv f(x)$. Допустим теперь, что температура в каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ внутри тела установилась, т.е. она не меняется с течением времени. Тогда $u_t = 0$ и уравнение (1.15) примет вид

$$-\Delta u = g(x), \quad g(x) = f(x)/a^2. \tag{1.16}$$

Таким образом, уравнению Пуассона (1.16) удовлетворяет температура, установившаяся в однородном теле. Если источников тепла нет, то $g(x) = 0$ и для температуры $u(x)$ мы имеем уравнение Лапласа :

$$\Delta u = 0. \tag{1.17}$$

Для определения u теперь не надо уже задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени. Если на границе Γ поддерживается заданный температурный режим, то мы получаем задачу определения решения уравнения (1.16) или (1.17) по его значениям на границе рассматриваемой области

$$u|_\Gamma = \varphi(x), \tag{1.18}$$

которая называется задачей Дирихле. Если на границе Γ задан тепловой поток, то приходим к задаче определения решения уравнения (1.16) или (1.17), удовлетворяющего граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = \varphi_1(x), \tag{1.19}$$

которая называется задачей Неймана.

2. Электростатическое поле проводников. Как известно, в отношении электрических свойств все тела делятся на две категории – проводники и диэлектрики, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов – электрический ток.

Из основного свойства проводников прежде всего следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равной нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность $\vec{E}$ привела бы к возникновению тока; между тем распространение тока в проводнике связано с диссипацией энергии и потому не может само по себе поддерживаться в стационарном состоянии.

Отсюда в свою очередь следует, что все заряды в проводнике должны быть распределены по его поверхности : наличие зарядов в проводнике непременно привело бы к возникновению электрического поля в нем; распределение же зарядов по поверхности может быть осуществленно таким образом, чтобы создаваемые ими внутри проводника поля взаимно компенсировались.

Тем самым задача электростатики проводников сводится к определению электрического поля в пустоте, вне проводников и к определению распределения зарядов по поверхности проводников.

Постоянное электрическое поле в пустоте удовлетворяет уравнениям

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0, \ \mathrm{rot}\vec{E} = 0,$$

т. е. является потенциальным полем с потенциалом u, связанным с напряженностью соотношением

$$\vec{E} = -\mathrm{grad} u$$

и удовлетворяющим уравнению Лапласа (1.17).

Граничные условия для поля $\vec{E}$ на поверхности проводника следуют из самого уравнения $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$, справедливого и вне, и внутри тела. Из этого уравнения следует, что компоненты E_x и E_y непрерывны на поверхности, а поскольку внутри проводника вообще $\vec{E} = 0$, то мы приходим к выводу, что касательные компоненты внешнего поля на его поверхности должны обращаться в нуль :

$$\vec{E}_t = 0.$$

Таким образом, электростатическое поле должно быть нормальным к поверхности проводника в каждой ее точке. Поскольку $\vec{E} = -\mathrm{grad}u$, то это значит, что потенциал поля должен быть постоянным вдоль всей поверхности каждого данного проводника. Другими словами, поверхность однородного проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность электростатического поля. Следовательно, если граница области Γ состоит из нескольких проводников $\Gamma = \sum \Gamma_i$, то на каждой Γ_i потенциал постоянен и равен φ_i, т. е.

$$u|_{\Gamma_i} = \varphi_i, \qquad \text{для} \qquad \forall\, i. \tag{1.20}$$

В этом случае мы имеем задачу Дирихле (1.18).

Нормальная же к поверхности компонента поля весьма просто связана с плотностью распределенного по поверхности заряда. Эта связь получается из уравнения $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$, где ρ – плотность заряда. В интегральном виде это уравнение означает, что поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в ограниченном этой поверхностью объеме (умноженному на 4π). Применив эту теорему к элементу объема, заключенному между двумя бесконечно близкими единичными площадками, примыкающими с обеих сторон к поверхности проводника, и учитывая, что на внутренней площадке $\vec{E} = 0$, найдем, что $E_n = 4\pi\sigma$, где σ – поверхностная плотность заряда, т. е. заряд на единице площади поверхности проводника. Таким образом, распределение зарядов по поверхности проводника дается формулой

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$$

(производная от потенциала берется в направлении внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности). В этом случае мы имеем граничные условия, отвечающие задаче Неймана (1.19) :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\Gamma} = -4\pi\sigma(x). \tag{1.21}$$

Если на части границы заданы условия (1.20) а на другой части – (1.21), то получается краевая задача третьего рода.

Решить задачи

1.1. Начиная с момента времени $t = 0$ один конец прямолинейного упругого однородного стержня совершает продольные колебания по заданному закону, а к другому приложена сила $F(t)$, направленная по оси стержня. В момент времени $t = 0$ поперечные сечения стержня были неподвижны и находились в неотклоненном положении. Поставить краевую задачу для определения малых продольных отклонений точек стержня при $t > 0$.

1.2. Составить уравнение продольных колебаний стержня, у которого площадь поперечного сечения есть заданная функция от x. Материал стержня считать однородным.

1.3. Поставить краевую задачу о продольных колебаниях упругого стержня, имеющего форму усеченного конуса, если концы стержня закреплены неподвижно и стержень выведен из состояния покоя тем, что его точкам в момент времени $t = 0$ сообщены начальные скорости и продольные отклонения. Длина стержня равна l, радиусы оснований R, r $(R > r)$, материал стержня однороден. Деформацией поперечных сечений пренебречь.

1.4. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого жестко закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

1.5. Два полуограниченных однородных упругих стержня с одинаковыми поперечными сечениями соединены жестко торцами и составляют один неограниченный стержень. Пусть ρ_1, E_1 – плотность и модуль упругости одного из них, а ρ_2, E_2 – другого. Поставить краевую задачу для определения отклонений поперечных сечений неограниченного стержня от их положения равновесия, если в начальный момент времени поперечным сечениям сообщены некоторые продольные смещения и скорости.

1.6. Тяжелый стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех точках равно нулю. В момент времени $t = 0$ стержень освобождается. Поставить краевую задачу о вынужденных колебаниях стержня.

1.7. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на обоих концах, в среде с сопротивлением, пропорционльным первой степени скорости.

1.8. Находящаяся в горизонтальной плоскости невесомая струна с постоянной угловой скоростью вращается вокруг вертикальной оси, причем один конец струны прикреплен к некоторой точке оси, а другой свободен. В начальный момент времени $t = 0$ точкам этой струны сообщаются малые отклонения и скорости по нормалям к этой плоскости. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от плоскости равновесного движения.

1.9. Пусть в точке $x = 0$ бесконечной однородной струны находится шарик массы m_0. Начальные скорости и начальные отклонения точек струны равны нулю. Поставить краевую задачу для определения отклонений точек струны от их положения равновесия в случаях :

1) начиная с момента времени на шарик действует сила;

2) в начальный момент времени шарик получает импульс в поперечном направлении.

1.10. Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом $x = 0$ на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Доказать, что уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия имеет вид :

$$u_{tt} = g(xu_x)_x + \omega^2 u,$$

где g – ускорение свободного падения.

1.11. Поставить краевую задачу о поперечных колебаниях тяжелой однородной струны относительно вертикального положения равновесия, если ее верхний конец жестко закреплен, а нижний свободен.

1.12. Дан тонкий однородный стержень длиной l, начальная температура которого $f(x)$. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня, если на конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура u_0, а на боковой поверхности и на конце $x = l$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой нулевой температуры.

1.13. Внутри однородного шара радиуса R, начиная с момента времени $t = 0$, действуют источники тепла с равномерно распределенной постоянной плотностью Q. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки до центра шара. Рассмотреть случаи :

1) на поверхности шара поддерживается нулевая температура;

2) на поверхности шара происходит теплообмен (по закону Ньютона) с окружающей средой нулевой температуры.

1.14. Дан однородный шар радиуса R с начальной температурой, равной нулю. Поставить краевую задачу о распределении температуры при $t > 0$ внутри шара, если :

1) шар нагревается равномерно по всей поверхности постоянным тепловым потоком q;

2) на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой зависит только от времени.

1.15. Поставить краевую задачу об определении распределения потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $0 < x < a, 0 < y < b$, если :

1) две противоположные грани $y = 0, y = b$ заземлены, левая грань $x = 0$ имеет потенциал φ_0, а на правой $x = a$ плотность зарядов равна σ_0;

2) нижняя грань $y = 0$ имеет потенциал φ_0, на верхней $y = b$ плотность зарядов равна нулю, левая грань $x = 0$ заземлена, а на правой $x = a$ плотность зарядов равна σ_0.

Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

1.16. Поставить краевую задачу об определении установившейся концентрации неустойчевого газа в цилиндре радиуса r_0 и высотой h, если в цилиндре имеются источники газа постоянной мощности Q, а скорость распада газа пропорциональна его концентрации u, для случаев, когда :

1) на основаниях цилиндра $z = 0$ и $z = h$ концентрация газа поддерживается равной нулю, а боковая поверхность цилиндра газонепроницаема;

2) основания $z = 0$ и $z = h$ пористы (через них происходит диффузия по закону, аналогичному закону Ньютона для конвективного теплообмена), а на боковой поверхности поддерживается нулевая концентрация газа, при этом концентрация рассматриваемого газа во внешней среде равна нулю.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x)$$

в каждой фиксированной точке x_0 из области G может быть приведено к каноническому виду неособым линейным преобразованием. Для нахождения этого преобразования сопоставим уравнению квадратичную форму

$$Q(\vec{t}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) t_i t_j$$

и найдем линейное преобразование $\vec{t} = C\vec{y}$, приводящее ее к каноническому виду (например, по алгоритму Лагранжа). Тогда преобразование $\vec{\xi} = C^T \vec{x}$ приведет уравнение к каноническому виду, причем если в переменных y_i квадратичная форма примет вид $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2$, то в переменных ξ_i сумма слагаемых, содержащих вторые производные, запишется в виде $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_{x_i x_i}$.

Из линейной алгебры известно, что количество положительных , отрицательных и равных нулю коэффициентов α_i являются инвариантами формы. Поэтому эти числа не зависят от вида линейного преобразования и характеризуют дифференциальное уравнение. Уравнение называется эллиптическим, если все α_i одного знака. Оно называется гиперболическим, если все значения α_i имеют один знак, за исключением одного, имеющего противоположный знак. Если квадратичная форма сингулярна, т.е. есть коэффициенты α_i равные нулю, то оно называется параболическим.

Если коэффициенты $a_{ij}(x) \equiv a_{ij}$ постоянны в G, то уравнение приводится к каноническому виду во всех точках G одним и тем же линейным преобразованием C^T.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение и определить его тип : $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.

Решение. Выпишем соответствующую квадратичную форму и приведем ее к каноническому виду по алгоритму Лагранжа :

$$Q = x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 + 6z^2 = (x + y - z)^2 + (y + z)^2 + (2z)^2.$$

Введем новые переменные : $\xi = x + y - z,\ \eta = y + z,\ \varsigma = 2z$. Выразим старые переменные через новые : $z = \varsigma/2,\ y = \eta - \varsigma/2,\ x = \xi - \eta + \varsigma$. Выпишем матрицу преобразования $A\vec{\xi} = \vec{x}$ и найдем транспонированную A^T :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Искомая замена $\vec{\xi} = A^T \vec{x}$ будет $\xi = x,\ \eta = y - x,\ \varsigma = x - y/2 + z/2$. Сразу выписываем канонический вид :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\varsigma\varsigma} = 0,$$

причем тип уравнения определяется уже знаками при квадратах в квадратичной форме Q. В данном случае уравнение – эллиптического типа.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение и определить его тип : $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0$.

Решение. Выпишем соответствующую квадратичную форму и приведем ее к каноническому виду :

$$Q = 4x^2 - 4xy - 2yz = (2x - y)^2 - (y + z)^2 + z^2.$$

Введем новые переменные : $\xi = 2x - y,\ \eta = y + z,\ \varsigma = z$. Выразим старые переменные через новые : $z = \varsigma,\ y = \eta - \varsigma,\ x = \frac{1}{2}(\xi + \eta - \varsigma)$. Выпишем матрицу преобразования

$A\vec{\xi}=\vec{x}$ и найдем транспонированную A^T :

$$A=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая замена будет $\xi=x/2,\ \eta=x/2+y,\ \varsigma=-x/2-y+z$. Пересчитываем первые производные :

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y+u_\varsigma\varsigma_y=u_\eta-u_\varsigma,\ u_z=u_\xi\xi_z+u_\eta\eta_z+u_\varsigma\varsigma_z=u_\varsigma.$$

Выписываем канонический вид гиперболического уравнения :

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+u_{\varsigma\varsigma}+u_\eta=0.$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение и определить его тип : $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$.

Решение. Выпишем соответствующую квадратичную форму

$$Q=xy-xz.$$

В этом случае форма Q сингулярна, так как

$$\det Q=\det\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0.$$

Поэтому уравнение относится к параболическому типу. Число выделяемых полных квадратов должно равняться рангу матрицы Q. В данном случае выделяем два, так как ранг Q равен 2 :

$$Q(x,y,z)=x(y-z)=\left[\frac{1}{2}(x+y-z)\right]^2-\left[\frac{1}{2}(-x+y-z)\right]^2.$$

Вводим две новые переменные : $\xi=\frac{1}{2}(x+y-z)$ и $\eta=\frac{1}{2}(-x+y-z)$. Третью переменную надо выбрать так, чтобы преобразование A было неособым, т.е. $\det A\neq 0$. В данном случае подходит замена переменной $\varsigma=z$. Обратная замена будет $z=\varsigma,\ y=\xi+\eta+\varsigma,\ x=\xi-\eta$. Выпишем матрицу преобразования $A\vec{\xi}=\vec{x}$ и найдем транспонированную A^T :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что $\det A\neq 0$. Искомая замена $\vec{\xi}=A^T\vec{x}$ будет $\xi=x+y,\ \eta=-x+y,\ \varsigma=y+z$. Вычисляем первые производные :

$$u_x=u_\xi-u_\eta,\ u_y=u_\xi+u_\eta+u_\varsigma,\ u_z=u_\varsigma.$$

Выписываем канонический вид параболического уравнения :

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+2u_\xi=0.$$

Можно ли привести уравнение с переменными коэффициентами при помощи некоторой замены переменных к каноническому виду во всей области G? В общем случае нет, кроме случая двух переменных, который рассматривается ниже.

Уравнение

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y), \tag{2.1}$$

где $|a|+|b|+|c|>0$, принадлежит в точке (x,y) из области G :

– гиперболическому типу, если $b^2-ac>0$;
– параболическому типу, если $b^2-ac=0$;
– эллиптическому типу, если $b^2-ac<0$.

Пусть теперь уравнение (2.1) принадлежит к одному из указанных типов во всей области G. Для уравнения (2.1) уравнения характеристик имеют вид :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}. \tag{2.2}$$

Уравнения гиперболического типа. В этом случае уравнение (2.1) имеет два семейства действительных характеристик, которые являются общими интегралами уравнения (2.2) : $\varphi(x,y)=c_1$ и $\psi(x,y)=c_2$. Замена переменных $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$ приводит уравнение (2.1) ко второй канонической форме для уравнений гиперболического типа :

$$u_{\xi\eta}=F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Замена $\alpha=(\varphi(x,y)+\psi(x,y))/2,\ \beta=(\varphi(x,y)-\psi(x,y))/2$ приведет уравнение (2.1) к первой канонической форме :

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=F_2(\alpha,\beta,u,u_\alpha,u_\beta).$$

Уравнения параболического типа. В этом случае уранение (2.1) имеет только одно семейство действительных характеристик. Пусть $\varphi(x,y)=c_1$ – общий интеграл уравнения (2.2). Тогда замена переменных $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ – произвольная гладкая функция, такая, что замена переменных взаимно однозначна в рассматриваемой области, приводит уравнение (2.1) к каноническому виду :

$$u_{\eta\eta}=F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Уравнения эллиптического типа. В этом случае уравнение (2.1) не имеет действительных характеристик. Пусть $\chi(x,y)=c$ – общий интеграл уравнения (2.2), $\varphi(x,y)=\mathrm{Re}\chi(x,y),\psi(x,y)=\mathrm{Im}\chi(x,y)$, тогда замена переменных $\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y)$ приводит уравнение (2.1) к каноническому виду :

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta).$$

Пример 4. Привести к каноническому виду уравнение $u_{xx}-yu_{yy}=0$.

Решение. Так как $b^2-ac=y$, то при $y<0$ уравнение относится к эллиптическому типу, а при $y>0$ к гиперболическому типу. Пусть $y>0$, тогда уравнение характеристик (2.2) имеет вид :

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y},$$

откуда $x=\pm2\sqrt{y}+C$. Делаем замену переменных :

$$\begin{cases} \xi=x+2\sqrt{y} \\ \eta=x-2\sqrt{y}. \end{cases}$$

Такая замена переменных приведет наше уравнение ко второй канонической форме. Пересчитываем частные производные :

$$u_x = u_\xi + u_\eta; \;\; u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

$$u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}u_\xi - \frac{1}{\sqrt{y}}u_\eta; \;\; u_{yy} = \frac{1}{y}u_{\xi\xi} - \frac{2}{y}u_{\xi\eta} + \frac{1}{y}u_{\eta\eta} - \frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\xi + \frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\eta.$$

Уравнение примет вид $u_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2(\xi-\eta)}u_\xi - \dfrac{1}{2(\xi-\eta)}u_\eta = 0$. Следующая замена переменных приводит уравнение к первой канонической форме :

$$\begin{cases} \alpha = (\xi+\eta)/2 = x \\ \beta = (\xi-\eta)/2 = 2\sqrt{y}. \end{cases}$$

Пересчитываем частные производные :

$$u_x = u_\alpha; \;\; u_{xx} = u_{\alpha\alpha}; \;\; u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}u_\beta; \;\; u_{yy} = \frac{1}{y}u_{\beta\beta} - \frac{1}{2y\sqrt{y}}u_\beta.$$

Наше уравнение примет вид $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + \dfrac{1}{\beta}u_\beta = 0$.

Пусть теперь $y < 0$, тогда уравнение характеристик имеет вид :

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{-y},$$

откуда $ix = \pm 2\sqrt{-y} + C$. Делаем замену переменных :

$$\begin{cases} \xi = 2\sqrt{-y} \\ \eta = x. \end{cases}$$

Частные производные имеют вид :

$$u_x = u_\eta; \;\; u_{xx} = u_{\eta\eta}; \;\; u_y = -\frac{1}{\sqrt{-y}}u_\xi; \;\; u_{yy} = -\frac{1}{y}u_{\xi\xi} - \frac{1}{2y\sqrt{-y}}u_\xi.$$

В этом случае уравнение примет вид $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{\xi}u_\xi = 0$.

Пример 5. Привести к каноническому виду уравнение $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$.

Решение. Так как $b^2 - ac = 0$, то уравнение относится к параболическому типу. Тогда уравнение характеристик (2.2) имеет вид :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y},$$

откуда $2x - y^2 = C$. Делаем замену переменных :

$$\begin{cases} \xi = 2x - y^2 \\ \eta = y. \end{cases}$$

Пересчитываем частные производные : $u_x = 2u_\xi$; $u_{xx} = 4u_{\xi\xi}$; $u_y = -2yu_\xi + u_\eta$; $u_{yy} = 4y^2u_{\xi\xi} - 4yu_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - 2u_\xi$; $u_{xy} = -4yu_{\xi\xi} + 2u_{\eta\xi}$. Уравнение примет вид $u_{\eta\eta} - 2u_\xi = 0$.

Решить задачи

2.1. Привести к каноническому виду уравнения и определить их тип :
1) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0$; 2) $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_y+u_z=0$;
3) $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$; 4) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+2u_{zz}=0$;
5) $u_{xx}+2u_{xy}-4u_{xz}-6u_{yz}-u_{zz}=0$;
6) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+3u_{tt}=0$;
7) $u_{xy}-u_{xt}+u_{zz}-2u_{zt}+2u_{tt}=0$;
8) $u_{xy}+u_{xz}+u_{xt}+u_{tt}=0$;
9) $u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}-4u_{yz}+2u_{yt}+u_{zz}=0$;
10) $u_{xx}+2u_{xz}-2u_{xt}+u_{yy}+2u_{yz}+2u_{yt}+2u_{zz}+2u_{tt}=0$;
11) $u_{x_1x_1}+2\sum_{k=2}^{n}u_{x_kx_k}-2\sum_{k=1}^{n-1}u_{x_kx_{k+1}}=0$;
12) $u_{x_1x_1}-2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_{x_{k-1}x_k}=0$;
13) $\sum_{k=1}^{n}\left(ku_{x_kx_k}+2\sum_{l<k}lu_{x_lx_k}\right)=0$;
14) $\sum_{k=1}^{n}\left(u_{x_kx_k}+\sum_{l<k}u_{x_lx_k}\right)=0$;
15) $3u_{xy}-2u_{xz}-u_{yz}-u=0$.

2.2. В каждой области, где сохраняется тип уравнения, привести к каноническому виду уравнения :
1) $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+u_y=0$; 2) $u_{xx}-6u_{xy}+10u_{yy}+u_x-3u_y=0$;
3) $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}-2u_y=0$; 4) $u_{xx}-xu_{yy}+u_y=0$;
5) $u_{xx}-yu_{yy}+u_x=0$; 6) $u_{xx}-yu_{yy}+u_x=0$;
7) $yu_{xx}-xu_{yy}+u_y=0$; 8) $x^2u_{xx}+y^2u_{yy}+u_y=0$;
9) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}+u_x=0$; 10) $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}+u_y=0$;
11) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+yu_y=0$; 12) $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}=0$;
13) $u_{xx}+2\sin x u_{xy}+(2-\cos^2 x)u_{yy}=0$; 14) $|x|u_{xx}+\mathrm{sign}y u_{yy}+u_x=0$;
15) $\mathrm{sign}y u_{xx}-|x|u_{yy}+u_y=0$.

Задача о нахождении общего решения в теории дифференциальных уравнений в частных производных порядка, большего единицы, имеет меньшее значение, чем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В тех же случаях, когда эта задача ставится, практически единственным приемом нахождения общего решения является сведение рассматриваемой задачи путем введения новой неизвестной функции к задаче о нахождении общего решения для уравнения первого порядка.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $u_{xy}+au_x=0$.

Решение. Обозначим $u_x=v$. Тогда уравнение примет вид $v_y+av=0$. Для нахождения решения этого уравнения следует, как известно из теории уравнений с частными производными первого порядка, сопоставить ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений : $\dfrac{dx}{0}=\dfrac{dy}{1}=\dfrac{dv}{-av}$. Находим первые интегралы этой системы : $x=C_1,\ ve^{ay}=C_2$. Тогда общее решение уравнения $v_y+av=0$ будет иметь вид : $\Phi(x,ve^{ay})=0$. Разрешая относительно ve^{ay}, имеем $v=e^{-ay}f(x)=u_x$. Таким образом, получено линейное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции u. Сопоставляя ему систему обыкновенных дифференциальных уравнений : $\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{0}=\dfrac{du}{e^{-ay}f(x)}$ и находя первые интегралы системы : $y=C_1,\ u=e^{-ay}\int\limits_0^x f(z)dz+C_2=e^{-ay}F(x)+C_2$, получим общее решение исходного уравнения $\Phi(u-e^{-ay}F(x),y)=0$ или $u=e^{-ay}(F(x)+\varphi(y))$, где $F(x)$ и $\varphi(y)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Решить задачи

2.3. В каждой области, где сохраняется тип уравнения, найти общее решение уравнений :
1) $u_{xy} + 2u_x = 1$; 2) $u_{xy} - 3u_y = x$; 3) $u_{xy} - 3u_x + 2u_y - 6u = 2$;
4) $u_{xy} + u_x + 2u_y + 2u = e^x$; 5) $u_{xy} + 2u_x + 2u_y + 4u = \sin x$;
6) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$;
7) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - 2u_y = 2$; 8) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = x$;
9) $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_y = 2$; 10) $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x = 2$;
11) $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} = 0$; 12) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0$;
13) $u_{xx} + 2\cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0$;
14) $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$;
15) $u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} = 0$.

3. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Под задачей Коши для волнового уравнения понимается задача о нахождении функции $u(x,t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{3.1}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{3.2}$$

где f, φ, ψ – заданные функции.
Если выполняются условия

$$\begin{array}{llll} f \in C^1(t \geq 0), & \varphi \in C^2(R^1), & \psi \in C^1(R^1), & n = 1; \\ f \in C^2(t \geq 0), & \varphi \in C^3(R^n), & \psi \in C^2(R^n), & n = 2, 3, \end{array} \tag{3.3}$$

то решение задачи Коши (3.1)–(3.2) существует, единственно и выражается формулой Даламбера при $n = 1$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{aligned}$$

формулой Пуассона при $n = 2$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t \int\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} \\ &+ \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi-x|^2}} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |\xi-x|^2}}\right), \end{aligned}$$

формулой Кирхгофа при $n = 3$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{f(\xi, t-\frac{|\xi-x|}{a})d\xi}{|\xi-x|} + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at}\psi(\xi)dS + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|\xi-x|=at}\varphi(\xi)dS\right).$$

Графическое построение решения (n=1).

Пример 1. Построить график решения задачи Коши для неограниченной струны :

$$u_{tt} = u_{xx};\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = 0,$$

в моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$ График функции $\varphi(x)$ приведен на рис.3.

Решение. По формуле Даламбера, $u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-t) + \frac{1}{2}\varphi(x+t)]$. Это значит, что график $\varphi(x)$ нужно сжать по оси Oy в 2 раза, отодвинуть вправо на t, влево на t и результаты сложить.

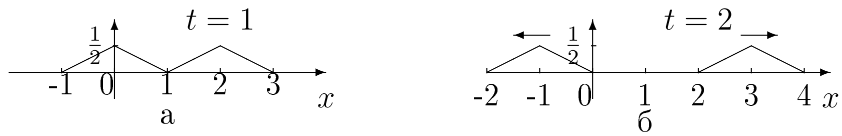

Рис.4

Дальше эти горбики высотой 1/2 и шириной 2 разъезжаются вправо и влево со скоростью 1 каждый, рис.4,а соответствует $t = 1$, рис.4,б – $t = 2$.

Пример 2. Возьмем теперь другие начальные данные : $\varphi(x) = 0$, график $\psi(x)$ изображен на рис.5.

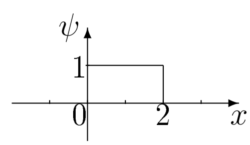

Рис.5

Решение. Нарисуем форму струны при $t = 1, 2, \ldots$ По формуле Даламбера,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\psi(\xi)d\xi = \Phi(x+t) - \Phi(x-t), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi.$$

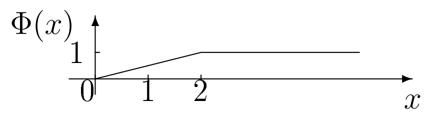

Рис.6

Эта формула означает, что график функции $\Phi(x)$, рис.6, нужно двигать влево и вправо на t и результаты вычитать.

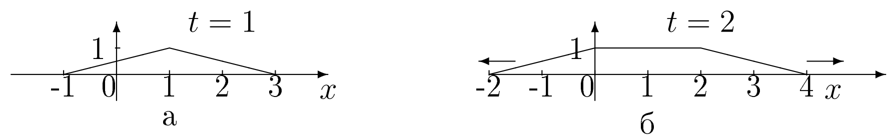

Рис.7

Дальше эта трапеция раздвигается влево и вправо со скоростью 1, как показано на рис.7,а, и 7,б.

Пример 3. Изобразить решение краевой задачи для ограниченной струны : $u_{tt} = u_{xx}$; $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$, $u|_{x=0} = u|_{x=5} = 0$, в момент времени $t = 21$. Графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ изображены на рис.8,а и 8,б.

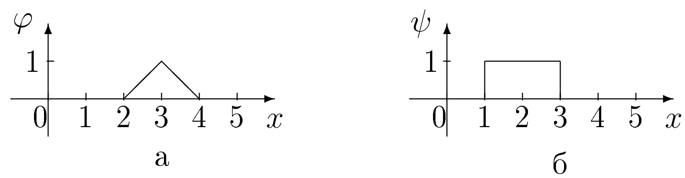

Рис.8

Решение. Для решения задачи продолжим функцию $\varphi(x)$ нечетным образом относительно нуля на отрезок $[-5, 5]$: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, а потом нечетным образом относительно $x = 5$ на $[-5, 15]$: $\varphi(5 + x) = -\varphi(5 - x)$. Продолжая этот процесс, получим функцию $\varphi(x)$ с периодом 10, изображенную на рис.9. Периодичность $\varphi(x)$ следует из того, что $\varphi(10 + x) = \varphi(5 + (5 + x)) = -\varphi(5 - (5 + x)) = -\varphi(-x) = \varphi(x)$.

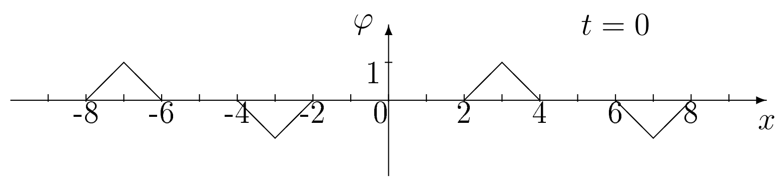

Рис.9

Аналогично поступим и с функцией $\psi(x)$, результат продолжения изображен на рис.10.

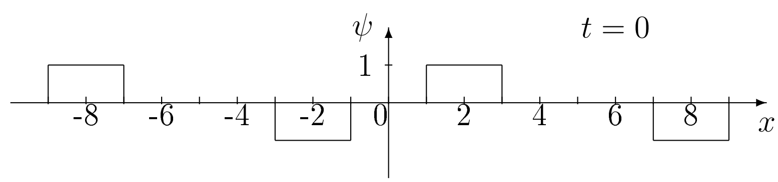

Рис.10

Смысл продолжения в фиктивные, или нефизические, области в том, что в результате продолжения автоматически будут выполняться краевые условия и задача сводится к задаче для неограниченной струны, для которой решение строится точно так , как в примерах 1 и 2. После построения решения фиктивные области следует исключить.

Покажем, что периодичность по x приводит к периодичности по t, т.е. решение также будет периодической функцией с периодом 10 по t.

$$u(x, t + 10) = \frac{1}{2}[\varphi(x + (t + 10)) + \varphi(x - (t + 10))] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-(t+10)}^{x+(t+10)} \psi(\xi)d\xi = u(x, t),$$

в силу периодичности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому $u(x,21)=u(x,1)$. Строим решение при $t=1$. График функции $\frac{1}{2}[\varphi(x+1)+\varphi(x-1)]$ имеет вид, изображенный на рис.11.

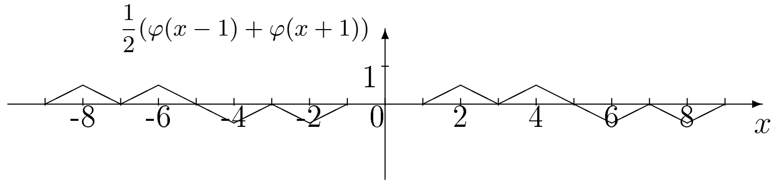

Рис.11

Пусть, как и раньше, $\Phi(x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^x\psi(\xi)d\xi$. График этой функции показан на рис.12.

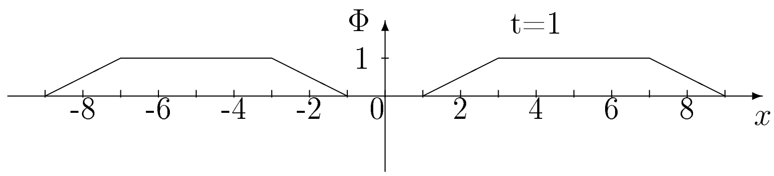

Рис.12

Тогда график второго слагаемого, изображенный на рис.13, получается по формуле $\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-1}^{x+1}\psi(\xi)d\xi=\Phi(x+1)-\Phi(x-1)$ из графика функции $\Phi(x)$, рис.12.

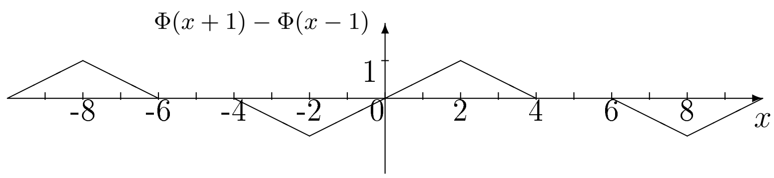

Рис.13

Теперь график искомого решения, рис.14, получается сложением графиков, изображенных на рис.11 и 13, на отрезке [0,5] (фиктивные области сразу исключены).

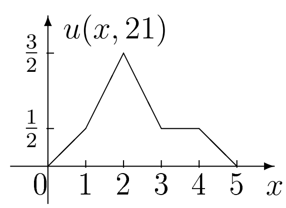

Рис.14

Решить задачи

3.1. Построить график решения задачи Коши для неограниченной струны :

$$u_{tt}=4u_{xx};\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),$$

в моменты времени $t=0.25,0.5,0.75,1$, если :

1) графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.3. и 5;

2) графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.8.

3.2. Построить график решения краевой задачи для полуограниченной струны $(x>0)$:

$$u_{tt}=u_{xx};\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ u|_{x=0}=0,$$

в моменты времени $t=1,2,3,4$, если :

1) графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.3. и 5;

2) графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.8.

3.3. Построить график решения краевой задачи для полуограниченной струны $(x > 0)$:

$$u_{tt} = u_{xx};\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ u_x|_{x=0} = 0,$$

в моменты времени $t = 1, 2, 3, 4$, если :

1) графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.3. и 5;

2) графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.8.

3.4. Построить график решения краевой задачи для ограниченной струны $(0 < x < 5)$:

$u_{tt} = u_{xx};\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ u_x|_{x=0} = 0,\ u|_{x=5} = 0,$

в момент времени $t = 21$. Графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.8.

3.5. Построить график решения краевой задачи для ограниченной струны $(0 < x < 5)$:

$u_{tt} = u_{xx};\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=5} = 0,$

в момент времени $t = 21$. Графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ приведены на рис.8.

3.6. Продолжив подходящим образом данные на всю прямую, решить следующие краевые задачи для для полуограниченной струны $(x > 0)$:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t);\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ u|_{x=0} = 0;$

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t);\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ u_x|_{x=0} = 0.$

3.7. Решить следующие краевые задачи для для полуограниченной струны $(x > 0)$:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx};\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0,\ u_x|_{x=0} = \mu(t);$

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx};\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0,\ (u_x - hu)|_{x=0} = \mu(t),\ (h > 0).$

Пример 4. Решить задачу Коши $(n = 2)$:

$$u_{tt} = \Delta u + 6xyt; \quad u|_{t=0} = x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = xy.$$

Решение. Воспользуемся формулой Пуассона. Обозначим через $I_1,\ I_2,\ I_3$ интегралы, соответствующие $f,\ \psi,\ \varphi$. Во всех трех интегралах делаем следующие замены. Сначала – сдвиг начала координат в точку (x, y) : $\xi' = \xi - x,\ \eta' = \eta - y$. Затем переходим к полярным координатам, так как области интегрирования – круги : $\xi' = \rho\cos\phi,\ \eta' = \rho\sin\phi$, причем $d\xi' d\eta' = \rho d\rho d\phi$.

Вычислим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int\limits_{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}<(t-\tau)} \int \frac{6\xi\eta\tau d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^t \int\limits_{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}<(t-\tau)} \int \frac{3(\xi'+x)(\eta'+y)\tau d\xi' d\eta' d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-\xi'^2-\eta'^2}} \\ &= \frac{3}{\pi}\int_0^t \int_0^{t-\tau} \int_0^{2\pi} \frac{(x+\rho\cos\phi)(y+\rho\sin\phi)\tau\rho d\tau d\rho d\phi}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}. \end{aligned}$$

Функции $\sin\phi$ и $\cos\phi$, а также их произведения, при интегрировании по периоду 2π дадут ноль. Поэтому при интегрировании по углу ϕ надо оставить лишь

$$I_1 = \frac{3}{\pi}\int_0^t \int_0^{t-\tau} \int_0^{2\pi} \frac{xy\tau\rho d\tau d\rho d\phi}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}} = 6xy \int_0^t \int_0^{t-\tau} \frac{\tau\rho d\tau d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\rho^2}}$$

$$= \quad 6xy\int\limits_0^t \tau(t-\tau)d\tau = xyt^3.$$

Аналогично вычислим теперь $I_2,\ I_3$:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y^2)}<t}\int \frac{\xi\eta d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} = xyt.$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y^2)}<t}\int \frac{(\xi^2-\eta^2)d\xi d\eta}{\sqrt{t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} = x^2-y^2.$$

Складывая $I_1,\ I_2,\ I_3$, получаем решение исходной задачи :

$$u(x,y,t) = I_1+I_2+I_3 = xyt^3+xyt+(x^2-y^2).$$

Пример 5. Решить задачу Коши $(n=3)$:

$$u_{tt} = \Delta u + t^2x^2; \quad u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = z^2.$$

Решение. Воспользуемся формулой Кирхгофа. Так как области интегрирования – шар $T^t_{x,y,z}$ с центром в точке (x,y,z) и радиусом t и сфера $S^t_{x,y,z}$ с центром в той же точке и того же радиуса, то снова делаем сдвиг: $\xi' = \xi - x,\ \eta' = \eta - y,\ \zeta' = \zeta - z$, а затем переходим к сферическим координатам, $\xi' = r\sin\theta\cos\phi,\ \eta' = r\sin\theta\sin\phi,\ \zeta' = r\cos\theta$, причем $d\xi'd\eta'd\zeta' = r^2\sin\theta drd\theta d\phi,\ dS = t^2\sin\theta d\theta d\phi$.

Вычислим I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{T^t_{x,y,z}}\int \frac{\xi^2\left(t-\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\right)^2 d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\int\limits_{T^t_{0,0,0}}\int \frac{(x+\xi')^2\left(t-\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}\right)^2 d\xi'd\eta'd\zeta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}(x+r\sin\theta\cos\phi)^2(t-r)^2 r\sin\theta drd\theta d\phi \\ &= 1/180t^6 + 1/12x^2t^4. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим $I_2,\ I_3$:

$$I_2 = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{S^t_{x,y,z}}\zeta^2 dS = z^2t + 1/3t^3, \quad I_3 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{S^t_{x,y,z}}\eta^2 dS\right] = y^2+t^2.$$

Складывая $I_1,\ I_2,\ I_3$, получаем решение исходной задачи :

$$u(x,y,z,t) = 1/180t^6 + 1/12x^2t^4 + 1/3t^3 + t^2 + z^2t + y^2.$$

Пример 6. Решить задачу Коши $(n=2)$:

$$u_{tt} = \Delta u; \quad u|_{t=0} = e^x\cos y, \quad u_t|_{t=0} = e^y\sin x.$$

Решение. Начнем с вычисления I_2. Так же, как в примере 4, делаем сдвиг и переход к полярным координатам :

$$I_2 = \frac{e^y}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{\rho\sin\phi}\sin(x+\rho\cos\phi)\rho d\rho d\phi}{\sqrt{t^2-\rho^2}}.$$

Интегрирование по ϕ требует вычисления интеграла

$$\begin{aligned} J(\rho) &= \int\limits_0^{2\pi} e^{\rho\sin\phi}\sin(x+\rho\cos\phi)d\phi = \operatorname{Im}\int\limits_0^{2\pi} e^{\rho\sin\phi}e^{i(x+\rho\cos\phi)}d\phi \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{ix}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\rho(\cos\phi-i\sin\phi)}d\phi\right). \end{aligned}$$

В интеграле делаем замену :

$$z=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)=\rho e^{i\phi}\Longrightarrow dz=i\rho e^{i\phi}d\phi\Longrightarrow d\phi=\frac{dz}{iz}.$$

Когда ϕ изменяется от 0 до 2π , z пробегает в плоскости комплексного переменного окружность C радиусом ρ с центром в нуле в направлении против часовой стрелки. Следовательно,

$$J(\rho)=\operatorname{Im}\left(e^{ix}\int\limits_C\frac{e^{-iz}}{iz}dz\right).$$

Так как вычет функции e^{-iz}/z в особой точке $z=0$ равен 1,то получаем :

$$J(\rho)=\operatorname{Im}\left(2\pi e^{ix}\right)=2\pi\sin x.$$

Итак, после интегрирования по ϕ интеграл I_2 примет вид

$$I_2=\frac{e^y}{2\pi}\int\limits_0^t\frac{J(\rho)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\rho d\rho=e^y\sin x\int\limits_0^t\frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}=te^y\sin x.$$

Аналогично вычисляется интеграл $I_3=e^x\cos y$. Складывая I_2 и I_3, получаем решение задачи :

$$u(x,y,t)=e^x\cos y+te^y\sin x.$$

Пример 7. Решить задачу Коши ($n=2$) :

$$u_{tt}=\Delta u;\quad u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=\sin y.$$

Решение. Приведем различные варианты решения.

1. Как и в примерах 4 – 6 сведем решение задачи к вычислению интеграла

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin(y+\rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi}{\sqrt{t^2-\rho^2}}.$$

Рассмотрим внутренний интеграл :

$$\begin{aligned} J(\rho) &= \int\limits_0^{2\pi}\sin(y+\rho\sin\phi)d\phi=\int\limits_0^{2\pi}[\sin y\cos(\rho\sin\phi)+\cos y\sin(\rho\sin\phi)]d\phi \\ &= \sin y\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(\rho\sin\phi)d\phi=4\sin y\int\limits_0^{\pi/2}\cos(\rho\sin\phi)d\phi, \end{aligned}$$

так как функция $\sin(\rho\sin\phi)$ – нечетная, а $\cos(\rho\sin\phi)$ – четная. Последний интеграл в элементарных функциях не берется, он дает функцию Бесселя нулевого порядка $J_0(\rho)$, т.е. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos(\rho\sin\phi)d\phi = \pi/2 J_0(\rho)$. Следовательно, $J(\rho) = 2\pi\sin y J_0(\rho)$. Теперь для I_2 имеем :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \frac{J(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = \sin y\int\limits_0^t \frac{J_0(\rho)\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = t\sin y\int\limits_0^1 \frac{J_0(t\rho)\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Последний интеграл можно найти в [8], с.696. Оказывается, этот интеграл от специальной функции дает элементарную функцию :

$$\int\limits_0^1 \frac{J_0(t\rho)\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{\sin t}{t}.$$

Итак, $u(x,y,t) = \sin y\sin t$.

2. Решение задачи ищем в виде $u(x,y,t) = g(t)\sin y$. Подставляя его в уравнение, получим $g''\sin y = -g\sin y \Longrightarrow g'' + g = 0$. Учитывая начальные условия, получаем задачу Коши :

$$g'' + g = 0,\ g(0) = 0,\ g'(0) = 1.$$

Ее общее решение : $g(t) = C_1\sin t + C_2\cos t$. Из начальных данных находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Следовательно $u(x,y,t) = \sin y\sin t$.

Этот метод применим и в других задачах, когда f, φ, ψ выражаются через синусы, косинусы и экспоненты. Решение ищется в виде произведения этих функций и временной функции, т.е. методом разделения переменных. Эти функции, дважды продифференцированные, дают те же самые функции, что и происходит тогда, когда от них берется лапласиан. Тем самым задача сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

3. Заметим, что начальные условия не зависят явным образом от переменной x. Это позволяет искать решение в виде $u = u(y,t)$. Следовательно искомое решение должно являться решением следующей одномерной задачи Коши :

$$u_{tt} = u_{yy};\quad u|_{t=0} = 0,\quad u_t|_{t=0} = \sin y.$$

Применив формулу Даламбера, получим :

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t}\sin\xi d\xi = \sin y\sin t.$$

Пусть требуется найти решение следующей задачи Коши :

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x); \tag{3.4}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \tag{3.5}$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда по степеням t :

$$u(x,t) = u_0(x) + tu_1(x) + t^2u_2(x) + \cdots \tag{3.6}$$

Из начальных условий (3.5) следует, что $u_0(x) = \varphi(x)$ и $u_1(x) = \psi(x)$. Подставляя (3.6) в уравнение (3.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим : $2 \cdot 1 u_2(x) = a^2 \Delta u_0 + f(x)$, $3 \cdot 2 u_3(x) = a^2 \Delta u_1$. Так как u_0 и u_1 нам уже известны, то u_2 и u_3 могут быть легко определены. Продолжая процесс, мы получим для $u_n : n \cdot (n-1) u_n(x) = a^2 \Delta u_{n-2}$ и т.д.

Таким образом может быть получено формальное решение нашей задачи, которое в общем случае может не являться истинным решением, так как ряд (3.6) может и не сходиться. Отметим важные частные случаи, когда вопрос о сходимости ряда не возникает. Это выполняется, например, когда для некоторого N

$$\Delta^N f = 0, \Delta^N \varphi = 0, \Delta^N \psi = 0. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что в этом случае ряд представляет собой конечную сумму. Условия (3.7) выполняются, например, в том случае, когда f, φ, ψ представляют собой некоторые полиномы. Тот же самый прием может быть применен и тогда, когда в правой части уравнения стоит $\sum_0^n t^k f_k(x)$.

Описанными приемами можно решить задачи из примеров 4 – 6 без вычисления интегралов.

Пример 8. Решить задачу Коши $(n = 2)$:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2 + y^2) e^t; \ u|_{t=0} = x^2 - 2y^2, \ u_t|_{t=0} = \sin x.$$

Решение. Разобьем эту задачу на три :

1.	$v_{tt} = a^2 \Delta u + (x^2+y^2) e^t$	2.	$w_{tt} = a^2 \Delta u$	3.	$p_{tt} = a^2 u_{xx}$
	$v\|_{t=0} = 0$		$w\|_{t=0} = x^2 - 2y^2$		$p\|_{t=0} = 0$
	$v_t\|_{t=0} = 0$		$w_t\|_{t=0} = 0$		$p_t\|_{t=0} = \sin x$

Очевидно, что $u = v + w + p$.

1. Функцию v, в свою очередь, будем искать в виде $v = v^1 + v^2$, где v^1 и v^2 – суть решения соответствующих одномерных задач $v^i_{tt} = a^2 v^i_{x_i x_i} + (x_i)^2 e^t$, $v^i|_{t=0} = 0$, $v^i_t|_{t=0} = 0$, где $i = 1, 2$, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$.

$$v^1(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \xi^2 e^\tau d\tau d\xi = (x^2 + 2a^2)(e^t - t - 1) - a^2 t^2 \left(\frac{1}{3} t + 1 \right).$$

Аналогично, $v^2(y,t) = (y^2 + 2a^2)(e^t - t - 1) - a^2 t^2 \left(\frac{1}{3} t + 1 \right)$.

2. Функцию w будем искать в виде степенного ряда по t : $w(x,y,t) = w_0(x,y) + t w_1(x,y) + t^2 w_2(x,y) + \cdots$, $w_0 = x^2 - 2y^2$, $w_1 = 0$, $w_2 = -a^2$, $w_i = 0$, $i = 3 \ldots \infty$. Следовательно, $w(x,y,t) = x^2 - 2y^2 - a^2 t^2$.

3. Функцию p будем искать в виде $p = f(t) \sin x$. Тогда наша задача примет вид $f''(t) = -a^2 f(t)$; $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, откуда $f(t) = \frac{1}{a} \sin at \sin x$.

Осталось сложить v, w, p.

Решить задачи

3.8. Найти решение следующих задач Коши $(n = 1)$:

1) $u_{tt} = u_{xx} + 6;\quad u|_{t=0} = x^2,\quad u_t|_{t=0} = 4x;$
2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt;\quad u|_{t=0} = x^2,\quad u_t|_{t=0} = x;$
3) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x;\quad u|_{t=0} = \sin x,\quad u_t|_{t=0} = 0;$
4) $u_{tt} = u_{xx} + e^x;\quad u|_{t=0} = \sin x,\quad u_t|_{t=0} = x + \cos x;$
5) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x;\quad u|_{t=0} = 1,\quad u_t|_{t=0} = 1;$
6) $u_{tt} = 4u_{xx} + \cos x \sin t;\quad u|_{t=0} = \cos 2x,\quad u_t|_{t=0} = \sin x;$
7) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x \cos t;\quad u|_{t=0} = \sin 2x,\quad u_t|_{t=0} = \cos x;$
8) $u_{tt} = 9u_{xx} + t;\quad u|_{t=0} = x,\quad u_t|_{t=0} = \cos x;$
9) $u_{tt} = 16u_{xx} + t \cos x;\quad u|_{t=0} = x,\quad u_t|_{t=0} = x^2;$
10) $u_{tt} = u_{xx} + e^{-x-t};\quad u|_{t=0} = 1,\quad u_t|_{t=0} = x.$

3.9 Найти решение следующих задач Коши $(n = 2)$:

1) $u_{tt} = \Delta u + 2;\quad u|_{t=0} = x,\quad u_t|_{t=0} = y;$
2) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt;\quad u|_{t=0} = x^2 - y^2,\quad u_t|_{t=0} = xy;$
3) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy^2;\quad u|_{t=0} = e^x \cos y,\quad u_t|_{t=0} = e^y \sin x;$
4) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y;\quad u|_{t=0} = x^2,\quad u_t|_{t=0} = \sin y;$
5) $u_{tt} = 2\Delta u;\quad u|_{t=0} = 2x^2 - y^2,\quad u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2;$
6) $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3;\quad u|_{t=0} = x^2,\quad u_t|_{t=0} = y^2;$
7) $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y};\quad u|_{t=0} = e^{3x+4y},\quad u_t|_{t=0} = e^{3x+4y};$
8) $u_{tt} = 9\Delta u + t;\quad u|_{t=0} = \cos(3x + y),\quad u_t|_{t=0} = \sin(3x + y);$
9) $u_{tt} = 4\Delta u;\quad u|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2,\quad u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2;$
10) $u_{tt} = \Delta u + (x^2 + y^2)e^t;\quad u|_{t=0} = 1,\quad u_t|_{t=0} = x.$

3.10. Найти решение следующих задач Коши $(n = 3)$:

1) $u_{tt} = \Delta u + 2xyz;\ u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2,\ u_t|_{t=0} = 1;$
2) $u_{tt} = 8\Delta u + x^2t^2;\ u|_{t=0} = y^2,\ u_t|_{t=0} = z^2;$
3) $u_{tt} = 3\Delta u + 6(x^2 + y^2 + z^2);\ u|_{t=0} = x^2y^2z^2,\ u_t|_{t=0} = xyz;$
4) $u_{tt} = \Delta u + te^x \sin y \cos z;\ u|_{t=0} = e^{x+y} \cos z,\ u_t|_{t=0} = e^{3y+4z} \sin 5x;$
5) $u_{tt} = 4\Delta u;\ u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2),\ u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2);$
6) $u_{tt} = 9\Delta u + (x^2 + y^2 + z^2)e^t;\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0;$
7) $u_{tt} = 4\Delta u + \cos x \sin y e^z;\ u|_{t=0} = x^2e^{y+z},\ u_t|_{t=0} = \sin x e^{y+z};$
8) $u_{tt} = 9\Delta u + xe^t \cos(3y + 4z);\ u|_{t=0} = xy \cos z,\ u_t|_{t=0} = yze^x;$
9) $u_{tt} = 4\Delta u;\ u|_{t=0} = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ u_t|_{t=0} = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$
10) $u_{tt} = \Delta u;\ u|_{t=0} = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ u_t|_{t=0} = \sin\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

4. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задачей Коши для уравнения теплопроводности называется задача о нахождении функции $u(x, t) \in C^2(t > 0) \cap C^0(t \geq 0)$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению

$$u_t = a^2\Delta u + f(x, t) \tag{4.1}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{4.2}$$

где f, φ – заданные функции.

Если выполняются условия :

$$f \in C^2(t \geq 0), \qquad \varphi \in C^0(R^n), \tag{4.3}$$

то решение задачи Коши (4.1)–(4.2) существует, единственно и выражается формулой Пуассона :

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} \varphi(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{R^n} \frac{f(\xi,\tau)}{[4\pi a^2(t-\tau)]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau.$$

При нахождении решения задачи Коши для уравнения теплопроводности часто встречается интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ и интегралы, которые можно к нему свести. Например, при помощи контурного интегрирования в комплексной плоскости z по прямоугольнику с вершинами в точках $(-R,0)$, $(R,0)$, (R,a), и $(-R,a)$ аналитической функции e^{-z^2} и дальнейшего предельного перехода при $R \to \infty$ можно доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda+ia)^2} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \sqrt{\pi}.$$

С другой стороны :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda+ia)^2} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2+a^2-2ia\lambda} d\lambda = e^{a^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} (\cos 2a\lambda - i \sin 2a\lambda) d\lambda.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \cos 2a\lambda d\lambda = e^{-a^2}\sqrt{\pi}, \text{ а } \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} \sin 2a\lambda d\lambda = 0.$$

Равенство нулю последнего интеграла следует и в силу нечетности подынтегральной функции.

Выделяя полный квадрат в показателе экспоненты и делая в интеграле замену переменных $x + b/2a = z$, получим :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2-bx-c} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+b/2a)^2+b^2/4a-c} dx = \sqrt{\pi/a} e^{b^2/4a-c}. \tag{4.4}$$

Продифференцировав m раз по параметру α интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$, получим, положив $\alpha = 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} e^{-x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}.$$

Пример 1. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (n=1) :

$$u_t = u_{xx}; \;\; u|_{t=0} = e^{-x^2}.$$

Решение. По формуле Пуассона

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2-(x-\xi)^2/4t} d\xi.$$

Выделяя полный квадрат в показателе экспоненты или используя выисленный интеграл (4.4), получим :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$$

Пример 2. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (n=2) :

$$u_t = \Delta u;\ u|_{t=0} = e^{-(2x+y)^2}.$$

Решение. Сделаем замену переменных $2x + y = \xi,\ y = \eta$. Пересчитывая частные производные, получим следующую задачу :

$$u_t = 5u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},\ u|_{t=0} = e^{-\xi^2}.$$

Так как начальные условия зависят только от ξ, мы можем искать решение этой задачи, зависящее только от ξ. Поэтому для $u(\xi,t)$ мы имеем одномерную задачу :

$$u_t = 5u_{\xi\xi},\ u|_{t=0} = e^{-\xi^2}.$$

Поступая аналогично примеру 1, получим :

$$u(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{20t+1}} e^{\frac{-\xi^2}{20t+1}}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим ответ :

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{20t+1}} e^{-\frac{(2x+y)^2}{20t+1}}.$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (n=2) :

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + e^t;\ u|_{t=0} = 0.$$

Решение. Найдем решение, используя формулу Пуассона :

$$u(x,y,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^\tau}{4\pi(t-\tau)} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\xi d\eta d\tau.$$

Делая замену переменных $\lambda = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t-\tau}},\ \mu = \frac{\eta - y}{2\sqrt{t-\tau}}$, получим :

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^\tau}{\pi} e^{-\lambda^2} e^{-\mu^2} d\lambda d\mu d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^t e^\tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \\ &= e^t - 1. \end{aligned}$$

Тот же ответ можно было получить и без вычисления интегралов, если учесть, что правая часть и начальное условие не зависят от пространственных переменных. Поэтому решение можно искать в виде функции u, зависящей только от t. Тогда для $u(t)$ имеем : $u_t = e^t$; $u|_{t=0} = 0$, откуда $u = e^t - 1$.

При решении задачи Коши для уравнения теплопроводности можно также применять те же приемы, что и при решении задачи Коши для волнового уравнения :

поиск решения в виде ряда по степеням t или в виде произведения функций различных аргументов. Кроме того, если в задаче Коши для однородного уравнения теплопроводности начальное условие представимо в виде $u|_{t=0} = \varphi(x_1)\psi(x_2, x_3, \dots, x_n)$, то непосредственной проверкой можно показать, что решение задачи будет иметь вид : $u = v(x_1, t)w(x_2, x_3, \dots, x_n, t)$, где v и w – суть решения соответствующих задач :

$$\begin{array}{ll} v_t = v_{x_1x_1}, & w_t = \Delta w, \\ v|_{t=0} = \varphi(x_1); & w|_{t=0} = \psi(x_2, x_3, \dots, x_n). \end{array}$$

Пример 4. Найти решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (n=2) :

$$u_t = \Delta u + x^2 y;\ u|_{t=0} = \cos x \sin y.$$

Решение. Ищем решение в виде $u = v(x,t)w(y,t) + p(x,y,t)$, где $v(x), w(y)$ и $p(x,y,t)$ – решения задач :

$$\begin{array}{llllll} 1. & v_t = v_{xx}, & 2. & w_t = w_{yy}, & 3. & p_t = \Delta p + x^2 y, \\ & v|_{t=0} = \cos x. & & w|_{t=0} = \sin y. & & p|_{t=0} = 0. \end{array}$$

1. Будем искать v в следующем виде $v(x,t) = f(t)\cos x$. Из уравнения $v_t = v_{xx} \Longrightarrow v(x,t) = Ce^{-t}\cos x$, где $C = \text{const}$. Из начальных условий $C = 1$. Следовательно, $v(x,t) = e^{-t}\cos x$.

2. Аналогично $w(y,t) = e^{-t}\sin y$.

3. Будем искать p в следующем виде :

$$p(x,y,t) = p_0(x,y) + tp_1(x,y) + t^2 p_2(x,y).$$

Из начального условия следует, что $p_0(x,y) = 0$. Подставляя выражение для p в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим : $p_1(x,y) = x^2 y,\ \ p_2(x,y) = y$. Следовательно, $p(x,y,t) = tx^2 y + t^2 y$.

Получили решение $u(x,y,t) = e^{-2t}\cos x \sin y + tx^2 y + t^2 y$.

Решить задачи

4.1. Найти решение следующих задач Коши $(n = 1)$:
1) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t,\ u|_{t=0} = 2$; 2) $u_t = u_{xx} + 3t^2,\ u|_{t=0} = \sin x$;
3) $u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x,\ u|_{t=0} = \cos x$; 4) $u_t = u_{xx} + e^t \sin x,\ u|_{t=0} = \sin x$;
5) $u_t = u_{xx} + \sin t,\ u|_{t=0} = e^{-x^2}$; 6) $4u_t = u_{xx},\ u|_{t=0} = e^{2x-x^2}$;
7) $u_t = u_{xx},\ u|_{t=0} = xe^{-x^2}$; 8) $4u_t = u_{xx},\ u|_{t=0} = \sin x e^{-x^2}$;
9) $u_t = 4u_{xx} + t,\ u|_{t=0} = e^{-4x^2}$; 10) $u_t = 9u_{xx} + \sin x \sin t,\ u|_{t=0} = \cos 2x$.

4.2. Найти решение следующих задач Коши $(n = 2)$:
1) $u_t = \Delta u + e^t,\ u|_{t=0} = \cos x \sin y$; 2) $8u_t = \Delta u + 1,\ u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}$;
3) $2u_t = \Delta u,\ u|_{t=0} = \cos xy$; 4) $u_t = \Delta u + \cos t,\ u|_{t=0} = xye^{-x^2-y^2}$;
5) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y,\ u|_{t=0} = 1$.

4.3. Найти решение следующих задач Коши $(n = 3)$:
1) $u_t = 2\Delta u + t\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos y \cos z$;
2) $u_t = 3\Delta u + e^t, \quad u|_{t=0} = \sin(x - y - z)$;
3) $4u_t = \Delta u + \sin 2z, \quad u|_{t=0} = \frac{1}{4}\sin 2z + \cos 2y e^{-x^2}$;
4) $u_t = \Delta u + \cos(x - y + z), \quad u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}$;
5) $u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \cos(xy)\sin z$.

4.4. Найти решение следующих задач Коши :

$$u_t = \Delta u, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in R^n$$

для следующих $\varphi(x)$:
1) $\varphi=\cos\sum_{k=1}^{n}x_k$; 2) $\varphi=e^{-|x|^2}$; 3) $\varphi=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)e^{-|x|^2}$;
4) $\varphi=\left(\sin\sum_{k=1}^{n}x_k\right)e^{-|x|^2}$; 5) $\varphi=e^{-\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2}$.

4.5. Подходящим образом продолжая данные задач на всю ось x, решить следующие задачи :
1)$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<\infty,\ t>0,$
$u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<\infty,\ u|_{x=0}=0,\ t>0;$
2)$u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<\infty,\ t>0,$
$u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<\infty,\ u_x|_{x=0}=0,\ t>0;$
3)$u_t=a^2u_{xx}-hu,\ 0<x<\infty,\ t>0,$
$u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<\infty,\ u|_{x=0}=0,\ t>0;$
4)$u_t=a^2u_{xx}-hu,\ 0<x<\infty,\ t>0,$
$u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<\infty,\ u_x|_{x=0}=0,\ t>0;$
5)$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<\infty,\ t>0,$
$u|_{t=0}=0,\ 0<x<\infty,\ u|_{x=0}=0,\ t>0;$
6)$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<\infty,\ t>0,$
$u|_{t=0}=\varphi(x),\ 0<x<\infty,\ u_x|_{x=0}=0,\ t>0.$

5. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

1. Краевые задачи для круга и кольца. Рассмотрим краевую задачу Дирихле для кольца : найти функцию $u=u(r,\varphi)$, удовлетворяющую внутри кольца уравнению Лапласа

$$\Delta u=0 \tag{5.1}$$

и принимающую заданные значения на границе кольца, т.е.

$$u|_{r=R_1}=f_1(\varphi),\qquad u|_{r=R_2}=f_2(\varphi). \tag{5.2}$$

Запишем уравнение (5.1) в полярных координатах :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{5.3}$$

Будем искать частные решения уравнения (5.3) в виде :

$$u=X(r)\Phi(\varphi). \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (5.3) и разделяя переменные, получим :

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dX(r)}{dr}\right)}{X(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Так как в левой и правой частях равенства стоят функции различных переменных, то равенство может выполняться только в том случае, когда обе эти части равны некоторой постоянной λ. Следовательно, функции $X(r)$ и $\Phi(\varphi)$ должны быть решениями уравнений

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dX(r)}{dr}\right)-\lambda X(r)=0, \tag{5.5}$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0. \tag{5.6}$$

Так как искомое решение должно быть функцией точки плоскости, то $u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi)$ и, следовательно,

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \tag{5.7}$$

Задача (5.6)–(5.7) представляет собой задачу Штурма–Лиувилля с периодическими граничными условиями. Найдем ее собственные значения и собственные функции. Общее решение уравнения (5.6) при $\lambda < 0$ имеет вид : $\Phi(\varphi) = a\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}\varphi + b\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}\varphi$ и, очевидно, не является периодическим. Таким образом, при $\lambda < 0$ задача не имеет собственных значений. Если $\lambda = 0$, то $\Phi(\varphi) = a + b\varphi$. Это решение будет периодическим только в том случае, когда $b = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ является собственным значением, а $\Phi_0(\varphi) = 1$ – отвечающая этому собственному значению собственная функция. Пусть теперь $\lambda > 0$, тогда $\Phi(\varphi) = a\cos\sqrt{\lambda}\varphi + b\sin\sqrt{\lambda}\varphi$. Поэтому периодические решения возможны только в том случае, когда $\sqrt{\lambda} = n$ (n–целое). Следовательно, $\lambda_n = n^2$ являются собственными значениями, а

$$\Phi_n^1(\varphi) = \cos n\varphi, \quad \Phi_n^2(\varphi) = \sin n\varphi \tag{5.8}$$

– отвечающими этим собственным значениям собственными функциями. После подстановки $\lambda_n = n^2$ в уравнение (5.5) оно примет вид

$$r^2X'' + rX' - n^2X = 0.$$

Уравнение (5.5) представляет собой уравнение Эйлера, решение которого при $n = 0$, $X_0(r) = C_0 + D_0\ln(r)$. При $n > 0$ ищем решение в виде $X_n(r) = r^\alpha$. Подставляя, получим :

$$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2r^\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm n.$$

Итак,

$$X_0(r) = C_0 + D_0\ln r, \quad X_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n} \quad (n > 0). \tag{5.9}$$

Таким образом, мы построили совокупность частных решений уравнения (5.3) : $u_0(r,\varphi) = C_0 + D_0\ln r$, $u_n^{(1)}(r,\varphi) = (C_n^{(1)}r^n + D_n^{(1)}r^{-n})\cos n\varphi$, $u_n^{(2)}(r,\varphi) = (C_n^{(2)}r^n + D_n^{(2)}r^{-n})\sin n\varphi$. Решение краевой задачи для кольца ищется в виде ряда Фурье :

$$\begin{gathered} u(r,\varphi) = u_0(r,\varphi) + \textstyle\sum_1^\infty \left(u_n^{(1)}(r,\varphi) + u_n^{(2)}(r,\varphi)\right) = C_0 + D_0\ln r \\ + \textstyle\sum_1^\infty (C_n^{(1)}r^n + D_n^{(1)}r^{-n})\cos n\varphi + \sum_1^\infty (C_n^{(2)}r^n + D_n^{(2)}r^{-n})\sin n\varphi, \end{gathered} \tag{5.10}$$

где коэффициенты $C_0,\ D_0,\ C_n^{(1)},\ D_n^{(1)},\ C_n^{(2)},\ D_n^{(2)}$ определяются из граничных условий (5.2).

Решение внутренней задачи Дирихле для круга радиуса R, с граничным условием $u|_{r=R} = f(\varphi)$, ищется в виде ряда Фурье :

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^\infty \frac{r^n}{R^n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi), \tag{5.11}$$

где коэффициенты $C,\ A_n,\ B_n$ определяются из граничного условия :

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)d\psi,\ A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi,\ B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi.$$

Суммируя ряд (5.11), получим решение внутренней задачи Дирихле внутри круга в виде интеграла Пуассона :

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2Rr\cos(\varphi-\psi) + R^2}d\psi. \tag{5.12}$$

Решение внешней задачи Дирихле для круга ищется в виде ряда Фурье:

$$u(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^n}{r^n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi).$$

Пример 1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что $u|_{r=1} = f(\varphi)$, где $f(\varphi) = \cos^2\varphi$.

Решение. Найдем решение, используя интеграл Пуассона (5.12) :

$$u(r,\varphi) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2\psi d\psi}{1 - 2r\cos(\varphi-\psi) + r^2}. \tag{5.13}$$

Так как подынтегральная функция – периодическая с периодом 2π, то в интеграле можно сделать замену переменной $\alpha = \psi - \varphi$, не меняя пределов интегрирования, и получить :

$$u(r,\varphi) = \frac{1-r^2}{4\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{d\alpha}{1-2r\cos\alpha + r^2} + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2(\varphi+\alpha)d\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}\right). \tag{5.14}$$

Вычислим интеграл

$$I_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n(\varphi+\alpha)d\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2} = \mathrm{Re}\left(e^{in\varphi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{in\alpha}d\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}\right).$$

После замены переменной $z = e^{i\alpha}$ получим :

$$\begin{aligned} I_n &= \mathrm{Re}\left(e^{in\varphi}\int\limits_{|z|=1}\frac{z^{n-1}dz}{i(1-r(z+z^{-1})+r^2)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(2\pi e^{in\varphi}\mathrm{Res}\frac{z^{n-1}}{1-r(z+z^{-1})+r^2}\bigg|_{z=r}\right) = \frac{2\pi r^n}{1-r^2}\cos n\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя значения I_0 и I_2 в (5.14), получим :

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2}(1 + r^2\cos 2\varphi). \tag{5.15}$$

Теперь найдем решение этой же задачи методом разделения переменных. Решение внутренней задачи Дирихле ищется в виде ряда Фурье (5.11). Определим коэффициенты $C,\ A_n,\ B_n$ из краевого условия :

$$u(1,\varphi) = \cos^2\varphi = C + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi). \tag{5.16}$$

Так как функция $\cos^2\varphi$ разлагается в конечный ряд Фурье : $\cos^2\varphi = 1/2 + 1/2\cos 2\varphi$, то интегралы считать не надо. Достаточно в равенстве (5.16) приравнять коэффициенты при собственных функциях. Откуда $C = 1/2;\ A_2 = 1/2;\ A_n = 0,\ \forall n \neq 2;\ B_n = 0,\ \forall n$ и снова получается решение (5.15).

Решить задачи

5.1. Найти функцию, гармоническую внутри единичного круга и такую, что :

1) $u|_{r=1} = \cos^2\varphi$; 2) $u|_{r=1} = \sin^2\varphi$; 3) $u|_{r=1} = \sin^3\varphi$;
4) $u|_{r=1} = \cos^3\varphi$; 5) $u|_{r=1} = \cos^4\varphi$; 6) $u_r|_{r=1} = \cos\varphi$;
7) $u_r|_{r=1} = \cos 2\varphi$; 8) $u_r|_{r=1} = \sin^3\varphi$; 9) $u_r|_{r=1} = \sin^4\varphi$;
10) $u|_{r=1} = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi$.

5.2. Найти функцию, гармоническую вне круга $r < R$ и такую, что :

1) $u|_{r=R} = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi$; 2) $u|_{r=R} = \cos^4\varphi$; 3) $u|_{r=R} = \cos^3\varphi$;
4) $u|_{r=R} = \cos^2\varphi$; 5) $u|_{r=R} = \sin\varphi$; 6) $u_r|_{r=R} = \cos^3\varphi$;
7) $u_r|_{r=R} = \sin^3\varphi$; 8) $u_r|_{r=R} = \cos 2\varphi$; 9) $u_r|_{r=R} = \cos 3\varphi$;
10) $u_r|_{r=R} = \sin 3\varphi$.

5.3. Найти гармоническую в кольце $1 < r < 2$ функцию, такую что : $u|_{r=1} = f_1(\varphi)$; $u|_{r=2} = f_2(\varphi)$, где

1) $f_1(\varphi) = \sin\varphi;\ f_2(\varphi) = 1$; 2) $f_1(\varphi) = 1;\ f_2(\varphi) = \cos\varphi$;
3) $f_1(\varphi) = \sin^2\varphi;\ f_2(\varphi) = \cos\varphi$; 4) $f_1(\varphi) = \cos^2\varphi;\ f_2(\varphi) = \sin\varphi$;
5) $f_1(\varphi) = \sin^3\varphi;\ f_2(\varphi) = \sin\varphi$.

5.4. Найти стационарное распределение температуры $u(r,\varphi)$ внутри бесконечного цилиндра радиуса R, если на одной половине поверхности цилиндра $(0 \leq \varphi < \pi)$ поддерживается температура $-T_0$, а на другой половине $(-\pi \leq \varphi < 0)$ – температура T_0.

5.5. Найти функцию, гармоническую в круговом секторе $0 < \varphi < \alpha,\quad 0 < r < R$ и такую, что :
1) $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0;\ u(R,\varphi) = A$;
2) $u(r,0) = u(r,\alpha) = 0;\ u(R,\varphi) = A\varphi$;
3) $u_\varphi(r,0) = u(r,\alpha) = 0;\ u(R,\varphi) = A$;
4) $u(r,0) = u_\varphi(r,\alpha) = 0;\ u(R,\varphi) = A\varphi$;
5) $u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\alpha) = 0;\ u(R,\varphi) = A\varphi$.

2. Краевые задачи для прямоугольника. Рассмотрим задачу Дирихле для прямоугольника :

$$\Delta u = 0, \quad (x,y) \in (0,a) \times (0,b); \tag{5.17}$$
$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0, \tag{5.18}$$
$$u|_{y=0} = g_1(x), \quad u|_{y=b} = g_2(x). \tag{5.19}$$

Будем искать частные решения задачи (5.17)–(5.19) в виде произведения функций $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставляя $u(x,y)$ в уравнение (5.17) и разделяя переменные, мы получим
$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$
Из граничных условий (5.18) следует, что $X(0) = 0$ и $X(a) = 0$.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \tag{5.20}$$

и задаче Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(a) = 0. \end{cases} \tag{5.21}$$

Найдем собственные функции и собственные значения задачи (5.21) :

а) пусть $\lambda < 0$. Тогда $X(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$. Так как $X(0) = 0$, то $C_1 = 0$, а так как $X(a) = 0$, то $C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} a = 0$. Уравнение $\operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} a = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 0$, не принадлежащий рассматриваемой области. Следовательно, при $\lambda < 0$ собственных значений нет;

б) пусть $\lambda = 0$, тогда $X(x) = C_1 x + C_2$ и единственным решением этого уравнения, удовлетворяющим краевым условиям, является $X(x) \equiv 0$, откуда $u \equiv 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением;

в) пусть $\lambda > 0$, тогда $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Используя краевые условия, получим уравнение для собственных значений $\sin \sqrt{\lambda} a = 0$. Отсюда собственные значения задачи (5.21) имеют вид :

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{a^2},\ k \geq 1,\ k - \text{целое},$$

а собственные функции –

$$X_k(x) = C_2 \sin \frac{\pi k x}{a}.$$

Нормируем их :

$$(X_k, X_k) = 1 \Longrightarrow 1 = \int_0^a C_2^2 \sin^2 \frac{\pi k x}{a} dx = C_2 \frac{a}{2} \Longrightarrow C_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Итак, ортонормированные собственные функции задачи (5.21) имеют вид :

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi k x}{a}.$$

Решение уравнения (5.20) при $\lambda = \lambda_k$:

$$Y_k(y) = A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} y,$$

где A_k и B_k – произвольные постоянные. Таким образом, мы построили счетный набор частных решений задачи (5.17–5.18) :

$$u_k(x,y) = Y_k(y) X_k(x) = \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} y \right) X_k(x).$$

Решение всей задачи (5.17–5.19) ищется в виде ряда Фурье :

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k y + B_k \operatorname{sh} \lambda_k y) X_k(x). \tag{5.22}$$

Из граничного условия (5.19) при $x = 0$ получаем :

$$u(x, 0) = g_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x).$$

Поэтому A_k должны совпадать с коэффициентами Фурье в разложении в ряд Фурье функции g_1 по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля X_k :

$$A_k = (g_1, X_k) = \int\limits_0^a g_1(x) X_k(x) dx.$$

Аналогично из граничного условия при $x = a$ имеем :

$$u(x, b) = g_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k b + B_k \operatorname{sh} \lambda_k b) X_k(x) \Longrightarrow$$

$$A_k \operatorname{ch} \lambda_k b + B_k \operatorname{sh} \lambda_k b = \int\limits_0^a g_2(x) X_k(x) dx.$$

Так как A_k уже найдены, находим отсюда B_k. Осталось подставить найденные $A_k,\ B_k$ в (5.22) и получить решение задачи (5.17)–(5.19).

Пример 2. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $0 < x < a,\ 0 < y < b$, если на его границе $u(x, y)$ принимает следующие значения :

$$u|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b},\ u|_{x=a} = 0,\ u|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a},\ u|_{y=b} = 0.$$

Решение. Будем искать решение задачи в виде $u = v + w$, где v удовлетворяет однородным граничным условиям по переменной y :

$$\Delta v = 0; \tag{5.23}$$

$$v|_{y=0} = v|_{y=b} = 0,\ v|_{x=0} = A \sin \frac{\pi y}{b},\ v|_{x=a} = 0, \tag{5.24}$$

а w – по переменной x :

$$\Delta w = 0; \tag{5.25}$$

$$w|_{x=0} = w|_{x=a} = 0,\ w|_{y=0} = B \sin \frac{\pi x}{a},\ w|_{y=b} = 0. \tag{5.26}$$

Задача (5.25–5.26) представляет собой частный случай задачи (5.17–5.19). Поэтому ее решение ищем в виде :

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} y + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} y \right) \sin \frac{\pi k x}{a}. \tag{5.27}$$

Из граничных условий получаем

$$w(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k x}{a},$$

$$w(x,b) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} b + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} b \right) \sin \frac{\pi k x}{a}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых собственных функциях $\sin \dfrac{\pi k x}{a}$. Тогда $A_k = 0$ при $\forall k \neq 1$ и лишь $A_1 = B$. Из второго разложения следует $A_k \operatorname{ch} \dfrac{\pi k}{a} b + B_k \operatorname{sh} \dfrac{\pi k}{a} b = 0$ при $\forall k$. Поэтому $B_k = 0$ при $\forall k \neq 1$. Для $k = 1$ имеем

$$B_1 = -A_1 \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi k}{a} b}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi k}{a} b} = -B \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi k}{a} b}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi k}{a} b}.$$

Подставляя найденные коэффициенты A_k и B_k в (5.27), получим

$$w(x,y) = B \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} y - \frac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi}{a} b}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{a} b} \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} y \right) \sin \frac{\pi}{a} x = B \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi (b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{a} b} \sin \frac{\pi}{a} x.$$

Решение $v(x,y)$ задачи (5.23)–(5.24) может быть получено из решения $w(x,y)$ задачи (5.25)–(5.26) путем замены x на y, a на b и A на B :

$$v(x,y) = A \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi (a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{b} a} \sin \frac{\pi}{b} y.$$

Окончательно получаем

$$u(x,y) = A \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi (a-x)}{b}}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{b} a} \sin \frac{\pi}{b} y + B \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi (b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{a} b} \sin \frac{\pi}{a} x.$$

Можно было сразу заметить, что функция $\sin \frac{\pi}{a} x$ удовлетворяет граничным условиям при $x = 0$ и $x = a$, и искать решение задачи (5.25)–(5.26) в виде $w(x,y) = f(y) A \sin \frac{\pi}{a} x$. Подставляя w в (5.25) , получим : $f'' - (\pi/b)^2 f = 0$. Из второй пары граничных условий получаем условия $f(0) = B$, $f(b) = 0$. В результате получаем

$$f(y) = \frac{\operatorname{sh} \dfrac{\pi (b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{\pi}{a} b}.$$

Аналогично можно найти функцию v в виде $v(x,y) = g(x) \sin \frac{\pi}{b} y$.

Пример 3. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри прямоугольника $[0 < x < a, \ 0 < y < b]$, если потенциал вдоль стороны этого прямоугольника, лежащей на оси Oy, равен v_0, а три другие стороны прямоугольника заземлены. Предполагается, что внутри прямоугольника нет электрических зарядов.

Решение. Задача сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа : $\Delta u = 0$, $u|_{x=0} = v_0$, $u|_{x=a} = 0$, $u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=b} = 0$. Ищем решение в виде :

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{b} x + B_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{b} x \right) \sin \frac{\pi k y}{b}.$$

Подставляем в искомое решение граничные условия :

$$u(0,y) = v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k y}{b},$$
$$u(a,y) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \operatorname{ch}\frac{\pi k}{b}a + B_k \operatorname{sh}\frac{\pi k}{b}a\right)\sin\frac{\pi k y}{b}.$$

Находим A_k :

$$A_k = \frac{(v_0, \sin\frac{\pi k y}{b})}{\|\sin\frac{\pi k y}{b}\|^2} = \frac{2}{b}\int\limits_0^b v_0 \sin\frac{\pi k y}{b} dy = \frac{2}{\pi k} v_0 (1-(-1)^k).$$

Из второго разложения следует $B_k = -A_k \operatorname{cth}\dfrac{\pi k}{b}a$.

Так как $A_{2k} = B_{2k} = 0$, то после замены индекса суммирования $k = 2n+1$ получим ответ :

$$u(x,y) == \frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2n+1)}{b}(a-x)\sin\dfrac{(2n+1)}{b}\pi y}{(2n+1)\operatorname{sh}\dfrac{\pi(2n+1)}{b}a}.$$

Решить задачи

5.7. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $-a < x < a, -b < y < b$, две противоположные грани которой ($x = a$ и $x = -a$) имеют потенциал v_0, а две другие ($y = b, y = -b$) заземлены.

5.8. Поставить краевую задачу о определении распределения потенциала электростатического поля $u(x,y)$ внутри коробки прямоугольного сечения $0 < x < a, 0 < y < b$, если :

1) две противоположные грани $y = 0, y = b$ заземлены, левая грань $x = 0$ имеет потенциал φ_0, а на правой $x = a$ плотность зарядов равна σ_0;

2) нижняя грань $y = 0$ имеет потенциал φ_0, на верхней $y = b$ плотность зарядов равна нулю, левая грань $x = 0$ заземлена, а на правой $x = a$ плотность зарядов равна σ_0;

3) верхняя грань $y = b$ заземлена, на нижней $y = 0$ плотность зарядов равна нулю, левая грань $x = 0$ заземлена, а на правой $x = a$ плотность зарядов равна σ_0;

4) две противоположные грани $y = 0, y = b$ заземлены, а на левой $x = 0$ и правой $x = a$ плотности зарядов σ_0.

5.9. Найти стационарное распределение температуры $u(x,y)$ в прямоугольной однородной пластинке $0 < x < a,\ 0 < y < b$, если две ее стороны ($x = a$ и $y = b$) покрыты тепловой изоляцией, две другие стороны ($x = 0$ и $y = 0$) поддерживаются при нулевой температуре, а в пластинке выделяется тепло с постоянной плотностью q.

5.10. Решить краевые задачи для уравнения Лапласа :

1) $\Delta u = 0;\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0,\ u|_{y=0} = 1,\ u_y|_{y=\pi} = \cos 2x;$

2) $\Delta u = 0;\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0,\ u|_{y=0} = 1,\ u|_{y=\pi} = \cos 3x;$

3) $\Delta u = 0;\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0,\ u|_{y=0} = 1,\ u_y|_{y=\pi} = -1;$

4) $\Delta u = 0;\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0,\ u|_{y=0} = 1,\ u_y|_{y=\pi} = -1;$

5) $\Delta u = 0$; $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = 0$, $u|_{y=0} = \cos x$, $u_y|_{y=\pi} = -\cos 2x$;
6) $\Delta u = 0$; $u|_{x=0} = 0$, $u|_{x=\pi} = 0$, $u_y|_{y=0} = \sin x$, $u_y|_{y=\pi} = \sin 2x$.

3. Краевые задачи для шара и шарового слоя. Рассмотрим сначала применение метода разделения переменных к уравнению Лапласа в пространстве для шара радиуса R или шарового слоя $R_1 < r < R_2$ в том случае, когда решение не зависит от угла φ, т.е. $u = u(r, \theta)$. Тогда

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{5.28}$$

Полагая $u = Z(r)W(\theta)$ и разделяя в (5.28) переменные, получаем

$$\frac{1}{Z}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dZ}{dr}\right) = \lambda, \tag{5.29}$$

$$\frac{1}{W\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dW}{d\theta}\right) = -\lambda. \tag{5.30}$$

Вводя в (5.29) и (5.30) вместо λ новую произвольную постоянную ν, где $\lambda = \nu(\nu+1)$, запишем уравнение (5.29) в следующем виде :

$$r^2\frac{d^2Z}{dr^2} + 2r\frac{dZ}{dr} - \nu(\nu+1)Z = 0. \tag{5.31}$$

Уравнение (5.31) является уравнением Эйлера, и его решение ищется так же, как решение уравнения (5.5). Оно имеет вид :

$$Z(r) = C_1 r^{\nu} + C_2 r^{-(\nu+1)}. \tag{5.32}$$

Уравнение (5.30) заменой переменной $\xi = \cos\theta$ приводится к виду :

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dy}{d\xi}\right] + \nu(\nu+1)y = 0, \tag{5.33}$$

где $y = W(\arccos\xi)$. Уравнение (5.33) называется уравнением Лежандра и имеет ограниченные на отрезке $[-1, 1]$ решения в том и только в том случае, когда $\nu = n \geq 0$ (n – целое).

Решениями уравнения (5.33) при $\nu = n$ являются полиномы Лежандра $y = P_n(\xi)$, образующие полную ортогональную систему в $L_2(-1, 1)$. Следовательно, всякая функция $f \in L_2(-1, 1)$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра :

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2}P_n(\xi),$$

сходящийся в $L_2(-1, 1)$, где

$$(f, P_n) = \int_{-1}^{1} f(\xi)P_n(\xi)d\xi, \quad \|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(\xi)d\xi = \frac{2}{2n+1}.$$

Для полиномов Лежандра справедлива формула Родрига

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(\xi^2-1)^n}{d\xi^n},$$

из которой легко получить, например,

$$P_0(\xi) = 1,\ P_1(\xi) = \xi,\ P_2(\xi) = \frac{3\xi^2 - 1}{2},\ P_3(\xi) = \frac{5\xi^3 - 3\xi}{2}.$$

Из (5.32) и (5.33) находим частные решения уравнения (5.28) :

$$u_n(r, \theta) = [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos\theta).$$

Решение внутренней задачи Дирихле (и других внутренних задач для уравнения Лапласа) в случае, когда краевые условия заданы на сфере $r = R$ и зависят только от θ, следует искать в виде :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{5.34}$$

а решение внешней задачи – в виде :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta).$$

Коэффициенты $A_n,\ B_n$ определяются из краевых условий. Так, например, коэффициенты A_n при условии $u|_{r=R} = f(\theta)$ равны :

$$A_n = \frac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2 R^n} = \frac{2n+1}{2R^n} \int\limits_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Если краевые условия заданы на границе шарового слоя и зависят только от θ, то решение нужно искать в виде :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}\right] P_n(\cos\theta).$$

Пример 4. Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что $u|_{r=R} = f(\theta)$, где $f(\theta) = \cos^2\theta$.

Решение. Решение внутренней задачи Дирихле для шара радиуса R следует искать в виде ряда (5.34).Коэффициенты A_n определяются из краевого условия :

$$u|_{r=R} = \cos^2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta). \tag{5.35}$$

Очевидно, что граничное условие разлагается в конечный ряд Фурье по полиномам Лежандра. Поэтому никаких интегралов считать не надо. Достаточно найти разложение, учитывая, что оно содержит полиномы Лежандра не выше P_2, методом неопределенных коэффициентов :

$$\xi^2 = aP_0(\xi) + bP_1(\xi) + cP_2(\xi) = a + b\xi + \frac{c}{2}(3\xi^2 - 1).$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} a - 1/2c = 0, \\ b = 0, \\ 3/2c = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы есть : $a = 1/3,\ b = 0,\ c = 2/3$. Итак $\xi^2 = 1/3P_0 + 2/3P_2$.

Приравниваем в (5.35) коэффициенты при соответствующих полиномах Лежандра : $A_0 = 1/3,\ A_2R^2 = 2/3$. Отсюда $A_2 = \dfrac{2}{3R^2}$. Следовательно, решение есть :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{2r^2}{3R^2}P_2(\cos\theta) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta.$$

Решить задачи

5.11. Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что $u|_{r=R} = f(\theta)$, где :

1) $u|_{r=R} = \cos\theta$; 2) $u|_{r=R} = \cos^2\theta$; 3) $u|_{r=R} = \cos 2\theta$;
4) $u|_{r=R} = \cos^3\theta$; 5) $u|_{r=R} = \sin^2\theta$.

5.12. Найти функцию u, гармоническую вне шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что :
1) $u_r|_{r=R} = \sin^2\theta$; 2) $(u_r - u)|_{r=R} = \sin^2\theta$; 3) $u|_{r=R} = \cos 2\theta$;
4) $(u_r - 2u)|_{r=R} = \sin^2\theta$; 5) $(3u_r - u)|_{r=R} = \sin^2\theta$.

5.13. Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя $1 < r < 2$ и такую, что $u|_{r=1} = f_1(\theta)$; $u|_{r=2} = f_2(\theta)$, где :

1) $f_1(\theta) = \cos^2\theta$; $f_2(\theta) = 1 + \cos^2\theta$; 2) $f_1(\theta) = 1$; $f_2(\theta) = \cos\theta$;
3) $f_1(\theta) = \sin^2\theta$; $f_2(\theta) = \cos\theta$; 4) $f_1(\theta) = \cos^2\theta$; $f_2(\theta) = \cos\theta$;
5) $f_1(\theta) = \sin^2\theta$; $f_2(\theta) = \cos 2\theta$.

5.14. Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса R, если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре T_0, а основание полусферы – при нулевой температуре.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Запишем уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах (r,φ,θ) :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{5.36}$$

Полагая $u(r,\varphi,\theta) = Z(r)Y(\theta,\varphi)$, из (5.36) находим

$$r^2\frac{d^2Z}{dr^2} + 2r\frac{dZ}{dr} - \lambda Z = 0, \tag{5.37}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{5.38}$$

Будем искать решения уравнения (5.38) в виде $Y(\theta,\varphi) = W(\theta)\Phi(\varphi)$. Мы получим :

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \tag{5.39}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dW}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)W = 0. \tag{5.40}$$

В силу 2π – периодичности $\Phi(\varphi)$ получим $\mu = m^2$ (m – целое) и

$$\Phi_m(\varphi) = C_m\cos m\varphi + D_m\sin m\varphi. \tag{5.41}$$

Уравнение (5.40) после замены независимой переменной $\xi = \cos\theta$ имеет вид :

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dX(\xi)}{d\xi}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)X(\xi) = 0,\ \ X = W(\arccos\xi). \tag{5.42}$$

Требование того, чтобы функция u была ограничена на единичной сфере, приводит к требованию ограниченности решений уравнения (5.42) на отрезке $[-1,\,1]$, что возможно лишь при $\lambda = n(n+1)$, где n – целое. Ограниченными решениями уравнения (5.42) при $\lambda = n(n+1)$ являются функции

$$P_n^{(m)}(\xi) = (1-\xi^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(\xi)}{d\,\xi^m}, \tag{5.43}$$

где $P_n(\xi)$ – полиномы Лежандра. Функции, определяемые формулой (5.43), называются присоединенными полиномами Лежандра. Очевидно, что

$$P_n^{(m)}(\xi) = 0 \ \text{ при } m > n.$$

Таким образом, для каждого n мы имеем $2n+1$ линейно независимых, ограниченных на единичной сфере частных решений уравнения (5.38), которые называются сферическими функциями :

$$P_n(\cos\theta);\ P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi;\ P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi;\ (m = 1, 2\ldots, n).$$

Умножая эти решения на произвольные постоянные и складывая, мы получим общий вид сферической функции порядка n :

$$Y_n(\theta,\varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos m\varphi + b_m\sin m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta). \tag{5.44}$$

Так как частные решения уравнения (5.37) при $\lambda = n(n+1)$ имеют вид $Z_n^1(r) = r^n$ и $Z_n^1(r) = r^{-(n+1)}$, то искомые частные решения уравнения (5.36) таковы :

$$u_n^{(1)} = \left(a_0^{(1)}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(a_m^{(1)}\cos m\varphi + b_m^{(1)}\sin m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\right)r^n,$$

$$u_n^{(2)} = \left(a_0^{(2)}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(a_m^{(2)}\cos m\varphi + b_m^{(2)}\sin m\varphi)P_n^{(m)}(\cos\theta)\right)r^{-(n+1)}.$$

Решение внутренней задачи Дирихле (и других внутренних задач для уравнения Лапласа) следует искать в виде :

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k Y_k(\theta,\varphi). \tag{5.45}$$

Решение внешней задачи Дирихле (и других внешних задач) следует искать в виде :

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{(k+1)} Y_k(\theta,\varphi). \tag{5.46}$$

Наконец, функцию, гармоническую в сферическом слое и принимающую заданные значения на границе этого слоя, нужно искать в виде :

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}u_k^{(1)}(r,\varphi,\theta) + \sum_{k=0}^{\infty}u_k^{(2)}(r,\varphi,\theta). \tag{5.47}$$

Произвольные постоянные находятся из граничных условий.

Выпишем несколько присоединенных полиномов Лежандра и функций $Y_k(\theta,\varphi)$ в явном виде для $k=0,1,2,3$:
$P_1^{(1)}(\cos\theta)=\sin\theta;\ P_2^{(1)}(\cos\theta)=3\sin\theta\cos\theta;$
$P_2^{(2)}(\cos\theta)=3\sin^2\theta;\ P_3^{(1)}(\cos\theta)=\sin\theta\dfrac{15\cos^2\theta-3}{2};$
$P_3^{(2)}(\cos\theta)=15\sin^2\theta\cos\theta;\ P_3^{(3)}(\cos\theta)=15\sin^3\theta;$
$P_n^{(n)}(\cos\theta)=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}\sin^n\theta;$
$Y_0(\theta,\varphi)=a_0,\ Y_1(\theta,\varphi)=a_1\cos\theta+(b_1\cos\varphi+c_1\sin\varphi)\sin\theta,$
$Y_2(\theta,\varphi)=a_2(3\cos^2\theta-1)+(b_2\cos\varphi+c_2\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta$
$+(d_2\cos 2\varphi+e_2\sin 2\varphi)\sin^2\theta,$
$Y_3(\theta,\varphi)=a_3(5\cos^3\theta-3\cos\theta)+(b_3\cos\varphi+c_3\sin\varphi)\sin\theta(15\cos^2\theta-3)$
$+(d_3\cos 2\varphi+e_3\sin 2\varphi)\sin^2\theta\cos\theta+(f_3\cos 3\varphi+g_3\sin 3\varphi)\sin^3\theta.$

Пример 5. Найти функцию, гармоническую внутри единичной сферы и такую, что : $u|_{r=1}=\cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\theta.$

Решение. Для внутренней задачи Дирихле ищем решение в виде (5.45). Граничное условие

$$u(1,\theta,\varphi)=\cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\theta=\left(\cos\pi/3\cos 2\varphi-\sin\frac{\pi}{3}\sin 2\varphi\right)\sin^2\theta$$

есть частный случай сферической функции Y_2 при $a_2=b_2=c_2=0,\ d_2=\cos\pi/3,\ c_2=-\sin\pi/3$. Поэтому

$$u(r,\theta,\varphi)=r^2Y_2(\theta,\varphi)=r^2\cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\theta.$$

Решить задачи

5.15. Найти функцию u, гармоническую внутри шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что :
1) $u|_{r=R}=\cos(2\varphi+\pi/3)\sin^2\theta$; 2) $u|_{r=R}=(\sin\theta+\sin 2\theta)\sin(\varphi+\pi/6)$;
3) $u|_{r=R}=(\sin\theta+\sin\varphi)\sin\theta$; 4) $u|_{r=R}=\cos\theta\sin^2\theta\cos(2\varphi+\pi/6)$;
5) $u|_{r=R}=\sin^3\theta\cos(3\varphi+\pi/4)$.

5.16. Найти функцию u, гармоническую вне шара радиуса R с центром в начале координат и такую, что :
1) $u_r|_{r=R}=\sin\theta\sin(\pi/4-\varphi)$; 2) $u|_{r=R}=\cos^2\theta\sin\theta\sin(\varphi+\pi/3)$;
3) $u|_{r=R}=\sin^{100}\theta\sin(100\varphi)$; 4) $u|_{r=R}=\sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi+\pi/4)$;
5) $(u_r-u)|_{r=R}=\sin\theta\cos^2\theta/2\sin(\pi/6+\varphi)$.

5.17. Найти функцию, гармоническую внутри шарового слоя $1<r<2$ и такую, что $u|_{r=1}=f_1(\theta,\varphi);\ u|_{r=2}=f_2(\theta,\varphi)$, где
1) $f_1=\sin\theta\sin(\varphi);\ f_2=0;$
2) $f_1=7\sin\theta\cos(\varphi);\ f_2=7\cos\theta;$
3) $f_1=\sin^2\theta\sin(2\varphi);\ f_2=\sin^2\theta\cos(2\varphi);$
4) $f_1=12\sin\theta\cos^2\theta/2;\ f_2=0;$
5) $f_1=0;\ f_2=6\cos^2\varphi\sin^2\theta.$

6. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим краевую задачу :

$$Ly\equiv\ -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})+q(x)y(x)=f(x); \qquad (6.1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha_1 y(a)-\alpha_2 y^{'}(a)=0,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y^{'}(b)=0,\end{array}\right\} \qquad (6.2)$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $\alpha_1+\alpha_2>0$, $\beta_1+\beta_2>0$, $p \in C^1([a,b])$, $q \in C([a,b])$, $f \in C(a,b)\cap L_2(a,b)$, $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$.

Область определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L состоит из функций $y(x) \in C^1([a,b]) \cap C^2(a,b)$, $y^{''} \in L_2(a,b)$, удовлетворяющих граничным условиям (6.2).

Задача о нахождении тех значений λ, при которых уравнение $Lu=\lambda u$ имеет ненулевые решения $y(x) \in \mathcal{D}(L)$, называется задачей Штурма–Лиувилля. Эти значения λ называются собственными значениями, а решения $y(x)$ – собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля. Если существует обратный оператор L^{-1}, что эквивалентно тому, что $\lambda=0$ не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля, то решение краевой задачи (6.1)–(6.2) существует, единственно и выражается формулой

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

То есть обратный оператор L^{-1} представляет собой интегральный оператор. Ядро этого оператора – функция $G(x,\xi)$ – называется функцией Грина задачи Штурма–Лиувилля, или оператора L.

Функция Грина представляется формулой

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{k}\left\{\begin{array}{ll} y_1(x)y_2(\xi), & a\leq x\leq \xi,\\ y_1(\xi)y_2(x), & \xi\leq x\leq b,\end{array}\right.$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ненулевые решения уравнения $Ly=0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму из граничных условий (6.2) (эти решения определены с точностью до постоянного множителя), $k=p(x)w(x)$, $w(x)$ – определитель Вронского :

$$w(x)=\left|\begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x)\end{array}\right|.$$

Имеет место тождество Остроградского–Лиувилля

$$k=p(x)w(x)=p(0)w(0), x\in[a,b].$$

Краевая задача

$$Ly=\lambda y+f,$$

где $f \in C(a,b)\cap L_2(a,b)$, при условии, что $\lambda=0$ не есть собственное значение оператора L, эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi+\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$

Пример 1. Найти функцию Грина оператора L на интервале (0,1), где

$$Ly=-y^{''}, \quad y(0)=y(1)=0.$$

Решение. Проверим, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма–Лиувилля, т.е. единственным решением уравнения $y'' = 0$, удовлетворяющим краевым условиям $y(0) = y(1) = 0$, будет функция $y(x) \equiv 0$. Общее решение уравнения $y'' = 0$ имеет вид $y(x) = A + Bx$. Из краевого условия $y(0) = 0$ получаем $A = 0$. Соответственно из второго условия $y(1) = 0$, с учетом того, что $A = 0$, получаем $B = 0$. Следовательно, $y(x) \equiv 0$. Построим решение $y_1(x)$. Решением уравнения $y'' = 0$, удовлетворяющим краевому условию $y(0) = 0$, является функция $y(x) = C_1x$, где C_1– произвольная постоянная. Аналогично строим $y_2(x) = C_2(1 - x)$. Определитель Вронского функций y_1 и y_2 равен

$$w(x) = \begin{vmatrix} C_1x & C_2(1-x) \\ C_1 & -C_2 \end{vmatrix} = -C_1C_2,$$

а $k = p(x)w(x) = -C_1C_2$. Следовательно,

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x \le 1. \end{cases}$$

В силу тождества Остроградского–Лиувилля можно рассчитывать k при $x = 0$. Действительно, в данном примере $p(x) = 1$ и

$$k = w(0) = \begin{vmatrix} 0 & C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{vmatrix} = -C_1C_2.$$

Решить задачи

6.1. Найти функцию Грина оператора L на интервале (0,1) :

1) $Ly = -y''$; $y(0) = y'(1) = 0$;
2) $Ly = -y''$; $y'(0) = y(0),\ y(1) = 0$;
3) $Ly = -y''$; $y'(0) = y(1) = 0$;
4) $Ly = -y''$; $y(0) = 0,\ y'(1) = -y(1)$;
5) $Ly = -y'' - y$; $y(0) = y(1) = 0$;
6) $Ly = -y''$; $y'(0) = y(0),\ y'(1) = 0$;
7) $Ly = -y'' + y$; $y(0) = y(1) = 0$;
8) $Ly = -y''$; $y'(0),\ y'(1) = -y(1)$;
9) $Ly = -y'' - y$; $y(0) = y'(1) = 0$;
10) $Ly = -y'' + y$; $y(0) = y'(1) = 0$;
11) $Ly = -(1 + x^2)y'' - 2xy'$; $y(0) = y'(0),\ y(1) = 0$;
12) $Ly = -(1 + x^2)y'' - 2xy'$; $y(0) = 0,\ y(1) = y'(1)$;
13) $Ly = -(3 + x^2)y'' - 2xy'$; $y(0) = y'(0),\ y(1) = 0$;
14) $Ly = -(1 + x)^2y'' - 2(1 + x)y' + 2y$; $y(0) = y(1) = 0$;
15) $Ly = -(4 - x^2)y'' - 2xy'$; $y(0) = y(1) = 0$.

6.2. Найти функцию Грина оператора L на интервале (1,2) :

1) $Ly = -x^2y'' - 2xy'$; $y'(1) = y(2) = 0$;
2) $Ly = -x^2y'' - 2xy'$; $y(1) = y(2) = 0$;
3) $Ly = -xy'' - y'$; $y'(1) = y(2) = 0$;
4) $Ly = -x^3y'' - 3x^2y' - xy$; $y(1) = y(2) + 2y'(2) = 0$;
5) $Ly = -x^4y'' - 4x^3y' - 2x^2y$; $y(1) + y'(1) = y(2) + 3y'(2) = 0$.

6.3. Свести следующие задачи Штурма–Лиувилля на интервале $0 < x < 1$ к интегральному уравнению :

1) $-(1 + e^x)y'' - e^xy' = \lambda x^2y$; $y(0) - 2y'(0) = y'(1) = 0$;
2) $-(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = \lambda y$; $y'(0) = y'(1) - y(1) = 0$;

3) $-(1+x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0;\ y(0) = y'(1) = 0;$
4) $-e^x y'' - e^x y' + \lambda y;\ y(0) = y'(1) + y(1) = 0;$
5) $-\sqrt{1+e^{2x}}y'' - \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}y' = \lambda xy;\ y(0) + \sqrt{2}y'(0) = y'(1) = 0.$

7. ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Функцией Грина (внутренней) задачи Дирихле для области $\Omega \subset R^3$ называется функция $G(x, y)$, обладающая следующими свойствами :

1. $G(x, y) = \dfrac{1}{4\pi|x-y|} + g(x, y)$, где функция g – гармоническая в Ω и непрерывная в $\overline{\Omega}$ по x при каждом $y \in \Omega$.
2. $G(x, y)|_{\partial\Omega} = 0$ при каждом $y \in \Omega$.

Если Ω – неограниченная область , то требуется также, чтобы $G(x, y) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Если Ω – ограниченная область и $\partial\Omega$ – достаточно гладкая поверхность, то G существует, единственна, имеет правильную нормальную производную $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_x}$ на $\partial\Omega$ при каждом $y \in \Omega$ и симметрична, т.е. $G(x, y) = G(y, x), \quad x \in \Omega,\ y \in \Omega$.

Если решение $u(x)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(x);\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x),$$

где $f \in C(\overline{\Omega})$ и $\varphi(x) \in C(\partial\Omega)$, имеет правильную нормальную производную на $\partial\Omega$, то оно определяется формулой

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi(y) d\,S_y + \int\limits_{\Omega} G(x, y) f(y) d\,y. \tag{7.1}$$

Для ряда областей функцию Грина можно найти методом отражений.

Пример 1. Построить функцию Грина для шара в R^3.

Решение. Пусть B_R шар радиуса $R, y \in B_R, y \neq 0$ и $y^* = y\dfrac{R^2}{|y^*|^2}$ – точка симметричная точке y относительно шара B_R . Ищем функцию Грина в виде :

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} - \frac{\alpha}{4\pi|x-y^*|},$$

где α – величина, которую подберем так, чтобы функция $G(x, y)$ обратилась в ноль на границе S_R. Для этого заметим (см. рис.15), что при $x \in S_R$ треугольники Oxy^* и Oxy подобны, т.к. угол $\angle xOy$ у них общий , а прилегающие к нему стороны пропорциональны : $R/|y| = |y^*|/R$. Поэтому при $x \in S_R$ справедливо соотношение

$$\frac{R}{|y|} = \frac{|x-y^*|}{|x-y|}$$

и, следовательно, при $\alpha = R/|y|$ второе свойство функции Грина будет выполнено. Функция $g(x, y) = -\dfrac{1}{4\pi|x-y^*|}$ – гармоническая в B_R и принадлежит классу $C^\infty(\bar{B}_R)$ по x. Следовательно выполнено и первое свойство.

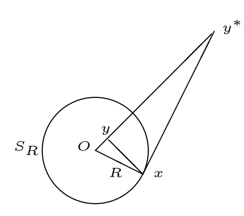

Рис.15

Итак,

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R}{4\pi|y||x-y^*|}=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R|y|}{4\pi\,|(x|y|^2-yR^2)|}$$

есть функция Грина для шара.

Вычислим нормальную производную функции Грина на сфере S_R.

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\right|_{S_R}=\frac{\partial}{\partial|y|}\left.\left[\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R|y|}{4\pi|x|y|^2-yR^2|}\right]\right|_{|y|=R}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left.\left[\frac{1}{\sqrt{|x|^2+\rho^2-2|x|\rho\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{R^4+|x|^2\rho^2-2R^2|x|\rho\cos\gamma}}\right]\right|_{\rho=R}$$
$$=\frac{|x|^2-R^2}{4\pi R(R^2+|x|^2-2R|x|\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}=\left.\frac{|x|^2-R^2}{4\pi R|x-y|^3}\right|_{y\in S_R},$$

где γ – угол между векторами x и y.

Формула (7.1) для шара B_R при $f\equiv 0$ принимает вид :

$$u(x)=\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|y|=R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^3}\varphi(y)dS_y,\ \ |x|<R.$$

Это формула Пуассона, которая дает решение внутренней задачи Дирихле для шара B_R для любой непрерывной на S_R функции φ.

Пример 2. Построить функцию Грина для полупространства $x_3>0$ в R^3.

Решение. Точке $y(y_1,y_2,y_3)$ $(y_3>0)$ ставим в соответствие симметричную относительно плоскости $x_3=0$ точку $\bar{y}(y_1,y_2,-y_3)$.
Тогда функция Грина для полупространства $x_3>0$ определяется формулой

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{1}{4\pi|x-\bar{y}|}.$$

Она обращается в ноль, как и положено, при x принадлежащих плоскости $x_3=0$. Вводя обозначение $y_{mnk}=\Big((-1)^m y_1,(-1)^n y_2,(-1)^k y_3\Big)$, можно записать :

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{1}\frac{(-1)^k}{|x-y_{00k}|}.$$

Найдем нормальную производную :

$$\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y}\right|_{y_3=0}=-\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_3}\right|_{y_3=0}=-\frac{x_3}{2\pi}\left.\frac{1}{|x-y|^3}\right|_{y_3=0}.$$

Теперь можно воспользоваться формулой (7.1) для решения задачи Дирихле в полупространстве $x_3>0$ для любой непрерывной на плоскости $x_3=0$ функции φ.

Функцией Грина задачи Дирихле для области $\Omega\subset R^2$ является функция представимая в виде :

$$G(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-\zeta|}+g(z,\zeta),$$

где $z=x+iy\in\overline{\Omega}$, $\zeta=\xi+i\eta\in\Omega$, и обладающая теми же свойствами, что и функция Грина в R^3.

Решение задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(z);\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(z)$$

в R^2 (если оно существует) определяется формулой, аналогичной формуле (7.1). В том случае, когда область Ω – односвязная, с достаточно гладкой границей и известна некоторая функция $w = w(z,\zeta)$, конформно отображающая Ω на единичный круг $|w| < 1$, так, что точка $z = \zeta$ переходит в начало координат, функция Грина находится по формуле

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|w(z,\zeta)|}. \tag{7.2}$$

Пример 3. Построить с помощью конформного отображения функцию Грина для полуплоскости $\operatorname{Im} z = y > 0$ в R^2.

Решение. Из теории функций комплексного переменного известно, что дробно–линейное отображение $w(z,\zeta) = \dfrac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta},}$ где ζ – произвольная точка верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im}\zeta > 0\}$, конформно отображает верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{|w| < 1\}$, причем точка ζ переходит в центр круга $w = 0$. Тогда, согласно формуле (7.2), функция Грина равна

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z-\bar{\zeta}}{z-\zeta} \right|.$$

Пример 4. Построить функцию Грина для полосы $0 < \mathrm{Im} z < \pi$ в R^2.

Решение. Сначала при помощи показательной функцией e^z отобразим полосу в верхнюю полуплоскость, а затем воспользуемся предыдущим дробно-линейным отображением. В результате получим $w(z,\zeta) = \dfrac{e^z - e^{\zeta}}{e^z - e^{\bar{\zeta}}}$. Формула (7.2) теперь дает

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^z - e^{\bar{\zeta}}}{e^z - e^{\zeta}} \right|.$$

Решить задачи

7.1. Построить функцию Грина и найти решение задачи Дирихле для следующих областей в R^3 :

1) двугранный угол $y > 0,\ z > 0$;
2) октант $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$;
3) полушар $r < R,\ z > 0$;
4) четверть шара $r < R,\ y > 0,\ z > 0$;
5) восьмая часть шара $r < R,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

7.2. Построить функцию Грина и найти решение задачи Дирихле для следующих областей в R^2 :

1) полуплоскость $\mathrm{Im} z > 0$;
2) четверть плоскости $0 < \arg z < \pi/2$;
3) полукруг $|z| < R,\ \mathrm{Im} z > 0$;
4) четверть круга $|z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/2$;
5) полоса $0 < \mathrm{Im} z < \pi$;
6) полуполоса $0 < \mathrm{Im} z < \pi,\ \mathrm{Re} z > 0$.

7.3. Найти решение задачи Дирихле для полупространства

$$\Delta u = 0,\ z > 0;\ u|_{z=0} = \theta(y - x),$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

7.4. Найти решение задачи Дирихле для двугранного угла

$$\Delta u = 0,\ y > 0,\ z > 0;\ u|_{y=0} = 0,\ u|_{z=0} = \theta(y - |x|).$$

7.5. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в верхней полуплоскости $y > 0$ со следующими краевыми условиями :
1) $u|_{y=0} = \theta(x-1)$; 2) $u|_{y=0} = \theta(x+2)$; 3) $u|_{y=0} = 1/(1+x^2)$;
4) $u|_{y=0} = x/(1+x^2)$; 5) $u|_{y=0} = \cos x$.

7.6. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в первом квадранте $x > 0,\ y > 0$ со следующими краевыми условиями :
1) $u|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = 1$; 2) $u|_{x=0} = 1,\ u|_{y=0} = -1$;
3) $u|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = \theta(x-1)$; 4) $u|_{x=0} = \theta(y-2),\ u|_{y=0} = 0$;
5) $u|_{x=0} = 0,\ u|_{y=0} = 1/(1+x^2)$.

7.7. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полосе $0 < y < \pi$ со следующими краевыми условиями :
1) $u|_{y=0} = \theta(x),\ u|_{y=\pi} = 0$; 2) $u|_{y=0} = \theta(x),\ u|_{y=\pi} = \theta(x)$;
3) $u|_{y=0} = \theta(x),\ u|_{y=\pi} = -\theta(x)$; 4) $u|_{y=0} = \theta(-x),\ u|_{y=\pi} = \theta(x)$;
5) $u|_{y=0} = \theta(x),\ u|_{y=\pi} = \theta(-x)$.

8. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Ньютоновым (объемным) потенциалом масс, распределенных по области G пространства R^n с плотностью ρ, называется функция

$$V_n(x) = \int\limits_G E(x,y)\rho(y)d\,y, \tag{7.1}$$

где $E(x,y)$ – элементарное решение уравнения Лапласа :

$$E(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}} & \text{при } n \geq 3, \\ \ln\dfrac{1}{|x-y|} & \text{при } n = 2. \end{cases} \tag{7.2}$$

При $n = 2$ потенциал $V_2(x)$ часто называют логарифмическим потенциалом. Потенциал $V_n(x)$ обладает следующими свойствами :

1. $V_n(x)$ – гармоническая функция вне замкнутой области $\bar{G}$.

2. Если плотность $\rho(x) \in C^1(\bar{G})$, то $V_n(x) \in C^2(G)$, причем

$$\Delta V_n(x) = -(n-2)\sigma_n\rho(x) \ \text{при } n \geq 3; \quad \Delta V_2(x) = -2\pi\rho(x), \tag{7.3}$$

где σ_n – площадь единичной сферы в R^n.

Пусть S – гладкая или кусочно гладкая поверхность в пространстве R^n, а ν – заданная на ней непрерывная функция. Выражения

$$V_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_S \nu(y) E(x,y) dS_y \tag{7.4}$$

и

$$V_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_S \nu(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial \mathbf{n}_y} dS_y, \tag{7.5}$$

где $\mathbf{n}_y$ – внешняя нормаль к S в точке y, называются соответственно потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя, распределенных на S с плотностью ν.

В каждой точке $x \in R^n$, не лежащей на S, потенциалы простого и двойного слоя представляют собой гармонические функции. Выражения (7.4-7.5) определены при $x \in S$ и представляют собой непрерывные функции.

Пусть S – замкнутая поверхность имеющая конечную кривизну (в более общем случае – поверхность Ляпунова), а D^+ и D^- – соответственно конечная и бесконечная области, ограниченные ею.

Потенциал простого слоя (7.4) обладает следующими свойствами :

1. $V_n^{(1)}(x)$ остается непрерывным при переходе точки x из области D^+ в область D^-.

2. Существуют пределы

$$\left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial V_n^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad \left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial V_n^{(1)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x}.$$

3. Обозначим через $\dfrac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}$ нормальную производную потенциала простого слоя при $x = x_0 \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ &= \frac{\nu(x_0)}{2} + \frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}, \\ \left(\frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- &= -\frac{\nu(x_0)}{2} + \frac{\partial V_n^{(1)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}. \end{aligned}$$

Что касается потенциала двойного слоя, то :

1. Для любой точки $x_0 \in S$ существуют пределы

$$V_n^{(2)}(x_0)^+ = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} V_n^{(2)}(x), \quad V_n^{(2)}(x_0)^- = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^-}} V_n^{(2)}(x)$$

2. При переходе точки x из области D^+ в область D^- он претерпевает разрыв, причем

$$V_n^{(2)}(x_0)^+ = -\frac{\nu(x_0)}{2} + V_n^{(2)}(x_0), \quad V_n^{(2)}(x_0)^- = \frac{\nu(x_0)}{2} + V_n^{(2)}(x_0),$$

где

$$V_n^{(2)}(x_0) = \frac{1}{\sigma_n} \int\limits_S \nu(y) \frac{\partial E(x_0,y)}{\partial \mathbf{n}_y} dS_y.$$

3. При $x \to x_0 \in S$ существуют пределы

$$\left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} \frac{\partial V_n^{(2)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x}, \quad \left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} \frac{\partial V_n^{(2)}(x)}{\partial \mathbf{n}_x},$$

причем

$$\left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^+ = \left(\frac{\partial V_n^{(2)}(x_0)}{\partial \mathbf{n}_{x_0}}\right)^- .$$

Пример 1. Вычислить объемный потенциал V_3 для шара $|x| < R$ с плотностью $\rho = \rho(|x|) \in C$. Проверить выполнение свойств 1–2 для объемного потенциала. Рассмотреть частный случай $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

Решение.

$$V_3(x) = \int\limits_{|y|<R} \frac{\rho(|y|)}{|x-y|} d\,y. \tag{7.6}$$

В силу сферической симметрии плотности ρ решение должно зависеть только от расстояния до центра шара r (рис.16).

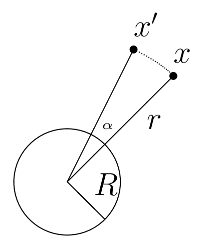

Рис.16

Действительно, пусть потенциал в точке x равен $V_3(x)$. Повернем шар на угол α. Пусть точка x жестко связана с шаром, следовательно она повернется тоже на угол α и займет положение x'. В ней решение будет равно $V_3(x') = V_3(x)$. Но, с другой стороны, в силу симметрии поворот шара ничего не изменил. Следовательно, на всей сфере радиуса r решение есть $V_3(x)$.

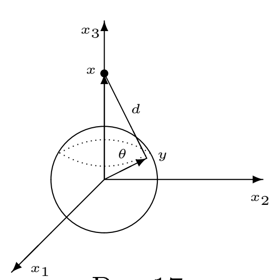

Рис.17

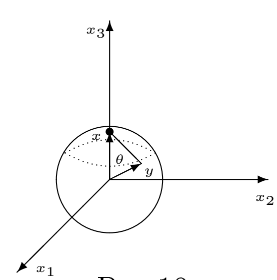

Рис.18

Введем сферические координаты с началом координат в центре шара. Точку x выберем на оси x_3 : рис.17 $r \geq R$; рис.18 $r \leq R$. Угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, проведенными из начала координат в точки x и y, равен углу θ в сферической системе координат. Обозначим $|\vec{x}| = r,\ |\vec{y}| = r_1,\ \ |\vec{x} - \vec{y}| = d$.

Переходя к сферическим координатам в интеграле (7.6) и учитывая, что $d =$

$|\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}$, получим

$$\begin{aligned} V_3(r) &= \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_{-\pi}^\pi \frac{\rho(r_1)r_1^2\sin\theta d\varphi d\theta dr_1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}} = 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \frac{\rho(r_1)r_1^2\sin\theta d\theta dr_1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}} \\ &= 2\pi \int\limits_0^R \rho(r_1)r_1^2 I(r,r_1)dr_1, \end{aligned}$$

где

$$I(r,r_1) = -\int\limits_0^\pi \frac{d\cos\theta}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}} = \frac{(r+r_1)-|r-r_1|}{rr_1}.$$

Следовательно, если $r \geq r_1$, то $I(r,r_1) = I(r) = 2/r$, а если $r \leq r_1$, то $I(r,r_1) = I(r_1) = 2/r_1$.

а) Пусть $r \geq R$, тогда при всех r_1 $I(r,r_1) = 2/r$ и

$$V_3(r) = \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^R \rho(r_1)r_1^2 dr_1. \tag{7.7}$$

б) Пусть $r \leq R$, тогда для вычисления интеграла разобьем его на два :

$$V_3(r) = 2\pi\int\limits_0^r \rho(r_1)r_1^2 I(r)dr_1 + 2\pi\int\limits_r^R \rho(r_1)r_1^2 I(r_1)dr_1.$$

В результает получим :

$$V_3(r) = \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^r \rho(r_1)r_1^2 dr_1 + 4\pi\int\limits_r^R \rho(r_1)r_1 dr_1. \tag{7.8}$$

Чтобы проверить выполнение свойств 1–2 для объемного потенциала, заметим, что в силу сферической симметрии частные производные от потенциала по угловым переменным в сферической системе координат равны нулю, и при вычислении лапласиана следует учитывать лишь его радиальную часть, равную $V_{3rr} + \dfrac{2}{r}V_{3r}$. Проделав вычисления, получим :

а) $\Delta V_3 = V_{3rr} + \dfrac{2}{r}V_{3r} = 0$ при $r > R$,

б) $\Delta V_3 = -4\pi\rho(r)$, при $r < R$.

Для частного случая $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$ получим :

$$V_3(r) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \dfrac{1}{r}, & r \geq R, \\ 2\pi\rho_0(R^2 - \dfrac{1}{3}r^2), & r \leq R. \end{cases}$$

Пример 2. Найти логарифмический потенциал для круга $r < R$ со следующей плотностью $\rho = \rho(r) \in C([0,R])$. Проверить для него выполнение свойств 1–2. Рассмотреть частный случай $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$.

Решение. Здесь, как и в примере 1, в силу симметрии потенциал

$$V_2(x) = \int\limits_{|y|<R} \rho(y) \ln \frac{1}{|x-y|}\ dy$$

будет зависеть только от расстояния до центра круга, который и выберем за начало полярной системы координат.

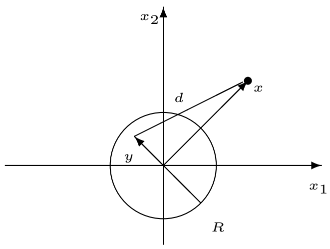

Рис.19

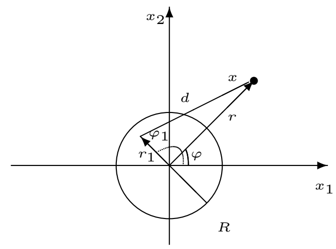

Рис.20

Пусть в декартовой системе координат вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют соответственно координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2) (рис.19), а в полярной – соответственно (r, φ) и (r_1, φ_1) (рис.20). Расстояние $d = |\vec{x} - \vec{y}|$ (рис.20) будет равно $d = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi_1 - \varphi)}$. Тогда выражение для потенциала, с учетом того, что он не зависит от угла φ, запишется в виде :

$$\begin{aligned} V_2(r) &= \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \rho(r_1) \ln\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\varphi_1}}\right] r_1 d\varphi_1 dr_1 \\ &= \int\limits_0^R \rho(r_1) I(r, r_1) r_1 dr_1, \end{aligned}$$

где

$$I(r, r_1) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \ln(r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\varphi_1) d\varphi_1.$$

Рассмотрим два случая :

а) Пусть $r \geq r_1$, тогда последний интеграл можно представить в виде :

$$I(r, r_1) = 2\pi \ln\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_1) d\varphi_1,$$

где $\lambda = \dfrac{r_1}{r} \leq 1$.

Вычислим этот интеграл при помощи интегрирования по параметру. Так как

$$\frac{d}{d\lambda}[\ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_1] = \frac{2\lambda - 2\cos\varphi_1}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_1}$$

и $\ln(1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_1)|_{\lambda=0} = 0$, то

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln[1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi_1] d\varphi_1 = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\lambda} \frac{2\mu - 2\cos\varphi_1}{1 + \mu^2 - 2\mu\cos\varphi_1} d\mu\right] d\varphi_1. \tag{7.9}$$

Меняя порядок интегрирования и используя вычисленное в разделе 5 (пример 1) значение интеграла

$$I_n = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi}{1+\mu^2-2\mu\cos\varphi} d\varphi = \frac{2\pi\mu^n}{1-\mu^2}$$

получим, что интеграл по $d\varphi_1$ равен нулю. Следовательно при $r \geq r_1 \quad I(r, r_1) = -2\pi \ln r$.

б) Пусть теперь $r \leq r_1$ тогда искомый интеграл можно представить в виде :

$$I(r, r_1) = 2\pi \ln \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \ln(1+\lambda^2-2\lambda\cos\varphi_1) d\varphi_1,$$

где $\lambda = \dfrac{r}{r_1} \leq 1$. Интеграл по $d\varphi_1$ даст снова ноль. В результате получим $I(r, r_1) = -2\pi \ln r_1$. Поступая далее как в примере 1, получим :

$$V_2(r) = \begin{cases} -2\pi \ln r \int\limits_0^R \rho(r_1) r_1 dr_1, & r \geq R, \\ -2\pi \ln r \int\limits_0^r \rho(r_1) r_1 dr_1 - 2\pi \int\limits_r^R \rho(r_1) r_1 \ln r_1 dr_1, & r \leq R. \end{cases}$$

Для проверки свойств 1–2 логарифмического потенциала отметим, что при вычислении лапласиана следует снова брать лишь его радиальную часть, равную в этом случае $V_{2rr} + \dfrac{1}{r} V_{2r}$.

Для частного случая $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$ получим :

$$V_2(r) = \begin{cases} -\pi\rho_0 R^2 \ln r, & r \geq R, \\ -\pi\rho_0 \left(R^2 \ln R - \dfrac{R^2 - r^2}{2} \right), & r \leq R. \end{cases}$$

Решить задачи

8.1. Вычислить объемный потенциал V_3 для шара $|x| < R$ со следующими плотностями :
1) $\rho = |x|$; 2) $\rho = |x|^2$; 3) $\rho = \sqrt{|x|}$; 4) $\rho = e^{-|x|}$;
5) $\rho = \sin|x|$; 6) $\rho = \cos|x|$; 7) $\rho = 1/(1+|x|^2)$; 8) $\rho = \ln(1+|x|/R)$.

8.2. Найти логарифмический потенциал для круга $r < R$ со следующими плотностями :
1) $\rho = r$; 2) $\rho = r^2$; 3) $\rho = e^{-r}$; 4) $\rho = 1/(1+r^2)$; 5) $\rho = \sqrt{r}$;
6) $\rho = \sin r$; 7) $\rho = \cos r$; 8) $\rho = \sin\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$; 9) $\rho = \cos\varphi$.

8.3. Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере $|x| = R$.

8.4. На круглом диске радиуса R распределен простой слой с плотностью μ. Найти потенциал в точке, лежащей на оси диска для следующих плотностей :
1) $\mu = \mu_0 = const$; 2) $\mu = r$; 3) $\mu = r^2$; 4) $\mu = a + br$;
5) $\mu = \mu(\varphi)$ – непрерывная 2π – периодическая функция.

8.5. Найти потенциал двойного слоя, распределенного с постоянной плотностью μ_0 на сфере $|x| = R$.

8.6. Найти логарифмический потенциал простого слоя для окружности радиуса R с плотностью μ_0.

8.7. Найти логарифмический потенциал двойного слоя для окружности радиуса R с плотностью μ_0.

8.8. Составить интегральные уравнения Фредгольма второго рода, к которым сводятся задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа (как внутренние, так и внешние).

8.9. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

8.10. С помощью потенциала простого слоя решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри и вне круга.

8.11. С помощью потенциала двойного слоя решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара.

8.12. С помощью поверхностных потенциалов решить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа для полупространства $z > 0$.

9. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

1. Уравнение гиперболического типа

Однородное уравнение и однородные граничные условия. Пусть $Lu = -(p(x)u_x)_x + q(x)u$ – дифференциальный оператор Штурма–Лиувилля. Рассмотрим в полуполосе $_\infty = [0,l] \times [0,\infty)$ смешанную задачу для однородного уравнения гиперболического типа :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu \quad (0 < x < l,\ 0 < t < \infty), \tag{9.1}$$

с начальными условиями :

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x)\ \ (x \in [0,l]), \tag{9.2}$$

и однородными граничными условиями :

$$h_1 u(0,t) - h_2 u_x(0,t) = 0,\ \ H_1 u(l,t) + H_2 u_x(l,t) = 0\ \ (t \geq 0), \tag{9.3}$$

где $h_i, H_i \geq 0$, $h_1 + h_2 > 0$, $H_1 + H_2 > 0$, $p \in C^1([0,l])$, $q \in C([0,l])$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$. Кроме того, чтобы обеспечить принадлежность решения классу $C^2((0,l) \times (0,\infty)) \cap C^1([0,l] \times [0,\infty))$, должны быть выполнены некоторые условия согласования в угловых точках полуполосы. Так, например, для непрерывности решения необходимо, чтобы

$$h_1\varphi(0) - h_2\varphi'(0) = 0,\ \ H_1\varphi(l) + H_2\varphi'(l) = 0.$$

Следуя основной идее метода разделения переменных, будем искать частные решения уравнения (9.1), удовлетворяющие граничным условиям (9.3), в виде $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. Подставляя u в уравнение (9.1) и разделяя переменные, получим :

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

где λ – постоянная разделения переменных. Отсюда следует, что $T(t)$ и $X(x)$ должны удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям :

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{9.4}$$

$$LX(x) = \lambda X(x). \tag{9.5}$$

Из граничных условий (9.3) следует :

$$\begin{cases} h_1 X(0) - h_2 X'(0) = 0, \\ H_1 X(l) + H_2 X'(l) = 0. \end{cases} \tag{9.6}$$

Таким образом для $X(x)$ получим задачу Штурма–Лиувилля (9.5-9.6).

Согласно теории, задача Штурма–Лиувилля имеет счетный набор собственных значений $\{\lambda_k\}$ $(\lambda_k \geq 0)$ и счетный набор ортогональных собственных функций $\{X_k(x)\}$, отвечающих этим собственным значениям.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (9.4) имеет вид :

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t. \tag{9.7}$$

Таким образом мы построили счетный набор решений уравнения (9.1), удовлетворяющий граничным условиям (9.3) в виде :

$$u_k(x,t) = (a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t) X_k(x).$$

Решение всей задачи (9.1-9.3) ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}t) X_k(x). \tag{9.8}$$

Неизвестные коэффициенты a_k и b_k находятся из начальных условий (9.2):

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\|X_k(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \\ b_k &= \frac{1}{\|X_k(x)\|^2 \sqrt{\lambda_k}} \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx. \end{aligned}$$

Подставляя найденные a_k и b_k в (9.8), получим формальное решение смешанной задачи (9.1)–(9.3).

Неоднородное уравнение и однородные граничные условия. Рассмотрим в полуполосе $_\infty$ смешанную задачу для неоднородного уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Lu + f(x,t) \quad (0 < x < l,\ 0 < t < \infty), \tag{9.9}$$

с начальными условиями (9.2) и однородными граничными условиями (9.3).

При каждом $t > 0$ разложим решение $u(x,t)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (9.5-9.6) $X_k(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \tag{9.10}$$

где

$$T_k(t) = (u, X_k)/\|X_k\|^2. \tag{9.11}$$

В силу (9.11), из начальных условий (9.10) следует, что неизвестные функции $T_k(t)$ должны удовлетворять начальным условиям :

$$\begin{aligned} T_k(0) &= \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)dx = a_k, \\ T_k'(0) &= \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)dx = b_k. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Составим дифференциальное уравнение для функций T_k. Умножим скалярно уравнение (9.9) на $X_k(x)$. Для левой части, используя (9.11), получим:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, X_k\right) = \int\limits_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}X_k dx = \frac{d^2}{dt^2}(u, X_k) = T_k''(t).$$

Для преобразования правой части воспользуемся эрмитовостью оператора L :

$$\begin{aligned} -(Lu, X_k) + (f, X_k) &= -(u, LX_k) + (f, X_k) = -\lambda_k(u, X_k) + (f, X_k) \\ &= -\lambda_k T_k(t) + c_k(t), \end{aligned}$$

где

$$c_k(t) = \frac{(f, X_k)}{\|X_k\|^2} = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int\limits_0^l f(x,t)X_k(x)dx.$$

Приравнивая обе части, получим искомое уравнение :

$$T_k''(t) + \lambda_k T_k(t) = c_k(t). \tag{9.13}$$

Решая задачу Коши для уравнения (9.13) с начальными условиями (9.12) и учитывая, что $\lambda_k \geq 0$, получим :

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^t c_k(\tau)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-\tau)d\tau.$$

Подставляя найденные $T_k(t)$ в (9.10), получим формальное решение смешанной задачи (9.9),(9.2–9.3).

Неоднородные граничные условия. Рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения (9.9) с начальными условиями (9.2) и неоднородными граничными условиями

$$h_1 u(0,t) - h_2 u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad H_1 u(l,t) + H_2 u_x(l,t) = \mu_2(t). \tag{9.14}$$

Эта задача может быть сведена к задаче с однородными граничными условиями относительно новой неизвестной функции $v(x,t)$ в результате замены искомой функции $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где $w(x,t)$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям (9.14). Функция $w(x,t)$ всегда может быть найдена в виде :

$$w(x,t) = d_2(t)x^2 + d_1(t)x + d_0(t),$$

где неизвестные функции $d_i(t)$ определяются (неоднозначно) из граничных условий (9.14). Более того, за исключением случая граничных условий второго рода ($h_1 =$

$H_1 = 0$), такую функцию можно подобрать в виде
$w(x,t) = d_1(t)x + d_0(t)$.

Пример 1. Решить смешанную задачу :

$$u_{tt} + u_t = u_{xx}\ (0 < x < 1);\ u|_{x=0} = t,\ u|_{x=1} = 0;\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 1 - x.$$

Решение. Во–первых, необходимо сделать однородными граничные условия. Поэтому ищем решение в виде $u = v + w$, где $w = d_1(t)x + d_0(t)$. Из граничных условий получаем : $d_0(t) = t,\ d_1(t) = -t$. Следовательно, $w = t(1-x)$. Функция $w(x,t)$ удовлетворяет заданным граничным и начальным условиям, тогда $v(x,t)$ будет удовлетворять однородным граничным и начальным условиям. Получим уравнение для $v(x,t) : v_{tt} + w_{tt} + v_t + w_t = v_{xx} + w_{xx} \Longrightarrow v_{tt} + v_t - v_{xx} = x - 1$. Следовательно, для v получаем задачу:

$$v_{tt} + v_t - v_{xx} = x - 1;\ v|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0;\ v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0.$$

Разделяем переменные :

$$T''(t)X(x) + T'(t)X(x) = X''(x)T(t) \Longrightarrow \frac{T''}{T} + \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Получаем задачу Штурма–Лиувилля :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0,\ X(1) = 0. \end{cases}$$

Общее решение последнего уравнения : $X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$. Граничные условия дают тригонометрическое уравнение для нахождения собственных значений $\lambda_k : X(0) = C_2 = 0,\ X(1) = C_1 \sin \lambda = 0 \Longrightarrow \sin \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_k = k\pi,\ k = 1, 2, \ldots$ Следовательно, собственные функции (после нормировки) имеют вид :

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin \lambda_k x = \sqrt{2} \sin k\pi x.$$

Ищем $v(x,t)$ в виде (9.10). Подставляя в уравнение, получим :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k^{''} + T_k^{'} + \lambda_k^2 T_k) X_k(x) = x - 1.$$

Разлагаем в ряд Фурье по собственным функциям $X_k(x)$ правую часть :

$$x - 1 = \sum_{1}^{\infty} c_k X_k(x), \quad \text{где}$$

$$c_k = (x-1, X_k) = \sqrt{2} \int_0^1 (x-1) \sin k\pi x dx = -\frac{\sqrt{2}}{k\pi}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых собственных функциях :

$$T_k^{''} + T_k^{'} + \lambda_k^2 T_k = -\frac{\sqrt{2}}{k\pi}.$$

По формулам (9.12) определяем начальные условия :

$$T_k(0) = T_k^{'}(0) = 0.$$

Найдем общее решение однородного уравнения $T_k^{\cdot}$. Характеристическое уравнение – следующее : $p^2 + p + k^2\pi^2 = 0$. Откуда $p = -1/2 \pm i\sqrt{k^2\pi^2 - 1/4}$. Если обозначим мнимую часть как

$$p_k = \sqrt{k^2\pi^2 - 1/4},\ k = 1, 2, \ldots, \tag{9.15}$$

то общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$T_k^{\cdot} = e^{-t/2}(a_k \cos p_k t + b_k \sin p_k t),$$

где a_k и b_k произвольные константы. Частное решение неоднородного уравнения есть $T_k^{\cdot} = -\sqrt{2}/(k^3\pi^3)$. Следовательно, общее решение исходного уравнения следующее :

$$T_k = T_k^{\cdot} + T_k^{\cdot} = -\sqrt{2}/(k^3\pi^3) + e^{-t/2}(a_k \cos p_k t + b_k \sin p_k t).$$

Из начальных условий находим a_k и b_k и, подставив их в общее решение, получим :

$$T_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}k^3\pi^3} e^{-t/2} \left[-2e^{t/2} + \frac{\sin p_k t}{p_k} + 2\cos p_k t \right].$$

Подставляем найденные X_k и T_k в (9.10) :

$$v(x,t) = e^{-t/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^3} [2\cos p_k t + \frac{1}{p_k} \sin p_k t - 2e^{t/2}] \sin k\pi x.$$

Итак, $u = w + v$,

$$u(x,y) = t(1-x) + e^{-t/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^3} [2\cos p_k t + \frac{1}{p_k} \sin p_k t - 2e^{t/2}] \sin k\pi x,$$

где p_k определены в (9.15).

Пример 2. Решить смешанную задачу :

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} + 2u_t = 4x + 8e^t \cos x \quad (0 < x < \pi/2); \\ &u_x|_{x=0} = 2t,\ u|_{x=\pi/2} = \pi t;\ u|_{t=0} = \cos x,\ u_t|_{t=0} = 2x. \end{aligned}$$

Решение. Найдем функцию, удовлетворяющую краевым условиям. Из их вида ищем ее в форме : $w(x,t) = d_1(t)x + d_0(t) \Longrightarrow\ w_x(0,t) = d_1(t) = 2t,\ w(\pi/2,t) = d_1(t)\pi/2 + d_0(t) = \pi t \Longrightarrow d_0(t) = 0$. Итак, $w(x,t) = 2xt$. Теперь функция v из представления решения в виде $u = w + v$ будет удовлетворять однородным краевым условиям.

Находим уравнение для v : $w_{tt} + v_{tt} - w_{xx} - v_{xx} + 2w_t + 2v_t = 4x + 8e^t \cos x$. Следовательно, $v_{tt} - v_{xx} + 2v_t = 8e^t \cos x$. Определим начальные условия для v : $v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = \cos x,\ v_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - w_t|_{t=0} = 2x - 2x = 0$. Получили смешанную задачу для v :

$$\begin{aligned} &v_{tt} - v_{xx} + 2v_t = 8e^t \cos x \quad (0 < x < \pi/2); \\ &v|_{t=0} = \cos x,\ v_t|_{t=0} = 0;\ v_x|_{x=0} = v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Функции $\cos(2k+1)x$ являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля. Начальные условия, как и свободный член, есть частичная сумма ряда Фурье (вся сумма состоит из одного слагаемого), поэтому и решение будет представляться одним слагаемым ряда Фурье. Ищем решение в виде $v(x,t) = T_0(t)\cos x$. Подставляя в уравнение, получим :

$$T_0^{''}(t) + 2T_0^{'}(t) + T_0(t) = 8e^t.$$

Из начальных данных имеем :

$$T_0(0) = 1,\ T_0^{'}(0) = 0.$$

В результате получили задачу Коши для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения.

Решение неоднородного уравнения $\tilde{T_0}(t) = 2e^t$. Характеристическое уравнение однородного имеет кратный корень $\lambda_{1,2} = -1$, поэтому его общее решение – $\dot{T_0}(t) = (A + Bt)e^{-t}$. Итак, общее решение есть

$$T_0(t) = (A + Bt)e^{-t} + 2e^t.$$

Из начальных условий находим произвольные константы A и $B : T_0(0) = 1 = 2 + A \Longrightarrow A = -1,\ \ T_0^{'}(0) = 0 = -A + B + 2, \Longrightarrow B = -3 \Longrightarrow T_0(t) = 2e^t - (1 + 3t)e^{-t}$. Следовательно, $v(x,t) = (2e^t - 3te^{-t} - e^{-t})\cos x$. Складывая с w, окончательно имеем :

$$u(x,t) = 2xt + (2e^t - 3te^{-t} - e^{-t})\cos x.$$

Решить задачи

9.1. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение $\varphi(x)$ имеет форму :

1) синусоиды $A\sin\frac{\pi n x}{l}$ (n-целое);

2) параболы, осью симметрии которой служит прямая $x = l/2$, а вершиной – точка $M(l/2, h)$;

3) ломаной OAB, где $O(0,0),\ A(c,h),\ B(l,0),\ 0 < c < l$. Рассмотреть случай $c = l/2$.

9.2. Решить задачу о колебании струны $0 < x < l$ с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое, а начальная скорость $\psi(x)$ задается формулой :

1) $\psi(x) = v_0 = \text{const},\ x \in [0,l]$;

2) $\psi(x) = \begin{cases} v_0, & \text{если } x \in [\alpha,\beta], \\ 0, & \text{если } x \notin [\alpha,\beta], \end{cases}$ где $0 \le \alpha < \beta \le l$;

3) $\psi(x) = \begin{cases} A\cos\frac{\pi(x-x_0)}{2\alpha}, & \text{если } x \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \\ 0, & \text{если } x \notin [x_0-\alpha, x_0+\alpha], \end{cases}$

где $0 \le x_0 - \alpha < x_0 + \alpha \le l$.

9.3. Решить задачу о продольных колебаниях однородного стержня при произвольных начальных данных в каждом из следующих случаев :

1) один конец стержня ($x = 0$) жестко закреплен, а другой ($x = l$) свободен;

2) оба конца стержня свободны;

3) один конец стержня ($x = l$) закреплен упруго, а другой ($x = 0$) свободен.

9.4. Найти продольные колебания стержня, если один его конец ($x = 0$) жестко закреплен, а к другому концу ($x = l$) приложена сила P (в момент времени $t = 0$ сила перестает действовать).

9.5. Решить следующие смешанные задачи для уравнения колебаний струны :

1) $u_{tt} = u_{xx} + t\sin x;\ u|_{t=0} = \sin 2x,\ u_t|_{t=0} = \sin 3x;\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0;$
2) $u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}\sin 2x; u|_{t=0} = \sin x, u_t|_{t=0} = \sin 3x; u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0;$
3) $u_{tt} = u_{xx} + \sin t \sin 3x; u|_{t=0} = \sin 2x, u_t|_{t=0} = \sin x; u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = 0;$
4) $u_{tt} = u_{xx} + 1;\ u|_{t=0} = \cos x,\ u_t|_{t=0} = \cos 2x;\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0;$
5) $u_{tt} = u_{xx} + t\cos x;\ u|_{t=0} = 1,\ u_t|_{t=0} = \cos 2x;\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0;$
6) $u_{tt} = u_{xx} + \sin t;\ u|_{t=0} = \cos 2x,\ u_t|_{t=0} = \cos x;\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 0;$
7) $u_{tt} = u_{xx} + t\sin x; u|_{t=0} = \sin 3x, u_t|_{t=0} = \sin 5x; u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi/2} = 0;$
8) $u_{tt} = u_{xx} - t\sin 3x; u|_{t=0} = \sin 5x, u_t|_{t=0} = \sin x; u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi/2} = 0;$
9) $u_{tt} = u_{xx} - t\cos 3x; u|_{t=0} = \cos 5x, u_t|_{t=0} = \cos x; u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi/2} = 0;$
10) $u_{tt} = u_{xx} + t\cos x; u|_{t=0} = \cos 3x, u_t|_{t=0} = \cos x; u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi/2} = 0.$

9.6. Решить следующие смешанные задачи :
1) $u_{tt} = u_{xx}; u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0; u|_{x=0} = 0, u|_{x=\pi} = t;$
2) $u_{tt} = u_{xx}; u|_{t=0} = x + 1, u_t|_{t=0} = 0; u|_{x=0} = t + 1, u|_{x=1} = t^3 + 2;$
3) $u_{tt} = u_{xx}; u|_{t=0} = \sin x, u_t|_{t=0} = 0; u|_{x=0} = t^2, u|_{x=\pi} = t^3;$
4) $u_{tt} = u_{xx}; u|_{t=0} = \sin 2x, u_t|_{t=0} = 1; u|_{x=0} = e^{-t}, u|_{x=\pi} = t;$
5) $u_{tt} = u_{xx}; u|_{t=0} = \sin x/2, u_t|_{t=0} = 1; u|_{x=0} = t, u_x|_{x=\pi} = 1.$

9.7. Решить следующие смешанные задачи :
1) $u_{tt} = u_{xx} - 4u; u|_{t=0} = x^2 - x, u_t|_{t=0} = 0; u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0;$
2) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u; u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \pi x - x^2; u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0;$
3) $u_{tt} + u_t = u_{xx}; u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 1 - x; u_x|_{x=0} = u|_{x=1} = 0;$
4) $u_{tt} + u_t = u_{xx}; u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 1 - x; u|_{x=0} = t, u|_{x=1} = 0;$
5) $u_{tt} = u_{xx} + u; u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; u|_{x=0} = 2t, u_x|_{x=2} = 0.$

9.8. Решить следующие смешанные задачи :
1) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^{-t}\cos x; \quad u|_{t=0} = \cos x, u_t|_{t=0} = 2x;$
$u_x|_{x=0} = 2t, u|_{x=\pi/2} = \pi t;$
2) $u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t(\sin x - x); \quad u|_{t=0} = 3, u_t|_{t=0} = x + \sin x;$
$u|_{x=0} = 3, u|_{x=\pi/2} = t^2 + t;$
3) $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos\frac{3x}{2}; \quad u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = x;$
$u_x|_{x=0} = t + 1, u|_{x=\pi} = \pi(t + 1);$
4) $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 2\sin^2 x; u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 0;$
5) $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x\cos x; u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi/2} = 0.$

9.9. Решить смешанные задачи для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с однородными начальными условиями и следующими граничными условиями :
1) $u|_{x=0} = A\cos\omega t, u|_{x=l} = 0;$
2) $u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = A\cos\omega t;$
3) $u_x|_{x=0} = A\sin\omega t, u|_{x=l} = 0;$
4) $u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = A\sin\omega t;$
5) $u_x|_{x=0} = A\cos\omega t, u_x|_{x=l} = 0.$

9.10. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ($0 < x < p,\ 0 < y < q$), закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = Axy(x - p)(y - q), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

2. Уравнение параболического типа

Применение метода разделения переменных (метода Фурье) для решения смешанных задач для уравнений параболического типа практически не отличается от гиперболического случая. Рассмотрим, например, в полуполосе $_{\infty} = [0, l] \times [0, \infty)$

смешанную задачу для неоднородного уравнения параболического типа :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Lu + f(x,t). \tag{9.16}$$

Заданы начальное условие :

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (x \in [0,l]) \tag{9.17}$$

и однородные граничные условия :

$$(h_1 u - h_2 u_x)|_{x=0} = (H_1 u + H_2 u_x)|_{x=l} = 0, \ \ (t \geq 0). \tag{9.18}$$

Решение $u(x,t)$, как и для уравнений гиперболического типа, ищется в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x), \tag{9.19}$$

где $X_k(x)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля. Поступая и далее аналогично гиперболическому случаю, получим для $T_k(t)$ задачу Коши :

$$T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = c_k(t), \ T_k(0) = a_k, \tag{9.20}$$

где $c_k(t) = (f, X_k)/\|X_k\|^2, \ a_k = (\varphi, X_k)/\|X_k\|^2$. Решая задачу (9.20), получим :

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau.$$

Следовательно, формальное решение смешанной задачи (9.16)–(9.18) дается рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right) X_k(x).$$

Пример 3. Решить смешанную задачу :

$$u_t = u_{xx} \ (0 < x < l); \ u_x|_{x=0} = 1, \ u|_{x=l} = 0; \ u|_{t=0} = 0.$$

Решение. Найдем функцию, удовлетворяющую краевым условиям. Из их вида ищем ее в такой форме : $w(x) = d_1 x + d_0 \Longrightarrow w'(0) = 1 = d_1, \ w(l) = 0 = d_1 l + d_0 \Longrightarrow d_0 = -l$. Итак, $w(x) = x - l$. Теперь функция v из представления решения в виде $u = w + v$ будет удовлетворять однородным краевым условиям. Находим уравнение для v : $w_t + v_t - w_{xx} - v_{xx} = 0 \Longrightarrow v_t - v_{xx} = 0$. Определим начальное условия для v : $v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = l - x$. Получили смешанную задачу для v :

$$v_t = v_{xx} \ (0 < x < l); \ v_x|_{x=0} = v|_{x=l} = 0; \ v|_{t=0} = l - x.$$

Так как уравнение и граничные условия однородные, то, разделяя переменные, получаем уравнение для $T(t)$:

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0; \tag{9.21}$$

и задачу Штурма–Лиувилля :

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = 0, \ X(l) = 0. \end{cases}$$

Общее решение последнего уравнения – $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$.

Граничные условия дают тригонометрическое уравнение для нахождения собственных значений $\lambda_k : X'(0) = C_2 = 0,\ X(l) = C_1 \cos \lambda l = 0 \Longrightarrow \lambda_k = \dfrac{\pi(2k+1)}{2l},\ k = 0, 1, \ldots$

Собственные функции имеют вид :

$$X_k(x) = \cos \lambda_k x = \cos \frac{\pi(2k+1)}{2l} x.$$

Общее решение уравнения (9.21) при $\lambda = \lambda_k$ имеет вид : $T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t}$. Поэтому

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k t} \cos \frac{\pi(2k+1)}{2l} x.$$

Из начального условия следует :

$$v(x,t)|_{t=0} = l - x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi(2k+1)}{2l} x.$$

Откуда, в силу ортогональности собственных функций,

$$a_k = \frac{(v(x,0), X_k)}{\|X_k\|^2} = \frac{2}{l} \int_0^l (l-x) \cos \frac{\pi(2k+1)}{2l} x dx = \frac{8l}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

Следовательно, решение для v дается рядом

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^2 t}}{(2k+1)^2} \cos \lambda_k x.$$

Искомое решение $u(x,t) = w(x) + v(x,t)$ будет :

$$u(x,t) = (x - l) + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k^2 t}}{(2k+1)^2} \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}.$$

Пример 4. Решить смешанную задачу :

$$u_t = u_{xx} + u - x + 2 \sin 2x \cos x;\ u|_{t=0} = x;\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Решение. Найдем функцию, удовлетворяющую краевым условиям. Из их вида очевидно, что $w(x) = x$. Аналогично примерам 1–3 получим смешанную задачу для функции v из представления $u = w + v$:

$$v_t = v_{xx} + v + \sin x + \sin 3x\ (0 < x < \pi/2);\ v|_{x=0} = v|_{x=\pi/2} = 0;\ v|_{t=0} = 0.$$

Функции $\sin x$ и $\sin 3x$ являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля, поэтому решение ищем в виде :

$$v(x,t) = T_1(t) \sin x + T_2(t) \sin 3x.$$

Из начального условия следует, что $T_1(0) = T_2(0) = 0$. Подставляя представление для v в уравнение, получим задачи Коши для $T_1(t)$ и $T_2(t)$:

$$T_1'(t) = 1,\ T_1(0) = 0;\ \ T_2'(t) + 8T_2(t) = 1,\ T_2(0) = 0.$$

Решение этих задач есть соответственно : $T_1(t) = t,\ T_2(t) = \frac{1}{8}(1 - e^{-8t})$. Следовательно, $v(x,t) = t\sin x + \frac{1}{8}(1 - e^{-8t})\sin 3x$. Искомое решение будет:

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t) = x + t\sin x + \frac{1}{8}(1 - e^{-8t})\sin 3x.$$

Решить задачи

9.11. Решить следующие смешанные задачи для уравнения теплопроводности :
1) $u_t = u_{xx};\quad u|_{t=0} = x(1-x);\quad u|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=1} = 0;$
2) $u_t = u_{xx};\quad u|_{t=0} = x^2 - 1;\quad u_x|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=1} = 0;$
3) $u_t = u_{xx} - u;\quad u|_{t=0} = 1;\quad u|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=1} = 0;$
4) $u_t = u_{xx} - 4u;\quad u|_{t=0} = x^2 - \pi x;\quad u|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=\pi} = 0;$
5) $u_t = u_{xx};\quad u|_{t=0} = x(1-x);\quad u|_{x=0} = 1,\quad u|_{x=\pi} = 1;$
6) $u_t = u_{xx};\quad u|_{t=0} = 2x;\quad u_x|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=\pi} = 1;$
7) $u_t = u_{xx};\quad u|_{t=0} = x(\pi - x);\quad u|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=\pi} = 1;$
8) $u_t = u_{xx} + 1;\quad u|_{t=0} = 0;\quad u|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=\pi} = 1;$
9) $u_t = u_{xx} + 1;\quad u|_{t=0} = 1;\quad u_x|_{x=0} = 0,\quad u|_{x=\pi} = 1;$
10) $u_t = u_{xx} + 1;\quad u|_{t=0} = 1;\quad u|_{x=0} = 0,\quad u_x|_{x=\pi} = 1.$

9.12. Дан тонкий однородный стержень $0 < x < l$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если :

1. Концы стержня $x = 0$ и $x = l$ поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура $u|_{t=0} = \varphi(x)$. Рассмотреть случаи : а) $\varphi(x) = A = \text{const}$, б) $\varphi(x) = Ax(l - x),\ A = \text{const}$.

2. Конец $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конце $x = l$ происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, начальная температура стержня $u|_{t=0} = \varphi(x)$. Рассмотреть случай $\varphi(x) = A = \text{const}$.

3. На обоих концах стержня ($x = 0$ и $x = l$) происходит теплообмен с окружающей средой, а начальная температура стержня $u|_{t=0} = \varphi(x)$. Рассмотреть случай $\varphi(x) = A = \text{const}$.

4. Концы стержня ($x = 0$ и $x = l$) теплоизолированы, а начальная температура $u|_{t=0} = \varphi(x) = \text{const}$.

5. Концы стержня теплоизолированы, а начальное распределение температуры задается формулой

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \varphi = \text{const}, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ 0, & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Изучить поведение $u(x,t)$ при $t \to \infty$.

6. Концы стержня теплоизолированы, а

$$u|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{2\varphi}{l}x, & 0 < x < \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2\varphi}{l}(l - x), & \dfrac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

где $\varphi = \text{const}$. Найти $\lim\ \inf_{t\to\infty} u(x,t)$.

9.13. Дан тонкий однородный стержень длины l, с боковой поверхности которого происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду, имеющую нулевую температуру; левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=0} = u_1$. Определить температуру $u(x,t)$ стержня, если :

1. Правый конец стержня $x = l$ поддерживается при температуре $u|_{x=l} = u_2 = \text{const}$, а начальная температура равна $u|_{t=0} = \varphi(x)$.

2. На правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю; начальная температура равна нулю.

9.14. Решить следующие смешанные задачи :

1)$u_t = u_{xx} + u + 2\sin^2 x;\quad u|_{t=0} = \cos x; u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 0;$

2)$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x\cos x;\quad u|_{t=0} = x; u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi/2} = 1;$

3)$u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x;\quad u|_{t=0} = 0;$
$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 2\pi t;$

4)$u_t = u_{xx} + u + xt(2-t) + 2\cos t; u|_{t=0} = \cos 2x; u_x|_{x=0} = t^2, u_x|_{x=\pi} = t^2;$

5)$u_t = u_{xx} - 9u + 4\sin^2 t\cos 3x; u|_{t=0} = x^2 + 2; u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 2\pi.$

Задача о распространении тепла в однородном шаре радиуса R с центром в начале координат в случае, когда температура любой точки шара зависит только от расстояния этой точки от центра шара, приводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

при начальном условии $u|_{t=0} = \varphi(r)$. Если на поверхности шара происходит теплообмен с окружающей средой нулевой температуры, то граничное условие имеет вид $(u_r + hu)|_{r=R} = 0$. Полагая $v = ru$, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2},\ v|_{r=0} = 0,\ \left[v_r + (h - \frac{1}{R})v\right]\Big|_{r=R} = 0,\ v|_{t=0} = r\varphi(r).$$

Таким образом, данная задача приводится к задаче о распространении тепла в стержне, один конец которого ($r = 0$) поддерживается при нулевой температуре, а на другом конце ($r = R$) происходит теплообмен с окружающей средой.

9.15. Дан однородный шар радиуса R с центром в начале координат. Определить температуру внутри шара, если :

1. Внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т.е. $u|_{t=0} = \varphi(r)$.

2. На поверхности шара происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру, а $u|_{t=0} = \varphi(r)$.

3. На поверхности шара происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей температуру $u_1 = \text{const}$, а $u|_{t=0} = \varphi = \text{const}$.

4. Внутрь шара, начиная с момента $t = 0$, через его поверхность подается постоянный тепловой поток плотности $q = \text{const}$, а начальная температура $u|_{t=0} = \varphi = \text{const}$.

9.16. Дана тонкая квадратная пластинка $(0 < x < l,\ 0 < y < l)$, для которой известно начальное распределение температуры $u|_{t=0} = \varphi(x, y)$. Боковые стороны $x = 0,\ x = l$ и стороны оснований $y = 0,\ y = l$ во все время наблюдения удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластинки в момент времени $t > 0$.

10. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида :

$$\varphi(x) = \lambda\int\limits_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy + f(x) \tag{10.1}$$

относительно неизвестной функции $\varphi(x)$ в области $G \subset R^n$ называется линейным интегральным уравнением Фредгольма (второго рода). Известные функции $\mathcal{K}(x, y)$ и $f(x)$ называются ядром и свободным членом интегрального уравнения (10.1); λ– комплексный параметр.

Интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathcal{K}(x, y)\varphi(y)dy \tag{10.2}$$

называется однородным интегральным уравнением, соответствующим уравнению (10.1), а интегральное уравнение (здесь $\mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}$)

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \int\limits_G \mathcal{K}^*(x, y)\psi(y)dy$$

– союзным к уравнению (10.2), ядро $\mathcal{K}^*(x, y)$ называется эрмитово сопряженным ядром к ядру $\mathcal{K}(x, y)$.

Если при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$ однородное интегральное уравнение (10.2) имеет ненулевые решения из $L_2(G)$, то число λ_0 называется характеристическим числом ядра $\mathcal{K}(x, y)$ (интегрального уравнения (10.2)), а соответствующие решения уравнения (10.2)– собственными функциями ядра $\mathcal{K}(x, y)$. Рангом (кратностью) характеристического числа λ_0 называется максимальное число линейно независимых собственных функций, отвечающих этому числу λ_0.

Будем предполагать, что в уравнении (10.1) область G ограничена в R^n, функция f непрерывна в $\overline{G}$, а ядро $\mathcal{K}(x, y)$ непрерывно в $\overline{G} \times \overline{G}$.

Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ интегрального уравнения (10.1) называется эрмитовым, если совпадает со своим эрмитово сопряженным ядром :

$$\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}^*(x, y) = \overline{\mathcal{K}(y, x)}.$$

В частности, если эрмитово ядро является вещественным, то оно симметрично, т.е. $\mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(y, x)$. Эрмитово непрерывное ядро $\mathcal{K}(x, y) \neq 0$ обладает следующими свойствами :

1) множество характеристических чисел этого ядра не пусто, расположено на действительной оси, не более чем счетно и не имеет конечных предельных точек;

2) система собственных функций $\{\varphi_k\}$ может быть выбрана ортонормальной : $(\varphi_k, \varphi_m) = \delta_{km}$.

Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ интегрального уравнения называется вырожденным, если имеет вид :

$$\mathcal{K}(x, y) = \sum_{m=1}^{N} X_m(x)Y_m(y), \tag{10.3}$$

где функции $X_m(x)$ и $Y_m(y)$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$ непрерывны в квадрате
$a \leq x, y \leq b$ и линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение (10.1) можно записать в виде :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{N} c_m X_m(x),$$

где неизвестные c_m определяются из системы алгебраических уравнений.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} X_i(x) \int_G Y_i(y)\varphi(y)dy + f(x) \tag{10.4}$$

и союзное к нему уравнение

$$\psi(x) = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \bar{Y}_i(x) \int_G \bar{X}_i(y)\psi(y)dy + g(x). \tag{10.5}$$

Эти уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений и потому могут быть исследованы и решены методами линейной алгебры. Перепишем уравнение (10.4) в виде :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i X_i(x) + f(x), \tag{10.6}$$

где

$$c_i = \int_G \varphi(y)Y_i(y)dy = (\varphi, Y_i) \tag{10.7}$$

– неизвестные числа. Умножая равенство (10.6) на $Y_k(x)$, интегрируя по области G и пользуясь (10.7), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений :

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i \int_G Y_k(x)X_i(x)dx + \int_G Y_k(x)f(x)dx. \tag{10.8}$$

Обозначая

$$\alpha_{ki} = \int_G Y_k(x)X_i(x)dx,\ a_k = \int_G f(x)Y_k(x)dx, \tag{10.9}$$

перепишем систему (10.8) :

$$c_k = \lambda \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ki}c_i + a_k,\ k = 1, 2, \dots, N. \tag{10.10}$$

Вводя матрицу A и векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$:

$$A = (\alpha_{ki}),\ \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N),\ \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N),$$

представим систему (10.10) в матричной форме :

$$\vec{c} = \lambda A\vec{c} + \vec{a}. \tag{10.11}$$

Интегральное уравнение (10.4) и алгебраическое уравнение (10.11) эквивалентны. Обозначим через $D(\lambda)$ определитель системы (10.11),

$$D(\lambda) = \det(E - \lambda A).$$

Справедливы теоремы Фредгольма.

Теорема 1. Если $D(\lambda) \neq 0$, то уравнение (10.4) и союзное к нему уравнение (10.5) однозначно разрешимы при любых свободных членах f и g.

Теорема 2. Если $D(\lambda) = 0$, то однородные уравнения (10.4) и (10.5) имеют одинаковое число линейно независимых решений, равное $N - q$, где q – ранг матрицы $E - \lambda A$.

Теорема 3. Если $D(\lambda) = 0$, то для разрешимости уравнения (10.4) необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем решениям ψ_s, $s = 1, 2, \ldots, N - q$ союзного однородного уравнения (10.5).

Из теорем 1 и 2 вытекает, что характеристические числа вырожденного ядра совпадают с корнями полинома $D(\lambda)$ и, следовательно, число их конечно.

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x-1)\varphi(y)dy + x.$$

Решение. В условиях задачи имеем : $f(x) = x$, $X_1(x) = x$, $Y_1(y) = 1$, $X_2(x) = 1$, $Y_2(y) = -1$. Находим матрицу A и вектор $\vec{a}$ по формулам (10.9). Считая интегралы, получим $\vec{a} = (1/2, -1/2)$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $D(\lambda) = \det(E - \lambda A) = 1 + \lambda/2$. Пусть $\lambda \neq -2 \Longrightarrow D(\lambda) \neq 0$, тогда система (10.11) имеет вид :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda/2 & -\lambda \\ \lambda/2 & 1+\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Решая ее , получим $c_1 = 1/(2+\lambda)$, $c_2 = -1/(2+\lambda)$. Выписываем решение, подставляя найденные c_1 и c_2 в (10.6) :

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^{2} c_i X_i(x) + f(x) = \frac{2(1+\lambda)x - \lambda}{2+\lambda}.$$

Пусть теперь $\lambda = -2$, $D(\lambda) = 0$, тогда система (10.11) имеет вид :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2c_1 + 2c_2 = 1/2 \\ -c_1 - c_2 = -1/2. \end{cases}$$

Последняя система очевидно решений не имеет.

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + y \cos x)\varphi(y)dy + a \sin x + bx \tag{10.12}$$

при всех допустимых значениях a, b, λ.

Решение. В условиях задачи имеем : $f(x) = a \sin x + bx$, $X_1(x) = x$, $Y_1(y) = \sin y$, $X_2(x) = \cos x$, $Y_2(y) = y$. Находим матрицу A и вектор $\vec{a}$ по формулам (10.9). Считая интегралы, получим $\vec{a} = (\pi a + 2\pi b, 2\pi a + 2/3\pi^3 b)$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2\pi & 0 \\ 2/3\pi^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $D(\lambda) = \det(E - \lambda A) = 1 - 2\pi\lambda$. Пусть $\lambda \neq -1/2\pi \Longrightarrow$ $D(\lambda) \neq 0$, тогда система (10.11) имеет вид :

$$\begin{pmatrix} 1-2\pi\lambda & 0 \\ -2/3\pi^3\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi a + 2\pi b \\ 2\pi a + 2/3\pi^3 b \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет единственное решение при любых a и b. Решая ее, получим

$$c_1 = \frac{\pi a + 2\pi b}{1 - 2\pi\lambda},\ c_2 = \frac{2\pi^3\lambda(\pi a + 2\pi b)}{3(1 - 2\pi\lambda)} + 2\pi a + \frac{2\pi^3 b}{3}.$$

Выписываем решение, подставляя найденные c_1 и c_2 в формулу (10.6) :

$$\varphi(x) = a\sin x + bx + \lambda\frac{\pi a + 2\pi b}{1 - 2\pi\lambda}x + \lambda\left(\frac{2\pi^3\lambda(\pi a + 2\pi b)}{3(1 - 2\pi\lambda)} + 2\pi a + \frac{2\pi^3 b}{3}\right)\cos x.$$

Пусть теперь $\lambda = 1/2\pi, \Longrightarrow D(\lambda) = 0$, тогда система (10.11) имеет вид :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/3\pi^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2b)\pi \\ 2\pi a + 2/3\pi^3 b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & (a+2b)\pi \\ -1/3\pi^2 c_1 + c_2 & = & 2\pi a + 2/3\pi^3 b. \end{array} \right. \tag{10.13}$$

Система (10.13) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется условие $a+2b = 0$. Это условие является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (10.12) при $\lambda = 1/2\pi$. Общее решение однородной линейной системы

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & & = 0 \\ -1/3\pi^2 c_1 & +c_2 & = 0 \end{array} \right. ,$$

соответствующей системе (10.13), будет $\tilde{c}_1 = c,\ \tilde{c}_2 = 1/3\pi^2 c$, где c – произвольная постоянная. В качестве частного решения системы (10.13) можно взять $c_1^0 = 0,\ c_2^0 = 2\pi a - 1/3\pi^3 a$. Поэтому общее решение системы (10.13) имеет вид : $c_1 = c,\ c_2 = 1/3\pi^2 c + \pi a(2 - 1/3\pi^2)$. Подставляя c_1 и c_2 в формулу (10.6), найдем все решения уравнения (10.12) при $\lambda = 1/2\pi$ при условии $b = -a/2$:

$$\varphi(x) = a\sin x - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2\pi}cx + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}c + a\left(2 - \frac{\pi^2}{3}\right)\right)\cos x.$$

Решить задачи

10.1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях :
1. $\mathcal{K}(x,y) = x - 1,\ f(x) = x$. 2. $\mathcal{K}(x,y) = 2e^{x+y},\ f(x) = e^x$.
3. $\mathcal{K}(x,y) = x + y - 2xy,\ f(x) = x + x^2$.

10.2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-1}^1 \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях :
1. $\mathcal{K}(x,y) = xy + x^2y^2,\ f(x) = x^2 + x^4.$
2. $\mathcal{K}(x,y) = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}},\ f(x) = 1 - 6x^2.$
3. $\mathcal{K}(x,y) = x^4 + 5x^3y,\ f(x) = x^2 - x^4.$
4. $\mathcal{K}(x,y) = 2xy^3 + 5x^2y^2,\ f(x) = 7x^4 + 3.$
5. $\mathcal{K}(x,y) = x^2 - xy,\ f(x) = x^2 + x.$
6. $\mathcal{K}(x,y) = 5 + 4xy - 3x^2 - 3y^2 + 9x^2y^2,\ f(x) = x.$

10.3. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \mathcal{K}(x,y)\varphi(y)dy + f(x)$$

в следующих случаях :
1. $\mathcal{K}(x,y) = \sin(2x+y),\ f(x) = \pi - 2x.$
2. $\mathcal{K}(x,y) = \sin(x-2y),\ f(x) = \cos 2x.$
3. $\mathcal{K}(x,y) = \cos(2x+y),\ f(x) = \sin x.$
4. $\mathcal{K}(x,y) = \sin(3x+y),\ f(x) = \cos x.$
5. $\mathcal{K}(x,y) = \sin y + y\cos x,\ f(x) = 1 - 2x/\pi.$
6. $\mathcal{K}(x,y) = \cos^2(x-y),\ f(x) = 1 + \cos 4x.$

11. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Обозначим через $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(R^n)$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых финитных функций в R^n. Через $\operatorname{supp}\varphi(x)$ обозначим носитель функции $\varphi(x)$, то есть замыкание множества тех точек x, в которых $\varphi(x) \neq 0$, через

$$D^\alpha\varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}; \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

через U_R – открытый шар радиуса R с центром в начале координат.

Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $\mathcal{D}$ называется сходящейся к функции φ (из $\mathcal{D}$), если :

а) существует такое число $R > 0$, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset U_R$,

б) при каждом α :

$$D^\alpha\varphi_k(x) \Longrightarrow D^\alpha\varphi(x),\ x \in R^n,\ k \to \infty,$$

где знак $\Longrightarrow$ означает равномерную сходимость.

Обозначим через $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(R^n)$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых функций в R^n, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $\mathcal{S}$ называется сходящейся к функции φ из ($\mathcal{S}$), если для всех α и β

$$x^\beta D^\alpha\varphi_k(x) \Longrightarrow x^\beta D^\alpha\varphi(x),\ x \in R^n,\ k \to \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(R^n)$ совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{D}$. Всякий функционал $f \in \mathcal{D}'$ назовем обобщенной функцией (из пространства $\mathcal{D}'$).

Обозначим через $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}'(R^n)$ совокупность всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{S}$. Всякий функционал $f \in \mathcal{S}'$ назовем обобщенной функцией медленного роста (из пространства $\mathcal{S}'$).

Значение функционала f на основной функции φ обозначим через (f, φ).

Последовательность $\{f_k\}$ обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ называется сходящейся к обобщенной функции f (из $\mathcal{D}'$), если $(f_k, \varphi) \to (f, \varphi),\ k \to \infty$ для любой φ из $\mathcal{D}$. Сходимость последовательности в $\mathcal{S}'$ определяется аналогично.

Говорят, что обобщенная функция f равна нулю в области G, если $(f, \varphi) = 0$ для любой основной функции φ с носителем в G. Обобщенные функции f_1 и f_2 называются равными в области G, если их разность $f_1 - f_2$ равна нулю в G.

Носителем обобщенной функции f называется множество всех таких точек, ни в какой окрестности которых f не обращается в нуль. Носитель f обозначается $\operatorname{supp} f$. Если $\operatorname{supp} f$ – ограниченное множество, то f называется финитной обобщенной функцией.

Регулярной обобщенной функцией из $\mathcal{D}'(R^n)$ называется всякий функционал вида

$$(f, \varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(R^n),$$

где f – локально интегрируемая в R^n функция. Всякая обобщенная функция, не являющаяся регулярной, называется сингулярной.

Примером сингулярной обобщенной функции является δ – функция Дирака, определяемая правилом

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^n).$$

Произведением f из $\mathcal{D}'(R^n)$ и функции $\alpha(x) \in C^\infty(R^n)$ называется обобщенная функция αf, действующая по формуле $(\alpha f, \varphi) = (f, \alpha\varphi)$,
$\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$.

Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n),\ A$ – неособое линейное преобразование и b – вектор из R^n. Обобщенную функцию $f(Ay + b)$ определим формулой

$$(f(Ay + b), \varphi) = \left(f, \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\right),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^n). \tag{11.1}$$

При $A = I$ имеем сдвиг обобщенной функции f на вектор $-b$:

$$(f(x + b), \varphi) = (f, \varphi(x - b)).$$

При $A = -I, b = 0$ имеем отражение :

$$(f(-x), \varphi) = (f, \varphi(-x)).$$

Производной обобщенной функции f из $\mathcal{D}'(R^1)$ называется функционал, определяемый формулой

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^1).$$

Каждая обобщенная функция имеет производные любого порядка и $f^{(m)}$, $m \geq 1$, есть функционал, действующий по формуле

$$(f^{(m)}, \varphi) = (-1)^m (f, \varphi^{(m)}). \tag{11.2}$$

В случае f из $\mathcal{D}'(R^n)$ последняя формула, определяющая производную $D^\alpha f$, принимает вид :

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^n).$$

Прямым произведением обобщенных функций $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$ называется обобщенная функция $f(x)\cdot g(y)$ из $\mathcal{D}'(R^{n+m})$, определяемая формулой

$$(f(x)\cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m}).$$

Прямое произведение коммутативно, т.е. $f(x)\cdot g(y) = g(y)\cdot f(x)$, и ассоциативно, т.е. $[f(x)\cdot g(y)]\cdot h(z) = f(x)\cdot[g(y)\cdot h(z)]$. Производная прямого произведения обладает свойством

$$D^\alpha_x(f(x)\cdot g(y)) = D^\alpha f(x)\cdot g(y);\ D^\alpha_y(f(x)\cdot g(y)) = f(x)\cdot D^\alpha g(y).$$

Если $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ и $g \in \mathcal{S}'(R^m)$, то $f(x)\cdot g(y)$ определяется той же формулой, где $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+m})$, и принадлежит $\mathcal{S}'(R^{n+m})$.

Сверткой локально интегрируемых в R^n функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что функция $h(x) = \int |f(y)g(x-y)|dy$ также локально интегрируема в R^n, называется функция

$$(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy = (g*f)(x).$$

Сверткой обобщенных функций $f*g$ называется функционал

$$(f*g, \varphi) = (f(x)\cdot g(y), \varphi(x+y)),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^n).$$

Свертка коммутативна, т.е. $f*g = g*f$. Если свертка $f*g$ существует, то существуют и свертки $D^\alpha f * g$ и $f * D^\alpha g$, причем $D^\alpha f * g = D^\alpha(f*g) = f*D^\alpha g$. Свертка инвариантна относительно сдвига, т.е. $f(x+h)*g(x) = (f*g)(x+h),\ h \in R^n$.

Достаточные условия существования свертки :

1) если хотя бы одна из обобщенных функций f или g–финитна;

2) если $f, g \in \mathcal{D}'_+$, где $\mathcal{D}'_+$ множество обобщенных функций из $\mathcal{D}'(R^1)$, обращающихся в нуль при $x < 0$, причем в этом случае $f*g$ также принадлежит $\mathcal{D}'_+$.

Операция преобразования Фурье $F[\varphi]$ на функциях φ из $\mathcal{S}$ определяется формулой

$$F[\varphi] = \int e^{i(\xi,x)}\varphi(x)dx.$$

Преобразование Фурье переводит пространство $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$.

Преобразование Фурье $F[f]$ произвольной обобщенной функции f из $\mathcal{S}'(R^n)$ определяется формулой

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]). \tag{11.3}$$

Оператор

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n}F[f(-x)],\ f \in \mathcal{S}' \tag{11.4}$$

(обратное преобразование Фурье) является обратным для оператора F, т.е.

$$F^{-1}[F[f]] = f,\ F[F^{-1}[f]] = f,\ f \in \mathcal{S}'(R^n).$$

Справедливы следующие формулы $(f, g \in \mathcal{S}')$:

$$D^\alpha F[f] = F[(ix)^\alpha f], \qquad F[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha F[f],$$
$$F[f(x-x_0)] = e^{i(x_0,\xi)}F[f], \qquad F[f](\xi+\xi_0) = F[f(x)e^{i(x,\xi_0)}](\xi),$$
$$F[f(cx)] = \frac{1}{|c|^n}F[f]\left(\xi/x\right),\ c \neq 0,$$
$$F[f(x)\cdot g(y)] = F[f](\xi)\cdot F[g](\eta), \qquad F[f*g] = F[f]F[g].$$

Обобщенным решением в области $G \subset R^n$ линейного дифференциального уравнения

$$L(x, D)u \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \tag{11.5}$$

где $a_\alpha(x) \in C^\infty(R^n)$, $f \in \mathcal{D}'$, называется всякая обобщенная функция u, удовлетворяющая этому уравнению в G в обобщенном смысле, т.е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, носитель которой содержится в G, имеет место равенство

$$(u, L^*(x, D)\varphi) = (f, \varphi),$$

где $L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi)$.

Обобщенная функция u принадлежит классу $C^P(G)$, если в области G она совпадает с функцией $u_0(x)$ класса $C^P(G)$, т.е. для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \varphi \in G$ имеет место равенство

$$(u, \varphi) = \int u_0(x) \varphi(x) dx.$$

Пусть $f \in C(G) \cap \mathcal{D}'$. Для того чтобы обобщенная функция u удовлетворяла уравнению (11.5) в области G в классическом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $C^m(G)$ и удовлетворяла этому уравнению в обобщенном смысле в области G.

Фундаментальным решением (функцией влияния) линейного дифференциального оператора $L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha$ с постоянными коэффициентами $a_\alpha(x) = a_\alpha$ называется обобщенная функция $\mathcal{E}$, удовлетворяющая в R^n уравнению

$$L(D)\mathcal{E} = \delta(x). \tag{11.6}$$

У всякого линейного дифференциального оператора $L(D)$ существует фундаментальное решение медленного роста, и это решение удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$L(-i\xi) F[\mathcal{E}] = 1, \tag{11.7}$$

где F – преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста.

Пусть $f \in \mathcal{D}'$ такова, что свертка $\mathcal{E} * f$ существует в $\mathcal{D}'$. Тогда

$$u = \mathcal{E} * f$$

есть решение уравнения $L(D)u = f$. Это решение единственно в классе тех обобщенных функций u, для которых существует свертка с $\mathcal{E}$.

Пример 1. Показать, что в $\mathcal{D}'(R^1)$:

$$\rho(x)\delta'(x) = -\rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x),$$

где $\rho(x) \in C^1(R^1)$.

Решение. Воспользуемся формулой произведения обобщенной функции на функцию ρ и формулой дифференцирования (11.2) :
$(\rho(x)\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), \rho(x)\varphi(x)) = -(\delta(x), (\rho(x)\varphi(x))') =$
$-(\delta(x), \rho'(x)\varphi(x) + \rho(x)\varphi'(x)) = -(\delta(x), \rho'(x)\varphi(x)) - (\delta(x), \rho(x)\varphi'(x)) =$
$-\rho'(0)\varphi(0) - \rho(0)\varphi'(0) = -\rho'(0)(\delta(x), \varphi(x)) - \rho(0)(\delta(x), \varphi'(x)) =$
$-\rho'(0)(\delta(x), \varphi(x)) + \rho(0)(\delta'(x), \varphi(x)),$

что и требовалось показать.

Пример 2. Вычислить : $\theta'(-x)$.

Решение. Воспользуемся формулой отражения (11.1) и дифференцирования (11.2) : $(\theta'(-x), \varphi(x)) = -(\theta(-x), \varphi'(x)) = -(\theta, \varphi'(-x))$. Так как функция Хевисайда θ регулярна, то $-(\theta, \varphi'(-x)) = -\int\limits_0^\infty \varphi'(-x)dx =$

$\int\limits_0^{-\infty} \varphi'(x)dx = \varphi|_0^{-\infty} = \varphi(-\infty) - \varphi(0) = -(\delta, \varphi)$. Итак, имеем $\theta'(-x) = -\delta$.

Пример 3. Доказать $(n = 1)$:

1) $F[\theta(x)e^{-ax}] = \dfrac{1}{a - i\xi}$; 2) $F\left[\dfrac{1}{a + i\xi}\right] = 2\pi\theta(x)e^{-ax},\ a > 0.$

*Решение.*1) Воспользуемся формулой (11.3) :

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = \int\limits_0^\infty e^{-ax+i\xi x}dx = \left.\frac{e^{-ax+i\xi x}}{(-a+i\xi)}\right|_0^\infty = \frac{1}{a - i\xi}.$$

2) Используя свойства обратного преобразования Фурье, получим :

$$F^{-1}\left[\frac{1}{a - i\xi}\right] = \frac{1}{2\pi}F\left[\frac{1}{a + i\xi}\right] = \theta(x)e^{-ax}.$$

Пример 4. Найти единственное в $\mathcal{D}'_+$ фундаментальное решение следующего оператора : $\dfrac{d}{dx} + a$.

Решение. Составив алгебраическое уравнение (11.7) и решив его относительно $F[\mathcal{E}]$, получим : $F[\mathcal{E}] = \dfrac{1}{a - i\xi}$. Отсюда, как и в примере 3,

$$\mathcal{E} = F^{-1}\left[\frac{1}{a - i\xi}\right] = \theta(x)e^{-ax}.$$

Пример 5. Найти единственное в $\mathcal{D}'_+$ фундаментальное решение следующего оператора : $\dfrac{d^2}{dx^2} + 4\dfrac{d}{dx}$.

Решение. Составив алгебраическое уравнение (11.7) и решив его относительно $F[\mathcal{E}]$, получим : $F[\mathcal{E}] = \dfrac{1}{-\xi^2 - 4i\xi}$. Сделаем обратное преобразование Фурье этого выражения согласно формуле (11.4) : $\mathcal{E} = \dfrac{1}{2\pi}F[f(-\xi)] = \dfrac{1}{2\pi}F\left[\dfrac{1}{-\xi^2 + 4i\xi}\right]$. Разложим на элементарные дроби $\dfrac{1}{-\xi^2 + 4i\xi} = \dfrac{1}{4i\xi} - \dfrac{1}{4(4 + i\xi)}$. Теперь преобразование Фурье даст :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi}F\left[\frac{1}{4i\xi}\right] - \frac{1}{2\pi}F\left[\frac{1}{4(4 + i\xi)}\right] = \frac{1}{4}\theta(x)[1 - e^{-4x}].$$

Решить задачи

11.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей :

1) $\dfrac{1}{k}\varphi(x)$; 2) $\dfrac{1}{k}\varphi(kx)$; 3) $\dfrac{1}{k}\varphi\left(\dfrac{x}{k}\right)$, $k = 1, 2, \ldots,$

сходящиеся в $\mathcal{D}$.

11.2. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, действующий по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi\right)=\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x}dx,\ \varphi\in\mathcal{D},$$

– сингулярная обобщенная функция.

11.3. Вычислить пределы в $\mathcal{D}'(R^1)$ при $\varepsilon\to+0$:

1) $f_\varepsilon(x)=\begin{cases}1/(2\varepsilon), & |x|\le 2\varepsilon,\\ 0, & |x|>2\varepsilon;\end{cases}$ 2) $f_\varepsilon(x)=\dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$;

3) $f_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$; 4) $f_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon}$;

11.4. Показать, что в $\mathcal{D}'(R^1)$:

1) $\rho(x)\delta'(x)=-\rho'(0)\delta(x)+\rho(0)\delta'(x)$, где $\rho(x)\in C^1(R^1)$;

2) $x\delta^{(m)}(x)=-m\delta^{(m-1)},\ m=1,2,\dots;$ 3) $x^m\delta^{(m)}=(-1)^m m!\delta(x)$, $m=0,1,2,\dots;$ 4) $x^k\delta^{(m)}=0,\ m=0,1,\dots,k-1;$

5) $\alpha(x)\delta^{(m)}(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{j+m}C_m^j\alpha^{(m-j)}(0)\delta^{(j)}(x)$, где $\alpha(x)\in C^\infty(R^1)$;

6) $x^k\delta^{(m)}(x)=(-1)^k k!C_m^k\delta^{(m-k)}(x),\ m=k,k+1,\dots$

11.5. Вычислить :

1) $\theta'(-x);$ 2) $\theta^{(m)}(x-x_0),\ m\ge1;$ 3) $\theta^m(x_0-x),\ m\ge1;$
4) $(\operatorname{sign}x)^{(m)},\ m\ge1;$ 5) $(x\operatorname{sign}x)';$ 6) $(|x|)^{(m)},\ m\ge2;$ 7) $(\theta(x)\sin x)'$;
8) $(\theta(x)\cos x)';$ 9) $(\theta(x)x^{m+k})^{(m)},\ m\ge1,\ k=0,1,\dots;$ 10) $(\theta(x)x^{m-k})^{(m)}$, $m\ge1,\ k=1,\dots,m;$ 11) $(\theta(x)e^{ax})^{(m)},\ m\ge1.$

11.6. Доказать :

$\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, где $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ определена в задаче 11.2.

11.7. Пусть $f(x)$ – такая кусочно–непрерывная функция, что

$$f\in C^1(x\le x_0)\cap C^1(x\ge x_0).$$

Доказать, что

$$f'=\{f'(x)\}+[f]_{x_0}\delta(x-x_0)\qquad \text{в}\ \ \mathcal{D}',\tag{11.8}$$

где $[f]_{x_0}=f(x_0+0)-f(x_0-0)$ – скачок функции f в точке x_0. Доказать, что если классическая производная функции $f(x)$ имеет изолированные разрывы 1–го рода в точках $\{x_k\}$, то формула (11.8) принимает вид :

$$f'=\{f'(x)\}+\sum_k[f]_{x_k}\delta(x-x_k).$$

11.8. Вычислить $f^{(m)}$ для функций :

1) $\theta(a-|x|),\ a\ge0;$ 2) $[x]$; 3) $\operatorname{sign}\sin x;$ 4) $\operatorname{sign}\cos x$.
($[x]$ означает целую часть x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x).

11.9. Найти все производные функций :

$$1)\ y=\begin{cases}\sin x, & x\ge0,\\ 0, & x\le0;\end{cases}\quad 2)\ y=\begin{cases}\cos x, & x\ge0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

$$3)\ y=\begin{cases}x^2, & -1\le x\le1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}\quad 4)\ y=\begin{cases}1, & x\le0,\\ x+1, & 0\le x\le1,\\ x^2+1, & x\ge1;\end{cases}$$

5) $y=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ (x+1)^2, & -1\le x\le 0,\\ x^2+1, & x\ge 0;\end{cases}$ 6) $y=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^2, & 0\le x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1\le x\le 2,\\ 0, & x\ge 2;\end{cases}$

7) $y=\begin{cases} \sin x, & -\pi\le x\le \pi,\\ 0, & |x|\ge \pi;\end{cases}$ 8) $y=\begin{cases} |\sin x|, & -\pi\le x\le \pi,\\ 0, & |x|\ge \pi.\end{cases}$

11.10. Показать :
1) $\theta(x_1)\cdot\theta(x_2)\cdot\ldots\cdot\theta(x_n)=\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;
2) $\delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n)=\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;
3) $(f\cdot g)(x+x_0,y)=f(x+x_0)\cdot g(y)$;
4) $a(x)(f(x)\cdot g(y))=a(x)f(x)\cdot g(y)$.

11.11. Показать :
1) $\delta*f=f*\delta=f$; 2) $\delta(x-a)*f(x)=f(x-a)$;
3) $\delta(x-a)*\delta(x-b)=\delta(x-a-b)$; 4) $\delta^{(m)}*f=f^{(m)}$.

11.12. Вычислить в $\mathcal{D}'(R^1)$:
1) $\theta(x)*\theta(x)$; 2) $\theta(x)*\theta(x)x^2$; 3) $e^{-|x|}*e^{-|x|}$;
4) $\theta(x)x^2*\theta(x)\sin x$; 5) $\theta(x)\cos x*\theta(x)x^3$.

11.13. Доказать $(n=1)$:
1) $F[\theta(x)e^{-ax}]=\dfrac{1}{a-i\xi}$, $a>0$; 2) $F[\theta(-x)e^{ax}]=\dfrac{1}{a+i\xi}, a>0$;
3) $F[e^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{a^2+\xi^2}$, $a>0$; 4) $F\left[\dfrac{2a}{a^2+x^2}\right]=2\pi e^{-a|\xi|}$, $a>0$;
5. $F\left[\theta(x)e^{-ax}\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]=\dfrac{1}{(a+i\xi)^\alpha}$, $a>0$, $\alpha>0$.

11.14. Доказать, что единственное в $\mathcal{D}'_+$ фундаментальное решение оператора

$$L=\frac{d^m}{dx^m}+a_1\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\ldots+a_m$$

выражается формулой

$$\mathcal{E}=\theta(x)Z(x),$$

где $Z(x)$ – решение задачи :

$$LZ=0,\quad Z(0)=Z'(0)=\ldots=Z^{(m-2)}(0)=0,\quad Z^{(m-1)}(0)=1.$$

11.15. Доказать, что функция $\mathcal{E}(x)$ является фундаментальным решением оператора :
1) $\mathcal{E}(x)=\theta(x)e^{\pm ax}$; $\dfrac{d}{dx}\mp a$; 2) $\mathcal{E}(x)=\theta(x)\dfrac{\sin ax}{a}$; $\dfrac{d^2}{dx^2}+a^2$;
3) $\mathcal{E}(x)=\theta(x)\dfrac{\operatorname{sh} ax}{a}$; $\dfrac{d^2}{dx^2}-a^2$; 4) $\mathcal{E}(x)=\theta(x)e^{\pm ax}\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}$; $\left(\dfrac{d}{dx}\mp a\right)^m$,
$m=2,3,\ldots$

11.16. Найти единственные в $\mathcal{D}'_+$ фундаментальные решения следующих операторов :
1) $\dfrac{d^2}{dx^2}+4\dfrac{d}{dx}$; 2) $\dfrac{d^2}{dx^2}-2\dfrac{d}{dx}+1$; 3) $\dfrac{d^2}{dx^2}+3\dfrac{d}{dx}+2$; 4) $\dfrac{d^2}{dx^2}-4\dfrac{d}{dx}+5$;
5) $\dfrac{d^3}{dx^3}-a^3$; 6) $\dfrac{d^3}{dx^3}-3\dfrac{d^2}{dx^2}+2\dfrac{d}{dx}$; 7) $\dfrac{d^4}{dx^4}-a^4$; 8) $\dfrac{d^4}{dx^4}-2\dfrac{d^2}{dx^2}+1$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анго А. Математика для электро– и радиоинженеров. М.: Наука, 1967.
2. Арнольд В.И. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Фазис, 1997.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
4. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1977.
5. Бронштейн И.Н. , Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1965.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
8. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
9. Градштейн И.С. , Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963.
10. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. М.: Изд–во МГУ, 1993.
11. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
13. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
14. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
15. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. М.: Наука, 1982.
16. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1982.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
18. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. Функции одного переменного. М.: Наука, 1976.
19. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.