МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω

Математическое и компьютерное моделирование разнообразных процессов и явлений в самых различных областях науки и техники является в настоящее время одним из основных способов получения новых научных знаний и технологических решений.

Моделью какого-либо объекта (явления, феномена, процесса) называют другой объект, реальный или формальный, некоторые свойства которого *частично* совпадают со свойствами моделируемого объекта.

Основные цели создания моделей:

- Подтверждение или опровержение различных теорий и гипотез.
- Выявление зависимостей различных параметров модели, характера их взаимодействия во времени и пространстве, нахождения оптимальных соотношений этих параметров.
- Прогнозирование поведения объектов моделирования, чтобы, в частности, получить возможность ими управлять.
- Применение в качестве систем виртуальной реальности или тренажёров при подготовке персонала к работе на смоделированных устройствах (системы реального времени).

Ввиду сложности реального мира при исследовании его явлений, процессов или объектов их обычно в той или иной мере *упрощают*, выделяя те свойства, которые считают основными для рассматриваемого объекта или явления, и отвлекаясь от несущественных или малосущественных деталей.

Следовательно, *модель никогда полностью не совпадает по своим свойствам с оригиналом*. С одной стороны, она должна отражать все свойства исходного объекта или явления, которые существенны для него, иначе модель бесполезна. С другой стороны, необходимо, чтобы модель была как можно более простой, иначе её исследование будет затруднительно или невозможно. Для сложных явлений и объектов часто очень трудно совместить эти противоречивые требования.

Таким образом, при построении модели основной и наиболее трудной задачей является вопрос о мере соответствия модели моделируемому объекту (*адекватности*) и, следовательно, проблема определения степени «существенности» параметров объекта. Причём какие именно свойства считать основными, а какие несущественными зависит как от моделируемого объекта, так и от целей исследования. Поскольку очевидно, что одному и тому же явлению могут соответствовать несколько различных моделей, то, при прочих равных условиях, предпочтительнее та из них, которая в каком-то смысле проще других.

Метод моделирования обычно применяют для изучения исходных объектов тогда, когда непосредственное их изучение либо по каким-то причинам неудобно:

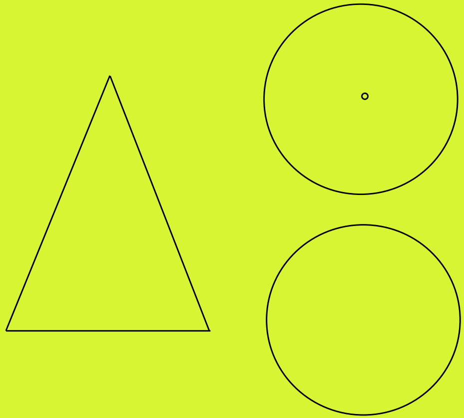
- очень дорого (например, модель процессов в переходной экономике нашей страны начала 90-х годов XX в., см. [1, стр. 302–306]);
- требует слишком много времени (например, моделирование игры в шахматы посредством прямого перебора всех возможных ходов. По оценкам К. Шеннона число возможных ситуаций в шахматной партии равно 10^{43}. Исследование *всех* ситуаций сейчас лежит за пределами возможностей любого суперкомпьютера);
- опасно (например, модель гонки вооружений, см. [1, стр. 173–175.], или боевых действий, [1, стр. 175–179.]),

либо вообще невозможно:

- моделируемый объект может не существовать в реальности (математическая реставрация Тунгусского феномена, [1, стр. 288–291.]) или
- его прямое натурное исследование неизбежно приведёт к катастрофе (например, различные модели климатических последствий ядерного конфликта, [1, стр. 192–296.]).

Все модели можно разделить на два класса: *физические* и *формальные* (*абстрактные*). Первые обычно представляют собой упрощённую реальную копию объекта (например, макеты самолётов или морских судов). Абстрактные модели представляют собой описание объектов при помощи некоторых символов, схем, средств формальных языков и т. д. (например, географическая карта, электрическая схема какого-либо устройства, системы разностных или дифференциальных уравнений).

(cone.u3d)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h.$$

назад
закр.

Математической моделью называют формальную модель, в которой реальные объекты заменяются идеальными и описываются при помощи математических соотношений или различных алгоритмических схем.

Главными наиболее характерными чертами математических моделей является их:

- *абстрактность* (реальные объекты всегда заменены их абстракными идеализированными аналогами, к примеру, физическое тело — материальной точкой) и
- *общность* (например, механические и электрические колебания описываются в самом общем виде одними и теми же дифференциальными уравнениями).

Эти особенности математических моделей дают возможность их строгого исследования, что особенно важно при рассмотрении сложных систем, когда словесные рассуждения становятся очень запутанными и, в следствие этого, не могут гарантировать правильность выводов.

Наиболее яркие примеры математических моделей: гелиоцентрическая система Коперника — Кеплера, механика Ньютона, модель электромагнитного поля Максвелла, теория относительности, теория информации, теория игр и другие.

Хорошая математическая модель имеет следующие свойства:

1) адекватна (т. е. в данном случае способна описать моделируемое явление с требуемой численной точностью, не превосходящей, конечно, точности экспериментальных измерений параметров исходного явления) моделируемому объекту или явлению;

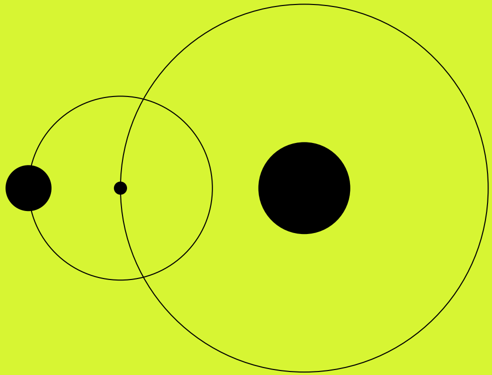
2) позволяет получить новые сведения, неизвестные до построения модели;

3) проста настолько, насколько это возможно (имеет меньшее число параметров, менее сложное математическое описание и т. д.).

Адекватность, очевидно, — абсолютно необходима. Крайне желательно и второе требование к модели. В качестве наиболее ярких исторических примеров здесь можно привести открытие в 1841 г. Леверье и Адамсом «на кончике пера» планеты Нептун, предсказание существования позитрона, сделанное в 1932 г. Дираком, открытие в 70-х годах XX в. т. н. «Т-слоя», сделанное в ИПМ и множество других.

Требование простоты математических моделей является, по существу, следствием одной лишь уверенности учёных в *рациональном* устройстве мира. Например, гелиоцентрическая система считается предпочтительнее геоцентрической именно по причине своей большей простоты, хотя обе эти теории позволяют одинаково точно описать поведение и параметры моделируемой ими Солнечной системы.

В геоцентрической модели Птолемея все планеты вращаются вокруг Земли, находящейся в центре Солнечной системы. Чтобы согласовать модель с реально наблюдаемой картиной пришлось ввести для каждой планеты дополнительные орбиты — *эпициклы*, а также «дифференты» — смещения центров орбит планет. Упрощённо такое движение представлено анимацией



Компьютерной моделью называют программную реализацию математической модели, к которой могут дополнительно прилагаться различные программные модули, служащие, например, для графического представления изучаемых объектов. Главным преимуществом компьютерной модели является относительная простота её создания и дальнейшей модификации. Далее будем рассматривать только математические и соответствующие им компьютерные модели.

Компьютерное моделирование вызвано необходимостью исследования всё более сложных объектов, явлений и процессов. Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей, как известно, *нелинейны*. Линейные модели соответствуют обычно лишь частным случаям и, как правило, служат только первым приближением к реальности. Математически линейность означает, что для уравнений, описывающих модель, выполняется *принцип суперпозиции*, т. е. если известны некоторые решения этих уравнений: $r_1(t)$, $r_2(t)$, …, $r_n(t)$, то и любая линейная комбинация данных решений

$$a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t) + \ldots + a_n r_n(t),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — константы, также является решением исходной системы уравнений. Исходя из принципа суперпозиции, найдя решение в каком-либо частном случае, легко построить и общее решение. Другими словами, для линейного случая «реакция» модели на изменение каких-либо параметров *пропорциональна* величине этого изменения.

Для *нелинейных* явлений, математические модели которых не подчиняются принципу суперпозиции, знание частных решений не позволяет построить общих решений, т. е., иначе говоря, информация о части объекта не даёт всех сведений о всём объекте. Поскольку получить аналитическое решение нелинейных дифференциальных или разностных уравнений удаётся только в отдельных случаях, а качественный анализ обычно чрезвычайно сложен или, в ряде случаев, вообще невозможен, возникает необходимость использования приближённых численных методов и, следовательно, компьютерных расчётов.

Многие математические модели нелинейных процессов и явлений были построены уже давно, но их решение было невозможно в силу вычислительных трудностей. С появлением ЭВМ положение дел существенно изменилось. Например, именно компьютерное моделирование позволило получить фундаментальный результат последних лет в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, наличие *аттракторов*. В 1963 году Эдвард Лоренц занимался компьютерным моделированием метео систем. Взяв за основу уравнения Навье — Стокса, он получил систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая при некоторых значениях параметров начинала себя вести хаотически. Малейшие изменения в начальных условиях приводили к кардинальному изменению поведения системы. Была выявлена область притяжения фазовых траекторий, которая имеет фрактальный характер и сейчас называется *аттрактором Лоренца* [6].

Процесс построения модели можно условно разбить на следующие основные этапы.

1. Словесное описание реальных объектов или явлений. Здесь могут содержаться также некоторые сведения о природе объекта или моделируемого явления и принимаемых допущениях, как-то: «материальная точка», «отсутствие трения» и т. п. (если сразу ясна существенность или несущественность соответствующих факторов).

2. Идеализация объекта, когда отбрасываются все несущественные для его поведения параметры. По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме.

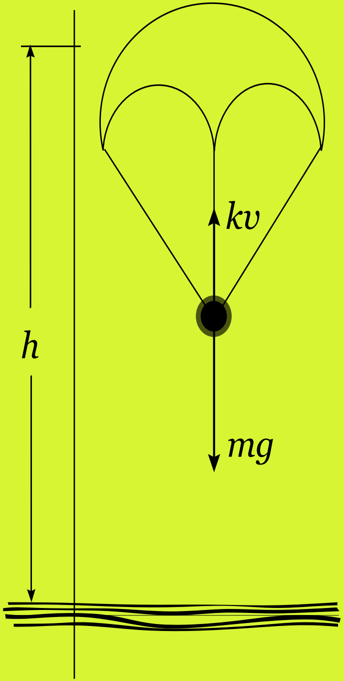
3. Выбор или формулировка физических, биологических, химических, экономических и т. д. законов и принципов, которым подчиняется объект, и их запись в математической форме.

4. «Оснащение» модели. Например, задание начальных или краевых условий для дифференциальных уравнений, соотношения между различными параметрами модели и т. д.

5. Построение и отладка компьютерной реализации модели.

6. Тестирование построенной модели (вычислительные эксперименты), оценка её адекватности объекту или явлению. Если на этом этапе выявится несоответствие, то требуется вернуться ко второму пункту, чтобы уточнить или пересмотреть математическую модель.

Рассмотрим простую модель, описывающую движение падающего на землю тела массы m с учётом сопротивления воздуха. Силу сопротивления будем считать пропорциональной скорости падения v. Тело будем считать материальной точкой, высоту падения h незначительной (по сравнению с радиусом Земли), эффектами, вызываемыми вращением Земли, притяжением тела Луной и Солнцем, учётом географической широты и т. п. пренебрегаем ввиду их ничтожности. По II-му закону Ньютона сила, действующая на тело равна произведению массы этого тела на ускорение, а с другой стороны эта сила есть векторная сумма сил, приложенных к телу. Т. о. в проекции на вертикальную ось имеем



$$m\dot{v} = mg - kv, \tag{1}$$

где g — ускорение свободного падения, k — коэффициент пропорциональности. Интегрируя (1) с учётом условия $v(0) = 0$, получим

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right). \tag{2}$$

Поскольку $\dot{x} = v$ и $x(0) = h$, то

$$x = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}\,e^{-kt/m}\right) + h - \frac{m^2 g}{k^2}. \tag{3}$$

Список литературы

1. А. А. Самарский, А. П. Михайлов. Математическое моделирование. М, 1997.
2. В. И. Зенкин. Практический курс математического и компьютерного моделирования. Учеб. пособие. Калининград: изд. РГУ им. Канта, 2006.
3. Е. Бенькович, Ю. Колесов, Ю. Сениченков. Практическое моделирование динамических систем. СПб, 2002.
4. К. С. Латышев, В. И. Зенкин. Уравнения математической физики и математическое моделирование. Калининград, 2003.
5. Г. А. Клоткин, В. С. Черкасский. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB. Новосибирск, 2001.
6. Дж. Глейк. Хаос. Создание новой науки. СПб, 2001.
7. Р. Пенроуз. Новый ум короля. М, 2003.
8. Д. Хофштадтер. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. Самара, 2001.