1 Основные уравнения математической физики. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Теория уравнений в частных производных длительное время развивалась, главным образом, по пути изучения уравнений и задач математической физики, которая, по существу, представляет собой часть упомянутой теории. Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным, интегральным и в некоторых случая к интегро - дифференциальным уравнениям. Весьма широкий класс физических задач описывается линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка. Рассмотрим несколько простых, но важных, задач физики, которые сводятся к решению различных краевых задач для дифференциальных уравнений.

Основные уравнения математической физики

1.Волновое уравнение.

а)Уравнение колебания струны.

Струна это гибкая тонкая натянутая нить, не сопротивляющаяся изгибу. Последнее означает,что сила натяжения направлена по касательной к профилю струны.

Пусть $u(x,t)-$ отклонение точки струны с координатой x в момент времени t от положения равновесия, $\rho-$ линейная плотность струны ("масса"единицы длины), $T-$ сила натяжения, $f(x,t)$ - линейная плотность внешних сил и $\Delta F = f(x,t)\Delta x \quad (u_t$ - скорость, u_{tt} - ускорение, u_x - тангенс угла наклона между касательной и осью Ox). Так как мы рассматриваем малые колебания струны, то мы пренебрегаем высшего порядка малости по сравнению с $\operatorname{tg}\alpha = u_x; \quad u_x, u_{xx}$ - величины первого порядка малости, $u_x u_t$, u_x^2 - величины второго порядка малости, которыми мы пренебрегаем. Тогда функция u удовлетворяет уравнению $\rho u_{tt} = T u_{xx}$. Если к струне приложены силы с плотностью $f(x,t)$, то уравнение примет вид $\rho u_{tt} = T u_{xx} + f(x,t)$. Обозначив через $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, тогда уравнение перепишется в виде:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \widetilde{f}(x,t). \tag{1.1}$$

б) Уравнение колебания мембраны.

Мембрана- тонкая пленка. Пусть $u(x,y,t)-$ отклонение точки мембраны с координатами (x,y) во момент времени t от положения равновесия. Рассуждая аналогично п.а), получим уравнение

$$\rho u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t),$$

где $f(x,y,t)$ - поверхностная плотность внешних сил.

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \widetilde{f}(x,y,t). \tag{1.2}$$

в) Волновое уравнение.
Пусть $u(x,y,z,t)-$ отклонение плотности (давления) газа в точке (x,y,z) в момент времени t от равновесного (невозмущенного) состояния. Тогда уравнения колебаний из п.а) и б) можно обобщить. В результате мы приходим к уравнению $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \widetilde{f}(x,y,z,t)$, или

$$u_{tt} = a^2\Delta u + \widetilde{f}(x,t), x \in R^n, \tag{1.3}$$

где $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$- оператор Лапласа или сокращенно лапласиан. Волновое уравнение является первым из рассмотренных основных уравнений математической физики.

2.Уравнение теплопроводности (диффузии) - описывает процессы распределения тепла в среде.
Допустим, что у нас имеется некоторое тело, $u(x,y,z,t)-$ температура тела в точке с координатами (x,y,z) в момент времени t, $f(x,y,z,t)-$ плотность внешних источников тепла. Тогда функция u удовлетворяет уравнению

$$u_t = a^2\Delta u + \widetilde{f}(x,y,z,t),$$

где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. В случае n-мерного пространства

$$u_t = a^2\Delta u + \widetilde{f}(x,t), x \in R^n. \tag{1.4}$$

Такому же уравнению удовлетворяет не только температура тела, но и концентрация вещества при процессе диффузии, поэтому это уравнение также назывется уравнением диффузии.

3.Уравнение Пуассона.
Пусть $u-$ потенциал электростатического поля, ρ- плотность заряда. Тогда u удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u = 4\pi\rho, \tag{1.5}$$

которое называется уравнением Пуассона. Если $\rho = 0$, то уравнение

$$\Delta u = 0 \tag{1.6}$$

называется уравнением Лапласа.

4.Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных

Общий вид линейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = \mathcal{F}(x)\,, \tag{1.7}$$

В основу классификации положен вид матрицы A, составленной из коэффициентов при 2-х производных.
Фиксируем $x = x_0$ и получаем:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11}(x_0) & \dots & A_{1n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(x_0) & \dots & A_{nn}(x_0) \end{pmatrix}$$

(матрица коэффициентов соответствующей квадратичной формы)
Покажем что A симметрична, т.е. $A_{ij} = A_{ji}$. Если u достаточно гладкая то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, тогда:

$$A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + A_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\,.$$

Переобозначив новые коэффициенты, получим, что матрицу A можно считать симметричной, следовательно, она имеет n вещественных собственных значений.

Определение 1 *Уравнение в точке x_0 относится к типу (p, q, r), если матрица A в точке x_0 имеет p положительных q отрицательных и r равных нулю собственных значений. Типы (p, q, r) и (q, p, r) эквивалентны.*

Среди всевозможных типов наибольший интерес представляют уравнения:

$$\begin{aligned} (n-1, 1, 0) &- \text{уравнение гиперболического типа;} \\ (n-1, 0, 1) &- \text{уравнение параболического типа;} \\ (n, 0, 0) &- \text{уравнение эллиптического типа,} \end{aligned}$$

где $n-$ размерность пространства.
Рассмотрим, к какому из типов относятся рассмотренные ранее уравнения.
1. Волновое уравнение:

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

т.о. имеем $(n-1, 1, 0)$-тип, следовательно волновое уравнение относится к уравнению гиперболического типа.
2. Уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t)$$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

т.о. имеем $(n-1, 0, 1)$-тип, следовательно уравнение теплопроводности относится к уравнению параболического типа.
3. Уравнение Пуассона:

$$\Delta u = -f$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

т.о. имеем $(n, 0, 0)$-тип, следовательно уравнение Пуассона относится к уравнению эллиптического типа.
Рассмотрим случай, когда независимых переменных только две. Общее уравнение будет иметь вид:

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + \ldots = \mathcal{F}(x,y)\ , \tag{1.8}$$

причем $A, B, C \in C^2$, и нигде не обращаются одновременно в ноль. Тогда собственные значения матрицы этого уравнения находятся из уравнения:

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В результате мы приходим к квадратному уравнению относительно λ:

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0,$$

откуда видно, что:

$$\begin{cases} AC - B^2 > 0, & \text{уравнение относится к эллиптическому типу,} \\ AC - B^2 = 0, & \text{уравнение относится к параболическому типу,} \\ AC - B^2 < 0, & \text{уравнение относится к гиперболическому типу.} \end{cases}$$

2 Канонический вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. Характеристики.

Пусть дано уравнение в общем виде (1.7).

Определение 1 *Будем говорить, что уравнение приведено в каноническому виду, если все коэффициенты при смешанных производных равны нулю, а остальные равны* ± 1 *либо ноль:*

$$\begin{cases} A_{ij} = 0, & i \neq j \\ A_{ii} = \pm 1 \vee 0. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = \overline{1, n}$, и выясним как преобразуются коэффициенты при старших производных. Учитывая что:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}, \tag{2.1}$$

получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{2.2}$$

Подставляя в (1.7) получим:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = \mathcal{F}, \tag{2.3}$$

(рассматриваются только члены со старшими производными).Изменив порядок суммирования получим:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{A}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \ldots = \mathcal{F}, \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{A}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}$$

Формулу (2.4) удобно записать в матричном виде.

Если

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial x_n}\\ \dots & \ddots & \dots\\ \dfrac{\partial\xi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_n}{\partial x_n}.\end{pmatrix}$$

- матрица Якоби преобразования ξ, то

$$\widetilde{A}=\mathcal{J}A\mathcal{J}^t,$$

где

$$\widetilde{A}\overset{def}{=}(\widetilde{A_{kl}}),A\overset{def}{=}(A_{ij}).$$

Теорема 1 *При неособой замене переменных тип уравнения не меняется*

▼Пусть матрица A - некоторая симметричная матрица,тогда $A=\Sigma D\Sigma^t$. Матрицы A и D имеют одинаковое количество положительных, отрицательных и нулевых элементов. Учитывая (2) получим $\widetilde{A}=\mathcal{J}\Sigma D\Sigma^t\mathcal{J}^t$следовательно, $\widetilde{A}=(\mathcal{J}\Sigma)D(\mathcal{J}\Sigma)^t$следовательно, тип матрицы A (а значит и уравнения связанного с ней) не изменится. ▲

Теорема 2 *В случае постоянных коэфициентов уравнение всегда может быть приведено к каноническому виду с помощью линейной замены переменных*

▼Пусть к уравнению (1.7), с матрицей A, применяется линейная замена $\overrightarrow{\xi}=\mathcal{J}\overrightarrow{x}$, тогда $\widetilde{A}=\mathcal{J}A\mathcal{J}^t$. Сопоставим уравнению с матрицей A квадратичную форму с матрицей $B=A$. В квадратичной форме сделаем замену переменных $\overrightarrow{t}=Q\overrightarrow{\xi}$, т.е. матрица B преобразуется следующим образом $\widetilde{B}=Q^tBQ$. То есть мы найдем такое преобразование Q, которое приведет квадратичную форму к каноническому виду, и выбирая $\mathcal{J}=Q^t$, получим, что $\widetilde{A}=\widetilde{B}$, уравнение примет канонический вид. Таким образом взяв в качестве матрицы $\mathcal{J}$ матрицу Q^t получим, что коэффициенты уравнения и квадратичной формы будут совпадать. Но рассмотренное преобразование квадратичной формы приводит ее к каноническому виду следовательно выбранное преобразование $\mathcal{J}$ приводит уравнение (1.7) к каноническому виду. ▲

Замечание 1 *Если коэффициенты уравнения переменные, то в общем случае привести его к каноническому виду не удастся. Мы можем привести уравнение к каноническому виду в любой точке, но не в ее окрестности.*

Введем понятие характеристики. Пусть нам дано уравнение (1.7). Сопоставим этому уравнению 2-го порядка следующее уравнение 1-го порядка:

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}=0, \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) называется уравнением характеристик уравнения (1.7), а решения этого уравнения являются характеристиками уравнения (1.7).

Теорема 3 *Характеристики инвариантны относительно неособой замены переменных.*

Вводная часть:
В уравнении (1.7) сделаем замену переменных $\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = \overline{1, n}$ тогда получим уравнение вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \widetilde{A}_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \ldots = \mathcal{F},$$

если $\omega(x)$ - решение уравнения (2.5),то $\widetilde{\omega}(x(\xi)) = \widetilde{\omega}$ - есть решение уравнения характеристик, отвечающего преобразованному уравнению:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \xi_i} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \xi_j} = 0,$$

▼Пусть $\omega(x)$ - характеристика для уравнения (1.7), т.е. решение уравнения (2.5). Сделаем замену и пересчитаем производные

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i},$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j},$$

подставим их в (2.5), получим:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} = 0,$$

суммируем по i и j:

$$\sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{A}_{kl}(x) \frac{\partial \omega}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_l} = 0,$$

где

$$\widetilde{A}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}.$$

но $\widetilde{A}_{kl}$ совпадают с коэффициентами преобразованного уравнения (2.4), т.е. характеристика $\omega(x)$ также является характеристикой преобразованного уравнения. ▲

3 Приведение уравнения к каноническому виду в случае двух независимых переменных

Пусть дано уравнение

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\ldots=\mathcal{F}(x,y), \tag{3.1}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases}\xi &=& \xi(x,y),\\ \eta &=& \eta(x,y).\end{cases}$$

Пересчитаем производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\ldots,$$

(здесь опущены члены не содержащие вторых производных). Аналогично получаем :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\ldots,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\ldots,$$

тогда коэффициенты преобразованного уравнения:

$$\begin{cases}\widetilde{A}=A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \text{при 2-ой производной по } \xi\\ \widetilde{B}=A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}, \text{при смешанной производной}\\ \widetilde{C}=A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2, \text{при 2-ой производной по } \eta.\end{cases}. \tag{3.2}$$

Запишем уравнение характеристик для (3.1):

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{3.3}$$

Очевидно что если в качестве ξ взять решение уравнения характеристик,то $\widetilde{A}$ обратится в 0.
Решим (3.3). Обозначим через $k = \frac{\partial\omega}{\partial x}\Big/\frac{\partial\omega}{\partial y}$. Тогда уравнение (3.3) перепишется в виде $Ak^2 + 2Bk + C = 0$, или $A(k-k_1)(k-k_2) = 0$, где $k_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$.
В результате, учитывая, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - k_1\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial x} - k_2\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0$$

получим новый вид уравнения характеристик

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 0. \tag{3.4}$$

Этому уравнению можно сопоставить автономную систему:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy \cdot A}{B \pm \sqrt{B^2 - AC}} \tag{3.5}$$

Пусть $\omega(x,y) = c$ - общий интеграл этого уравнения, тогда ω является решением (3.4), а следовательно и (3.3). То есть уравнение характеристик окончательно примет вид :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{3.6}$$

Чтобы решить уравнение характеристик (3.3), нужно записать (3.6), найти общий интеграл и оба решения будут решениями (3.3).
Рассмотрим три возможных случая:
1)$B^2 - AC > 0$- уравнение относится к уравнению гиперболического типа. Тогда уравнение характеристик примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

Пусть $\omega_1(x,y) = c$, $\omega_2(x,y) = c$- общие интегралы этого уравнения , отвечающие "+", и "$-$"соответственно. Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi &= \omega_1(x,y), \\ \eta &= \omega_2(x,y). \end{cases}$$

Эта замена невырожденна. Т.к. ξ и η решения (3.3), то из (3.2) следует ,что

$$\widetilde{A} = \widetilde{C} = 0$$

тогда уравнение примет вид:

$$2\widetilde{B}(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}},$$

Т.к. тип при неособой замене переменных не изменится и $\widetilde{B^2} - \widetilde{A}\widetilde{C} > 0$следовательно, $\widetilde{B} \neq 0$, то поделим это уравнение на $2\widetilde{B}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}}, \qquad (3.7)$$

получили 2-ую каноническую форму для уравнений гиперболического типа. Если же мы сделаем замену:

$$\begin{cases} \alpha & = & \xi + \eta, \\ \beta & = & \xi - \eta. \end{cases}$$

тогда $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}$ (т.к. $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi} = 1$, $\dfrac{\partial\beta}{\partial\xi} = 1$). Уравнение приведется к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}}, \qquad (3.8)$$

получили 1-ую каноническую форму для уравнений гиперболического типа.
2)$B^2 - AC = 0$- уравнение относится к уравнению параболического типа. Тогда уравнение характеристик имеет следующий вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A},$$

Пусть $\omega(x, y) = c$- общий интеграл этого уравнения. Сделаем замену:

$$\begin{cases} \xi & = & \omega(x, y), \\ \eta & = & \eta(x, y). \end{cases}$$

причем η выберем так, чтобы замена была невырожденна. Т.к. ξ решение (3.3), то из (3.2) следует , что $\widetilde{A} = 0$, $\widetilde{B^2} - \widetilde{A}\widetilde{C} = 0$следовательно, $\widetilde{B} = 0$, тогда:

$$\widetilde{C}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}}.$$

Пусть $\widetilde{C} \neq 0$ тогда:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}}, \tag{3.9}$$

получили каноническую форму для уравнений параболического типа.
3)$B^2 - AC < 0$- уравнение относится к уравнениям эллиптического типа. Тогда уравнение характеристик имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm i\sqrt{AC - B^2}}{A}.$$

Пусть $\omega(x, y) = c$ - общий интеграл этого уравнения. Тогда обозначим $\omega_1 = \mathcal{R}e(\omega)$, $\omega_2 = \mathcal{I}m(\omega)$следовательно, $\omega_1 + i\omega_2 = c$. Делаем замену:

$$\begin{cases} \xi &= \omega_1(x, y), \\ \eta &= \omega_2(x, y), \end{cases}$$

$(\xi + i\eta)$- решение преобразованного уравнения характеристик. Уравнение примет вид:

$$\widetilde{A}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)^2 + 2\widetilde{B}\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \widetilde{C}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)^2 + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}},$$

$\omega = \xi + i\eta$- решение уравнения, подставим это решение полученного уравнения, тогда $\widetilde{A} + 2i\widetilde{B} - \widetilde{C} = 0, \widetilde{A} = \widetilde{C}, \widetilde{B} = 0$, получаем:

$$\widetilde{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \widetilde{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}},$$

Т.к. замена не особая, то тип не меняется. $\widetilde{B}^2 - \widetilde{A}\widetilde{C} < 0, \widetilde{B} = 0, \widetilde{A}^2 > 0$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \ldots = \widetilde{\mathcal{F}} \tag{3.10}$$

получили каноническую форму для уравнений эллиптического типа

4 Постановки краевых задач. Корректность по Адамару.

Рассмотрим задачу о нахождении общего решения уравнения:

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

Обозначив $u_\xi = v$, получим:

$$v_\eta = 0,$$

уравнение 1-го порядка, решением является произвольная функция переменной $f_1(\xi)$:

$$u_\xi = f_1(\xi),$$
$$u = f(\xi) + g(\eta).$$

Рассмотрим задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. Нужно найти решение в полосе $0 \leqslant x \leqslant l, t \geqslant 0$. Тогда $x = 0, x = l, t = 0$ - называются краевыми условиями.

Определение 1 *Совокупность уравнений и краевых условий есть краевая задача.*

Условия делятся на:

- $t = 0$ - начальные условия,
- $x = 0, x = l$ -граничные условия.

Определение 2 *Краевая задача называется корректно - поставленой по Адамару, если ее решение*

- *существует,*
- *единственно,*
- *устойчиво (непрерывная зависимость от данных задачи).*

Если добавить лишние условия к корректно поставленной задаче, то решение не будет существовать.
Мы можем записать задачу в операторной форме:

$$Ku = f, \tag{4.1}$$

где K - оператор задачи, u, f - элементы банахова пространства (линейное нормированное пространство), вообще говоря они являются элементами различных банаховых пространств. Пусть $u \in B_1, f \in B_2$. Граничные условия включаются в область определения оператора K. Первое и второе условие корректности эквивалентны тому, что существует K^{-1}, тогда $u = K^{-1}f$. Третье условие означает, что K^{-1} непрерывен. Если $\|f_1 - f_2\|_{B_2} \leqslant \varepsilon$, то $\|u_1 - u_2\|_{B_1} \leqslant C\varepsilon$ - математическая формулировка устойчивости.
Мы вассмотрим два типа краевых задач:
1.)Задача Коши. З(адаются начальные условия, $G \equiv \mathbb{R}^n$, граничные условия отсутствуют).
Решение ищется в $\mathbb{R}^n$: a) Волновое уравнение.

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t), \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x),$$

-начальное отклонение

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x).$$

- начальная скорость.
Решение ищется в классе функций $u(x,t) \in C^2(t>0) \bigcap C^1(t \geqslant 0)$.
b) Уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,t), \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

Если добавить лишнее условие, то решение не будет существовать.
c) Уравнение Лапласса (пример неккоректно поставленой задачи).

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad (x \in (-\infty;\infty), t > 0)$$
$$u\big|_{t=0} = 0,$$
$$u_t\big|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin kx,$$

Если бы задача была устойчива, то

$$u_k(x,t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$u = f(t) \sin kx,$$

подставляя получаем:

$$f''(t) \sin kx - k^2 f(t) \sin kx = 0,$$
$$f''(t) - k^2 f(t) = 0,$$
$$f(0) = 0,$$
$$f'(0) = \frac{1}{k},$$
$$f(t) = A \operatorname{ch} kt + B \operatorname{sh} kt$$

- общее решение. Из начальных условий определяем, $A = 0, B = \dfrac{1}{k^2}$, тогда :

$$u_k(x,t) = \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} kt \cdot \sin kx,$$

Рассмотрим точку, $x_k :\ \sin kx_k = 1$, тогда $u_k(x,t) = \dfrac{1}{k^2} \operatorname{sh} kt$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^x}{2},$$

тогда:

$$u_k(x,t) = \frac{1}{k^2}\operatorname{sh} kt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{e^{kt}}{k^2} \to \infty.$$

В пространстве непрерывных функций задача не является корректной, так как она неустойчива - отклонение решений в сколь угодно близкий момент времени сколь угодно велико, т.е. решение не является устойчивым.
2.)Смешанные задачи для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. (Задаются начальные и граничные условия, $G \not\equiv \mathbb{R}^n$).
a) Волновое уравнение.
решение ищем в ограниченной области Ω

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x,t), \quad (x \in \Omega, t > 0)$$

начальные условия:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x),$$

граничные условия (одно из трех):

$$u\big|_{\partial\Omega} = g(x,t)$$

- 1-го рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_1(x,t)$$

- 2-го рода, $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению нормали - нормальная производная.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right|_{\partial\Omega} = g_2(x,t),$$

- 3-го рода, где σ - некоторая заданная функция.
b) Уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \quad (x \in \Omega, t > 0)$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

граничные условия (одно из трех):

$$u|_{\partial\Omega} = g(x,t)$$

- 1-го рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_1(x,t)$$

- 2-го рода.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right|_{\partial\Omega} = g_2(x,t)$$

- 3-го рода.
3.)Краевые задачи для эллиптических уравнений. (Задаются граничные условия на границе $\partial\Omega$, начальные условия отсутствуют).

$$-\Delta u = f, \quad (x \in \Omega)$$

граничные условия (одно из трех):

$$u|_{\partial\Omega} = g(x)$$

- 1-го рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g_1(x)$$

- 2-го рода.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right|_{\partial\Omega} = g_2(x),$$

- 3-го рода.
Если даны граничные условия

- 1-го рода - то это задача Дирихле,
- 2-го рода - то это задача Неймана,
- 3-го рода - то это 3-я краевая задача.

5 Задача Коши для уравнения колебаний струны.

1. Задача Коши для однородного уравнения.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, -\infty < x < \infty) \tag{5.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{5.2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \tag{5.3}$$

Требуется найти такую функцию u, которая при всех $t > 0$ удовлетворяет всем уравнениям. Решение должно быть дважды непрерывно дифференцируемым при $t > 0$.(т.е. $u \in (C^2(t > 0, x \in \mathbb{R}) \cap C^1(t \geq 0, x \in \mathbb{R}))$). Решение этой задачи называется классическим.

Предположим, что решение этой задачи существует. Тогда уравнение характеристик:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm a,$$

тогда:

$$x \pm at = C.$$

Тогда сделаем в уравнении (5.1) замену переменных $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, приводящую его ко второй канонической форме

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

общее решение этого уравнения имеет вид: $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$. Возвращаясь к старым переменным, находим общее решение уравнения (5.1):

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at),$$

первое слагаемое представляет собой волну, распространяющуюся со скоростью a влево, а второе - такую же волну, распространяющуюся вправо. Из условия (5.2) при $t = 0$ получим

$$f(x) + g(x) = \varphi(x),$$

дифференцируя по t и используя условие (5.3), получим:

$$af'(x) - ag'(x) = \psi(x),$$

делим на a и интегрируем:

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{a} \int\limits_0^x \psi(y)\, dy + C,$$

из найденных двух уравнений определяем конкретный вид f и g.

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(y)\,dy + \frac{C}{2},$$
$$g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(y)dy - \frac{C}{2}.$$

Запишем общее решение уравнения (5.1)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy$$

Эта формула называется формулой Даламбера. *Заметим, что f и g определяются неоднозначно, а решение u - однозначно. Из существования формулы Даламбера следует единственность решения классической задачи. Для того, чтобы решение классической задаси существовало, необходимо чтобы $\varphi(x) \in C^2, \psi(x) \in C^1$.*

2. Задача Коши для неоднородного уравнения.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \tag{5.4}$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{5.5}$$
$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x). \tag{5.6}$$

Будем искать решение в виде суммы $u = v+w$, где v - решение классической задачи из предыдущего пункта, а w - решение следующей задачи:

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), \tag{5.7}$$
$$w|\ t = 0 = 0, \tag{5.8}$$
$$w_t\big|_{t=0} = 0. \tag{5.9}$$

Рассмотрим задачу (5.7)-(5.9).

Лемма 1 *Пусть $Z(x,t,\tau)-$ решение следующей задачи:*

$$Z_{tt} = a^2\, Z_{xx}\,(t > \tau, x \in \mathbb{R}), \tag{5.10}$$
$$Z\big|_{t=\tau} = 0 \tag{5.11}$$
$$Z_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau). \tag{5.12}$$

(τ - некоторый параметр). Тогда решение задачи (5.7)-(5.9) может быть получено следующим образом:

$$w(x,t) = \int\limits_0^t Z(x,t,\tau)\,d\tau.$$

▼Проверим выполнение условий (5.7)-(5.9). Выполнение условия (5.8) очевидно: $w(x,0) = 0$. Рассмотрим $w_t(x,t) = Z(x,t,\tau)|_{\tau=t} + \int\limits_0^t Z_t(x,t,\tau)\,d\tau$. Первое слагаемое равно нулю по условию леммы, а второе равно по свойствам интегралов. Следовательно, условие (5.9) тоже выполняется. Теперь рассмотрим

$$w_{tt} = Z_t(x,t,\tau)|_{\tau=t} + \int\limits_0^t Z_{tt}(x,t,\tau)\,d\tau,$$

(здесь первое слагаемое равно $f(x,t)$ по условию леммы)

$$w_{xx} = \int\limits_0^t Z_{xx}(x,t,\tau)d\tau.$$

Теперь подставим все это в (5.7),

$$f(x,t) + \int\limits_0^t Z_{tt}(x,t,\tau)d\tau = a^2 \int\limits_0^t Z_{xx}(x,t\tau)d\tau + f(x,t)$$

сгруппируем слагаемые, содержащие интегралы:

$$\int\limits_0^t (Z_{tt} - a^2 Z_{xx})\,d\tau + f(x,t) \equiv f(x,t).$$

тогда

$$\int\limits_0^t (Z_{tt} - a^2 Z_{xx})\,d\tau = 0$$

Получили тождество,так как Z - решение однородного уравнения (условие Леммы). Таким образом Лемма доказана.▲

Сделаем замену в задаче (5.10)-(5.12): $t' = t - \tau$ (дальше будем писать t, имея в виду t'). Тогда

$$Z(x,t,\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}$$

Тогда по Лемме

$$w(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)dy\,d\tau.$$

Таким образом, решение задачи (5.4)-(5.6) имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dyd\tau$$

формула Даламбера. +

6 Устойчивость задачи Коши. Обобщенное решение задачи Коши.

1 Устойчивость. Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}-$ решения следующих задач Коши:

$$u^{(i)}_{tt} = a^2\, u^{(i)}_{xx} + f^{(i)}(x,t),$$
$$u^{(i)}\Big|_{t=0} = \varphi^{(i)}(x),$$
$$u^{(i)}_t\Big|_{t=0} = \psi^{(i)}(x),$$
$$i = 1, 2.$$

Каждое решение можно записать, используя формулу Даламбера. Составим разность между решениями и оценим ее

$$|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)| \leqslant \frac{|\varphi^{(1)}(x+at) - \varphi^{(2)}(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi^{(1)}(x-at) - \varphi^{(2)}(x-at)|}{2} +$$
$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi^{(1)}(y) - \psi^{(2)}(y)|\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)} |f^{(1)}(y,\tau) - f^{(2)}(y,\tau)|\,dyd\tau$$

Рассмотрим пространства $C([0,T]\times(-\infty,+\infty))$ и $C(-\infty,+\infty)$, отметим что $\varphi^{(i)}$,$\psi^{(i)}$ $\in C$, $f^{(i)}$, $u^{(i)} \in C([0,T]\times(-\infty,+\infty]))$. Норма в этих пространствах определяется как:

$$\|y\|_C = \sup_{-\infty<x<\infty} |y(x)|,$$
$$\|y\|_{C([0,T]\times(-\infty,+\infty))} = \sup_{-\infty<x<\infty, 0\leqslant t\leqslant T} |y(x,t)|,$$

соответственно. Тогда

$$\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{C([0,T]\times(-\infty,+\infty))} \leqslant \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{C(-\infty,+\infty)} +$$
$$+\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|_{C(-\infty,+\infty)} \cdot T + \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_{C([0,T]\times(-\infty,+\infty))} \cdot \frac{T^2}{2}.$$

Обозначим

$$\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_{C(-\infty,+\infty)} = \varepsilon_1$$
$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|_{C(-\infty,+\infty)} = \varepsilon_2$$
$$\|f^{(1)} - f^{(2)}\|_{C([0,T]\times(-\infty,+\infty))} = \varepsilon_3$$

Следовательно, $\|u^{(1)}-u^{(2)}\|_{C([0,T]\times(-\infty,+\infty))} \leqslant \varepsilon_1+\varepsilon_2 T+\varepsilon_3\dfrac{T^2}{2}$. Таким образом задача Коши для уравнения колебания струны устойчива в пространстве непрерывных функций.
2.Обобщенное решение. Условие существования решения: $\varphi \in C^2$, $\psi \in C^1$ и f непрерывно дифференцируема по x при любом t. В общем случае эти условия выполняются не всегда. Существует три подхода для решения таких задач:
а) При выводе уравнения колебания струны не совершают предельный переход, т.е. отказываются от дифференциального уравнения, рассматривают интегрально - дифференциальное уравнение, в которое входят производные меньших порядков;
б) рассматриваются обобщенные производные и уравнение понимают в смысле теории обобщенных функций;
в) если начальные условия и правая часть уравнения не удовлетворяют условию существования классического решения (φ не является дважды дифференцируемой, т.е. φ не гладкая).

Тогда рассматриваем последовательностm функций $\widetilde{\varphi}_n$, причем $\widetilde{\varphi}_n \in C^2$ (т.е. мы пытаемся "сгладить"функцию φ), и $\widetilde{\varphi}_n \xrightarrow{C} \varphi$. Таким же образом рассматриваем последовательности $\widetilde{\varphi}_n$, $\widetilde{f}_n$.

$$\begin{gathered}
\widetilde{\varphi}_n \xrightarrow{C} \varphi,\\
\widetilde{\psi}_n \xrightarrow{C} \psi,\\
\widetilde{f}_n \xrightarrow{C} f.
\end{gathered} \tag{6.1}$$

(элементы последовательности огибают "углы"стремясь к ним).

Каждой такой тройке $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}, \widetilde{f})$ ставим в соответствие последовательность классических решений задачи Коши $\widetilde{u}_n(x,t)$. Если эта последовательность сходится к $u(x,t)$, то $u(x,t)$ - обобщенное решение.
Возникают два вопроса: вообще говоря существует ли обобщеное решение (т.е. следует ли это из сходимости троек), и если существует, единственное ли.

Теорема 1 *Обобщенное решение задачи Коши существует,единственно и задается формулой Даламбера.*

▼Пусть $\varphi_n \xrightarrow{C} \varphi$, $\psi_n \xrightarrow{C} \psi$, $f_n \xrightarrow{C} f$. $u_n(x,t)$ - классическое решение задачи Коши с начальными данными φ_n, ψ_n и правой частью f_n. Воспользуемся формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dyd\tau,$$

Нужно показать, что $u_n(x,t) \to u$. Если использовать оценки устойчивости из предыдущего пункта, получим

$$\|u - u_n\|_C \leqslant \|\varphi - \varphi_n\|_C + \|\psi - \psi_n\|_C \cdot T + \|f - f_n\|_C \cdot \frac{T^2}{2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 T + \varepsilon_3 \frac{T^2}{2}.$$

но т.к. $\varphi_n \xrightarrow{C} \varphi$, $\psi_n \xrightarrow{C} \psi$, $f_n \xrightarrow{C} f$, то $\varepsilon_i \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $i = 1,2,3$, т.е. $\|u - u_n\|_C \to 0$. Следовательно, функция u, записанная по формуле Даламбера, действительно будет решением задачи Коши.
Единственность решения следует из единственности предела. ▲

Определение 1 *Пусть функции φ,ψ, $f \in C$, если для любых последовательностей $\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n, \tilde{f}_n$, удовлетворяющих (6.1) и являющихся гладкими, соответствующая последовательность решений сходится к функции $u(x,t)$, тогда функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением задачи Коши.*

7 Краевые задачи для полуограниченной струны и ограниченной струны

1. Рассмотрим задачу.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, x > 0), \tag{7.1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{7.2}$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{7.3}$$
$$u|_{x=0} = 0 \tag{7.4}$$

Будем решать задачу методом продолжений. Идея заключается в продолжении функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определенных при $x > 0$, на отрицательную полуось так, чтобы решение задавалось формулой Даламбера. Пусть $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$ - продолжение $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрицательную полуось. Тогда решение можно определить по формуле Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\widetilde{\varphi}(x+at) + \widetilde{\varphi}(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \widetilde{\psi}(y)\,dy.$$

Уравнение (7.1), а также условия (7.2) и (7.3) выполняются для любых гладких функций $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$, причем $\widetilde{\varphi}(x)$ дважды дифференцируема. Рассмотрим третье условие:

$$0 = \frac{1}{2}\big(\widetilde{\varphi}(at) + \widetilde{\varphi}(-at)\big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{at} \widetilde{\psi}(y)\,dy.$$

Очевидно, это условие будет выполняться, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжить на отрицательную полуось нечетным образом (т.е. $\widetilde{\varphi}(-x) = -\varphi(x)$, $\widetilde{\psi}(-x) = -\psi(x)$). После продолжения φ и ψ на отрицательную полуось нечетным образом, выпишем формулу Даламбера, она и будет решением задачи (7.1)-(7.4).

2. Рассмотрим задачу.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, x > 0), \tag{7.5}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{7.6}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{7.7}$$

$$u_x|_{x=0} = 0. \tag{7.8}$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что решение этой задачи также может быть найдено по формуле Даламбера, если продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ четным образом на отрицательную полуось (т.к. производные от четных функций - четные).

3. Задача распространения краевого режима.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, x > 0), \tag{7.9}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{7.10}$$

$$u_t|_{t=0} = 0, \tag{7.11}$$

$$u|_{x=0} = f(t). \tag{7.12}$$

Решение будем искать в виде волны, распространяющейся вправо: $g(t - \frac{x}{a})$. Из условия (7.10) следует, что $g(-\frac{x}{a}) = 0$, а так как мы рассматриваем $x > 0$, то $-\frac{x}{a} < 0$. Поэтому потребуем, чтобы $g(x) = 0$, при $x < 0$. Из (7.12) следует, что $g(t) = f(t)$, $t > 0$. Таким образом,

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ f(t), & t > 0, \end{cases}$$

или, если использовать функцию Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

можно записать $u(x,t) = \Theta(t - \frac{x}{a}) f(t - \frac{x}{a})$ (т.к. $g(t) = \Theta(x) f(t)$).

4. Краевая задача для ограниченной струны.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (t > 0, 0 < x < l), \tag{7.13}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{7.14}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{7.15}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \tag{7.16}$$

$$u_x\big|_{x=l} = 0. \tag{7.17}$$

Покажем, что φ и ψ можно продолжить вне $(0, l)$. Чтобы выполнялись условия (7.16) и (7.17), необходимо, чтобы $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(l+x) = -\varphi(l-x)$. Тогда $\varphi(l+x) = -\varphi(l-x) = \varphi(x-l)$. Пусть $x - l = y$, тогда $\varphi(y) = \varphi(2l+y)$. Таким образом, $\varphi(x)$ - периодическая с периодом $2l$. Аналогично с ψ. Значит продолжаем φ и ψ нечетным образом на $[-l, 0]$, далее продолжаем периодически с периодом $2l$ и решение получаем по формуле Даламбера.

8 Формулы Грина для оператора Лапласа.

Запишем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int\limits_{\partial\Omega} u \cos(n, x) ds,$$

$\cos(n, x)$ - угол между внешней нормалью к Ω и Ox

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(uv) dx = \int\limits_{\partial\Omega} vu \cos(n, x_i) ds = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} vu \cos(n, x_i) ds - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(n, x_i) ds - \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} u\, dx,$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(\overrightarrow{n}, x_i) ds - \int\limits_{\Omega} u \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\, dx$$

это I формула Грина,где $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos(\overrightarrow{n}, x_i)$ - производная по направлению внешней нормали. Выпишем ее в более удобном виде, учитывая что $\frac{\partial v}{\partial n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cos \overrightarrow{n}, x_i$,

$(\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad} u, \mathrm{grad} v) dx = \int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int\limits_{\Omega} u \Delta v\, dx.$$

Поменяв местами v и u и вычтя из одного равенства другое, получим II формулу Грина:

$$\int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds,$$

Если $u = v$, мы получаем III формулу Грина:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int\limits_{\Omega}u\Delta u\, dx$$

9 Метод сферических средних.

Сведем задачу Коши для волнового уравнения к задаче для полуограниченой струны.

Определение 1 *Пусть задана функция $u(x_1, x_2, x_3) = u(x)$. Тогда ее сферическим средним назовем интеграл по сфере S с центром в точке x_0 и радиусом r, поделенный на площадь сферы:*

$$\overline{u}^{x_0}(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S^r_{x_0}} u(x)\, ds.$$

Докажем, что зная все сферические средние от функции, можно восстановить саму функцию. Для этого покажем что $u(x_0) = \lim\limits_{r\to 0}\overline{u}^{x_0}(r)$, т.е. покажем что

$$\left| u(x_0) - \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S^r_{x_0}} u(x)\, ds \right| \underset{r\to 0}{\to} 0$$

▼

$$\left| u(x_0) - \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S^r_{x_0}} u(x)\, ds \right| = \left| \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S^r_{x_0}} \big(u(x_0) - u(x)\big)\, ds \right| \leqslant \max_{x\in S^r_{x_0}}|u(x_0) - u(x)| \underset{r\to\infty}{\to} 0.$$

это верно если u-непрерывно.▲
Рассмотрим Δu. Если перейти к сферической системе координат то

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0,$$

Определение 2 $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)$ *- называется радиальной частью Лаплассиана и обозначается* $\Delta_r u$.

Лемма 1 *Сферическое среднее от Лапласиана равно радиальной части Лапласиана от сферического среднего т.е.*

$$\overline{\Delta u}^{x_0}(r) = \Delta_r \overline{u}^{x_0}(r).$$

▼Обозначим через $T^r_{x_0}$ шар с центром x_0 и радиусом r. Рассмотрим интеграл:

$$I = \int\limits_{T^r_{x_0}} \Delta u \, dx.$$

Преобразуем его двумя способами:
а) по II формуле Грина, положив $v = 1$, тогда $\Delta v = 0$ и учитывая, что $S^r_{x_0}$ - граница $T^r_{x_0}$:

$$I = \int\limits_{S^r_{x_0}} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds =$$

внешняя нормаль к сфере направлена по радиусу

$$= \int\limits_{S^r_{x_0}} \frac{\partial u}{\partial r} \, ds =$$

переходим к сферической системе координат

$$= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta = r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta = r^2 \frac{\partial}{\partial r} 4\pi \overline{u}^{x_0}(r),$$

б) в сферической системе:

$$I = \int\limits_0^{r}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Delta u r_1^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr_1 = 4\pi \int\limits_0^{r} r_1^2 \overline{\Delta(u)}^{x_0}(r_1) \, dr_1,$$

приравняем а.) и б.) полученные выражения

$$\int\limits_0^{r} r_1^2 \overline{\Delta u}^{x_0}(r_1) dr_1 = r^2 \frac{\partial}{\partial r} \overline{u}^{x_0}(r),$$

продифференцируем по r

$$r^2\overline{\Delta u}^{x_0}(r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\overline{u}^{x_0}(r)\right),$$

разделим на r^2

$$\overline{\Delta u}^{x_0}(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\overline{u}^{x_0(r)}\right),$$

тогда

$$\overline{\Delta u}^{x_0}(r) = \Delta_r\overline{u}^{x_0}(r).$$

▲
Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^3), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{gathered}$$

Пусть $\overline{u}(r,t)$ - сферическое среднее от функции u, т.е.

$$\overline{u}(t,r) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\limits_{S_{x_0}^r} u(t,x)\,ds.$$

Возмем сферическое среднее от левой и правой частей уравнения (9.1) и воспользуемся Леммой

$$\overline{u}_{tt}(r,t) = a^2\Delta_r\overline{u}(t,r), \tag{9.1}$$

получим начальные условия

$$\overline{u}|_{t=0} = \overline{\varphi}(r), \tag{9.2}$$

$$\overline{u}_t|_{t=0} = \overline{\psi}(r). \tag{9.3}$$

Задачу (9.1)-(9.3) сведем к задаче для полуограниченной струны. Введем функцию $v(r,t) = r\overline{u}(r,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}v_{tt}(r,t) = \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right) = \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(v_r\frac{1}{r} - v\frac{1}{r^2}\right)\right) = \\ = \frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r - v) = \frac{a^2}{r^2}(v_r + rv_r - v_r) = \frac{a^2}{r}v_{rr}, \end{aligned}$$

тогда задача для полуограниченой струны $(r > 0)$:

$$v_{tt} = a^2 v_{rr},$$
$$v|_{t=0} = r\overline{\varphi}(r),$$
$$v_t|_{t=0} = r\overline{\psi}(r),$$

т.к. струна полуограничена, то необходимо поставить условие при $r = 0$

$$v|_{r=0} = 0.$$

10 Формула Кирхгофа.Запаздывающий потенциал.

1.Формула Кирхгофа.

$$v = r\overline{u}$$
$$v_{tt} = a^2 v_{rr},$$
$$v|_{t=0} = r\overline{\varphi}(r),$$
$$v_t|_{t=0} = r\overline{\psi}(r),$$
$$v|_{r=0} = 0.$$

Продолжим на отрицательную полуось начальные условия нечетным образом и запишем формулу Даламбера. Т.к. r - нечетная, то $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ должны быть продолжены четным образом. Тогда

$$v(r,t) = \frac{(r+at)\overline{\varphi}(r+at) + (r-at)\overline{\varphi}(r-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{r-at}^{r+at} y\overline{\psi}(y)\,dy,$$

$$\overline{u}(r,t) = \frac{(r+at)\overline{\varphi}(r+at) + (r-at)\overline{\varphi}(r-at)}{2r} + \frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} y\overline{\psi}(y)\,dy,$$

Восстановим u через предел: $u(t,x) = \lim\limits_{r\to 0}\overline{u}(r,t)$. Используем правило Лопиталя учитывая что $\overline{\varphi}$ - четная, $\overline{\varphi'}$ - нечетная, $\overline{\psi}$ - четная

$$u(x,t) = \frac{\overline{\varphi}(at) + at\overline{\varphi'}(at) + \overline{\varphi}(-at) - at\overline{\varphi'}(-at)}{2} + \frac{at\overline{\psi}(at) + at\overline{\psi}(at)}{2a} =$$
$$= \overline{\varphi}(at) + at\overline{\varphi'}(at) + t\overline{\psi}(at) = \frac{\partial}{\partial t}(t\overline{\varphi}(at)) + t\overline{\psi}(at),$$

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_x^{at}} \varphi(\xi)\,dS\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_x^{at}} \psi(\xi)\,dS,$$

формула Кирхгофа, дающая решение задачи Коши для волнового уравнения.
2. Запаздывающий потенциал.
Рассмотрим теперь задачу Коши для неоднородного волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{10.1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \tag{10.2}$$

$$u_t\big|_{t=0} = 0, \tag{10.3}$$

Для построения решения этой задачи рассмотрим лемму

Лемма 1 *Пусть $Z(x,t,\tau)-$ решение следующей задачи:*

$$Z_{tt} = a^2 \Delta Z \quad (t > \tau),$$

$$Z\big|_{t=\tau} = 0,$$

$$Z_t\big|_{t=\tau} = f(x,\tau).$$

Тогда решение задачи (10.1)-(10.3) может быть получено следующим образом:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t Z(x,t,\tau)\, d\tau.$$

▼аналогично п.5.▲
Теперь для того, чтобы построить решение задачи (10.1)-(10.3),нужно построить решение Z. Сделаем замену $t = t - \tau$ и положим $\varphi = 0, \psi = f(\xi,\tau)$:

$$Z(x,t,\tau) = \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int\limits_{S_x^{a(t-\tau)}} f(\xi,\tau) dS_\xi,$$

Следовательно, решение задачи (10.1)-(10.3) можно вычислить по формуле:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t-\tau)} \int\limits_{S_x^{a(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\, dS_\xi\, d\tau,$$

Сделав замену $\rho = a(t-\tau)$, получим:

$$u(x,t) = \int\limits_0^{at} \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \int\limits_{S_x^\rho} f\left(\xi, t - \frac{\rho}{a}\right)\, dS_\xi\, d\rho =$$

интеграл по шару с центром x_0 и радиусом at, где $dS_\xi\, d\rho$ - элемент объема

$$= \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \int\limits_{T_x^{at}} f\left(\xi, t - \frac{\rho}{a}\right)\, d\xi$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 \rho} \int\limits_{T_x^{at}} f\left(\xi, t - \frac{\rho}{a}\right)\, d\xi \tag{*}$$

где ρ - расстояние от центра шара до переменной точки ξ.
Рассмотрим систему точечных зарядов.

$\dfrac{q}{r}$ - потенциал одного заряда, тогда потенциал системы $\sum\limits_i \dfrac{q_i}{r_i}$. Потенциал системы в общем случае $\int\limits_\Omega \dfrac{f(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi$, где $f(\xi)$ - плотность заряда (имеется в виду не точечные заряды). Уравнение (*) описывает потенциал, создаваемый системой зарядов в момент времени $t-\dfrac{\rho}{a}$, т.е. запаздывающий потенциал.

11 Метод спуска. Формула Пуассона.

1. Рассмотрим задачу Коши для двумерного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}), \tag{11.1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \tag{11.2}$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x,y). \tag{11.3}$$

Наряду с ней рассмотрим задачу Коши для трехмерного однородного волнового уравнения, но с теми же начальными условиями

$$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \tag{11.4}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \tag{11.5}$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x,y). \tag{11.6}$$

Ее решение по формуле Кирхгофа

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S^{at}_{x,y,z}} \psi(\xi,\eta)\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S^{at}_{x,y,z}} \varphi(\xi,\eta)\,dS\right) \tag{*}$$

Покажем, что если решение (11.4)-(11.6) не зависит от z, то оно будет решением (11.1)-(11.3). В (*) присутствует поверхностный интеграл второго рода, который не зависит от z. Поэтому, исходя из определения поверхностного интеграла второго рода, u не зависит от z и, не ограничивая общности, положим $z=0$ и будем считать, что $u=u(x,y,t)$ (по сути перешли к двумерной задаче).

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S^{at}_{x,y,0}} \psi(\xi,\eta)\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S^{at}_{x,y,0}} \varphi(\xi,\eta)\,dS\right) =$$

Вычислим интеграл по сфере как удвоенный интеграл по верхней полусфере и перейдем к поверхностному интегралу по проекции(кругу)

$$= \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{S^{at}_{x,y,0}\,,\,\zeta>0} \psi(\xi,\eta)\,dS + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{S^{at}_{x,y,0}\,,\,\zeta>0} \varphi(\xi,\eta)\,dS \right).$$

Рассмотрим

$$I = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S^{at}_{x,y,0}} \psi(\xi,\eta)\,dS = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{S^{at}_{x,y,0}\,,\,\zeta>0} \psi(\xi,\eta)dS = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int\limits_{K^{at}_{x,y}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{|\cos(n,\zeta)|}\,d\xi d\eta,$$

$\cos(n,\zeta)$ - косинус между осью ζ и внешней нормалью n, $K^{at}_{x,y}$ - проекция сферы. Если поверхность задана уравнением $\zeta = g(\xi,\eta)$, то

$$cos(n,\zeta) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial \eta}\right)^2}},$$

Запишем уравнение верхней полусферы с центром в $(x,y,0)$ и радиуса at, т.е. выразим ζ из уравнения сферы $(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + \zeta^2 = (at)^2$.

$$\zeta = \sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}.$$

Теперь пересчитаем частные производные

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{x-\xi}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}},$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{y-\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}},$$

значит

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}},$$

таким образом получим

$$I = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{K^{at}_{x,y}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - (\eta-y)^2}}\,d\xi d\eta,$$

Тогда решение задачи (11.1)-(11.3) можно найти по формуле, называемой формулой Пуассона

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{K_{x,y}^{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\, d\xi d\eta +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{K_{x,y}^{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\, d\xi d\eta\right).$$

2. Рассмотрим теперь задачу Коши для трехмерного однородного волнового уравнения с однородными начальными условиями. Как было показано выше, если решение не зависит от z, то можно искать решение двумерной задачи:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + f(x,y,t),$$
$$u\big|_{t=0} = 0,$$
$$u_t\big|_{t=0} = 0.$$

Воспользуемся Леммой из п.10, получим

$$Z(x,y,t,\tau) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{K_{x,y}^{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\tau)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

Тогда интегрируя это выражение от 0 до t по параметру τ получим решение рассматриваемой задачи

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \int\limits_{K_{x,y}^{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi,\eta,\tau)\, d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}.$$

$\varphi \in C^3$, $\psi, f \in C^2$ для трехмерной и двухмерной задачи, то формулы Пуассона и Кирхгофа дают дважда дифференцируемое решение. Таким образом, рассуждая, как в предыдущем параграфе, можно утверждать, что решение задачи Коши для неоднородного уравнения с неоднородными начальными условиями, если оно не зависит от одной из переменных, можно найти как решение такой же задачи меньшего порядка. В этом и заключается метод спуска, причем в общем виде для пространства R^n решение записывается в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_0^t \int\limits_{|\xi-x|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|\xi-x|^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\psi(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{|\xi-x|<at} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{a^2t^2-|\xi-x|^2}}\right),$$

где $x \in R^n$, $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}$, $\psi, f \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

12 Передний и задний фронт волны. Свойства решений волнового уравнения.

1. Рассмотрим задачу Коши для трехмерного случая волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \quad (x \in \mathbb{R}^3),$$
$$u|\, t = 0 = \varphi(x),$$
$$u|_t\, t = 0 = \psi(x).$$

(КАРТИНКА)
Пусть φ, ψ равны нулю всюду, кроме некоторой области D. Возмем произвольную точку x вне этой области D и исследуем поведение решения в этой точке в различные моменты времени.
Решение задается формулой Кирхгофа:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_x^{at}} \varphi(\xi)\, dS\right) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_x^{at}} \psi(\xi)\, dS,$$

Если t - достаточно мало, тогда сфера не будет пересекаться с областью D, следовательно решение будет нулевым, т.к $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Если t - слишком велико, тогда сфера будет лежать внутри области D,и решение опять будет нулевым. Найдём предельные моменты времени между которыми решение ненулевое. Если обозначим

$$\rho_0 = \inf_{y \in D} |x - y|,$$

то решение будет нулевым при:

$$t < t_0 = \frac{\rho_0}{a}.$$

Если обозначим:

$$\rho_1 = \sup_{y \in D} |x - y|,$$

то решение будет нулевым при:

$$t > t_1 = \frac{\rho_1}{a}.$$

Возмем некоторое $t > t_0$ и рассмотрим всю совокупность точек вне области D. Их можно разделить на три класса: точки, до которых возмущение не дошло ($u = 0$), точки, через которые возмущение уже прошло ($u = 0$), и все остальные ($u \neq 0$).

Определение 1 *Совокупность общих граничных точек первого и третьего множеств называется передним фронтом волны.Совокупность общих граничных точек второго и третьего множеств называется задним фронтом волны.*

Если D - шар радиуса r, то передний фронт волн - сфера радиуса $r + at$, задний - сфера радиуса $r - at$.
2. Рассмотрим задачу Коши для двухмерного случая волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x, y),$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x, y).$$

Решение задается формулой Пуассона:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{K_{x,y}^{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi a} \int\limits_{K_{x,y}^{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi d\eta \right).$$

Если t достаточно мало, то $t < t_0$ и решение $u = 0$. Для остальных t, $u \neq 0$ т.к. $K_x^{at} \cap D = D$, следовательно, заднего фронта нет.Это утверждение можно обобщить на случай задачи n - го порядка: если $n = 2k$, то заднего фронта волны нет, а если $n = 2k + 1$, то есть оба фронта. Исключение составляет случай $n = 1$, когда существование заднего фронта волны зависит от способа возмущения.
3. Свойства решений волнового уравнения.
1°. Конечная скорость распространения возмущения: какую бы точку $x \notin D$ мы ни взяли, всегда найдется $t_0 : t < t_0$, $u = 0$.
2°. Конечная область зависимости: если рассмотреть формулу Даламбера, то видно, что решение зависит от φ в точках, от ψ на интервале, а от f в характеристическом треугольнике. Поэтому для любой точки x и любого момента времени t найдется такая область Ω, что изменение начальных условий и правой части вне этой области не приведет к изменению решения.
3°. С увеличением размерности пространства, для существования классического решения усиливаются требования на гладкость начальных условий в правой части: $\varphi \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}, \psi, f \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, где n размерность пространства.

13 Задача Коши для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности.

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n), \tag{13.1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{13.2}$$

Для ее решения применим преобразование Фурье. Пусть дана некоторая функция $f(x)$, тогда ее преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{isx}\, dx,$$

(достаточным условием сходимости интеграла в правой части является абсолютная суммируемость функции $f(x)e^{isx}$, т.е. $f(x)$ должна достаточно быстро стремится к нулю). Если известна $F(s)$, то $f(x)$ можно восстановить при помощи обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{-isx}\, ds.$$

Если f дифференцируема ($f'(x)$ быстро стремится к нулю при $x \to \infty$), тогда сделаем следующее преобразование (интегрируем по частям):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{isx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{isx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - is\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{isx}\, dx$$

(здесь первое слагаемое равно нулю, т.к. $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Тогда получаем преобразование Фурье для производной:

$$F[f'] = -isF[f]$$

($F[\,]$- обозначение преобразования Фурье). Аналогично получим

$$F[f^{(k)}] = (-is)^k F[f].$$

Таким образом, если задано обыкновенное дифференциальное уравнение, то применяя к обеим его частям преобразование Фурье, получим алгебраическое уравнение относительно F. Решаем его, и, применяя к решению обратное преобразование Фурье, получаем решение исходного уравнения.
Рассмотрим случай n переменных. Если $f(x), x \in \mathbb{R}^n$ (s - вектор-строка) , то

$$F(s) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i(s,x)}\, dx$$

$F(s)-$ преобразование Фурье функции n переменных,

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(s)e^{-i(s,x)}\, ds$$

$f(x)-$ обратное преобразование Фурье функции n переменных.

Если рассмотреть $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, то

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right] = -is_i F[f],$$
$$F\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right] = -s_i^2 F[f],$$

т.о.

$$F[\Delta f] = -(s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2)F[f] = -|s|^2 F[f].$$

Обозначим через $\widetilde{u}(s,t)$ преобразование Фурье функции u :

$$\widetilde{u}(s,t) \overset{def}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t) e^{i(s,x)}\, dx.$$

Дифференцируя по t получаем:

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(s,x)} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx.$$

Кроме того, известно:

$$-|s|^2 \widetilde{u} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta u e^{i(s,x)}\, dx.$$

Теперь применим преобразование Фурье к уравнению теплопроводности (13.1). Таким образом, вместо исходного уравнения мы получили линейное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial \tilde{u}(s,t)}{\partial t} + a^2 |s|^2 \tilde{u}(s,t) = 0.$$

Полагая $t = 0$, получим $\widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}(s)$, где $\widetilde{\varphi}$ - преобразование Фурье функции φ. Общее решение полученного уравнения ищется в виде $\tilde{u}(s,t) = C(s)e^{-a^2|s|^2 t}$. Найдем $C(s)$ из начального условия, которое примет следующий вид:

$$\widetilde{u}(s,t)|_{t=0} = \left.\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R^n} u(x,t)e^{i(s,x)} dx\right)\right|_{t=0} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{R^n} \varphi(x) e^{i(s,x)}\, dx = \widetilde{\varphi}(s),$$

откуда $C(s) = \tilde{\varphi}(s)$. В результате мы нашли преобразование Фурье решения уравнения (13.1):

$$\widetilde{u}(s,t) = \widetilde{\varphi}(s) e^{-a^2|s|^2 t}. \tag{13.3}$$

Теперь, применив к этому решению обратное преобразование Фурье и воспользовавшись (13.3), получим решение уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} \widetilde{u}(s,t) e^{-i(s,x)}\, ds = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} \widetilde{\varphi}(s) e^{-a^2|s|^2 t - i(s,x)}\, ds =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{R^n} \varphi(y) e^{i(s,y)}\, dy \right) e^{-a^2|s|^2 t - i(s,x)}\, ds$$

Поменяем порядок интегрирования:

$$u(x,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{2n}} \int\limits_{R^n} \varphi(y) \left(\int\limits_{R^n} e^{i(s,y-x) - a^2|s|^2 t} \right) dy.$$

Обозначим через I и распишем подробнее внутренний интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (e^{is_1(y_1-x_1) - a^2 s_1^2 t} e^{is_2(y_2-x_2) - a^2 s_2^2 t} \ldots e^{is_n(y_n-x_n) - a^2 s_n^2 t})\, ds_n\, ds_{n-1} \ldots ds_1 =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is_j(y_j-x_j) - a^2 s_j^2 t}\, ds_j = \prod_{j=1}^{n} I_j$$

Вычислим I_j. Сведем его к интегралу Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}$, выделив полный квадрат в степени. Для этого рассмотрим следующий интеграл:

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - bx - c}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} - c}\, dx.$$

Сделаем замену $y = \sqrt{a}x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$, тогда $dx = \dfrac{1}{\sqrt{a}} dy$ и

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a} - c}.$$

Таким образом, получим, что

$$I_j = \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{\frac{-(y_j - x_j)^2}{4a^2 t}}.$$

Тогда

$$I = \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\frac{(y_j-x_j)^2}{4a^2 t}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 t}} \right) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \right)^n \prod_{j=1}^{n} \left(e^{-\frac{(y_j-x_j)^2}{4a^2 t}} \right) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \right)^n \left(e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}} \right)$$

Таким образом, мы получили формулу Пуассона для уравнения теплопроводности:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} \varphi(y) e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}}\, dy.$$

Замечание 1 *После замены* $y = \sqrt{a}x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ *мы перешли к интегрированию по вещественной оси. Если сделать замену* $y = \sqrt{a}x + \dfrac{ib}{2\sqrt{a}}$, *мы перейдем к интегрированию по прямой, параллельной вещественной оси. Нам осталось показать, что*

$$\int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi},$$

т.е. что интеграл по прямой, параллельной вещественной оси, равен $\sqrt{\pi}$.

▼Для этого рассмотрим интеграл по замкнутому прямоугольному контуру $\int\limits_{\square} e^{-z^2} dz$.

По теореме Коши, если функция аналитическая, то ее интеграл по замкнутому контуру равен нулю. Значит,

$$\int\limits_{\square} e^{-z^2}\, dz = 0.$$

Этот интеграл можно разбить на сумму четырех (по сторонам прямоугольника):

$$\int\limits_{\square} e^{-z^2} dz = \int\limits_{-N}^{N} e^{-x^2}\, dx + \int\limits_{N+ic}^{-N+ic} e^{-z^2}\, dz + I_3 + I_4 = 0,$$

это равенство выполняется для любого N. При $N \to \infty$ первый интеграл стремится к $\sqrt{\pi}$, т.к. стремится к интегралу Пуассона. Второй интеграл стремится к интегралу по прямой, параллельной вещественной оси: $-\int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} e^{-z^2}\,dz$. Третий и четвертый– интегралы по боковым сторонам. Рассмотрим I_3. На этом участке $z = N + iy$, $y \in [0, c]$ и $dz = idy$, тогда учитывая, что $|e^{\alpha+i\beta}| = e^{\alpha}$, $|i| = 1$, получаем:

$$|I_3| = \left| i \int\limits_0^c e^{-(N+iy)^2}\,dy \right| \leqslant \int\limits_0^c e^{-N^2+y^2}\,dy = e^{-N^2} K(c) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $K(c)$ – некоторая константа, не зависящая от N. Таким образом, $I_3, I_4 \to 0$, следовательно, $\int\limits_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} e^{-z^2}\,dz = \sqrt{\pi}$. ▲

14 Обоснование формулы Пуассона.

Рассмотрим формулу Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}}\,dy. \tag{14.1}$$

Определение 1 . *Фундаментальным решением уравнения теплопроводности называется функция*

$$v(x,y,t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}}.$$

Фундаментальное решение обладает следующими свойствами:
1°. при $t > 0$, функция v является бесконечно-дифференцируемой и положительной.
▼очевидно ▲
2°. при $t > 0$, функция v удовлетворяет уравнению теплопроводности, т.е. $v_t = a^2 \Delta v$.
▼Вычислим производные по t, x_i, y_i :

$$\begin{aligned}
v &= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{4a^2 t}\left((y_1-x_1)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2\right)}, \\
v_t &= \left(\frac{1}{(4\pi a^2)^{\frac{n}{2}}} \left(-\frac{n}{2t^{\frac{n+2}{2}}} \right) + \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \frac{|y-x|^2}{4a^2 t^2} \right) e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}}, \\
v_{x_i} &= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \frac{-2(x_i - y_i)}{4a^2 t} e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}}, \\
v_{x_i x_i} &= \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{(x_i - y_i)^2}{4a^4 t^2} - \frac{1}{2a^2 t} \right) e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2 t}},
\end{aligned}$$

после подстановки в $v_t = a^2\Delta v$ приходим к тождеству.▲
3°. $\int\limits_{R^n} v(x,y,t)\,dy = 1.$
▼применим выкладки из п.13:

$$\begin{array}{rcl} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2t}} dy & = & \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_i-y_i)^2}{4a^2t}} dy_i = \\ \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \left(\sqrt{4\pi a^2 t}\right) & = & \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} (4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}} = 1. \end{array}$$

▲

Теорема 1 . *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, тогда формула Пуассона 14.1 дает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:*

$$u_t = a^2\Delta u, \tag{14.2}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{14.3}$$

▼*Нужно доказать:*

1. *Функция удовлетворяет (14.2).*

2. *Функция удовлетворяет (14.3), что равносильно $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = \varphi(x)$.*

С помощью фундаментального решения запишем формулу Пуассона в виде :

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) v(x,y,t)\,dy,$$

если

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \frac{\partial v}{\partial t}\,dy$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\,dy,$$

верно, то

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\Delta v\right) dy = 0.$$

Таким образом, доказательство первого пункта сводится к доказательству правомерности дифференцирования под знаком интеграла. Если $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)\,dx$ *сходится равномерно и* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\,dx$ *сходится равномерно, то* $\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)\,dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}\,dx$. *Осталось показать, что исходный интеграл сходится равномерно и интегралы, полученные дифференцированием один раз по* t *и один и два раза по* x, *сходятся равномерно. Используем признак Вейерштрасса: если* $|\varphi(x,t)| < g(x)$ *и* $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится, то* $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,t)\,dx$ *тоже сходится, причем, равномерно. Таким образом, надо оценить подынтегральную функцию.*
а.) Рассмотрим интеграл 14.1 и докажем, что он сходится равномерно при $\forall\, t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^n$. *Сделаем замену переменных:* $\frac{y_i - x_i}{2a\sqrt{t}} = z_i$, *тогда интеграл 14.1 преобразуется к виду:*

$$I = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x + 2a\sqrt{t}z)e^{-|z|^2}\,dz. \tag{14.4}$$

Оценим подынтегральную функцию. По теореме

$$|\varphi(x)| \leqslant M,$$

тогда

$$I \leq M\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}\,dz = M\pi^{\frac{n}{2}} < \infty,$$

следовательно, $u(x,t)$ *сходится равномерно.*
б.) Продифференцируем 14.1 формально по t:

$$u_t = -\frac{n}{2\left(4\pi a^2\right)^{\frac{n}{2}}\, t^{\frac{n}{2}+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy + \frac{1}{\left(4\pi a^2 t\right)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\frac{|x-y|^2}{4a^2t^2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy \tag{14.5}$$

и обозначим первый и второй интегралы входящие в (14.5) I_1 *и* I_2 *соответственно. Докажем равномерную сходимость* I_1, I_2 *в области* $t \geqslant \varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Если в* I_1 *сделать замену* $\frac{y_i - x_i}{2a\sqrt{t}} = z_i$, *то*

$$I_1 = -\frac{n}{2t\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x + 2a\sqrt{t}z)e^{-|z|^2}\,dz.$$

Т.к. $t \geqslant \varepsilon$ *и* $\varphi(x + 2a\sqrt{t}z) \leqslant M$, *то*

$$\left| -\frac{n}{2t\pi^{\frac{n}{2}}}\varphi(x + 2a\sqrt{t}z)e^{-|z|^2} \right| \leqslant \frac{n}{\varepsilon\pi^{\frac{n}{2}}} M e^{-|z|^2},$$

а интеграл от $\dfrac{n}{\varepsilon\pi^{\frac{n}{2}}} M e^{-|z|^2}$ *сходится, следовательно, мы доказали равномерную сходимость* I_1. *Рассмотрим* I_2. *Введем* $\dfrac{y_i - x_i}{2a\sqrt{t}} = z_i$*:*

$$I_2 = \frac{1}{t\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x + 2a\sqrt{t}z)|z|^2 e^{-|z|^2}\, dz.$$

Вопрос о сходимости I_2 *сводится к сходимости интеграла*

$$\frac{M}{\varepsilon\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |z|^2 e^{-|z|^2}\, dz =$$

введём сферическую систему координат: $|z| = r, dz = r^{n-1}\, dr ds$ *, тогда получим:*

$$= \frac{M|S_1|}{\varepsilon\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_0^{\infty} r^{n+1} e^{-r^2}\, dr.$$

Этот интеграл сходится, т.к. экспонента растет быстрее показательной функции. Примерно также исследуются интегралы, которые получаются при дифференцировании один и два раза по x. Т.о., можно считать, что они сходятся равномерно, и, следовательно, u - решение уравнения теплопроводности.
в.)Проверим выполнение начального условия, т.е. докажем, что

$$\lim_{t\to+0} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-\frac{|y-x|^2}{4a^2t}}\, dy = \varphi(x).$$

Сделаем замену $\dfrac{y_i - x_i}{2a\sqrt{t}} = z_i$, *тогда нужно показать, что*

$$\lim_{t\to+0} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x + 2a\sqrt{t}z) e^{-|z|^2}\, dz = \varphi(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-|z|^2}\, dz.$$

Составим разность между левой и правой частью и зададим $\varepsilon > 0$.

$$\left| \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\varphi(x + 2a\sqrt{t}z) - \varphi(x)\Big) e^{-|z|^2}\, dz \right| \leqslant \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big|\varphi(x + 2a\sqrt{t}z) - \varphi(x)\Big| e^{-|z|^2}\, dz.$$

Разобьем интеграл на два: I_1- по шару T_ρ с центром в начале координат и радиусом ρ и I_2- интеграл по остатку $\mathbb{R}^n/T_\rho$:

$$I_1+I_2=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{T_\rho}\Big|\varphi(x+2a\sqrt{t}z)-\varphi(x)\Big|\,e^{-|z|^2}\,dz+\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n/T_\rho}\Big|\varphi(x+2a\sqrt{t}z)-\varphi(x)\Big|\,e^{-|z|^2}\,dz.$$

Рассмотрим I_2 :

$$I_2=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n/T_\rho}\Big|\varphi(x+2a\sqrt{t}z)-\varphi(x)\Big|\,e^{-|z|^2}\,dz\leqslant\frac{2M}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n/T_\rho}e^{-|z|^2}\,dz.$$

По $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ найдем такое ρ_0, что $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n/T_{\rho_0}}e^{-|z|^2}\,dz\leqslant\frac{\varepsilon\pi^{\frac{n}{2}}}{4M}$. Тогда

$$I_2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим I_1, причем по шару с фиксированным ρ_0 :

$$I_1=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{T_{\rho_0}}\Big|\varphi(x+2a\sqrt{t}z)-\varphi(x)\Big|\,e^{-|z|^2}dz.$$

Т.к. $\varphi(x)$ непрерывна во всем пространстве, то по $\dfrac{\varepsilon}{2}>0\quad\exists\ \delta>0$ такое, что как только $|2a\sqrt{t}\rho_0|<\delta$, то $\Big|\varphi(x+2a\sqrt{t}z)-\varphi(x)\Big|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $|z|\leqslant\rho_0$. Т.о., при $t\leqslant\dfrac{\delta^2}{4a^2\rho_0^2}=\Delta$ интеграл

$$I_1\leqslant\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{T_\rho}e^{-|z|^2}\,dz\leqslant\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-|z|^2}\,dz=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\dfrac{\delta^2}{4a^2\rho_0^2}>0:\forall t\leq\Delta$ выполняется

$$I_1+I_2\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=\varphi(x).$$

▲

Замечание 1 . *В процессе доказательства мы показали, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности является бесконечно дифференцируемой функцией.*

15 Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности. Устойчивость задачи Коши.

1. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2\Delta u + f(x,t) \\ u|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \tag{15.1}$$

Лемма 1 . *Пусть функция $Z(x,t;\tau)$ является решением следующей задачи Коши:*

$$\begin{aligned} Z_t &= a^2\Delta Z, \ (t>\tau, x\in\mathbb{R}^n) \\ Z|_{t=\tau} &= f(x,\tau). \end{aligned} \tag{15.2}$$

Тогда решение задачи (15.1) может быть получено интегрированием функции $Z(x,t;\tau)$ по параметру τ:

$$u(x,t) = \int_0^t Z(x,t;\tau)\,d\tau.$$

▼Доказательство аналогично доказательству леммы из п.5. Решение задачи (15.2) будет задаваться по формуле Пуассона, после замены t на $t-\tau$:

$$Z(x,t;\tau) = \frac{1}{(4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n} f(y,\tau)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}\,dy,$$

тогда

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n} f(y,\tau)e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}dy\,d\tau.$$

▲

2. Исследуем задачу Коши на устойчивость. Для этого рассмотрим две задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} u_t^{(i)} &= a^2\Delta u^{(i)} + f^{(i)}(x,t) \\ u^{(i)}|_{t=0} &= \varphi^{(i)}(x), \qquad\qquad i=1,2, \end{aligned}$$

$u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ – решения соответствующих им задач Коши. Оценим разность этих решений:

$$|u^{(1)}(x,t)-u^{(2)}(x,t)| \leqslant \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n}|\varphi^{(1)}(y)-\varphi^{(2)}(y)|e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\,dy+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi a^2(t-\tau))^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{R^n}|f^{(1)}(y,\tau)-f^{(2)}(y,\tau)|e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}}dy\,d\tau.$$

Обозначим:

$$\varepsilon_1 = \sup_{x\in R^n} |\varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(2)}(x)| = \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|_C,$$
$$\varepsilon_2 = \sup_{x\in R^n} |f^{(1)}(x,t) - f^{(2)}(x,t)| = \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_C,$$
$$\text{где } C = \{(x,t) : x \in R^n, 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Сделаем замены переменных: в первом слагаемом $z_i \overset{def}{=} \dfrac{x_i - y_i}{2a\sqrt{t}}$, а во втором $z_i \overset{def}{=} \dfrac{x_i - y_i}{2a\sqrt{t-\tau}}$. Тогда получим, что первое слагаемое– это произведение n интегралов Пуассона, каждый из которых равен $\sqrt{\pi}$, а второе слагаемое– произведение одного интеграла в пределах от 0 до t и n интегралов Пуассона, каждый из которых равен $\sqrt{\pi}$. Ограничиваем все интегралы и получаем, что

$$|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 T.$$

Таким образом,

$$||u^{(1)} - u^{(2)}||_{C(\mathbb{R}^n\times[0,T])} \leqslant ||\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}||_{C(\mathbb{R}^n)} + T\,||f^{(1)} - f^{(2)}||_{C(\mathbb{R}^n\times[0,T])},$$

это и означает, что задача Коши устойчива в C.

16 Принцип максимума для уравнения теплопроводности.

Теорема 1 *Пусть в области Ω, представляющей собой цилиндр, осуществляется теплопередача. Будем считать, что $u_t - a^2\Delta u > 0$, т.е. что внутри этой области происходит выделение тепла. Тогда u принимает минимальное значение либо при $t = 0$, т.е. на нижнем основании, либо на боковой поверхности.*

▼Предположим обратное: пусть функция u принимает минимальное значение либо внутри цилиндра, либо на его верхнем основании. Обозначим эту точку минимума (x_1, t_1). Если бы эта точка находилась внутри цилиндра, то

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_1,t_1)} &= \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| (x_1,t_1) = 0, \\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right|_{(x_1,t_1)} &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Тогда неравенство $u_t - a^2\Delta u > 0$, которое должно выполняться по условию, противоречиво. А если бы точка (x_1, t_1) принадлежала верхнему основанию, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_1,t_1)} \leqslant 0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{(x_1,t_1)} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0.$$

Следовательно, неравенство $u_t - a^2\Delta u > 0$ снова не выполняется. Таким образом, наше предположение привело к противоречию.▲

Теорема 2 *Пусть в цилиндре $Ц_t$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет неравенству $u_t - a^2\Delta u \geqslant 0$, тогда она принимает свое минимальное значение либо на нижнем основании Ω_0, либо на боковой поверхности $Б_t$.*

▼Предположим противное. Тогда функция должна принимать минимальное значение либо внутри цилиндра, либо на верхнем основании. Обозначим точку минимума (x_0, t_0). Построим функцию $v(x,t)$ такую, что $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$. Обозначим

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} \min_{(x,t)\in\Omega_0\cup Б_t} u(x,t) - u(x_0,t_0) > 0.$$

Потребуем, чтобы $v(x,t) = u(x,t) + \dfrac{\varepsilon(t-t_0)}{2T}$ (T - высота цилиндра). Убедимся, что функция v ведет себя также, как и функция u, т.е. что она достигает минимума там же, где и u (т.е. либо на $Ц_t$, либо на Ω_T).
По построению v отличается от u не более, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим

$$M \stackrel{def}{=} \min_{(x,t)\in\Omega_0\cup Б_t} u(x,t).$$

Тогда $\min\limits_{(x,t)\in\Omega_0\cup Б_t} v(x,t) \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$. С другой стороны, $u(x_0,t_0) = M - \varepsilon = v(x_0,t_0)$. Так как полученное значение меньше минимума на боковой поверхности и на нижнем основании, то минимум не может достигается ни на боковой поверхности ни на нижнем основании. Но u и v непрерывные функции в замкнутой области, значит, существует точка в области, в которой достигается минимум. Следовательно, $v(x,t)$ достигает минимума либо на верхнем основании, либо внутри цилиндра. Обозначим через (x_1,t_1) точку на верхнем основании или внутри цилиндра, в которой функция $v(x,t)$ достигает минимума. В этой точке

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{(x_1,t_1)} \leqslant 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right|_{(x_1,t_1)} \geqslant 0.$$

По условию, функция $u(x,t)$ удовлетворяет соотношению $u_t - a^2\Delta u \geqslant 0$. С другой стороны, $u = v - \dfrac{\varepsilon(t-t_0)}{2T}$. Значит, $u_t = v_t - \dfrac{\varepsilon}{2T}$, $\Delta u = \Delta v$. Откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_1,t_1)} - a^2\Delta u = \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{(x_1,t_1)} - \frac{\varepsilon}{2T} - a^2\Delta v \geqslant 0.$$

Но т.к. все слагаемые в этом выражении отрицательны то, получили противоречие, значит, минимум достигается либо на нижнем основании Ω_0, либо на боковой поверхности $Б_t$.▲

Замечание 1 *Если выполняется неравенство $u_t - a^2\Delta u \leqslant 0$, то максимум достигается на боковой поверхности или на нижнем основании.*

▼Доказывается введением функции $u_1 = -u$, которая имеет максимальное значение там, где u– минимальное.▲

Следствие 1 *Если в цилиндре $u_t = a^2\Delta u$, то выполняются формулировки теоремы и для минимума, и для максимума, т.е. функция и достигает своего минимального и максимального значения на Ω_0 или $Б_t$.*

Отметим, что если основание представляет собою цилиндр, то нижнее основание– это цилиндр в начальный момент времени, верхнее– цилиндр в момент времени T , а боковая поверхность– совокупность граничных точек в различные моменты времени.

17 Теорема единственности для задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{17.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{17.2}$$

Для этой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 1 *Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности единственно в классе ограниченных функций.*

▼Пусть u_1 и u_2– два решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, и $|u(x,t)| < M$. Тогда их разность $v = u_1 - u_2$ будет решением задачи

$$v_t = a^2\Delta v$$
$$v|_{t=0} = 0,$$
$$|v| < 2M.$$

Построим простейшую функцию $\omega(x,t)$, которая является решением уравнения теплопроводности.

В одномерном случае:

$$v_t = a^2 v_{xx},$$
$$\omega = t + \frac{x^2}{2a^2},$$

в многомерном случае:

$$v_t = a^2 \Delta v,$$
$$\omega = t + \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{2a^2 n} = t + \frac{|x|^2}{2a^2 n}.$$

Тогда функция $C\left(t + \dfrac{|x|^2}{2a^2 n}\right)$, где C - константа, тоже будет являться решением уравнения теплопроводности:

$$\omega = C\left(t + \frac{|x|^2}{2a^2 n}\right).$$

Возьмем произвольную точку (x_1, t_1) и построим цилиндр таким образом, чтобы эта точка оказалась внутренней. В качестве основания цилиндра возьмем круг с центром в начале координат и радиусом R. Выберем C так, чтобы на нижнем основании и боковой поверхности $\omega \geqslant |v|$. На нижнем основании $t = 0$ следовательно, $v = 0$ следовательно, $C > 0$. На боковой поверхности необходимо, чтобы выполнялось $C(t + \dfrac{R^2}{2a^2 n}) \geqslant 2M \quad \forall t$, тогда при $t = 0: \ C = \dfrac{4a^2 nM}{R^2}$. Тогда решение принимает вид:

$$\omega = \frac{4a^2 nM}{R^2}\left(t + \frac{|x|^2}{2a^2 n}\right).$$

Рассмотрим функции $\omega \pm v$. По построению, на нижнем основании и боковой поверхности каждая из этих функций неотрицательна. Применим к ней принцип максимума из п.16. Оказывается, что ее минимальное значение также неотрицательно, а, значит, и сама функция во всем цилиндре, а в том числе и в точке (x_1, t_1), неотрицательна. Значит,

$$0 \leqslant |v(x_1, t_1)| \leqslant \frac{4a^2 nM}{R^2}(t_1 + \frac{|x_1|^2}{2a^2 n}).$$

R выбирали таким образом, чтобы точка (x_1, t_1) попала в цилиндр. Следовательно, если мы устремим R в бесконечность, то получим $|v(x_1, t_1)| = 0$, а т.к. точка (x_1, t_1) была произвольной, то $v(x, t) = 0$ везде.▲
Основные свойства решений:
1. Волновое уравнение:

- конечная скорость распространения возмущений,
- конечная область зависимости,

- с увеличением размерности пространства, усиливаются требования на гладкость начальных условий и правых частей.

2. Уравнение теплопроводности:

- бесконечная скорость распространения возмущений,
- бесконечная область зависимости,
- решение бесконечно-дифференцируемо, если начальные условия и правые части непрерывны.

18 Интегральное представление для гармонических функций.

Определение 1 *Функция u называется гармонической в области Ω, если в этой области она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.*

Примеры гармонических функций:
при $n = 1$ гармонической будет любая линейная функция (т.к. гармонические функции сводятся к линейным);
при $n = 2$ функции $1, x, y, xy, x^2 - y^2, \dots;$
при $n = 3$ функции $1, x, y, xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 - z^2, y^2 - z^2, \dots$
Если записать гармонический полином в сферической системе координат, то он будет иметь структуру шаровой функции: $r^n Y_n(\Theta, \varphi)$, где $Y_n(\Theta, \varphi)$– сферическая функция. Рассмотрим функцию $\frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Докажем, что она гармоническая:
▼

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{x}{r^3},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$
$$\Delta\frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0.$$

▲
Если $n = 2$, то гармонической функцией будет $\ln\frac{1}{r}$. Если $n \geqslant 3$, то гармонической функцией будет $\frac{1}{r^{n-2}}$.
Пусть $n = 2$, $f(z)$– аналитическая функция комплексной переменной z, т.е. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Используя необходимое и достаточное условие аналитичности Коши–Римана

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x},\end{aligned}$$

легко показать, что любая аналитическая функция является гармонической, и что u и $v-$ тоже гармонические. Например, $e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \ln z = \ln|z| + iarg\, z$, $z^2 = (x^2-y^2)+2ixy$ являются гармоническими.

Пусть u – дважды непрерывно дифференцируемая в замкнутой области Ω функция, т.е $u \in C^2(\bar\Omega)$. Получим ее интегральное представление. Рассмотрим функцию $v = \dfrac{1}{|x-x_0|^{n-2}}$, где $x_0 \in \bar\Omega-$ внутренняя точка. Эта функция гармоническая всюду, кроме точки x_0. Вырежем точку x_0 сферой $S^\varepsilon_{x_0}$ радиуса ε, а шар обозначим через $T^\varepsilon_{x_0}$ и применим к функциям u и v вторую формулу Грина в области $\Omega\backslash T^\varepsilon_{x_0}$:

$$\int\limits_{\Omega\backslash T^\varepsilon_{x_0}} (u\Delta v - v\Delta u)\; dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\, dS + \int\limits_{S^\varepsilon_{x_0}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\, dS.$$

Перейдем к пределу, устремив $\varepsilon \to 0$. В левой части под интегралом слагаемое $u\Delta v$ равно нулю (v гармоническая в этой области). Тогда слева получим следующий несобственный (т.к. $v \to \infty$) интеграл:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\backslash T^\varepsilon_{x_0}} (-v\Delta u)\; dx = -\int\limits_{\Omega} v\Delta u\, dx = -\int\limits_{\Omega}\frac{\Delta u}{|x-x_0|^{n-2}}\, dx.$$

Теперь разобьем второй интеграл из правой части на два и оценим каждое слагаемое отдельно.

$$I = \left|\int\limits_{S^\varepsilon_{x_0}}\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n}\, dS\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\max_{x\in S^\varepsilon_{x_0}}\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| |S^\varepsilon_{x_0}|$$

(максимум существует в силу ограниченности всех производных), $|S^\varepsilon_{x_0}|$ - площадь сферы. Пусть S_1 - единичная сфера, тогда $|S^\varepsilon_{x_0}| = \varepsilon^{n-1}|S_1|$. Обозначая $K \stackrel{def}{=} \max\limits_{x\in S^\varepsilon_{x_0}}\left|\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|$, получаем:

$$I < K\varepsilon|S_1| \to 0,\; \varepsilon \to 0.$$

Так как внешняя нормаль вырезанной области направлена по радиусу в центр, то $\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial r} = -\dfrac{\partial}{\partial|x-x_0|}$. Тогда

$$J = \int\limits_{S^\varepsilon_{x_0}} u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\, dS = (n-2)\int\limits_{S^\varepsilon_{x_0}} u\frac{1}{|x-x_0|^{n-1}}\, dS.$$

На сфере радиуса ε, $x - x_0 = \varepsilon$, тогда используя теорему о среднем получаем:

$$J = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} \int\limits_{S^{\varepsilon}_{x_0}} u\,dS = \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} u(x^*)|S^{\varepsilon}_{x_0}|,$$

где x^*– точка на сфере. Выразим площадь сферы через площадь единичной сферы:

$$J = (n-2)|S_1|\,u(x^*).$$

При $\varepsilon \to 0$, $x^* \to x_0$ (центру сферы), а т.к. u - непрерывная функция, то $u(x^*) \to u(x_0)$. Таким образом,

$$J \to (n-2)|S_1|\,u(x_0),$$

следовательно,

$$-\int\limits_{\Omega} \frac{\Delta u}{|x-x_0|^{n-2}}\,dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS + (n-2)|S_1|u(x_0).$$

Выразим отсюда $u(x_0)$, а т.к. x_0– произвольная точка из области Ω, то переобозначив $x_0 \overset{def}{=} x$, а $x \overset{def}{=} y$ ($|x-y| = r$), получим:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} \right) dS - \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{n-2}}\Delta u\,dx \right).$$

Если функция u гармоническая, то $\Delta u = 0$, тогда мы получили интегральное представление для гармонических функций:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} \right) dS, \quad n \geqslant 3.$$

Это аналог формулы Коши. Введем понятие фундаментального решения уравнения Лапласа.

Определение 2 *Функция* $v = \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}\dfrac{1}{r^{n-2}}$ *называется фундаментальным решением уравнения Лапласа.*

Тогда интегральное представление гармонической функции можно записать в виде:

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) dS.$$

При $n = 2$ фундаментальным решением уравнения Лапласа будет $v = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$,. для $n \geq 3$ фундаментальным решением уравнения Лапласа будет $v = \dfrac{1}{(n-2)|S_1|}\dfrac{1}{r^{n-2}}$.

19 Основные свойства гармонических функций.

Теорема 1 (о бесконечной дифференцируемости) *Если функция u гармоническая в области Ω, то она является бесконечно-дифференцируемой в этой области.*

▼Если мы отступим от границы, то

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{\partial\Omega'} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r^{n-2}} \right) dS$$

(Ω' можно выбрать сколь угодно близкой к Ω). Правая часть представляет собой интеграл, зависящий от параметра x. Для интегрирования по параметру необходима непрерывность функции и ее производной по аргументам (x, y). r зависит от x, но $x \in \Omega$, а $y \in \partial\Omega$, т.о. знаменатель дроби в ноль не обращается, следовательно, функция является непрерывной.
Рассмотрим $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{r^{n-2}}\right) = \dfrac{P(x,y)}{r^{n-1}}$, где $P(x,y)-$ некоторый полином. Знаменатель дроби в ноль не обращается, т.к. $x \in \Omega$, $y \in \partial\Omega$, значит, производная непрерывна, поэтому можно применить теорему дифференцирования по параметру сколько угодно раз к правой части, откуда следует, что функция $u(x)$ бесконечно дифференцируема.▲

Теорема 2 *Если функция u является гармонической в области Ω и для нее справедливо интегральное представление*

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r^{n-2}} \right) dS,$$

то

$$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

▼Рассмотрим 2-ую формулу Грина при v=1:

$$\int\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Т.к. $v = 1$, то $\Delta v = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0$; т.к. u гармоническая, то $\Delta u = 0$. Откуда получаем, что $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$.▲

Следствие 1 *Рассмотрим внутреннюю задачу Неймана:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

Если функция u гармоническая в области Ω, то $\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi\, dS = 0-$ *необходимое условие разрешимости задачи Неймана.*

Теорема 3 (о среднем) *Пусть функция u гармоническая в области Ω, тогда ее среднее арифметическое по любой сфере, содержащейся в области Ω, будет равно значению функции в центре сферы, т.е. если $S_{x_0}^R$ - сфера с центром в точке x_0 и радиусом R, то*

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|R^{n-1}} \int\limits_{S_{x_0}^R} u(x)\, dS.$$

▼В интегральном представлении сделаем замену $x \to x_0$:

$$u(x_0) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{S_{x_0}^R} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{r^{n-2}} \right) dS.$$

Воспользуемся предыдущей теоремой:

$$\int\limits_{S_{x_0}^R} \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dS = \frac{1}{R^{n-2}} \int\limits_{S_{x_0}^R} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0.$$

Т.к. $\dfrac{\partial}{\partial n} \dfrac{1}{r^{n-2}} = -\dfrac{n-2}{r^{n-1}}$, то на сфере это будет равно

$$u(x_0) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \left(-\frac{n-2}{R^{n-1}} \right) (-1) \int\limits_{S_{x_0}^R} u(x) dS = \frac{1}{|S_1|R^{n-1}} \int\limits_{S_{x_0}^R} u(x)\, dS.$$

▲

Теорема 4 (о среднем для шара) *Значение гармонической функции в центре шара равно среднему арифметическому значению этой функции по шару, т.е. если $T_{x_0}^R$ - шар, то*

$$u(x_0) = \frac{n}{|S_1|R^n} \int\limits_{T_{x_0}^R} u(x)\, dx.$$

▼По предыдущей теореме, для любой сферы радиуса ρ справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_1|\rho^{n-1}} \int\limits_{S^{\rho}_{x_0}} u(x)\, dS.$$

Проинтегрировав левую и правую части по ρ от 0 до R, получим:

$$\int\limits_0^R \rho^{n-1}|S_1|u(x_0)d\rho = \int\limits_0^R \int\limits_{S^R_{x_0}} u(x)\, dSd\rho = \int\limits_{T^R_{x_0}} u(x)\, dx.$$

Откуда, выражая $u(x_0)$, получим:

$$u(x_0) = \frac{n}{|S_1|R^n} \int\limits_{T^R_{x_0}} u(x) dx.$$

▲

Теорема 5 (принцип максимума) *Пусть функция $u(x)$ является гармонической в области Ω и непрерывна в замкнутой области Ω, тогда она принимает максимальное значение на границе области Ω. Более того, если $u(x) \neq const$, то $u(x) < \max\limits_{x\in\partial\Omega} u(x) \quad \forall x \in \Omega$.*

▼Предположим, что u принимает максимум в некоторой внутренней точке области Ω, т.е. $u(x_0) = M$, $x_0 \in \Omega$. Покажем, что из этого следует, что $u = const$. Возьмем другую точку $\overline{x}$ и покажем, что $u(\overline{x}) = M$. Для этого построим шар $T^R_{x_0}$ с центром в точке x_0 и целиком содержащийся в Ω. Для этого шара и точки x_0 применим предыдущую теорему. Получим:

$$u(x_0) = \frac{n}{|S_1|R^n} \int\limits_{T^R_{x_0}} u(x)\, dx.$$

Учитывая, что $\int\limits_{T^R_{x_0}} u(x_0)\, dx = \frac{|S_1|R^n}{n}$, получим:

$$\frac{n}{|S_1|R^n} \int\limits_{T^R_{x_0}} (u(x_0) - u(x))\, dx = 0.$$

По предположению, $u(x_0)$ принимает максимальное значение M, тогда $u(x_0)-u(x) \geqslant 0$. Интеграл от неотрицательной непрерывной функции равен нулю, следовательно, сама функция равна нулю. Получаем, что $u(x) = u(x_0)$ во всем шаре $T^R_{x_0}$, т.е. что в шаре функция постоянная.

Возьмем точку, лежащую на ломаной от x_0 до $\bar{x}$ и такую, что $x \in T^R_{x_0}$. Построим шар с центром в этой точке и радиусом R. Применим те же рассуждения. Получим еще один шар, в котором $u(x) = M$, и т.д. Тогда дойдем до $\bar{x}$ за конечное число шагов (доказывается леммой Цермело). Следовательно, во всей области Ω функция $u(x) = const$, а т.к. u непрерывна, то $u = const$ и на границе, тогда $u = const$ в замкнутой области Ω. Значит, $u(x) = M$, $\forall x \in \Omega$.

Если функция не является $const$, то она не достигает максимального значения внутри области Ω, следовательно, своего максимума она достигает на границе области. ▲

Следствие 2 *Теорема также справедлива, если заменить максимум на минимум, а $u(x)$ на $-u(x)$ и применить все выкладки.*

Из теоремы 5 и следствия к ней следует, что если $u-$ гармоническая, то она принимает максимум и минимум на границе области Ω.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0,$$
$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x).$$

Ее решение $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Докажем, что решение этой задачи единственно. Пусть u_1, u_2- два решения, тогда для их разности $v = u_1 - u_2$

$$\Delta v = 0,$$
$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

(v - гармоническая, как разность гармонических, $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$). К v применим принцип максимума:

$$0 = \min_{x\in\partial\Omega} v(x) \leq v(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} v(x) = 0 \text{следовательно, } v(x) = 0.$$

Значит, $u_1 = u_2$ следовательно, и, следовательно, решение задачи Дирихле единственно.

20 Задача Дирихле для круга.

Рассмотрим задачу Дирихле для круга:

$$\Delta u = 0 \quad (|r| < R), \tag{20.1}$$
$$u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{20.2}$$

Требуется найти гармоническую в круге функцию u, удовлетворяющую граничному условию. Будем искать частные решения в виде $u = X(r)\Phi(\varphi)$. Подставляем u в уравнение и разделяем переменные:

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases} \tag{20.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dX}{dr}) - \lambda X = 0. \tag{20.4}$$

Задача (20.3) представляет собой задачу Штурма-Лиувилля с периодическими граничными условиями, собственными функциями которой являются функции:

$$\Phi_0(\varphi) = 1,$$
$$\Phi_n^{(1)}(\varphi) = \cos n\varphi,$$
$$\Phi_n^{(2)}(\varphi) = \sin n\varphi,$$

а собственными значениями числа

$$\lambda_n = n^2.$$

Уравнение (20.4) является уравнением Эйлера, совокупность частных решений которого имеет вид: $X_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}$. Теперь можно построить набор частных решений уравнения (20.1): $u_n(r,\varphi) = \Phi_n X_n$. Функция u непрерывна в круге, поэтому коэффициенты $D_n = 0$, т.к. соответствующие им слагаемые неограниченно растут при $r \to 0$, поэтому:

$$u(r,\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{(1)}\cos n\varphi + C_n^{(2)}\sin n\varphi)r^n. \tag{20.5}$$

Коэффициенты C_n найдем из граничного условия:

$$f(\varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{(1)}R^n\cos n\varphi + C_n^{(2)}R^n\sin n\varphi).$$

Это выражение представляет собой разложение функции $f(\varphi)$ в тригонометрический ряд, где $C_n^{(i)}R^n$ - коэффициенты Фурье. Откуда

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi,$$

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$C_n^{(2)} = \frac{1}{\pi R^n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

Теперь покажем, что ряд можно просуммировать и записать в более компактном виде. Для этого подставим выражения для коэффициентов C_n в ряд:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,d\psi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi\,d\psi\cos n\varphi + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi\,d\psi\sin n\varphi\right)\frac{r^n}{R^n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)d\psi + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(\psi-\varphi)\frac{r^n}{R^n}\right)f(\psi)\,d\psi.$$

Обозначим $\psi - \varphi = \alpha$, $\dfrac{r}{R} = \varrho$ ($\varrho < 1$, т.к. $|r| < R$) и рассмотрим сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^n\cos n\alpha = Re\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^n e^{in\alpha},$$

которая представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|q| = \varrho e^{i\alpha} < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varrho^n\cos n\alpha = Re\frac{\varrho e^{i\alpha}}{1-\varrho e^{i\alpha}} = Re\frac{\varrho e^{i\alpha}(1-\varrho e^{-i\alpha})}{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2} = \frac{\varrho\cos\alpha-\varrho^2}{1-2\varrho\cos\alpha+\varrho^2}.$$

Следовательно,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\left(1+\frac{2\dfrac{r}{R}\cos(\psi-\varphi)-2\dfrac{r^2}{R^2}}{1-2\dfrac{r}{R}\cos(\psi-\varphi)+\dfrac{r^2}{R^2}}\right)d\psi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\dfrac{r^2}{R^2}}{1-2\dfrac{r}{R}\cos(\psi-\varphi)+\dfrac{r^2}{R^2}}f(\psi)\,d\psi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\psi-\varphi)+r^2}f(\psi)\,d\psi.$$

Итак, окончательно мы получили формулу:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\psi-\varphi)+r^2}f(\psi)\,d\psi, \tag{20.6}$$

которая называется формулой Пуассона.

Эту формулу можно переписать в более компактном виде, если рассмотреть круг радиуса R.

Если $x = (r, \varphi)$ - решение, $y = (R, \psi)$ - точка на окружности, то используя теорему косинусов о длине наибольшей стороны треугольника, формулу можно переписать в виде:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_C \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^2} f(y)\, dl,$$

где dl - длина дуги, C - окружность и $dl = R\, d\psi$.

21 Обоснование формулы Пуассона.

Теорема 1 *Рассмотрим задачу:*

$$\Delta u = 0, \tag{21.1}$$

$$u|_{r=R} = f(\varphi). \tag{21.2}$$

Пусть функция $f(\varphi)$ является непрерывной, тогда формула Пуассона (20.6) дает решение задачи Дирихле для круга.

Другими словами, надо показать:

1. функция $u \in C^2(K)$ дважды дифференцируема в круге K, и $\Delta u = 0$;
2. если доопределить функцию $u|_{r=R} = f(\varphi)$, то $u \in C(\overline{K})$ непрерывна в замкнутом круге, т.е. $\lim\limits_{r \to R} u(r, \varphi) = f(\varphi)$.

▼Рассмотрим функцию, называемую ядром Пуассона

$$\frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2} \tag{21.3}$$

и некоторые ее свойства.
1°. При $|r| < R$ - ядро является бесконечно дифференцируемой функцией.
▼Это вытекает из того, что числитель и знаменатель бесконечно дифференцируемы. Если (R, ψ) находится на окружности радиуса R, а точка (r, φ) внутри круга, то знаменатель внутри круга в ноль не обращается.▲
2°. Ядро - неотрицательная функция.
▼Числитель неотрицателен, а знаменатель положителен (внутри круга) ▲
3°. Ядро представляет собой гармоническую функцию внутри круга.

4°. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi = 1.$

▼Пусть $a \stackrel{def}{=} \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2}$ и $b \stackrel{def}{=} -\frac{2rR}{R^2 - r^2}$, тогда рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{a + b\cos\psi}.$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{z\left(a + b\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)} = \frac{2}{2az + bz^2 + b} = \frac{2}{b(z - z_1)(z - z_2)},$$

где $z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$, если $a > b$, то точка z_1 принадлежит окружности $\{z \in C : |z| = 1\}$, а z_2 лежит вне, тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + b\cos t} = 2\pi \operatorname*{Res}_{z_1} \frac{2}{b(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{4\pi}{b(z_1 - z_2)} = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2 - b^2}},$$

тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{a + b\cos\psi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(R^2 + r^2)^2 - 4r^2R^2}{(R^2 - r^2)^2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

▲

1a. Нужно доказать двукратную дифференцируемость функции внутри круга. Покажем, что она является бесконечно дифференцируемой функцией. Из (20.6) следует, что интеграл зависит от параметра. Подынтегральная функция непрерывна (ядро Пуассона-непрерывно, $f(\psi)$-непрерывна). Функции, полученные дифференцированием по r, φ, непрерывны (после дифференцирования ядро умножается на непрерывную функцию). Т.о., $u(r, \varphi)$ - бесконечно дифференцируема и все производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.

1б. Покажем, что внутри круга $\Delta u = 0$:

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Delta\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2}\right) f(\psi)\,d\psi \overset{3^\circ}{=} 0.$$

Следовательно, u – гармоническая функция.
2. Нужно показать, что

$$\lim_{r\to R} u(r,\varphi) = f(\varphi).$$

Оценим по модулю разность функций u и f:

$$|u(r,\varphi) - f(\varphi)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2} f(\psi)\,d\psi - f(\varphi)\right| \overset{4^\circ}{=}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2} (f(\psi) - f(\varphi))\,d\psi\right| \overset{def}{=} I$$

(РИСУНОК)
Разобьем интеграл I на три части:

$$I \leqslant I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\pi}^{\varphi-\Delta} (\cdot)d\psi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\varphi-\Delta}^{\varphi+\Delta} (\cdot)d\psi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\varphi+\Delta}^{\pi} (\cdot)d\psi\right|$$

и рассмотрим I_2:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\varphi-\Delta}^{\varphi+\Delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2} (f(\psi) - f(\varphi))\,d\psi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-\Delta}^{\varphi+\Delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2} |f(\psi) - f(\varphi)|\,d\psi.$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. По $\dfrac{\varepsilon}{2}$, в силу непрерывности функции f, можно найти такое $\Delta > 0$, что как только $|\psi - \varphi| \leqslant \Delta$, то $|f(\psi) - f(\varphi)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\varphi-\Delta}^{\varphi+\Delta} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2}\,d\psi.$$

Т.к. $R^2 - 2rR\cos(\psi - \varphi) + r^2$ – неотрицательная функция, то пределы интегрирования можно раздвинуть до $[-\pi, \pi]$:

$$I_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi-\varphi) + r^2}\,d\psi \overset{4^\circ}{=} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим I_1:

$$I_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\varphi-\Delta}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\psi-\varphi) + r^2}|f(\psi) - f(\varphi)|\,d\psi.$$

По условию, f непрерывна на окружности (на замкнутом множестве), следовательно, она там ограничена, т.е. $|f(\varphi)| \leqslant M$, тогда $|f(\psi) - f(\varphi)| \leqslant 2M$.

$$I_1 \leqslant \frac{M}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\varphi-\Delta}\frac{R^2 - r^2}{(R-r)^2 + 2rR(1-\cos(\psi-\varphi))}\,d\psi \quad \overset{(R-r)^2>0}{\leqslant} \quad \frac{M}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\varphi-\Delta}\frac{R^2 - r^2}{4rR\sin^2\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)}\,d\psi.$$

Т.к. $(R-r)^2 = (R-r)(R+r) \leqslant 2R(R-r)$, $\psi - \varphi \geqslant \Delta$, а также, в силу того, что $r \to R$, не умаляя общности можем считать, что $r > \dfrac{R}{2}$. Тогда

$$I_1 \leqslant \frac{M}{\pi}\frac{2R(R-r)}{2R^2 sin^2\frac{\Delta}{2}}(\varphi - \Delta + \pi) = \frac{M}{\pi}\frac{R-r}{R\sin^2\dfrac{\Delta}{2}}(\pi + \varphi - \Delta).$$

Аналогично,

$$I_3 \leqslant \frac{M}{\pi}\frac{2R(R-r)}{2R^2 sin^2\frac{\Delta}{2}}(\pi - \varphi - \Delta) = \frac{M}{\pi}\frac{R-r}{R\sin^2\dfrac{\Delta}{2}}(\pi - \varphi - \Delta),$$

откуда,

$$I_1 + I_3 \leqslant 2M\frac{R-r}{Rsin^2\frac{\Delta}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

а это возможно, если

$$R - r \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{Rsin^2\frac{\Delta}{2}}{2M} = \delta,$$

т.о. $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}\dfrac{Rsin^2\frac{\Delta}{2}}{2M} : |r - R| < \delta, I \leqslant \varepsilon$, т.е

$$\lim_{r\to R} u(r,\varphi) = f(\varphi).$$

▲

22 Решение задачи Дирихле для шара.

Рассмотрим задачу Дирихле для шара:

$$\Delta u = 0 \quad (|x| < R), \tag{22.1}$$

$$u|_{S_R} = \varphi(x). \tag{22.2}$$

Решение ищется в классе функций $u \in C^2(T_R) \bigcap C(\overline{T}_R)$. Предположим, что $u \in C^2(\overline{T}_R)$ и при этих условиях получим формулу, дающую решение задачи (22.1)-(22.2). Аналогично п.21 проводится доказательство для шара.
Рассмотрим сферу с центром в начале координат:

Если точка x лежит внутри сферы, то точка x' является симметричной относительно сферы, если она лежит на луче Ox и $|Ox| \cdot |Ox'| = R^2$, где R - радиус сферы. Найдем координаты точки x', симметричной $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно сферы. Координаты точек должны быть пропорциональны, т.к. точки лежат на одном луче:

$$x' = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

следовательно, $|x| \cdot |x'| = |x| \cdot \alpha |x| = R^2$, откуда

$$x' = \left(\frac{R^2}{|x|^2} x_1, \frac{R^2}{|x|^2} x_2, \ldots, \frac{R^2}{|x|^2} x_n \right).$$

Т.к. функция принадлежит $C^2(\overline{T}_R)$, то можно воспользоваться интегральным представлением для гармонических функций:

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{S_R} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial}{\partial n} u - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r^{n-2}} \right) dS, \tag{22.3}$$

где r – расстояние от переменной точки x до границы (где мы ищем решение), т.е. $r = |x - y|$. Введем функцию $\dfrac{1}{(r')^{n-2}}$, где r'– расстояние между точками y и x', а x' - симметричная для x точка относительно сферы S_R. $r' = |x' - y|$, x' находится вне сферы, следовательно, $\dfrac{1}{r'}$ является гармонической внутри шара. Запишем 2-ую формулу Грина для u и $v = \dfrac{1}{(r')^{n-2}}$:

$$0 = \frac{1}{(n-2)|S_1|} \int\limits_{S_R} \left(\frac{1}{(r')^{n-2}} \frac{\partial}{\partial n} u - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{(r')^{n-2}} \right) dS. \tag{22.4}$$

Покажем, что на сфере S_R r и r' отличаются на постоянный множитель.
КАРТИНКА
▼Покажем, что $\triangle Oyx$ и $\triangle Oyx'$ подобны.
$\angle O$ - общий, $|Ox| \cdot |Ox'| = R^2$, где $R = Oy$, тогда $\dfrac{|Ox|}{R} = \dfrac{R}{|Ox'|}$, поэтому стороны, заключающие общий угол, пропорциональны, следовательно, треугольники подобны по 1-му признаку подобия, откуда $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{R}{|x|}$. Это отношение не зависит от y, следовательно, $r' = \dfrac{R}{|x|}r$. ▲
Умножим (22.4) на $\dfrac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}$:

$$0 = \frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_{S_R}\left(\frac{1}{(r)^{n-2}}\frac{\partial}{\partial n}u - \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{(r')^{n-2}}\right)dS$$

и вычтем из (22.3):

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)|S_1|}\int\limits_{S_R}u\left(\frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{(r')^{n-2}} - \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}}\right)dS. \qquad (22.5)$$

Преобразуем каждое из слагаемых. Известно, что КАРТИНКА

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^{n}\cos(n, y_i)\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{R}\frac{\partial}{\partial y_i},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial y_i}r = \frac{\partial}{\partial y_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = \frac{y_i - x_i}{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{r^{n-2}} = -\frac{n-2}{r^{n-1}}\frac{y_i - x_i}{r}.$$

Откуда,

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r^{n-2}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{R}\frac{(n-2)(y_i - x_i)}{r^n}. \qquad (22.6)$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{(r')^{n-2}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{R}\frac{(n-2)(y_i - x'_i)}{(r')^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{(r')^{n-2}} = -\frac{|x|^n}{R^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(n-2)(y_i - \frac{R^2}{|x|^2}x_i)}{Rr^n}.$$

Следовательно,

$$\frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{(r')^{n-2}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i(n-2)(\frac{|x|^2}{R^2}y_i - x_i)}{Rr^n}. \tag{22.7}$$

Учитывая, что $\sum_i y_i^2 = R^2$, подставляя (22.6) и (22.7) в (22.5) и используя граничное условие, получим:

$$u(x) = \frac{1}{|S_1|}\int\limits_{S_R}\frac{R^2-|x|^2}{Rr^n}\varphi(y)\,dS_y. \tag{22.8}$$

Мы получили формулу Пуассона, дающую решение задачи Дирихле для шара. Обоснование формулы Пуассона самостоятельно.

23 Теорема об устранимой особенности. Теорема Лиувилля.

Если $n \geqslant 3$, то фундаментальным решением уравнения Лапласа является функция $\dfrac{1}{|S_1|(n-2)}\dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}$, а если $n=2$, то фундаментальным решением будет функция $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-y|}$.

Определение 1 *Точка y называется устранимой особенностью функции $u(x)$, гармонической в проколотой области $\Omega/\{y\}$, если при $x \to y$ функция $u(x)$ растет медленнее, чем фундаментальное решение уравнения Лапласа (т.е. если составить отношение $\dfrac{u(x)}{v(x,y)}$, то $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{u(x)}{v(x,y)} = 0$).*

Если точка z_0 - устранимая особенность функции $f(z)$, то в окрестности этой точки функция ограничена. Доопределим $f(z)$ в точке z_0 и получим, что $f(z)$ будет аналитической во всей области Ω.

Теорема 1 *Пусть функция $u(x)$ гармоническая в области $\Omega/\{y\}$ и точка y - устранимая особенность функции $u(x)$, тогда существует $\lim\limits_{x\to y}u(x) = A < \infty$. Если доопределить $u(y) = A$, то функция и будет гармонической во всей области Ω.*

▼??? картинка.
Рассмотрим произвольный шар T_R, содержащийся в Ω, с центром в точке y. В Ω задана функция u. Построим вспомогательную функцию $v(x)$ как решение задачи Дирихле для шара:

$$\Delta v = 0,$$
$$v|_{S_R} = u|_{S_R}.$$

Такая функция v существует и единственна в силу п. 22. Т.к. функция v гармоническая и непрерывная, то если мы покажем, что $u = v$, $\forall x \in T_R/\{y\}$, то $\lim_{x\to y} u(x) = v(y) < \infty$ и мы докажем, что $u = v$ во всем шаре.

Введем функцию $w(x) \overset{def}{=} u(x) - v(x)$, определенную в шаре без точки y, т.е. $\forall x \in T_R/\{y\}$.

План: Если мы докажем, что в $T_R/\{y\}$ $w(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to y} w(x) = 0$ и, следовательно, следовательно, $\lim_{x\to y} u(x) = \lim_{x\to y} v(x)$, а этот предел существует и конечен. Поэтому если $u(y)$ определена как $v(y)$, то функция будет гармонической в Ω.

Итак, обозначим

$$Z^{\pm}(x) \overset{def}{=} \varepsilon U(x,y) \pm w(x),\ \varepsilon > 0,$$

где $U(x,y)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа, поэтому оно удовлетворяет уравнению Лапласа везде, кроме точки $x = y$.

Функция $Z^{\pm}$ - гармоническая во всем шаре $T_R/\{y\}$. Возьмем любую точку x_0 и рассмотрим сферу S_ε достаточно малого радиуса с центром в точке y и такую, что точка x_0 лежит вне сферы. В шаре T_R/T_ε все функции будут гармоническими, следовательно, справедлив принцип максимума, т.е. максимум и минимум функции $Z^{\pm}$ достигается на границе области. Граница состоит из сфер S_R и S_ε. На сфере S_R функция w принимает значение 0, т.к. $v|_{S_R} = u|_{S_R}$. Тогда знаки функций $Z^{\pm}$ и $U(x,y)$ совпадают, а т.к. фундаментальное решение неотрицательно, то $Z^{\pm}|_{S_R} \geqslant 0$. На сфере S_ε функция $u(x)$ растет медленнее, чем фундаментальное решение, а функция v гармоническая. Следовательно, функция $w = u - v$ растет медленнее, чем $U(x,y)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ можно указать сферу S_ε такую, что $Z^{\pm}|_{S_\varepsilon} \geqslant 0$. Тогда минимальное значение функции в шаровом слое будет неотрицательным.

Используя принцип максимума, получим, что $\forall\, x_0 \in T_R/T_\varepsilon$

$$\varepsilon U(x_0,y) \pm w(x_0) \geqslant 0 \quad \text{, следовательно,} \quad |w(x_0)| \leqslant \varepsilon U(x_0,y).$$

Число ε можно сделать сколь угодно малым, следовательно, $w(x_0) = 0$. А т.к. точка x_0 произвольная, то $w(x) = u(x) - v(x) = 0$, откуда следует, что $\lim_{x\to y} u(x) = v(y) < \infty$. Доопределив $u(y)$ как $v(y)$, получим, что u и v полностью совпадают в T_R, тогда u гармоническая в T_R, а, следовательно, и во всей области Ω.▲

Определение 2 *Функция $u(x)$ полуограничена сверху в области Ω, если $\forall\, x \in \Omega$ выполняется неравенство $u(x) < M$.*

Определение 3 *Функция $u(x)$ полуограничена снизу в области Ω, если $\forall\, x \in \Omega$ выполняется неравенство $u(x) > M_1$.*

Определение 4 *Если функция полуограничена снизу и сверху, тогда она ограничена.*

Теорема 2 (Лиувилля) *Пусть функция $u(x)$ гармоническая в $\mathbb{R}^n$ и полуограничена снизу (сверху). Тогда $u(x) = const$.*

▼Не ограничивая общности, можно рассмотреть функцию, полуограниченную снизу, т.е. $u(x) > M$, т.к. $-u(x)$ будет полуограниченной сверху. Также можно рассматривать случай $u(x) > 0$, т.к. в противном случае ($u(x) < 0$) вводится функция $v(x) = M - u(x) > 0$, гармоническая и полуограниченная снизу.
Итак, построим шар T_0^R радиуса R с центром в начале координат и функцию w, являющуюся решением следующей задачи:

$$\Delta w = 0,$$
$$w|_{S_R} = u|_{S_R}.$$

Покажем, что внутри шара T_0^R функция w совпадает с u. Для этого рассмотрим функцию $z = w - u$. Она является решением задачи

$$\Delta z = 0,$$
$$z|_{S_R} = 0.$$

Следовательно, по принципу максимума $z = 0$.

Запишем формулу Пуассона:

$$u(x) = w(x) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - |x|^2}{Rr^n} u(y)\, dS,\ x \in int\, T_0^R.$$

Эта формула справедлива для всех внутренних точек, в том числе и для точки x_1:

$$u(x_1) = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{S_R} \frac{R^2 - |x_1|^2}{R|x_1 - y|^n} u(y)\, dS.$$

Оценим подынтегральную функцию сверху и снизу:

$$|x_1 - y||_{y \in S_R} \leqslant |x_1| + |y||_{y \in S_R} = |x_1| + R,$$
$$|x_1 - y||_{y \in S_R} \geqslant \Big| |y||_{y \in S_R} - |x_1| \Big| = R - |x_1|.$$

Тогда

$$\frac{R^2 - |x_1|^2}{R(R + |x_1|)^n |S_1|} \int\limits_{S_R} u(y)\, dS \leqslant u(x_1) \leqslant \frac{R^2 - |x_1|^2}{R(R - |x_1|)^n |S_1|} \int\limits_{S_R} u(y)\, dS.$$

Применим теорему о среднем для сферы:

$$u(0) = \frac{1}{|S_1| R^{n-1}} \int\limits_{S_R} u(y)\, dS,$$

следовательно,

$$\frac{(R^2-|x_1|^2)R^{n-1}}{R(R+|x_1|)^n}u(0) \leqslant u(x_1) \leqslant \frac{(R^2-|x_1|^2)R^{n-1}}{R(R-|x_1|)^n}u(0).$$

Число R может быть сколь угодно большим. Рассмотрим, к чему стремятся левая и правая части неравенства при $R \longrightarrow \infty$. В правой и левой части присутствуют дробно-рациональные функции, степень числителя и знаменателя которых равны. Поэтому переходя к пределу получим:

$$u(0) \leqslant u(x_1) \leqslant u(0)$$

А т.к. x_1- произвольная точка, то $u(x) = u(0) = const$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. ▲

24 Последовательности гармонических функций.

Обозначим через

$$D^\alpha U = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_1}\partial x^{\alpha_2}\ldots\partial x^{\alpha_n}}u,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ - мультииндекс. Величина $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ называется порядком мультииндекса.

Лемма 1 (Оценка для производных гармонической функции.) *Пусть $u(x)-$ гармоническая в области Ω функция и $|u(x)| < M$, $\forall x \in \Omega$. Обозначим через n размерность пространства, через δ - расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы области Ω, $k = |\alpha|$ - порядок производной. Тогда для производных гармонической функции $u(x)$ справедлива оценка:*

$$|D^\alpha u| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta}\right)^k k^k. \tag{24.1}$$

▼Доказательство проведем методом математической индукции.
1. Докажем неравенство для производных 1-го порядка. Построим шар $T_x^{\delta'} \subset \Omega$ с центром в точке x и радиусом $\delta' < \delta$.

Оценим $Du = \dfrac{\partial}{\partial x_i}u$. Так как для гармонической функции $u(x)$:

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}u\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u = 0,$$

то производная гармонической функции снова является гармонической функцией. Тогда по теореме о среднем для шара имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u = \frac{n}{|S_1|(\delta')^n}\int\limits_{T_x^{\delta'}}\frac{\partial}{\partial y_i}u\,dy =$$

по формуле Остроградского-Гаусса

$$= \frac{n}{|S_1|(\delta')^n}\int\limits_{S_x^{\delta'}} u\cos(n, y_i)\,dS.$$

Оценим

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u\right| \leqslant \frac{n}{|S_1|(\delta')^n}M|S_1|(\delta')^{n-1} = \frac{Mn}{\delta'}.$$

Переходя к пределу при $\delta' \to \delta$, получим:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u\right| \leqslant \frac{Mn}{\delta},$$

т. е. для $k = 1$ неравенство справедливо.
2. Пусть неравенство (24.1) выполняется для всех производных порядка $|\beta| = k-1$, т. е.

$$|D^\beta u| \leqslant M\left(\frac{n}{\delta}\right)^{k-1}(k-1)^{k-1}. \tag{24.2}$$

3. Рассмотрим шар $T_x^{\delta'/k}$ с центром в точке x и радиусом $\dfrac{\delta'}{k}$ и учтем, что $D^\alpha u = \dfrac{\partial}{\partial x_i}D^\beta u$.

Оценим $|D^\beta u|$ для всех $x \in T_x^{\delta'/k}$. Для всех точек шара $T_x^{\delta'/k}$ расстояние до границы шара $T_x^{\delta'}$, для которого справедлива оценка (24.2), не меньше чем $\delta' - \dfrac{\delta'}{k} = \delta'\dfrac{k-1}{k}$. Следовательно,

$$|D^\beta u| \leqslant M\left(\frac{nk}{\delta'(k-1)}\right)^{k-1}(k-1)^{k-1} = M\left(\frac{nk}{\delta'}\right)^{k-1},\ \forall\, x \in T_x^{\delta'/k}.$$

Рассмотрим

$$|D^{\alpha}u| = \left|\frac{\partial}{\partial x_i} D^{\beta}u\right| \leqslant M \left(\frac{nk}{\delta'}\right)^{k-1} \frac{nk}{\delta'} = M \left(\frac{n}{\delta'}\right)^k k^k.$$

Переходя к пределу при $\delta' \to \delta$, получим:

$$|D^{\alpha}u| \leqslant M \left(\frac{n}{\delta}\right)^k k^k.$$

▲

Определение 1 Ω_1 - *строго внутренняя подобласть* Ω, *если она сама вместе с замыканием принадлежит* Ω. *Обозначается:* $\Omega_1 \Subset \Omega$.

Теорема 1 (Принцип компактности для гармонической функции) *Пусть* $\{u_k(x)\}$– *равномерно ограниченная последовательность гармонических функций в области* Ω, *т.е.* $|u_k(x)| < M$, $\forall x \in \Omega\,, \forall k$, *где* $M = const$. *Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в любой строго внутренней подобласти области* Ω.

▼

1. Рассмотрим бесконечную последовательность подобластей Ω_i такую, что $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega_3 \Subset \ldots$ и $\cup_{i=1}^{\infty}\Omega_i = \Omega$, или $\lim\limits_{i\to\infty} \Omega_i = \Omega$, т.е. $\forall\, \widetilde{\Omega} \Subset \Omega \;\; \exists N : \; \forall\, n > N \;\; \widetilde{\Omega} \Subset \Omega_n$.

Покажем, что из последовательности $u_k(x)$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся в области Ω_1. Согласно теореме Арцела - Асколи достаточно показать, что последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Равномерная ограниченность последовательности выполняется по условию теоремы. Докажем равностепенную непрерывность, т.е. что $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$, такое, что если $|x - x'| < \delta$, то $|u_k(x) - u_k(x')| < \varepsilon$, $\forall\, k$. По формуле конечных приращений Лагранжа, получим:

$$u_k(x') - u_k(x'') = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x'' + \theta(x' - x''))(x'_i - x''_i) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Каждая из функций $u_k(x)$ ограничена в области Ω, а, следовательно, и в области $\Omega_1 \Subset \Omega$, некоторой постоянной M. Обозначим расстояние от границы области Ω_1 до границы области Ω через $\delta_0 > 0$. Тогда, на основании доказанной леммы, для всех функций $u_n(x), \forall x \in \Omega_1$ и для любого i справедлива оценка:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x)\right| \leqslant \frac{Mn}{\delta_0}.$$

Используя эту оценку, получим :

$$|u_k(x') - u_k(x'')| \leqslant \frac{Mn}{\delta_0} \sum_{i=1}^{n} |x'_i - x''_i| \leqslant$$

по неравенству Коши-Буняковского,

$$\leqslant \frac{Mn}{\delta_0} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x''_i)^2\right)} = \frac{Mn^{3/2}}{\delta_0} |x' - x''| \leqslant \varepsilon,\ \forall x'', x' \in \Omega_1.$$

Т.о. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \dfrac{\varepsilon \delta_0}{Mn^{3/2}}$: множество функций $u_k(x)$ равностепенно непрерывны $\forall x'', x' \in \Omega_1$. Таким образом, для последовательности $u_k(x)$ в области Ω_1 справедливы условия теоремы Арцела - Асколи и из нее можно выделить равномерно сходящуюся в области Ω_1 подпоследовательность $\{u^{(1)}_{k_l}(x)\}$, которую в дальнейшем будем обозначать $\{u^{(1)}_k(x)\}$.

2. Взяв в качестве новой последовательности подпоследовательность $\{u^{(1)}_k(x)\}$ и повторив для нее только что проведенные рассуждения, мы сможем построить подпоследовательность $\{u^{(2)}_k(x)\}$, равномерно сходящуюся в области Ω_2. Продолжив рассуждения, построим подпоследовательности $\{u^{(m)}_k(x)\}$ со следующими свойствами:

i. подпоследовательность $\{u^{(m)}_k(x)\}$ является подпоследовательностью последовательностей $\{u^{(r)}_k(x)\}$ при $m > r$;

ii. подпоследовательность $\{u^{(m)}_k(x)\}$ равномерно сходится в области Ω_m, а также в любой из областей Ω_r при $r < m$.

3. Построим диагональную подпоследовательность $\{u^{(k)}_k(x)\}$ и покажем, что она сходится в любой строго внутренней подобласти области Ω. Пусть $\widetilde{\Omega}-$ произвольная строго внутренняя подобласть области Ω. В силу построения подобластей Ω_m, найдется такое m, что $\widetilde{\Omega} \Subset \Omega_m$. Начиная с номера m члены диагональной подпоследовательности являются подпоследовательностью последовательности функций, равномерно сходящихся в области Ω_m. Конечное же число членов не влияет на сходимость подпоследовательности. Следовательно, диагональная последовательность сходится равномерно в Ω_m. Значит, она сходится равномерно и в любой ее подобласти, в частности, в $\widetilde{\Omega}$. ▲

Теорема 2 (Харнака) *Пусть $\{u_k(x)\}$- последовательность гармонических функций, равномерно сходящаяся в любой строго внутренней подобласти области Ω к функции $u(x)$. Тогда*

1. *предельная функция $u(x)$ является гармонической в области Ω;*

2. *последовательности производных $D^\alpha u_k(x)$ равномерно сходятся к $D^\alpha u(x)$ в любой строго внутренней подобласти области Ω.*

▼

2. Пусть Ω_1- любая строго внутренняя подобласть области Ω. Рассмотрим область Ω_2, такую, что $\Omega_1 \Subset \Omega_2$ и $\Omega_2 \Subset \Omega$. Докажем теорему для области Ω_1.
Последовательности $u_k(x)$ равномерно сходятся и в Ω_1, и в Ω_2. Покажем, что последовательность $\{D^\alpha u_k\}$ является фундаментальной в $C(\Omega_1)$, т.е. $\|D^\alpha u_k - D^\alpha u_l\| \xrightarrow[k,l\to\infty]{C(\Omega_1)} 0$. Рассмотрим $D^\alpha u_k - D^\alpha u_l = D^\alpha(u_k - u_l)$. Так как u_k и u_l - гармонические функции, то гармонической будет и функция $(u_k - u_l)$. Обозначим через

$$M = \max_{x\in\Omega_2} |u_k(x) - u_l(x)| = ||u_k - u_l||_{C(\Omega_2)}.$$

Тогда по лемме (1), для любого $x \in \Omega_1$:

$$|D^\alpha(u_k - u_l)| \leqslant M \left(\frac{n}{\delta_0}\right)^k k^k,$$

где $\delta_0 = \min\limits_{x'\in\Omega_1, x''\in\Omega_2} |x' - x''| > 0$. Или

$$||D^\alpha u_k - D^\alpha u_l||_{C(\Omega_1)} \leqslant \left(\frac{n}{\delta_0}\right)^k k^k ||u_k - u_l||_{C(\Omega_2)} = M_1 ||u_k - u_l||_{C(\Omega_2)}.$$

Согласно условию теоремы, последовательность сходится равномерно в любой подобласти в том числе и в Ω_2, следовательно, при $k, l \to \infty$, $||u_k - u_l||_{C(\Omega_2)} \to 0$. Значит стремится к нулю и левая часть. Следовательно, последовательность $\{D^\alpha u_k\}$ - фундаментальная в области Ω_1. А так как пространство $C(\Omega_1)$ полное, то последовательность $\{D^\alpha u_k\}$ равномерно сходится к некоторой функции $V(x)$ при $k \to \infty$. Значит, функция u имеет производную порядка α, причем $D^\alpha u = V(x)$.
1. Гармоничность предельной функции $u(x)$ следует из того, что

$$\Delta u = \Delta \lim_{k\to\infty} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\lim_{k\to\infty} u_k) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{k\to\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_k = \lim_{k\to\infty} \Delta u_k = 0.$$

▲

Следствие 1 *Совокупность гармонических функций образует подпространство пространства C.*

25 Аналитичность гармонических функций.

Определение 1 *Функция $f(x)$ называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки она разлагается в сходящийся степенной ряд:*

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p (x - x_0)^p, \tag{25.1}$$

где $C_p = \dfrac{f^p(x_0)}{p!}$ - коэффициенты ряда Тейлора.

Если функция $f(x)$ является функцией n переменных, то она называется аналитической в точке $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, x_{0,3}, \ldots, x_{0,n})$, если в некоторой окрестности этой точки она разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(x_1 - x_{0,1})^{\alpha_1}(x_2 - x_{0,2})^{\alpha_2} \ldots (x_n - x_{0,n})^{\alpha_n}. \tag{25.2}$$

Разложение (25.2) мы будем сокращенно записывать в виде:

$$f(x) = \sum_{\alpha} C_\alpha (x - x_0)^\alpha,$$

где

$$C_\alpha = \left.\frac{D^\alpha U}{\alpha!}\right|_{x=x_0},$$
$$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!\,.$$

Как известно, аналитическая в области Ω функция является в ней бесконечно дифференцируемой. Обратное же, вообще говоря, неверно. Отметим также, что если аналитические функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают на некотором множестве, имеющем предельную точку, то они равны.

Получим два неравенства, которые понадобятся нам в дальнейшем. Рассмотрим

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p = \sum_{\alpha} C_\alpha x^\alpha,$$

где

$$C_\alpha = \left.\frac{D^\alpha (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p}{\alpha!}\right|_{x=0} = \frac{p!}{\alpha!},$$

- $p < |\alpha|$, то $C_\alpha = 0$,
- $p > |\alpha|$, то $C_\alpha = 0$ (т.к. $x = 0$),
- $p = |\alpha|$, то $C_\alpha = \dfrac{p!}{\alpha!}$.

Таким образом,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Положим $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$, тогда

$$n^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!}.$$

Поскольку каждое слагаемое суммы не превосходит самой суммы, то

$$\frac{p!}{\alpha!} \leqslant n^p,$$
$$\frac{1}{\alpha!} \leqslant \frac{n^p}{p!}.$$

Каждое слагаемое суммы больше или равно единицы, так как и в числителе, и в знаменателе стоит произведение p сомножителей, но каждый сомножитель в числителе больше или равен соответствующего сомножителя в знаменателе:

$$\frac{p!}{\alpha!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} \geqslant 1,$$

поэтому заменяя каждое слагаемое на единицу, получим:

$$\sum_{|\alpha|=p} 1 \leqslant n^p. \tag{25.3}$$

Теорема 1 *Если функция гармоническая в области Ω, то она является в этой области аналитической функцией.*

▼Пусть дана гармоническая в Ω функция u. Покажем, что u является аналитической в некоторой окрестности точки x.
1. Составим ряд Тейлора для функции $u(x)$

$$\sum_{\alpha} C_\alpha (x - x_0)^\alpha = \sum_{\alpha} \frac{D^\alpha u|_{x=x_0}}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

и покажем, что он сходится. Пусть x_0- произвольная точка области Ω. Построим два шара $T^\delta_{x_0}$ и $T^{\delta/2}_{x_0}$ с центрами в точке x_0 и радиусами δ и $\delta/2$, причем, оба эти шара целиком содержатся в области Ω.

Оценим все производные функции u в шаре $T^{\delta/2}_{x_0}$. Т.к. функция u непрерывна в замкнутой области $T^\delta_{x_0}$, то она там ограничена, т. е. $|u(x)| \leqslant M, \quad \forall\, x \in T^\delta_{x_0}$ и, в частности, $\forall\, x \in T^{\delta/2}_{x_0}$. Рассмотрим $D^\alpha u$ в шаре $T^{\delta/2}_{x_0}$ и воспользуемся оценкой для производных гармонической функции :

$$|D^\alpha u| \leqslant M \left(\frac{n}{\delta/2}\right)^k k^k,$$

где $k = |\alpha|-$ порядок производной. Тогда для коэффициентов Тейлора справедлива следующая оценка:

$$|C_\alpha| = \left.\frac{D^\alpha U}{\alpha!}\right|_{x=x_0} \leqslant M\left(\frac{2n}{\delta}\right)^k \frac{k^k}{\alpha!} \leqslant M\left(\frac{2n}{\delta}\right)^k k^k \frac{n^k}{k!} = M\left(\frac{2n^2}{\delta}\right)^k \frac{k^k}{k!}.$$

Используя формулу Стирлинга

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+1/2}e^{-k}\sqrt{2\pi}}{k!} = 1,$$

имеем:

$$\frac{k^{k+1/2}e^{-k}\sqrt{2\pi}}{k!} \leqslant B.$$

Откуда,

$$k^k \leqslant \frac{B}{\sqrt{2\pi k}} k! e^k \leqslant \frac{B}{\sqrt{2\pi}} k! e^k = B_1 k! e^k.$$

Следовательно,

$$|C_\alpha| \leqslant M_1 \left(\frac{2n^2 e}{\delta}\right)^k.$$

Рассмотрим теперь ряд Тейлора:

$$\sum_\alpha C_\alpha (x-x_0)^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha (x-x_0)^\alpha.$$

Найдем окрестность точки x_0 - шар $T^\rho_{x_0}$, – в которой ряд сходится. Для этого шара Пусть $|x - x_0| \leqslant \rho$, следовательно, $|x_i - x_{0,i}| \leqslant \rho$. Тогда

$$|x-x_0|^\alpha = |x_1 - x_{1,0}|^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot |x_n - x_{n,0}|^{\alpha_n} \leqslant \rho^k.$$

Т.о. вопрос о сходимости сводится к исследованию ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_1 \left(\frac{2n^2 e}{\delta}\right)^k \rho^k n^k = \sum_{k=1}^{\infty} M_1 \left(\frac{2n^3 e\rho}{\delta}\right)^k,$$

который представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии, которая сходится тогда и только тогда, когда ее знаменатель меньше единицы, т.е. когда

$$\rho < \frac{\delta}{2n^3 e}.$$

Таким образом, мы показали, что если $|x - x_0| < \dfrac{\delta}{2n^3 e} < \dfrac{\delta}{2}$, то ряд Тейлора для гармонической функции $u(x)$ сходится.
2. Осталось показать, что ряд сходится к $u(x)$. Из курса математического анализа известно, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N} C_k (x - x_0)^k \right| \leqslant \left| \frac{f^{N+1}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1} \right|, 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Воспользуемся этим неравенством для n-мерного случая для функции $u(x)$:

$$\left| u(x) - \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|=k} C_\alpha (x - x_0)^\alpha \right| \leqslant \left| \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{D^\alpha u\big|_{x'=x_0+\theta(x-x_0)}}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \left(\frac{2n^3 e\rho}{\delta} \right)^{N+1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

▲

Замечание 1 *Если размерность пространства $n = 2$, то если $f(z)-$ функция комплексного переменного $z = x + iy$, т.е. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)-$ аналитическая, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)-$ гармонические. И, наоборот, если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)-$ гармонические, то по ним можно восстановить аналитическую функцию $f(z)$.*

Во всех теоремах этого раздела предполагалось, что область, где рассматриваются функции ограничена.

26 Гармонические функции в неограниченных областях

Ранее предполагалось, что область Ω в наших рассмотрениях ограничена. В этом пункте мы рассмотрим случай неограниченной области Ω.

Определение 1 *Преобразование $x' = \dfrac{x}{|x|^2}$ называется преобразованием инверсии.*

Легко проверить, что обратное преобразование инверсии к преобразованию инверсии снова является преобразованием инверсии.
Пусть Ω - неограниченная область, дополнение к которой имеет хотя бы одну внутреннюю точку. Поместим эту внутреннюю точку в начало координат. Образ Ω при преобразовании инверсии обозначим как Ω'. Пусть Γ - граница области Ω, а Γ' - граница области Ω'. Возможны два случая: Γ является неограниченным множеством или $\Gamma-$ ограниченное множество. В первом случае, когда Γ неограничена, $x' = 0$ будет граничной точкой множества Ω', т.е. в любой окрестности точки будут как точки из Ω', так и не принадлежащие ей.

В том случае, когда граница $\Gamma-$ ограниченное множество, $x' = 0$ будет изолированной точкой Ω', т.е. будет существовать проколотая окрестность точки x', целиком принадлежащая Ω'. Будем рассматривать только второй случай, когда граница $\Gamma-$ ограниченное множество.

Определение 2 *Пусть дана функция $u(x)$, определенная в неограниченной области Ω. Поставим ей в соответствие функцию $u'(x')$:*

$$u'(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}} u\left(\frac{x'}{|x'|^2}\right),$$

определенную в Ω'. Преобразование $u'(x')$ называется преобразованием Кельвина функции $u(x)$.

Легко проверить, что обратное преобразование к преобразованию Кельвина также является преобразованием Кельвина. Важность понятия "преобразование Кельвина"связана со следующей теоремой.

Теорема 1 *Пусть $u(x)$ - гармоническая в области Ω. Тогда ее преобразование Кельвина $u'(x') = \dfrac{1}{|x'|^{n-2}} u\left(\dfrac{x'}{|x'|^2}\right)$ будет являться гармонической функцией в области Ω', т.е. $\Delta u'(x') = 0$.*

▼Доказательство может быть проведено непосредственной проверкой того, что $\Delta u'(x') = 0$ в Ω' и не представляет теоретического интереса т.к. носит чисто технический характер. Поэтому мы его опустим. ▲
Для широкого класса функций изучение гармонических функций в неограниченных областях можно свести к изучению гармонических функций в ограниченных областях.

Определение 3 *Пусть размерность пространства $n \geqslant 3$, тогда функция $u(x)$ называется регулярной на бесконечности если $u(x) = o(1)$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$. Если $n = 2$, то $u(x) = o(\ln|x|)$, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{u(x)}{\ln|x|} = 0$.*

Пусть, как мы условились, область $\Omega-$ неограниченная, а ее граница Γ - ограниченное множество. Тогда $\Omega'-$ ограниченное множество, точка $x' = 0$ будет изолированной точкой и, по теореме 1, $\Delta u'(x') = 0$. Пусть $u(x)$ будет регулярна на бесконечности и гармонической в Ω. Выясним как будет себя вести функция $u'(x')$ при $x' \to 0$. Покажем, что для $u'(x')$ точка $x' = 0$ является устранимой особенностью. Для этого нужно показать, что

$$u'(x') = \begin{cases} o(\dfrac{1}{|x'|^{n-2}}), & n \geqslant 3, \\ o(\ln|x'|) & n = 2, \end{cases}$$

т.е. что $u'(x')$ растет медленнее, чем фундаментальное решение уравнения Лапласа.

▼Действительно, если $n \geqslant 3$, то $u'(x') = \dfrac{1}{|x'|^{n-2}} u\left(\dfrac{x'}{|x'|^2}\right)$. Но $u\left(\dfrac{x'}{|x'|^2}\right) = o(1)$, следовательно, $u'(x') = o\left(\dfrac{1}{|x'|^{n-2}}\right)$.

В том случае, когда $n = 2$, $u'(x') = u\left(\dfrac{x'}{|x'|^2}\right)$ и из определения функции, регулярной на бесконечности, следует, что $u'(x') = o(\ln(|x'|))$.

Таким образом, $x' = 0$ есть устранимая особенность. Поэтому, по теореме об устранимой особенности, существует $\lim\limits_{x'\to 0} u'(x') = A \neq \infty$ и если доопределить $u'(x')$ в нуле предельным значением $u'(0) = A$, то $\Delta u'(x') = 0$, $\forall x' \in \Omega'$. Таким образом, доопределенная функция u' будет гармонической в области Ω'.

Замечание 1 Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \, (x \notin \overline{\Omega}),$$
$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x).$$

Потребуем, чтобы функция $u(x)$ была регулярной на бесконечности. Применив преобразование Кельвина к $u(x)$, получим следующую задачу для $\widetilde{u}(x')$:

$$\Delta \widetilde{u} = 0 \, (x \in \Omega'),$$
$$\widetilde{u}|_{\partial\Omega} = \varphi_1(x').$$

Но это внутренняя задача Дирихле для Ω'. Решая ее, находим $\widetilde{u}(x')$. Применяя обратное преобразование, которое, как мы знаем, является преобразованием Кельвина, находим $u(x)$. Решение внутренней задачи единственно, следовательно, единственным будет и решение внешней задачи.

Получим оценку функции u и ее производных на бесконечности. Пусть $\Delta u = 0$, $x \in \Omega$ и u - регулярна на бесконечности. Тогда $u'(x')$ после доопределения в точке $x' = 0$ будет гармонической в области Ω'. По теореме об аналитичности гармонических функций, функция $u'(x')$ будет аналитической в области Ω', в том числе и в точке $x' = 0$. Поэтому в окрестности точки $x' = 0$ функция u' разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$u'(x') = \sum_{\alpha} C_\alpha (x')^\alpha = A + \sum_{|\alpha|\geqslant 1} C_\alpha (x')^\alpha.$$

Применив обратное преобразование Кельвина, получим для $u(x)$:

$$u(x) = \sum_{\alpha} C_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}} = \frac{A}{|x|^{n-2}} + \sum_{|\alpha|\geqslant 1} C_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}}.$$

Перейдем теперь непосредственно к получению оценок для функции $u(x)$ и ее производных на бесконечности. Для $u(x)$ имеем:

$$\left| u(x) - \frac{A}{|x|^{n-2}} \right| = \left| \sum_{|\alpha|\geqslant 1} C_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}} \right|,$$

следовательно,

$$|u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-2}}.$$

Для производных $u(x)$ имеем:

$$\left| D^\beta u(x) - D^\beta \frac{A}{|x|^{n-2}} \right| = \left| \sum_{|\alpha|\geqslant 1} D^\beta C_\alpha \frac{x^\alpha}{|x|^{2|\alpha|+n-2}} \right|.$$

Следует различать два случая: $n \geqslant 3$ и $n = 2$. Для $n \geqslant 3$ справедлива оценка

$$|D^\beta u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-2+|\beta|}},$$

а для $n = 2$, т.к. слагаемое $D^\beta \dfrac{A}{|x|^{n-2}} = 0$,

$$|D^\beta u(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{|\beta|+n-1}} = \frac{C}{|x|^{|\beta|+1}}.$$

В заключение приведем важный частный случай оценки для первых производных ($\beta = 1$):

$$|Du(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad n \geqslant 3,$$
$$|Du(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^2}, \quad n = 2.$$

27 Функция Грина задачи Дирихле

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -f, \tag{27.1}$$
$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x). \tag{27.2}$$

Рассмотрим случай $n \geqslant 3$. Тогда для функции u можно записать ее интегральное представление, полученное ранее:

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{|S_1|(n-2)} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \frac{\partial}{\partial n} u(\xi) - u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} \right) dS - \\ - \frac{1}{|S_1|(n-2)} \int\limits_{\Omega} \frac{\Delta u}{|x-\xi|^{n-2}}\, d\xi. \end{aligned} \tag{27.3}$$

Пусть $g(x,\xi)$ - некоторая гармоническая функция в области Ω. Запишем вторую формулу Грина для функции u и функции g:

$$\int\limits_{\Omega} (g\Delta u - u\Delta g)\, d\xi = \int\limits_{\partial\Omega} \left(g(x,\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}u(\xi) - u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}g(x,\xi) \right)\, dS_\xi.$$

Сложим два полученных равенства и все слагаемые, кроме u, переместим вправо:

$$\begin{aligned} u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \Bigg(&\left(\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}} + g(x,\xi) \right) \frac{\partial}{\partial n_\xi}u(\xi) - \\ &- u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}} + g(x,\xi) \right) \Bigg)\, dS_\xi \\ &- \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{|S_1|(n-2)||x-\xi|^{n-2}} + g(x,\xi) \right) \Delta u\, d\xi. \end{aligned}$$

Подберем теперь функцию $g(x,\xi)$ таким образом, чтобы на $\partial\Omega$

$$\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}} + g(x,\xi) = 0.$$

Обозначив через

$$G(x,\xi) = \frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}} + g(x,\xi) \tag{27.4}$$

и воспользовавшись граничным условием, получим:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial\Omega} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(x,\xi)\, dS + \int\limits_{\Omega} G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{27.5}$$

Таким образом, для того, чтобы решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона, достаточно найти гармоническую в Ω функцию g, удовлетворяющую условию

$$g(x,\xi)|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}}. \tag{27.6}$$

Определение 1 *Функцией Грина задачи Дирихле называется функция $2n$ переменных $G(x,\xi)$, непрерывная по обеим переменным в области $\Omega\times\Omega$, и такая, что:*

1. $G(x,\xi) = \dfrac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}} + g(x,\xi)$, *где g - гармоническая,*

2. $G(x,\xi)|_{\partial\Omega} = 0$,

3. если область не ограничена, то требуется регулярность функции G на бесконечности.

При $n = 2$

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|} + g(x,\xi).$$

Пусть функция Грина существует. Рассмотрим ее свойства.
1°. $0 \leqslant G(x,\xi) \leqslant \dfrac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}}$.
▼a.) Покажем что $G(x,\xi) \geqslant 0$.
Функция $\dfrac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}}$ гармоническая в Ω (как фундаментальное решение уравнения Лапласа) за исключением точки $x = \xi$. Вырежем точку $x = \xi$ сферой малого радиуса ε и рассмотрим поведение функции Грина на границе получившейся области. На внешней границе она равна нулю, а на внутренней она неотрицательна, т.к. первое слагаемое в функции Грина можно сделать сколь угодно большим при достаточно малых ε, а функция $g(x,\xi)$ - гармоническая, непрерывная в Ω и, следовательно, в ней ограниченная.
Функция G в области Ω/S_ε гармоническая как сумма двух гармонических функций, поэтому для нее справедлив принцип максимума, т.е. она достигает минимального значения на границе области. А так как на границе функция $G(x,y)$ неотрицательна, следовательно, она неотрицательна во всей области Ω/S_ε. В силу того, что ε можно выбрать сколь угодно малым, функция Грина будет неотрицательной во всей области Ω.
b.) Докажем второе неравенство. Для этого достаточно показать, что $g(x,\xi) \leqslant 0$ в Ω.
Функция $g(x,\xi)$ гармоническая в Ω, следовательно, для нее справедлив принцип максимума, т.е. она будет достигать максимума на границе области Ω. По определению функции Грина, на границе

$$g(x,\xi) = -\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi|^{n-2}} \leqslant 0,$$

откуда следует, что $g(x,\xi) \leqslant 0$ в Ω. ▲
2°. Функция Грина симметрична, т.е. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.
▼Рассмотрим функции $G(x,\xi_1)$ и $G(x,\xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$. Вырежем точки ξ_1 и ξ_2 шарами T_{ξ_1} и T_{ξ_2} радиуса ε. Тогда обе функции будут гармоническими в области $\Omega/(T_{\xi_1} \cap T_{\xi_2}) \overset{def}{=} \widetilde{\Omega}$. Запишем вторую формулу Грина для функций $G(x,\xi_1)$ и $G(x,\xi_2)$:

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \left(G(x,\xi_1)\Delta G(x,\xi_2) - G(x,\xi_2)\Delta G(x,\xi_1)\right)dx =$$
$$= \int\limits_{\partial\Omega}\left(G(x,\xi_1)\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_2) - G(x,\xi_2)\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_1)\right)dS + \int\limits_{S_{\xi_1}}(\cdots)\,dS + \int\limits_{S_{\xi_2}}(\cdots)\,dS.$$

Т.к. $\Delta G(x,\xi_2)=0, \Delta G(x,\xi_1)=0$, а на $\partial\Omega$ $G(x,\xi_1)=0, G(x,\xi_2)=0$, то

$$0=\int\limits_{S_{\xi_1}}\left(G(x,\xi_1)\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_2)-G(x,\xi_2)\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_1)\right)dS+\int\limits_{S_{\xi_2}}(\cdots)\,dS.$$

Совершим предельный переход в первом слагаемом при $\varepsilon\to 0$. Функция $G(x,\xi_2)$ в T_1 не имеет особых точек, поэтому и $G(x,\xi_2)$, и ее производные на S_1 ограничены, т.е $\left|\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_2)\right|\leqslant A$, тогда воспользовавшись свойством 1°. получим следующую оценку:

$$\left|\int_{S_{\xi_1}}G(x,\xi_1)\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_2)dS\right|\leqslant\frac{1}{|S_1|(n-2)\varepsilon^{n-2}}\,A|S_1|\varepsilon^{n-1}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0.$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\,I&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\xi_1}}G(x,\xi_2)\frac{\partial}{\partial n}G(x,\xi_1)\,dS=\\&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\xi_1}}G(x,\xi_2)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi_1|^{n-2}}+g(x,\xi_1)\right)dS=\\&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\xi_1}}G(x,\xi_2)\left(-\frac{\partial}{\partial|x-\xi_1|}\right)\left(\frac{1}{|S_1|(n-2)|x-\xi_1|^{n-2}})\right)dS,\end{aligned}$$

т.к. функция $G(x,\xi_2)\frac{\partial}{\partial n}g(x,\xi_1)$ ограничена в окрестности точки ξ_1, а производная по нормали направлена по радиусу. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,I=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_{\xi_1}}G(x,\xi_2)\frac{1}{|S_1||x-\xi|^{n-1}}dS=-\lim_{\varepsilon\to 0}\,\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{S_{\xi_1}}G(x,\xi_2)\,dS.$$

Функция $G(x,\xi_2)$ гармоническая в шаре T_{ξ_1}, следовательно, к ней можно применить теорему о среднем. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\,I=-\lim_{\varepsilon\to 0}\,\frac{1}{|S_1|\varepsilon^{n-1}}G(x^*,\xi_2)\,|S_1|\varepsilon^{n-1}=-G(\xi_1,\xi_2),$$

т.к. точка $x^*\to\xi_1,\ \varepsilon\to 0$.
Аналогично, совершив такой же предельный переход во втором слагаемом, получим, что оно стремится к $G(\xi_2,\xi_1)$.
Таким образом, в силу произвольности выбора точек ξ_1 и ξ_2, мы показали симметричность функции Грина.
▲

29 Теорема единственности для краевых задач

1. Внутренняя задача Дирихле.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad (x \in \Omega,\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})\ ) \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Докажем, что решение внутренней задачи Дирихле единственно. Пусть u_1, u_2– решения задачи. Обозначим через $\delta = u_1 - u_2$, эта функция будет являться решением задачи: $\Delta\delta = 0,\ \delta|_{\partial\Omega} = 0$. Т. к. функция δ гармоническая, то она будет достигать своего минимального и максимального значения на границе области. Однако на границе функция $\delta = 0$, следовательно, она равна нулю во всей области Ω.

2. Внешняя задача Дирихле.

$$\begin{aligned} \Omega' &= \mathbb{R}^n/\bar{\Omega}, \\ \Delta u &= 0, \quad (x \in \Omega_1,,\ u \in C^2(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega}_1)\ ) \\ u|_{\partial\Omega_1} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

u - регулярна на бесконечности, если $n \geqslant 3$, т.е. $u \to 0,\ x \to \infty$.

Покажем, что решение внешней задачи Дирихле единственно. Это можно сделать двумя способами. Первый способ: с помощью преобразования Кельвина мы можем перевести внешнюю задачу во внутреннюю, а для внутренней задачи мы уже все доказали.

Второй способ: пусть u_1, u_2 - решение задачи, тогда функция $\delta = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнениям $\Delta\delta = 0,\ \delta|_{\partial\Omega} = 0$. Рассмотрим область $\Omega'_R = T_R \backslash \bar{\Omega}$, где T_R– шар радиуса R. Запишем третью формулу Грина для функции δ в области Ω'_R :

$$\int\limits_{\Omega'_R} \delta\Delta\delta dx = -\int\limits_{\Omega'_R} \sum_i \left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int\limits_{S_R} \delta\left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dS + \int\limits_{\partial\Omega} \delta\left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dS.$$

Здесь левая часть и последнее слагаемое правой части равны нулю по условию задачи. Оценим по модулю второе слагаемое $\int_{S_R} \delta\frac{\partial\delta}{\partial n} dS$. Используя оценки гармонических функций и их производных в неограниченных областях при $n \geqslant 3$

$$|\delta| \leq \frac{C_0}{|x|^{n-2}}, \quad \left|\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right| \leq \frac{D_i}{|x|^{n-1}}, \quad \left|\frac{\partial\delta}{\partial n}\right| \leq \frac{D_0}{|x|^{n-1}},$$

получим:

$$\left|\int\limits_{S_R} \delta\left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dS\right| \leq \frac{C_0}{R^{n-2}} \frac{D}{R^{n-1}} |S_1| R^{n-1} = \frac{C_0 D |S_1|}{R^{n-2}} \to 0, \text{ при } R \to \infty.$$

Если $n = 2$, то
$$|\delta| \le C_0,\ |\frac{\partial\delta}{\partial x_i}| \le \frac{D_i}{|x|^2},\quad |\frac{\partial\delta}{\partial n}| \le \frac{D_0}{|x|^2},$$
следовательно:
$$\left|\int\limits_{S_R} \delta\left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dS\right| \le \frac{C_0 D_0}{R^2}\cdot 2\pi R \to 0, \text{ при } R\to\infty.$$
Таким образом, если мы совершим предельный переход, то получим: $\int\limits_{\Omega'} \sum(\frac{\partial\delta}{\partial x_i})^2 dx = 0$, следовательно, $\sum_i(\frac{\partial\delta}{\partial x_i})^2 = 0,$ следовательно, δ - константа. А так как на границе $\delta = 0$, то она равна нулю во всей области Ω'.

3. Внутренняя задача Неймана.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0,\quad (\,u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)\,) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Покажем, что решение задачи Неймана определяется с точностью до константы. Пусть u_1, u_2 - решения задачи Неймана, тогда функция $\delta = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению $\Delta\delta = 0$ и для него выполняется граничное условие $\frac{\partial\delta}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Запишем третью формулу Грина для функции δ :
$$\int\limits_{\Omega} \delta\Delta\delta dx = -\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega}\delta\left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dS.$$
Так как δ является решением задачи Неймана, левая часть и второе слагаемое в правой части равны нулю. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0$ и каждое из слагаемых $\frac{\partial\delta}{\partial n} = 0$, т.е. δ является константой, что и означает, что два решения отличаться лишь на константу.

4. Внешняя задача Неймана.

$$\begin{aligned} \Omega' &= R^n/\bar\Omega, \\ \Delta u &= 0,\ (x\in\Omega'\ u\in C^2(\Omega')\cap C^1(\overline{\Omega'})) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

u - регулярна на бесконечности, при $n \geqslant 3$. Аналогично п.2 рассмотрим область $\Omega'_R = T_R\backslash\bar\Omega$, запишем третью формулу Грина для функции $\delta = u_1 - u_2$ и области Ω'_R. Воспользовавшись оценками для гармонических функций и устремив $R\to\infty$, получим:
$$\int\limits_{\Omega'}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0.$$

Следовательно, δ - константа.

Если размерность пространства больше трех, то δ регулярна на бесконечности, кроме того, δ - константа, а значит $\delta = 0$.

Таким образом, если размерность равна трем, то решение единственно, если двум, то решения отличаются на константу.

5. Внутренняя третья краевая задача.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \ \ (u \in C^2(\Omega) \cap C'(\bar{\Omega})) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u\right)\Bigg|_{\partial\Omega} &= \varphi(x), \end{aligned}$$

$\sigma(x) \geqslant 0,$ и $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$ на множестве ненулевой меры.

Рассмотрим разность решений $\delta = u_1 - u_2$, являющуюся решением задачи $\Delta\delta = 0,\ \ \left(\frac{\partial\delta}{\partial n} + \sigma(x)\delta\right)\big|_{\partial\Omega} = 0$. Запишем третью формулу Грина:

$$\int\limits_{\Omega} \delta\Delta\delta dx = -\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \delta \left(\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dS.$$

Используя начальное условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = -\sigma(x)\ \delta|_{\partial\Omega}$, получим: $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x)\delta^2(x) dS = 0$. Оба слагаемых неотрицательны, следовательно, их сумма может быть равна нулю только если каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial\delta}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0$, значит, δ - константа. Рассмотрим $C^2 \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(x) dS = 0$. По предположению, $\sigma(x) \geqslant \sigma_0$. Следовательно, $C \cdot \sigma_0 \cdot mes\Omega' = 0$, $C = 0$ и решение единственно.

6. Внешняя третья краевая задача.

   Самостоятельно.

30 Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности и начальное и граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - q(x)u, \tag{30.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{30.2}$$

$$\left(h_1 \frac{\partial u}{\partial x} - h_2 u\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \tag{30.3}$$

$$\left(H_1 \frac{\partial u}{\partial x} + H_2 u\right)\Bigg|_{x=l} = 0, \tag{30.4}$$

где

$$p(x) \geqslant p_0 > 0, q(x) \geqslant 0,$$
$$q(x) \in C(0,l),\ p(x) \in C^1(0,l),$$
$$h_i, H_i \geqslant 0, h_1 + h_2 > 0, H_1 + H_2 > 0.$$

Для решения задачи (30.1) – (30.4) применим метод Фурье. Будем искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставим $u(x,t)$ в уравнение (30.1) и разделим переменные. Мы получим два дифференциальных уравнения

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{30.5}$$
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right) + (\lambda - q(x))X(x) = 0 \tag{30.6}$$

и два граничных условия

$$h_1 X'(0) - h_2 X(0) = 0, \tag{30.7}$$
$$H_1 X'(l) + H_2 X(l) = 0. \tag{30.8}$$

Задача (30.6) – (30.8) является задачей Штурма-Лиувилля. Нужно найти значения λ, при которых задача имеет нетривиальные решения, т.е. найти собственные значения и собственные функции задачи.
Будем считать, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля, это означает, что задача (30.6)-(30.8) при $\lambda = 0$ имеет только тривиальное нулевое решение.
Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX(x)}{dx}\right) - q(x)X(x) = f(x) \tag{30.9}$$

и задачу (30.7)-(30.9). Ее можно записать в операторном виде:

$$\mathcal{L}X = f,$$

где

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

является линейным оператором. Областью определения этого оператора является множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (30.7) и (30.8). Задача $\mathcal{L}y = 0$ имеет только нулевое решение, следовательно, существует оператор $\mathcal{L}^{-1}$. Таким образом, из уравнения можно выразить $X = \mathcal{L}^{-1}f$.
Покажем, что

$$\mathcal{L}^{-1}f = \int\limits_0^l G(x,S)f(S)dS,$$

где $G(x,s)$– ядро обратного интегрального оператора $\mathcal{L}^{-1}$, которое мы назовем функцией Грина задачи Штурма-Лиувилля. Итак, теперь для того, чтобы найти

решение задачи Штурма-Лиувилля, достаточно найти функцию Грина, к построению которой мы сейчас перейдем.
Обозначим через $y_1(x)$ решение однородного уравнения (30.9), удовлетворяющее условию (30.7), а через $y_2(x)$ - решение однородного уравнения (30.9), удовлетворяющее условию (30.8).
1. Покажем, что такие решения существуют.
▼Обозначим через δ_1 решение однородного уравнения (30.9), удовлетворяющее условиям $\delta_1(0) = 1,\ \delta_1'(0) = 0$, а через δ_2- решение однородного уравнения (30.9), удовлетворяющее условиям $\delta_2(0) = 0,\ \delta_2'(0) = 1$. Решения этих задач Коши существуют и единственны. Тогда функцию y_1 будем искать в виде $y_1(x) = A\delta_1 + B\delta_2$. Из условия (30.7) получим, что

$$h_1 y_1'(0) - h_2 y_1(0) = h_1 B - h_2 A.$$

Следовательно, если положить, например, $h_1 = A,\ h_2 = B$, то y_1 будет существовать. Аналогично показывается существование функции y_2. ▲
2. Покажем теперь, что функции $y_1,\ y_2$ определяются с точностью до постоянного множителя.
▼Рассмотрим два решения $y_1,\ \tilde{y}_1$ однородного уравнения (30.9), удовлетворяющих условию (30.7). Надо показать, что они линейно зависимы. Функции являются линейно-зависимыми, если определитель Вронского от этих функций равен нулю.
Запишем условие (30.7) для функций $y_1,\ \tilde{y}_1$:

$$\begin{cases} h_1 y_1'(0) - h_2 y_1(0) = 0, \\ h_1 \tilde{y}_1'(0) - h_2 \tilde{y}_1(0) = 0. \end{cases}$$

Это система линейных однородных уравнений относительно h_1 и h_2. Т.к. $h_1 + h_2 > 0$, то эта система имеет ненулевое решение, следовательно, ее определитель равняется нулю:

$$\begin{vmatrix} y_1'(0) & -y_1(0) \\ \tilde{y}_1'(0) & -\tilde{y}_1(0) \end{vmatrix} = -W[y_1, \tilde{y}_1]|_{x=0} = 0,$$

где $W[y_1, \tilde{y}_1]-$ определитель Вронского. Следовательно, функции $y_1,\ \tilde{y}_1$ линейно зависимы. Аналогично показывается, что y_2 также определяется с точностью до постоянного множителя. ▲
3. Покажем линейную независимость функций y_1 и y_2 при условии, что $\lambda = 0$ не является собственным значением.
▼Доказывать будем от противного. Предположим, что y_1 и y_2 линейно зависимы, т.е. $y_1(x) = Cy_2(x)$. Функция y_1 является решением однородного уравнения (30.9) и удовлетворяет условию (30.7). А т.к. она отличается от функции y_2 лишь на множитель, то она удовлетворяет и условию (30.8) и, следовательно, является нетривиальным решением однородной задачи (30.7)-(30.9). Это значит, что $\lambda = 0$ является собственным значением. Мы пришли к противоречию. ▲
Таким образом, решение однородного уравнения (30.9) имеет вид: $X(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.
Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (30.9) и будем искать его решение методом вариации постоянных, т.е. будем искать решение в виде:

$$X(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x).$$

Вычислим производную функции $X(x)$:

$$X'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)$$

и потребуем, чтобы

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{30.10}$$

Подставим $X(x)$ в уравнение (30.9) и воспользуемся наложенным условием:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) &- q(x)X(x) = C_1'(x)p(x)\frac{dy_1}{dx} + C_2'(x)p(x)\frac{dy_2}{dx} + \\ &+ C_1(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_1}{dx}\right) + C_2(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_2}{dx}\right) - \\ &- q(x)C_1(x)y_1 - q(x)C_2(x)y_2 = -f(x). \end{aligned}$$

Т.к. y_1 и y_2- решения однородного уравнения (30.9), то мы получаем уравнение

$$C_1'(x)p(x)y_1'(x) + C_2'(x)p(x)y_2'(x) = -f(x).$$

Объединяя это уравнение с условием (30.10), приходим к неоднородной системе линейных уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= -\frac{f}{p}. \end{cases}$$

Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W[y_1, y_2] \neq 0,$$

т.к., как было показано выше, функции y_1 и y_2 линейно независимы. Тогда по правилу Крамера можно найти решение этой системы:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ -1/p & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{f(x)y_2(x)}{p(x)W[y_1, y_2]}, \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & -1/p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{f(x)y_1(x)}{p(x)W[y_1, y_2]}.$$

Покажем, что $p(x)W[y_1, y_2] = const$. Для этого рассмотрим два уравнения:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) + q(x)y_1(x) = 0$$

и

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y_2}{\partial x}\right) + q(x)y_2(x) = 0.$$

Домножим первое уравнение на y_1, а второе на y_2, а затем вычтем из первого второе. Тогда получим:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)y_1 = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)W[y_1, y_2]) = 0,$$

следовательно
$$p(x)W[y_1, y_2] = const.$$
Для нахождения функции $X(x)$ осталось проинтегрировать $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.
Функция $X(x)$ должна удовлетворять обоим граничным условиям (30.7) и (30.10). Выясним, при каких условиях это выполняется. Для этого подставим функцию $X(x)$ сначала в условие (30.7), воспользуемся тем, что функция y_1 ему удовлетворяет, а также равенством (30.10). Тогда получим следующее уравнение:
$$C_2(0)(h_1 y_2'(0) - h_2 y_2(0)) = 0.$$
Очевидно, что если $C_2(0) = 0$, то функция y_2, а, следовательно, и функция $X(x)$ будет удовлетворять условию (30.7). Аналогично показывается, что при условии $C_1(l) = 0$ функция $X(x)$ будет удовлетворять условию (30.8). Следовательно, надо найти такие $C_1(x)$ и $C_2(x)$, что $C_2(0) = 0$ и $C_1(l) = 0$.
Таким образом, если мы возьмем в качестве
$$C_1(x) = \int\limits_x^l \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W[y_1, y_2]}d\xi, \quad C_2(x) = -\int\limits_0^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W[y_1, y_2]}d\xi,$$
то функция
$$X(x) = -y_1(x)\int\limits_x^l \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(x)W[y_1, y_2]}d\xi - y_2(x)\int\limits_0^x \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(x)W[y_1, y_2]}d\xi = \int\limits_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$
будет являться решением задачи Штурма - Лиувилля. Таким образом, мы построили функцию Грина задачи Штурма-Лиувилля:
$$G(x,\xi) = -\frac{1}{p(x)W[y_1, y_2]}\left\{\begin{array}{ll} y_1(x)y_2(\xi), & x < \xi < l \\ y_1(\xi)y_2(x), & 0 < \xi < x \end{array}\right. .$$
Рассмотрим свойства функции Грина.
1°. Функция Грина определена и непрерывна в квадрате $[0, l] \times [0, l]$. В этом квадрате она представляет собой непрерывную функцию переменных x, ξ.
2°. Функция Грина вне диагонали квадрата $x = \xi$ является решением однородного уравнения (30.9).
3°. Функция Грина удовлетворяет граничным условиям (30.7) и (30.8). (т.к. этим условиям удовлетворяют y_1, y_2)
4°. Функция Грина симметрична: $G(x,\xi) = G(\xi, x)$. Доказательство вытекает из ее представления.
5°. Производная функции Грина терпит разрыв первого рода на диагонали $x = \xi$.
▼
$$G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) =$$
$$= -\frac{1}{pW}y_1'(x)y_2(x) + \frac{1}{pW}y_1(x)y_2'(x) =$$
$$= \frac{1}{pW}(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)) = \frac{1}{p(x)}.$$
Таким образом, мы получили скачок на диагонали. ▲

31 Собственные функции и собственные значения задачи Штурма - Лиувилля.

I. Рассмотрим следующую задачу :

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda y, \tag{31.1}$$

$$h_1y'(0)-h_2y(0)=0, \tag{31.2}$$

$$H_1y'(l)+H_2y(l)=0, \tag{31.3}$$

$$p(x)\geqslant p_0>0, q(x)\geqslant 0, \tag{31.4}$$

$$h_i, H_i\geqslant 0, h_1+h_2>0, H_1+H_2>0, \tag{31.5}$$

$$y\in C^2(0,l)\cap C^1[0,l]. \tag{31.6}$$

Эту задачу можно переписать в виде:

$$\mathcal{L}y=\lambda y, \tag{31.7}$$

где $\mathcal{L}$ - дифференциальный оператор задачи Штурма-Лиувилля. Областью определения оператора $\mathcal{L}$ является множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (31.2),(31.3). Из (31.7) следует, что

$$y=\lambda\,\mathcal{L}^{-1}y. \tag{31.8}$$

Вспомнив, что обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}-$ интегральный оператор, ядром которого является функция Грина задачи Штурма-Лиувилля, можно записать

$$y=\lambda\int_0^l G(x,\xi)y(\xi)d\xi=\lambda\mathcal{K}y, \tag{31.9}$$

где $\mathcal{K}-$ интегральный оператор. Интегральное уравнение (31.9) называется уравнением Фредгольма II рода с симметричным ядром.
Таким образом, если λ - собственное значение, а y - собственная функция задачи Штурма-Лиувилля, то λ будет характеристическим числом, а y - собственной функцией интегрального уравнения. И наоборот : применяя оператор $\mathcal{L}$ к интегральному уравнению (31.9) и учитывая, что y удовлетворяет условиям (31.2), (31.3), можно показать, что y - решение задачи (31.7). Т.е. задача Штурма-Лиувилля эквивалентна нахождению характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода, в котором ядром является функция Грина. Это уравнение является частным случаем уравнения $Ay=\lambda y$, где $A-$ симметричный компактный оператор.
Этим мы будем пользоваться при формулировке свойств собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

1. Множество собственных значений не пусто (в следствие самосопряженности).

2. Множество собственных значений не имеет конечных предельных точек, т.е. на каждом интервале оси λ имеется только конечное число собственных значений.

3. Множество собственных значений не более чем счетно.

4. Ранг каждого собственного значения конечен, т.е. каждому собственному значению отвечает конечное число линейно-независимых собственных функций.

5. Все собственные значения вещественны, а собственные функции могут быть быть выбраны вещественными (в следствие симметричности)

6. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, но это не обязательно выполняется для собственных функций, отвечающих одному собственному значению. Однако различными способами, например Грамма-Шмидта, их можно ортогонализовать. Тогда все множество собственных функций будет образовывать ортогональную систему.

   Таким образом, имеется ортонормированная система собственных функций. Встает вопрос о разложении функции Ly в ряд Фурье по этим собственным функциям. Ответ на вопрос, когда это осуществимо, дает теорема Гильберта-Шмидта. Сформулируем эту теорему. Для этого сначала дадим определение.

Определение 1 *Функция $f(x)$ называется представимой через ядро, если существует функция $h(x) \in L^2(0,l)$ такая, что*

$$f(x) = \int\limits_0^l G(x,\xi)h(\xi)d\xi,$$

где $G(x,\xi)$– ядро интегрального уравнения (31.9).

Теорема 1 *(Гильберта-Шмидта) Если функция $f(x)$ представима через ядро, то она разлагается в ряд Фурье по системе собственных функций интегрального уравнения (31.9), причем этот ряд сходится регулярно на интервале $(0,l)$, т.е. ряд, составленный из абсолютных величин, сходится равномерно.*

II. В следующей части мы уточним некоторые свойства из свойств 1°.-6°., которые являются специфическими для задачи Штурма-Лиувилля.

1. Покажем, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля при выполнении условий (31.4)-(31.6) неотрицательны.

   Пусть λ_0 - собственное значение, а y_0 - отвечающая ему собственная функция задачи (31.1)-(31.3). Тогда

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_0}{dx}\right) + q(x)y_0(x) = \lambda_0 y_0(x), \tag{31.10}$$

$$h_1 y_0'(0) - h_2 y_0(0) = 0,$$

$$H_1 y_0'(0) + H_2 y_0(0) = 0.$$

Умножим левую и правую части (31.10) на y_0 и проинтегрируем по отрезку $[0,l]$:

$$-\int\limits_0^l \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_0}{dx}\right)y_0dx+\int\limits_0^l q(x)y_0^2dx=\lambda_0\int\limits_0^l y_0^2(x)dx.$$

Применяя интегрирование по частям, получим:

$$-\int\limits_0^l \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy_0}{dx}\right)y_0dx=-p(x)\frac{dy_0}{dx}y_0\Big|_0^l+\int\limits_0^l p(x)\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2dx.$$

Тогда

$$-p(x)\frac{dy_0}{dx}y_0\Big|_0^l+\int\limits_0^l p(x)\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2dx+\int\limits_0^l q(x)y_0^2dx=\lambda_0\int\limits_0^l y_0^2(x)dx$$

Второе и третье слагаемые в левой части неотрицательны, также как и подынтегральная функция в правой части. Поэтому неравенство $\lambda_0 \geqslant 0$ будет выполняться только в случае неотрицательности первого слагаемого. Очевидно, что если в задаче присутствуют граничные условия 1-го или 2-го рода, то это слагаемое обратится в ноль. Поэтому будем считать, что у нас граничные условия 3-го рода. Из этих условий можно выразить $y_0'(0)$ и $y_0'(l)$:

$$y_0'(0)=\frac{h_2}{h_1}y_0(0),\quad y_0'(l)=-\frac{H_2}{H_1}y_0(l).$$

Откуда получим:

$$-p(x)\frac{dy_0}{dx}y_0\Big|_0^l=-p(l)y_0'(l)y_0(l)+p(0)y_0'(0)y_0(0)=p(l)\frac{H_2}{H_1}y_0^2(l)+p(0)\frac{h_2}{h_1}y_0^2(0)\geqslant 0.$$

Т.о. мы доказали, что собственные значения неотрицательны. Выясним, при каких условиях $\lambda=0$ является собственным значением. Это будет лишь в том случае, если каждое из слагаемых в левой части обратится в ноль. Первое и второе слагаемые обратятся в ноль если граничные условия в задаче второго рода, т.е если $y_0=const$, а третье если $q(x)=0$. Поэтому $\lambda=0$ может быть собственным значением только следующей задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)=\lambda y,\\ \quad y'(0)=y'(l)=0.\end{cases}$$

2. Ранг собственного значения равен единице, т.е. каждому собственному значению отвечает только одна собственная функция.

   Пусть λ_0 - собственное значение, а y_1 и y_2- соответствующие ей функции, удовлетворяющие граничным условиям. Покажем, что они линейно зависимы. Функции y_1 и y_2 удовлетворяют условию (31.2), т.е.

$$h_1y_1'(0)-h_2y_1(0)=0,$$

$$h_1 y_2'(0) - h_2 y_2(0) = 0.$$

Эта однородная система относительно h_1 и h_2 имеет ненулевое решение, следовательно, определитель системы, который с точностью до константы совпадает с определителем Вронского, равен нулю. Это означает, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы, а из этого следует, что ранг собственного значения равен единице.

3. Множество собственных значений задачи Штурма-Лиувилля бесконечно и счетно.
Рассмотрим функцию Грина задачи Штурма - Лиувилля $G(x,S)$ и разложим ее в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля, которые совпадают с собственными функциями интегрального уравнения $y(x) = \lambda \int\limits_0^l G(x,S)y(S)dS$. Будем считать, что $\|y_k\|$=1. Посчитаем коэффициенты Фурье функции Грина :

$$C_k = \int\limits_0^l G(x,S)y(S)dS = \frac{y_k(x)}{\lambda_k}.$$

Тогда функции Грина формально можно сопоставить ряд Фурье

$$G(x,S) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k(x)y_k(S)}{\lambda_k}.$$

Теорема 2 *(Мерсера)Если ядро $G(x,S)$ положительно, то ряд сходится.*

Тогда имеем знак равенства :

$$G(x,S) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k(x)y_k(S)}{\lambda_k}.$$

▼Предположим, что число собственных значений конечно, следовательно,

$$G(x,S) = \sum_{k=1}^{N} \frac{y_k(x)y_k(S)}{\lambda_k}.$$

Функция $y_k(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, следовательно, и конечная сумма дважды непрерывно дифференцируема. С другой стороны, из свойств функции Грина следует, что ее на диагонали квадрата терпит разрыв 1-го рода. Т.е мы пришли к противоречию. Значит, $N = \infty$, т.е. имеется бесконечное число собственных функций. ▲

III.

Определение 2 *Введем класс функций $\mathcal{M}_L$. Будем считать, что функция $y \in \mathcal{M}_L$, если*

1. $y(x) \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$

2. $y(x)$ *удовлетворяет граничным условиям (2),(3).*

3. $Ly \in L_2(0,l)$

Теорема 3 *(Стеклова) Пусть функция* $y(x) \in \mathcal{M}_L$*, тогда она разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля, причем этот ряд сходится регулярно на* $(0,l)$.

▼ *Пусть* $y \in \mathcal{M}_L$*, тогда обозначим* Ly *через* f *и получим:*

$$y = \int\limits_0^l G(x,S)f(S)dS.$$

Это означает, что функция y *представима через ядро, следовательно, справедлива теорема Гильберта-Шмидта.* ▲

Замечание 1 *Пусть функция* $y \in L_2(0,l)$*, тогда, хотя теорема Стеклова для нее не верна, ее можно разложить в ряд* $y = \sum C_i y_i(x)$*, который будет сходится в* L_2.

Замечание 2 *Покажем, что от условия* $q(x) \geqslant 0$ *можно избавиться. Положим, что* $q(x)$ *полуограничена снизу, т.е.* $q(x) \geqslant -M,\ M > 0$ *и рассмотрим уравнение*

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda - q(x))y = 0.$$

Введем функцию $\widetilde{q}(x) = q(x) + M \geqslant 0$ *и новый спектральный параметр* $\mu = \lambda + M$*, тогда уравнение можно переписать в виде*

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\mu - \widetilde{q}(x))y = 0.$$

Собственные функции этих двух задач одинаковы, а собственные значения отличаются на M*. Поэтому исходная задача может иметь отрицательные собственные значения, однако их конечное число. Собственные функции в обеих задачах одни и те же, т.е. ограничение* $q(x) \geqslant 0$ *не существенно.*

32 Обоснование метода Фурье для уравнения теплопроводности

Рассмотрим метод Фурье для решения следующей задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{32.1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{32.2}$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \tag{32.3}$$

Будем искать частное решение задачи в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. После разделения переменных мы получим два дифференциальных уравнения

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{32.4}$$

$$X''(x) + \frac{\lambda}{a^2} X(x) = 0 \tag{32.5}$$

и граничные условия

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{32.6}$$

Собственными значениями задачи (32.5),(32.6) являются числа $\lambda_k = \dfrac{\pi^2 k^2 a^2}{l^2}$, а собственные функции имеют вид: $X_k = \sin\dfrac{\pi k x}{l}$. Из уравнения (32.4) получим $T_k = C_k e^{-\lambda_k t}$. Т.о. мы получили набор частных решений $u_k = C_k e^{-\lambda_k t}\sin\dfrac{\pi k x}{l}$. Общее решение задачи (32.1)-(32.3) ищется в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\lambda_k t}\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{32.7}$$

Используя граничные условия, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k x}{l} = \varphi(x),$$

откуда

$$C_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) sin\frac{\pi k x}{l} dx. \tag{32.8}$$

Обоснуем теперь этот метод. Для этого выясним условия, при которых данное формальное решение действительно будет являться решением задачи, т.е. оно должно являться решением уравнения (32.1) и удовлетворять начальному и граничным условиям (32.2),(32.3).

Каждая из функций под знаком суммы в (32.7) удовлетворяет начальному и граничным условиям. Если бы мы доказали правомерность дифференцирования под знаком суммы, мы бы показали, что ряд (32.7) является решением уравнения (32.1) и удовлетворяет граничным условиям (32.3). Для этого необходимо доказать равномерную сходимость ряда (32.7), а также рядов, полученных дифференцированием под знаком суммы один раз по t и два раза по x.

Равномерную сходимость ряда (32.7) можно доказать по теореме Вейерштрасса, т.е. нужно построить сходящийся мажорирующий ряд. Рассмотрим слагаемое ряда:

$$|C_k e^{-\lambda_k t}\sin\frac{\pi k x}{l}| \leqslant |C_k|$$

в области $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t \geqslant 0$. Эта оценка справедлива, т.к. собственные значения положительны, поэтому величина $|e^{-\frac{\pi^2 k^2 a^2 t}{l^2}}| \leqslant 1$, а $|\sin\frac{\pi k x}{l}| \leqslant 1$. Поэтому для сходимости ряда (32.7) достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|$.

Для возможности дифференцирования по x необходимо показать равномерную сходимость ряда, полученного формальным дифференцированием, в области $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t \geqslant \varepsilon > 0$, $\forall\varepsilon$. Продифференцируем по x каждое слагаемое и оценим модуль полученного выражения:

$$\left| C_k \frac{\pi k}{l} e^{-\lambda_k t} \cos \frac{\pi k x}{l} \right| \leqslant |C_k| \, \frac{\pi k}{l} e^{-\lambda_k \varepsilon}.$$

Таким образом, осталось показать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k| k e^{-\lambda_k \varepsilon}$. Аналогично, для доказательства равномерной сходимости рядов, полученных дифференцированием дважды по x и один раз по t, достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k| k^2 e^{-\lambda_k \varepsilon}$.
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k| k^\alpha e^{-\lambda_k \varepsilon}, \alpha = 0, 1, 2$. Так как $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} k^\alpha / e^{\frac{\pi^2 k^2 a^2 \varepsilon}{l^2}} = 0$, значит, $|e^{-\lambda_k \varepsilon} k^\alpha| \leqslant A_\alpha$, где A_α - константа, зависящая от α и не зависящая от k.
Таким образом, для доказательства сходимости всех необходимых рядов достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |C_k|$, т.е. все доказательство свелось к задаче на сходимость ряда, составленного из коэффициентов Фурье.
Проинтегрируем (32.8) по частям :

$$C_k = -\frac{2}{l} \frac{l}{\pi k} \varphi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} \bigg|_0^l + \frac{2}{\pi k} \int\limits_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Первое слагаемое в сумме представляет собой член гармонического ряда, который является расходящимся, поэтому мы должны положить

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0. \tag{32.9}$$

Полученное условие является условием согласования.
Проинтегрировав C_k второй раз по частям, получим:

$$C_k = \frac{2l}{\pi^2 k^2} \varphi'(x) \sin \frac{\pi k x}{l} \bigg|_0^l - \frac{2l}{\pi^2 k^2} \int\limits_0^l \varphi''(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx. \tag{32.10}$$

Т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ сходится, то если мы потребуем, чтобы функция $\varphi''(x)$ была либо суммируемой, либо ограниченной, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$ будет сходиться. Таким образом, мы доказали теорему.

Теорема 1 *(первый вариант) Пусть функция $\varphi \in C^2(0, l)$, выполняется условие согласования (32.8) и $\varphi''(x)-$ суммируема. Тогда формальное решение (32.7) является классическим решением задачи (32.1)-(32.3).*

Можно ослабить требования на гладкость функции $\varphi(x)$. Потребуем, чтобы $\varphi'(x) \in L_2(0, l)$ и обозначим через

$$b_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi'(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx,$$

т.е. b_k - коэффициенты Фурье в разложении функции φ' по $\cos$.
Для любой функции из L_2 справедливо неравенство Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leqslant \|\varphi'\|_{L_2(0,l)} = \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx < \infty$, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ сходится. Оценим теперь ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$, используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{\pi k} b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{l^2}{\pi^2 k^2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}.$$

Первый ряд под корнем сходится, т.к. сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, а сходимость второго была показана ранее, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|$ сходится.
Вернемся к той части доказательства, где мы проводили интегрирование по частям. Достаточным условием правомерности применения этого приема интегрирования является абсолютная непрерывность функции $\varphi(x)$, т.к. из абсолютной непрерывности следует, что функция $\varphi(x)$ почти всюду имеет производную. Т.о. можно сформулировать второй вариант теоремы:

Теорема 2 *Пусть функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна на $(0,l)$, $\varphi'(x) \in L_2(0,l)$ и выполняются условия согласования $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда ряд (32.7) является классическим решением задачи (32.1)-(32.3).*

33 Обоснование метода Фурье для уравнения колебания струны

Рассмотрим метод Фурье для решения следующей задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{33.1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{33.2}$$
$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{33.3}$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \tag{33.4}$$

Будем искать частное решение задачи в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. После разделения переменных мы получим два дифференциальных уравнения и граничные условия

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{33.5}$$
$$X'' + \frac{\lambda}{a^2} X(x) = 0, \tag{33.6}$$
$$X(0) = X(l) = 0. \tag{33.7}$$

Задача (33.6),(33.7) представляет собой задачу Штурма-Лиувилля, собственными значениями которой являются числа $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2 a^2}{l^2}$, а собственными функциями- функции $X_k(x) = \sin\frac{\pi k x}{l}$. Кроме того, из уравнения (33.5)

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k} t.$$

Таким образом, мы построили набор частных решений $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, каждое из которых удовлетворяет (33.1), (33.4). Тогда решение всей задачи ищем в виде суммы ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t)\sin\frac{\pi k x}{l}. \tag{33.8}$$

Коэффициенты A_k и B_k определяются из начальных условий:

$$A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx, \tag{33.9}$$

$$B_k = \frac{2}{\pi k a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\sqrt{\lambda_k}dx. \tag{33.10}$$

Покажем что ряд (33.8), а так же ряды, полученные из него формальным дифференцированием один и два раза по t и x, равномерно сходятся в области $(x,t) \in ([0,l] \times [0,T])$. Разобьем ряд (33.8) на сумму двух рядов. Так как функции синус и косинус не превосходят по модулю единицы, для слагаемых из этих рядов будут справедливы оценки

$$|A_k \cos\sqrt{\lambda}t \sin\frac{\pi k x}{l}| \le |A_k|,$$
$$|B_k \sin\sqrt{\lambda}t \sin\frac{\pi k x}{l}| \le |B_k|.$$

Поэтому для доказательства сходимости ряда (33.8) достаточно показать сходимость рядов $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|B_k|$, а для доказательства того, что формальное решение (33.8) является классическим решением задачи (33.1)-(33.4), необходимо также доказать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}|A_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}|B_k|, \text{ где } \alpha = 1,2.$$

Рассмотрим слагаемое первого ряда при $\alpha = 2$. Проинтегрируем его по частям, используя условие $\varphi(0) = \varphi(l) = 0:$

$$k^2 A_k = \frac{2k^2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx = \frac{2k}{\pi}\int\limits_0^l \varphi'(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx =$$

$$= \frac{2l}{\pi^2}\varphi'(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\bigg|_0^l - \frac{2l}{\pi^2}\int\limits_0^l \varphi''\sin\frac{\pi k x}{l}dx.$$

Коэффициенты $k^2 A_k$ и C_k из (32.8) отличаются лишь на скалярный множитель, поэтому можно утверждать, что, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty}k^2|A_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|$ будут сходиться при одинаковых условиях. А именно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|A_k|$ сходится, если выполняется

условие согласованности $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, φ'' - абсолютно непрерывная функция и $\varphi''' \in L_2(0,l)$.
Рассмотрим слагаемое второго ряда при $\alpha = 2$. Поступим с ним аналогично: проинтегрируем по частям и используем условие $\psi(0) = \psi(l) = 0$:

$$k^2 B_k = \frac{2l}{\pi^2 a}\int_0^l \psi'(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx = -\frac{2l^2}{\pi^3 k a}\int_0^l \psi''\sin\frac{\pi k x}{l}dx.$$

Применяя те же рассуждения, что и в предыдущем пункте получим, что если $\psi'' \in L_2(0,l)$, ψ' абсолютно непрерывна и выполняется условие согласованности $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2|B_k|$ сходится. С остальными рядами поступают аналогично. Таким образом, можно сформулировать теорему.

Теорема 1 *Пусть начальные условия задачи* (33.1) – (33.4) *удовлетворяют следующим условиям:*

1. *φ'' существует и абсолютно непрерывна;*
2. *ψ' существует и абсолютно непрерывна;*
3. *$\varphi''' \in L_2(0,l)$ и $\psi'' \in L_2(0,l)$;*
4. *выполняются условия согласованности: $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ и $\psi(0) = \psi(l) = 0$.*

Тогда формулы (33.8) – (33.10) *дают решение задачи* (33.1) – (33.4).

34 Смешанная задача для уравнения теплопроводности

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \tag{34.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{34.2}$$

$$\left.\left(h_1\frac{\partial u}{\partial x} - h_2 u\right)\right|_{x=0} = 0, \tag{34.3}$$

$$\left.\left(H_1\frac{\partial u}{\partial x} + H_2 u\right)\right|_{x=0} = 0, \tag{34.4}$$

где

$$p(x) \geqslant p_0 > 0, q(x) \geqslant M,$$
$$q(x) \in C[0,l],\ p(x) \in C^1[0,l],$$
$$h_i, H_i \geqslant 0, h_1 + h_2 > 0, H_1 + H_2 > 0.$$

Применим метод разделения переменных. Будем искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя его в уравнение (34.1) и условия (34.3),(34.4) и разделяя переменные получим:

$$
\begin{aligned}
T'(t) + \lambda T(t) &= 0, && (34.5)\\
\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda - q(x))X(x) &= 0, && (34.6)\\
h_1X'(0) - h_2X(0) &= 0, && (34.7)\\
H_1X'(l) + H_2X(l) &= 0. && (34.8)
\end{aligned}
$$

Задача (34.6) – (34.8) – задача Штурма-Лиувилля, λ_n - собственные значения задачи. Т.к. $q(x)$ ограничена снизу, задача имеет конечное число отрицательных собственных значений. Функции $X_n(x)-$ собственные функции, для простоты будем считать, что они ортонормированы. Они образуют полную систему функций в L^2.
Из уравнения (34.5)

$$T_n(t) = C_ne^{-\lambda_n t}.$$

Тогда формальное решение задачи (34.1)-(34.4) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_ne^{-\lambda_n t}X_n(x). \tag{34.9}$$

Из начальных условий

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_nX_n(x), \text{ откуда } C_n = (\varphi, X_n), \tag{34.10}$$

где C_n- коэффициенты Фурье.
Встает вопрос о том, при каких условиях это формальное решение будет являться классическим решением задачи (34.1)-(34.4).
Ранее была рассмотрена теорема Стеклова: если функция $f(x) \in \mathcal{M}_L$, т.е. удовлетворяет условиям

$$
\begin{aligned}
&a) f(x) \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l];\\
&b) f(x) \text{ удовлетворяет граничным условиям } (34.3), (34.4);\\
&c) Lf \in L^2(0,l),
\end{aligned}
$$

то она может быть разложена в ряд по собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля, причем этот ряд будет сходиться регулярно, т.е. ряд, составленный из абсолютных величин, будет сходиться равномерно.
Сформулируем теорему.

Теорема 1 *Пусть функция $\varphi(x) \in \mathcal{M}_L$. Тогда ряд (34.9) дает классическое решение задачи* (34.1) – (34.4).

▼Чтобы функция $u(x,t)$ из (34.9) являлась решением задачи (34.1)-(34.4), необходимо:
а) Решение должно удовлетворять начальному условию. Для этого нужно показать, что под знаком суммы можно совершить предельный переход при $t \to 0$. Это будет выполняться, если ряд (34.9) на $(x,t) \in [0,l] \times [0,T]$ сходится равномерно.
б) Функция должна удовлетворять уравнению (34.1). Это выполняется, если доказана правомерность дифференцирования под знаком суммы один раз по t и два раза по x. Это, в свою очередь, можно делать, если дополнительно показать, что ряды, полученные из ряда (34.9) формальным дифференцированием один раз по t и два раза по x на $(x,t) \in (0,l) \times [\varepsilon, T]$, $\quad \forall \varepsilon > 0$ сходятся равномерно.
в) Чтобы решение удовлетворяло граничным условиям также нужна возможность дифференцирования под знаком суммы. Это будет выполняться если выполняются вышеперечисленные условия.
Итак, нам нужно показать сходимость ряда (34.9) на $(x,t) \in [0,l] \times [0,T]$ и рядов

$$\begin{aligned} -\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \quad & C_n \lambda_n e^{-\lambda_n t} X_n(x), && (34.11) \\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \quad & C_n e^{-\lambda_n t} X_n'(x), && (34.12) \\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \quad & C_n e^{-\lambda_n t} X_n''(x) && (34.13) \end{aligned}$$

на $(x,t) \in (0,l) \times [\varepsilon, T]$.
1. Докажем равномерную сходимость ряда (34.9) на $[0,l] \times [0,T]$. Построим к (34.9) мажорирующий ряд и не ограничивая общности будем считать, что $\lambda_n > 0$:

$$|C_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)| \leqslant |C_n X_n(x)|.$$

По теореме Стеклова ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |C_n X_n(x)|$ - сходится равномерно, т.к. $\varphi \in \mathcal{M}_L$, следовательно, ряд (34.9) также сходится равномерно
2. Рассмотрим ряд (34.11) на $[0,l] \times [\varepsilon, T]$. На отрезке $[\varepsilon, T]$ величина $|\lambda_n e^{-\lambda_n t}| \leq \lambda_n e^{-\lambda_n \varepsilon}$. А т.к. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n \varepsilon} = 0$, то величина под знаком предела ограничена, т.е $\lambda_n e^{-\lambda_n \varepsilon} \leq K$. Тогда для членов ряда (34.11) справедлива оценка:

$$|C_n(-\lambda_n) e^{-\lambda_n t} X_n(x)| \leq K |C_n X_n(x)|$$

Следовательно, мы получили мажорирующий равномерно сходящийся ряд и ряд (34.11) сходится равномерно.
3. Рассмотрим ряд (34.12) на $[0,l] \times [\varepsilon, T]$. Функции $X_n(x)$, являющиеся собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля, совпадают с собственными функциями интегрального уравнения Фредгольма второго рода с симметричным ядром, т.е.

$$X_n(x) = \lambda_n \int_0^l G(x,s) X_n(s)\, ds,$$

$$G(x,s) = \alpha \begin{cases} y_1(x) y_2(s), & x \leq s \leq l \\ y_1(s) y_2(x), & 0 \leq s \leq x \end{cases}, \text{ где } \alpha = -\frac{1}{p(x) W[y_1, y_2]}.$$

Найдем производную функции $X_n(x)$:

$$X_n'(x) = \lambda_n y_2'(x)\int\limits_0^x y_1(s)X_n(s)\,ds + \lambda_n y_1'(x)\int\limits_x^l y_2(s)X_n(s)\,ds.$$

Сходимость ряда (34.12) докажем с помощью критерия Коши:

$$\begin{aligned} S \stackrel{def}{=} \left|\sum_{n=k}^{k+m} C_n e^{-\lambda_n t} X_n'(x)\right| \;&\le\; \left|\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n C_n e^{-\lambda_n t} y_2'(x)\int\limits_0^x y_1(s)X_n(s)\,ds\right| + \\ &+\; \left|\sum_{n=k}^{k+m} \lambda_n C_n e^{-\lambda_n t} y_1'(x)\int\limits_x^l y_2(s)X_n(s)\,ds\right| \stackrel{def}{=} S_1 + S_2 \end{aligned}$$

Оценим сумму S_1. Обозначим через $J_1 \stackrel{def}{=} \max\limits_{x\in[0,l]} |y_1'(x)|,\ J_2 \stackrel{def}{=} \max\limits_{x\in[0,l]} |y_2'(x)|$ кроме того, $\int_0^x y_1(s)X_n(s)\,ds \le \max\limits_{0\le s\le l} |y_1(s)X_n(s)|\,l$. Тогда

$$S_1 \le \sum_{n=k}^{k+m} \left|\lambda_n\, C_n\, e^{-\lambda_n t}\, J_2\, l\, \max_{0\le s\le l} |y_1(s)X_n(s)|\right| \le \sum_{n=k}^{k+m} \max_{0\le x\le l} \left|\lambda_n\, C_n\, e^{-\lambda_n t}\, y_1(x)X_n(x)\right|\, J_2\, l.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\lambda_n\, C_n\, e^{-\lambda_n t}\, y_1(x)\, X_n(x)\right|$ сходится равномерно, т.к. он представляет собой произведение произведение равномерно сходящегося ряда (34.11) на непрерывную функцию. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ по $\frac{\varepsilon}{2J_2 l}$ найдется такой номер N_1, что $\forall\, k \ge N_1$ и $\forall\, m > 0$ выполняется

$$\sum_{n=k}^{k+m} \left|\lambda_n\, C_n\, e^{-\lambda_n t}\, y_1(x)\, X_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2J_2 l}.$$

Аналогично рассуждая, получим, что $\forall \varepsilon > 0$ по $\frac{\varepsilon}{2J_1 l}$ найдется такой номер N_2, что $\forall\, k \ge N_2$ и $\forall\, m > 0$ выполняется

$$\sum_{n=k}^{k+m} \left|\lambda_n\, C_n\, e^{-\lambda_n t}\, y_2(x)\, X_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2J_1 l}.$$

Следовательно, $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = \max\{N_1, N_2\}$, что $\forall k \ge N$ и $\forall m > 0 : S \le \varepsilon$. По критерию Коши из этого следует равномерная сходимость ряда (34.12).

4.) Докажем, что равномерная сходимость ряда (34.13) на $[0,l] \times [\varepsilon, T]$ вытекает из равномерной сходимости рядов (34.9),(34.11) и (34.12). Действительно,

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) + (\lambda_n - q(x))X_n(x) = 0.$$

Следовательно,

$$X_n''(x) = -\frac{p'(x)}{p(x)}X_n'(x) - \lambda_n X_n(x) + \frac{q(x)}{p(x)}X_n(x).$$

Таким образом, рассматриваемый ряд (34.12) распадается на три ряда

$$-\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t}\,\frac{p'(x)}{p(x)}X_n'(x), \quad -\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t}\lambda_n X_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t}\,\frac{q(x)}{p(x)}X_n(x)$$

Первый ряд – это произведение ряда (34.12) на непрерывную функцию $-\dfrac{p'(x)}{p(x)}$; второй ряд с точностью до знака совпадает с рядом (34.11); третий ряд представляет собой произведение равномерно сходящегося ряда из (**??**) умножением на непрерывную функцию $\dfrac{q(x)}{p(x)}$. Следовательно, эти три ряда сходятся равномерно в области $[0,l]\times[\varepsilon,T]$. ▲

Замечание 1 *При $t > 0$ решение представляет собой бесконечно дифференцируемую по t функцию.*

35 Смешанная задача для уравнения колебаний струны.

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u, \tag{35.1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{35.2}$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{35.3}$$

$$(h_1u_x - h_2u)|_{x=0} = 0, \tag{35.4}$$

$$(H_1u_x + H_2u)|_{x=l} = 0. \tag{35.5}$$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда подставляя это выражение в уравнение (35.1) и используя граничные условия (35.4),(35.5), получим дифференциальное уравнение

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \tag{35.6}$$

и задачу Штурма-Лиумвиля:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dX}{dx}\right) + (\lambda - q(x))X(x) = 0,\\ h_1X'(0) - h_2X(0) = 0,\\ H_1X'(l) + H_2X(l) = 0. \end{cases}$$

$X_n(x)$ - собственные функции задачи, λ_n - собственные значения. Тогда учитывая (35.6), получим набор частных решений:

$$u_n(x,t) = (A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x),$$

а общее решение задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x). \tag{35.7}$$

Будем считать, что система собственных функций ортонормирована. Тогда из начальных условий коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A_n &= (\varphi, X_n(x)), & (35.8)\\ B_n &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(\psi, X_n(x)). & (35.9)\end{aligned}$$

Выясним, при каких условиях, наложенных на функции φ и ψ ряд (35.7) даст классическое решение задачи (35.1)-(35.5). Чтобы (35.7) являлось решением задачи, необходимо, чтобы ряд (35.7) и ряды, полученные дифференцированием по t и x один и два раза, сходились равномерно на $[0,T]\times[0,l]$.
1. Разобьем ряд (35.7) на сумму двух рядов. Рассмотрим первый ряд из суммы, а также ряды, полученные из него дифференцированием один и два раза по t и по x. Соответственно они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} & A_n \cos\sqrt{\lambda_n}tX_n(x), && (35.10)\\ -&\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} & A_n\sqrt{\lambda_n} \sin\sqrt{\lambda_n}tX_n(x), && (35.11)\\ -&\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} & A_n\lambda_n \cos\sqrt{\lambda_n}tX_n(x), && (35.12)\\ &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} & A_n \cos\sqrt{\lambda_n}tX'_n(x), && (35.13)\\ &\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} & A_n \cos\sqrt{\lambda_n}tX''_n(x). && (35.14)\end{aligned}$$

1. Т.к. $|A_n \cos\sqrt{\lambda_n}tX_n(x)| \leqslant |A_nX_n(x)|$, то для равномерной сходимости (35.10) необходима сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|A_n\, X_n(x)|$. По теореме Стеклова этот ряд сходится регулярно, если $\varphi(x) \in \mathcal{M}_L$.
2. Сходимость рядов (35.11) и (35.12) сводится к сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n\sqrt{\lambda_n}X_n(x)|, \tag{35.15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_n\lambda_nX_n(x)| \tag{35.16}$$

соответственно. Т.к. $\lambda_n \to +\infty, n \to \infty$, то при достаточно больших n будет выполняться неравенство $\sqrt{\lambda_n} \leqslant \lambda_n$. Поэтому равномерная сходимость ряда (35.15)

будет следовать из равномерной сходимости ряда (35.16). Таким образом, осталось показать сходимость ряда (35.16).
3. Ряд (35.13) мажорируется рядом $\sum_{i=1}^{\infty}|A_n X_n'(x)|$, сходимость которого, аналогично пункту 34, сводится к сходимости ряда (35.16).
4. Ряд (35.14) мажорируется рядом $\sum_{i=1}^{\infty}|A_n X_n''(x)|$. Также, аналогично пункту 34, показывается, что равномерная сходимость этого ряда будет следовать из равномерной сходимости рядов (35.7),(35.11) и (35.13).

Лемма 1 *Оператор задачи Штурма-Лиувилля L симметричен, т.е. если некоторая функция g удовлетворяет условиям (35.4),(35.5), то $(Ly,g)=(y,Lg)$.*

▼Доказательство проведем непосредственной проверкой. Применяя интегрирование по частям, получим:

$$(Ly,g)=\int\limits_0^l\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y(x)\right)g(x)dx=$$
$$=\int\limits_0^l\left(p(x)\frac{dy}{dx}\frac{dg}{dx}+q(x)y(x)g(x)\right)dx-p(x)\frac{dy}{dx}g(x)\Big|_0^l.$$

Выражая из граничных условий $\left(\frac{dy}{dx}-\frac{h_2}{h_1}y\right)\Big|_{x=0}=0$, $\left(\frac{dy}{dx}+\frac{H_2}{H_1}y\right)\Big|_{x=l}=0$ производную $\frac{dy}{dx}$, получим

$$(Ly,g)=\int\limits_0^l\left(p(x)\frac{dy}{dx}\frac{dg}{dx}+q(x)y(x)g(x)\right)dx+p(l)g(l)\left(y(l)\frac{H_2}{H_1}\right)+p(0)g(0)\left(y(0)\frac{h_2}{h_1}\right).$$

Аналогично, интегрируя по частям и используя то, что функция g удовлетворяет условиям (35.4),(35.5), получим

$$(Lg,y)=\int\limits_0^l\left(p(x)\frac{dy}{dx}\frac{dg}{dx}+q(x)y(x)g(x)\right)dx+p(l)y(l)\left(g(l)\frac{H_2}{H_1}\right)+p(0)y(0)\left(g(0)\frac{h_2}{h_1}\right).$$

Таким образом, мы показали, что $(Ly,g)=(Lg,y)$ для любой функции g, удовлетворяющей условиям (35.4),(35.5), т.е. что оператор L симметричен.▲

Нам осталось доказать равномерную сходимость ряда (35.16): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|A_n|\lambda_n|X_n(x)|$.

Так как X_n - собственные функции задачи Штурма-Лиумвиля, то $LX_n=\lambda_n X_n$. Тогда

$$A_n\lambda_n=\lambda_n(\varphi,X_n)=(\varphi,\lambda_n X_n)=(\varphi,LX_n)=(L\varphi,X_n),$$

т.е. $A_n\lambda_n$ - коэффициенты Фурье функции $L\varphi$. Т.о., для сходимости ряда (35.16) достаточно потребовать, чтобы $L\varphi \in \mathcal{M}_L$. Итак, для равномерной сходимости рядов (35.10)-(35.14) необходимо, чтобы $\varphi, L\varphi \in \mathcal{M}_L$.
2. Необходимо исследовать аналогичные пять рядов для коэффициентов B_n. Проведя такие же, как и выше, рассуждения, получим, что равномерная сходимость этих рядов сводится равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|\,\lambda_n\,|X_n|. \tag{35.17}$$

Коэффициенты $B_n = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(\psi, X_n) \overset{def}{=} \dfrac{\widetilde{B}_n}{\sqrt{\lambda_n}}$, где $\widetilde{B}_n$ - коэффициенты Фурье функции ψ. Таким образом, нужно исследовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\widetilde{B}_n|\,\sqrt{\lambda_n}\,|X_n|$.
При доказательстве будем использовать признак Коши равномерной сходимости рядов. Для этого необходимо оценить сумму $\sum\limits_{n=k}^{k+m}\left|\widetilde{B}_n\lambda_n\dfrac{X_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right|$. По неравенству Коши-Буняковского,

$$\sum_{n=k}^{k+m}\left|\widetilde{B}_n\lambda_n\frac{X_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=k}^{k+m}\widetilde{B}_n^2\lambda_n^2\sum_{n=k}^{k+m}\frac{X_n^2}{\lambda_n}}.$$

а) по теореме Мерсера, функция Грина представима как $G(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{X_n(x)X_n(y)}{\lambda_n}$.
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{X_n(x)X_n(x)}{\lambda_n} = G(x,x)-$ значение функции Грина на диагонали квадрата, где функция Грина непрерывна и, следовательно, ограничена, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{X_n^2(x)}{\lambda_n} \leqslant M$.
б) $\widetilde{B}_n\lambda_n$ - коэффициенты Фурье функции $L\psi$. Тогда если потребовать, чтобы $\psi \in \mathcal{M}_L(0,l)$, то $L\psi \in L^2[0,l]$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n^2\lambda_n^2 < \infty$. Другими словами,

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ по } \frac{\varepsilon^2}{M} > 0 \quad \exists\, N: \quad \forall k > n\,, \forall m > 0 \quad \sum_{n=k}^{k+m}\widetilde{B}_n^2\lambda_n^2 < \frac{\varepsilon^2}{M}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=k}^{k+m}\left|\widetilde{B}_n\lambda_n\frac{X_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right| < \varepsilon.$$

По признаку Коши, ряд (35.17) сходится равномерно.
Таким образом, можно сформулировать теорему.

Теорема 1 *Пусть* $\varphi, \psi, L\varphi \in \mathcal{M}_L$, *тогда ряд с коэффициентами* A_n *и* B_n, *определяющимися по формулам* (35.8), (35.9) *даёт классическое решение задачи* (35.1) – (35.5).

36 Пространство основных (D) и обобщенных ($D^{'}$) функций.

Существует множество пространств обобщенных функций, однако идеология их построения всегда одинакова: сначала определяется пространство основных функций, а затем на нем определяется множество линейных непрерывных функционалов. Для того, чтобы ввести определение основной функции нам потребуется определение финитной функции.

Определение 1 *Функция* $\varphi(x)$ *называется финитной в ограниченной области* Ω, *если в некоторой приграничной полоске области* Ω *она обращается в ноль. Если* $\Omega = \mathbb{R}^n$, *то финитность понимается как равенство нулю вне некоторого шара.*

Определение 2 *Функция* $\varphi(x)$ *называется основной в области* Ω, *если*

- $\varphi(x)$ *финитна в* Ω;
- $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Встает вопрос о том, насколько широк класс таких функций. Примером основной функции является функция "шапочка:"

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & , \quad |x| < \varepsilon, \\ 0 & , \quad |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Более того, для любой функции из L^2 можно построить сколь угодно близкую к ней основную функцию в метрике L^2. Доказательство этого утверждения можно найти в курсе функционального анализа.

Аналитическая функция не может быть финитной в силу теоремы единственности, которая гласит о том, что если аналитическая функция равна в нулю некоторой окрестности точки, то она тождественна нулю. Например, функция "шапочка"является финитной, однако ее нельзя разложить в ряд Тейлора в окрестности точки ε.

Легко проверить, что

1°. если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ основные, то и функция $(\varphi(x) + \psi(x))$ основная;

2°. если $\varphi(x)$ основная функция, то и $C\varphi(x)$ основная, $\forall C \in \mathbb{R}$.

Таким образом, совокупность основных функций образует линейное пространство D. Введем на множестве основных функций понятие сходимости или топологию.

Определение 3 *Последовательность функций называется сходящейся в пространстве* D, *обозначается* $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, *если*

- $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$, $D^\alpha \varphi_n \rightrightarrows D^\alpha \varphi$;

- *существует приграничная полоска, общая для всех функций последовательности, в которой все функции φ_n обращаются в ноль. Если область $\Omega = \mathbb{R}^n$, то существует шар, общий для всех функций последовательности, вне которого каждая из функций равна нулю).*

Совокупность множества основных функций вместе с введенным понятием сходимости образует линейное топологическое пространство основных функций D. Отметим свойства пространства D.
1°. D - полное;
2°. D - неметризуемо, т.е. не существует метрики $\rho(x, y)$ такой, что если $x_n \xrightarrow{D} y$, то $\rho(x_n, y) \to 0$.
После введения понятия основной функции можно перейти к понятию обобщенной функции или, как ее еще называют, распределения.

Определение 4 *Под обобщенной функцией f будем понимать произвольный линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве основных функций D.*

Значение функционала f на основной функции φ будем записывать как (f, φ). Разберем подробнее определение обобщенной функции f.

- Обобщенная функция f есть функционал на D, т.е. любой основной функции $\varphi \in D$ ставится в соответствие число (f, φ).

- Функционал f является линейным функционалом на D, т.е. $(f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1(f, \varphi_1) + a_2(f, \varphi_2)$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in D$.

- $f-$ непрерывный на D функционал, т.е. если $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то $(f, \varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f, \varphi)$.

Для удобства введем понятие обычной функции.

Определение 5 *Будем говорить, что функция $f(x)$ является обычной, если она локально интегрируема, т.е. для любого компакта K существует $\int\limits_K |f(x)|dx < \infty$.*

Обычными функциями являются, например, $\sin x, \cos x, \dfrac{1}{x^\alpha},\ \alpha < 1$.
Каждой обычной функции $f(x)$ можно поставить в соответствие обобщенную функцию f, действующую на основную функцию φ следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Функция $\varphi(x)$ финитна, следовательно, ограничена, а функция $f(x)$ обычная. Следовательно, этот интеграл сходится и, следовательно, f является функционалом. Линейность функционала следует из свойств интеграла. Покажем непрерывность

этого функционала: если $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то $(f,\varphi_n) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_n(x)dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Следовательно, этот функционал является непрерывным.
Дадим определение регулярной функции.

Определение 6 *Обобщенную функцию f называют регулярной, если*

$$(f,\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx,$$

где $f(x)-$ обычная функция.

Обычно пределы интегрирования не пишутся, т.к. они определяются финитностью функции $\varphi(x)$.

Определение 7 *Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются сингулярными функциями.*

Сингулярной функции нельзя сопоставить никакую локально-интегрируемую функцию. Простейшим примером сингулярной функции является $\delta-$ функция Дирака, определяемая следующим образом:

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0).$$

Сначала покажем, что она является обобщенной. Это отображение определено на всем пространстве D, оно каждой основной функции ставит в соответствие число, следовательно, является функционалом. Этот функционал является линейным и непрерывным. Непрерывность вытекает из того, что если $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то $\varphi_n(0) \to \varphi(0)$, что по определению функции δ, означает, что $(\delta,\varphi_n) \to (\delta,\varphi)$. Линейность следует из определения функции Дирака: $(\delta, a\varphi_1 + b\varphi_2) = a\,\varphi_1(0) + b\,\varphi_2(0) = a\,(\delta,\varphi_1) + b\,(\delta,\varphi_2)$.
Покажем теперь, что функция Дирака является сингулярной. Предположим противное. Тогда существует обычная функция $\delta(x)$ такая, что $\varphi(0) = \int \delta(x)\varphi(x)\,dx$, $\forall \varphi \in D$. Пусть x_1- одна из координат точки x. Тогда интеграл $\int \delta(x)(x_1\varphi(x))\,dx = x_1\varphi(x)|_{x=0} = 0$.
С другой стороны, т.к. $\delta(x)$ обычная функция, то $\delta(x)x_1$ тоже обычная функция. Тогда т.к. $\int(\delta(x)x_1)\varphi(x)\,dx = 0$, $\forall\varphi \in D$, т о, $\delta(x)x_1 = 0$ почти всюду. Это означает, что $\delta(x) = 0$ почти всюду и, следовательно, $\int \delta(x)\varphi(x)\,dx = 0$, а не $\varphi(0)$. Таким образом, мы пришли к противоречию.
Перейдем к вопросу равенства функций в смысле обобщенных функций.

Определение 8 *Две обобщенные функции f_1 и f_2 считаются равными, если $\forall\varphi \in D$ $(f_1,\varphi) = (f_2,\varphi)$.*

Если имеются две регулярные обобщенные функции и они равны как обобщенные функции, то $(f_1,\varphi) = \int f_1(x)\varphi(x)dx = \int f_2(x)\varphi(x)dx = (f_2,\varphi)$. Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду. Таким образом, можно говорить о том, что между регулярными и обобщенными функциями существует взаимооднозначное соответствие на множествах с ненулевой мерой.
Введем операции над обобщенными функциями следующим образом:

- $(f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi)$;
- $(af, \varphi) = a(f, \varphi)$.

Легко показать, что $(f_1 + f_2)$ и af также являются обобщенными функциями. Таким образом, после введения операций пространство обобщенных функций становится линейным.
Введем понятие сходимости в пространстве обобщенных функций.

Определение 9 *Последовательность обобщенных функций* $f_n \xrightarrow{D'} f$*, если для любой основной функции* φ *выполняется* $(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$.

Совокупность обобщенных функций вместе с введенным понятием сходимости образует линейное топологическое пространство обобщенных функций D'.
В теории обобщенных функций важное место занимают $\delta-$ образные последовательности. Дадим им определение

Определение 10 *Последовательность обычных функций* $f_n(x)$ *называется* δ *- образной, если* $f_n \xrightarrow{D'} \delta$.

Примером $\delta-$ образной последовательности является последовательность функций

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} & , \quad |x| < \varepsilon, \\ 0 & , \quad |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $f_\varepsilon \xrightarrow{D'} \delta,\ \varepsilon \to 0$. Для этого рассмотрим

$$(f_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,\varphi(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\varphi(\xi)\,2\varepsilon = \varphi(\xi), \quad \xi \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Т.к. $\varphi(\xi) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \varphi(0) = (\delta, \varphi)$, то мы показали, что последовательность сходится к $\delta-$ функции.
В механике при помощи δ-функции описываются точечные массы, точечные силы, линейная плотность.

37 Действия над обобщенными функциями.

В предыдущем пункте для обобщенных функций были введены операции сложения и умножения на число. Однако, в принципе, из определений не ясно, что будет результатом сложения обычных функций, если операцию сложения понимать как операцию сложения обобщенных функций. Поэтому обычно операции над обобщенными функциями вводят так, чтобы для обычных функций сохранялись все ранее известные свойства. Проиллюстрируем это на примере операции сложения и некоторых других.
1. Операция сложения.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - две обычные функции, тогда, воспользовавшись свойствами интеграла, для $\forall\varphi \in D$ получим:

$$\begin{aligned}(f_1(x)+f_2(x),\varphi(x)) &= \int (f_1(x)+f_2(x))\varphi(x)dx = \\ = \int f_1(x)\varphi(x)dx + \int f_2(x)\varphi(x)dx &= (f_1,\varphi)+(f_2,\varphi).\end{aligned}$$

Для обобщенных функций промежуточные действия из этого преобразования выбрасываются и операция сложения вводится следующим образом:

$$(f_1(x)+f_2(x),\varphi(x)) = (f_1,\varphi)+(f_2,\varphi).$$

При таком подходе к определению операции сложения, для обычных функций все свойства сложения сохраняются. Легко показать, что это определение корректно, другими словами, что сумма двух обобщенных функций также является обобщенной функцией, т.е. линейным непрерывным функционалом на пространстве основных функций D.

2. Введем операцию умножения обобщенной функции на бесконечно- дифференцируемую функцию.

Пусть $a(x) \in C^\infty(\Omega)$ и f - обычная функция, тогда $\forall\varphi \in D$ выполняется:

$$(a(x)f,\varphi) = \int a(x)f(x)\varphi(x)dx = \int f(x)(a(x)\varphi(x))dx = (f, a(x)\varphi).$$

Поэтому операция умножения на бесконечно-дифференцируемую функцию для обобщенных функций определяется следующим образом:

$$(a(x)f,\varphi) = (f, a(x)\varphi).$$

Проверим корректность операции для обобщенных функций. Для этого надо показать, что $a(x)\varphi(x)$ - основная. Произведение двух бесконечно дифференцируемых функций – бесконечно дифференцируемая функция. Функция $\varphi(x)$ финитна, поэтому $a(x)\varphi(x)$ тоже финитна. Следовательно, $a(x)\varphi(x)$ - основная. Поэтому $a(x)f-$ функционал, определенный на всем пространстве D. Доказательство его линейности и непрерывности проведите самостоятельно.

Пример. Рассмотрим функцию $x\delta$ и покажем, что она равна нулю. Действительно, $\forall\varphi \in D$ $(x\delta,\varphi) = (\delta, x\varphi) = 0 = (0,\varphi)$, т.е. $x\delta = 0$.

3. Операция сдвига обобщенной функции.

Пусть $f(x)$ - обычная функция, тогда определим через $f(x-a)$ обобщенную функцию сдвинутого аргумента. Сделав замену переменных $x-a=y$, для $\forall\varphi \in D$ можно записать:

$$(f(x-a),\varphi) = \int f(x-a)\varphi(x)dx = \int f(y)\varphi(y+a)dy = (f(x),\varphi(x+a)).$$

Для обычных функций эти равенства представляют собой тождественные преобразования. Для обобщенных же функций операция сдвига вводится следующим образом:

$$(f(x-a),\varphi)=(f(x),\varphi(x+a)).$$

В частности,

$$(\delta(x-a),\varphi)=(\delta(x),\varphi(x+a))=\varphi(a).$$

Корректность определения, линейность и непрерывность функционала легко проверяются.
4. Операция дифференцирования обобщенных функций.
Пусть $f-$ обычная функция, производная от которой f' тоже обычная функция. Тогда

$$(f',\varphi)=\int f'(x)\varphi(x)dx=f(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{+\infty}-\int f(x)\varphi'(x)dx=-(f,\varphi').$$

Согласно общей идеологии, для определения операции дифференцирования обобщенных функций выбрасываются промежуточные этапы и остаются лишь начало и конец записи:

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi').$$

Проверим корректность определения операции дифференцирования обобщенных функций, т.е. что в результате мы получаем линейный непрерывный функционал. Сначала покажем, что функция φ' основная. Так как $\varphi\in C^\infty$, то и $\varphi'\in C^\infty$. Функция φ - финитна, следовательно, она в некоторой области равна нулю и, следовательно, φ' в этой области тоже равна нулю. Таким образом, правая часть (f,φ') определена. Линейность следует из линейности функционала f. Покажем, что этот функционал непрерывен. Рассмотрим последовательность $\varphi_k\xrightarrow{D}\varphi$. Легко показать, что в этом случае последовательность $\varphi_k'\xrightarrow{D}\varphi'$. Тогда $(f',\varphi_k)=-(f,\varphi_k')\to-(f,\varphi')=(f',\varphi)$, т.е. $(f',\varphi_k)\longrightarrow(f',\varphi)$, что означает, что функционал непрерывен. Мы получили, что все обобщенные функции имеют производные в пространстве обобщенных функций.
Так как производная обобщенной функции снова является обобщенной функцией, то она будет иметь вторую обобщенную производную. Продолжая рассуждения, получим, что обобщенные функции имеют производные любого порядка. Для них справедливо:

$$(f^{(k)},\varphi)=(-1)^k(f,\varphi^{(k)}).$$

Рассуждая аналогично, можно ввести операцию дифференцирования обобщенных функций нескольких переменных:

$$(D^\alpha f,\varphi)=(-1)^{|\alpha|}(f,D^\alpha\varphi),$$

где α - мультииндекс, $|\alpha|$ - порядок мультииндекса.

В силу способа определения операции обобщенного дифференцирования, если функция обычная и ее производная тоже обычная функция, то обобщенная производная совпадает с обычной производной. Например, обобщенные производные функций $\sin x,\ x^2$ соответственно равны $\cos x, 2x$.

В том случае, когда обычная функция не имеет обычную производную хотя бы в одной точке, обобщенная и обычная производные могут не совпадать. В качестве примера рассмотрим функцию Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

$\Theta(x)-$ обычная функция, т.к. она локально интегрируема. Ей можно сопоставить обобщенную функцию, которая, в силу свойств операции обобщенного дифференцирования, имеет производную любого порядка. Если мы рассмотрим обычную производную функции $\Theta(x)$, то она равна нулю везде, кроме единственной точки ноль, в которой эта производная не существует. Найдем обобщенную производную функции $\Theta(x)$:

$$(\Theta'(x), \varphi) = -(\Theta(x), \varphi') = -\int \Theta(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)dx = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) =$$
$$= (\delta, \varphi),$$

следовательно,

$$\Theta'(x) = \delta(x).$$

Как видно, в этом случае обобщенная производная не тождественна обычной производной.

Рассмотрим теперь фундаментальное решение уравнения Лапласа $\dfrac{1}{4\pi r}$ в трехмерном пространстве, где $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ - обычная функция в $\mathbb{R}^3$. Найдем Лапласиан функции $1/4\pi r$ в смысле теории обобщенных функций. Т.к.для любой обобщенной функции f и основной функции φ выполняется

$$\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right),$$

то будет выполняться и равенство

$$(-\Delta f, \varphi) = -(f, \Delta\varphi).$$

Обозначим через T_ε и S_ε соответственно шар и сферу с центрами в начале координат и радиусами ε. Тогда воспользовавшись второй формулой Грина, получим

$$(-\Delta\frac{1}{4\pi r}, \varphi) = -(\frac{1}{4\pi r}, \Delta\varphi) \;\; = \;\; -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta\varphi}{4\pi r}\,dV = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3/T_\varepsilon} \varphi\Delta\frac{1}{r}\,dV +$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left(-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right)dS \;\; + \;\; \int\limits_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right)dS_\varepsilon\Bigg).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю т.к. $1/4\pi r$ является решением уравнения Лапласа, а второе в силу финитности функции φ. Тогда

$$(-\Delta\frac{1}{4\pi r},\varphi)=\int\limits_{S_\varepsilon}\left(-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right)dS_\varepsilon.$$

Разобьем интеграл на два и рассмотрим каждое получившееся слагаемое отдельно.
а) Обозначим через

$$J_1=-\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_\varepsilon,$$

а через $A_\varepsilon=\max_{S_\varepsilon}\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|$, тогда

$$|J_1|\leqslant\max_{S_\varepsilon}\left|\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|4\pi\varepsilon^2\leqslant\varepsilon\max_{S_\varepsilon}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|=\varepsilon A_\varepsilon.$$

Т.к. $\varphi\in C^\infty$, то все числа A_ε не превосходят некоторую константу A, для любого ε, не превосходящего некоторого $\varepsilon_0>0$. Следовательно, $J_1\leqslant\varepsilon A\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$.
б) Рассмотрим

$$J_2=\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)dS_\varepsilon=\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{1}{4\pi r^2}\varphi\,dS_\varepsilon,$$

т.к. в том случае, когда поверхность является сферой, $\dfrac{\partial}{\partial n}=-\dfrac{\partial}{\partial r}$.
Покажем, что $J_2=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,dS\underset{\varepsilon\to0}{\to}\varphi(0)$. Для этого оценим разность

$$\left|\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}(\varphi(x)-\varphi(0))\,dS\right|\leqslant\max_{x\in S_\varepsilon}|\varphi(x)-\varphi(0)|\underset{\varepsilon\to0}{\to}0.$$

Таким образом, мы показали, что

$$\left(-\Delta\frac{1}{4\pi r},\varphi\right)=\varphi(0)=(\delta,\varphi),$$

следовательно,

$$-\Delta\frac{1}{4\pi r}=\delta.$$

Рассмотрим некоторые свойства операции обобщенного дифференцирования.
1°. Пусть $a(x)$ - бесконечно дифференцируемая функция. Тогда $D(a(x)y)=Da(x)y+a(x)Dy$.

▼Не умаляя общности, достаточно показать, что

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = \frac{\partial a}{\partial x_1} f + a\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Пусть φ - любая основная функция, тогда

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial(af)}{\partial x_1}, \varphi\right) = -\left(af, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = -\left(f, a\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \\ = \ -&\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1} - \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x_1}\right) + \left(f, \frac{\partial a}{\partial x_1}\varphi\right) = \\ = \ &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, a\varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \left(a\frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi\right) + \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right) = \\ = \ &\left(a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f, \varphi\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_1} = a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial a}{\partial x_1} f.$$

▲

Пример.

$$(x\Theta(x))' = \Theta(x) + x\delta(x) = \Theta(x).$$

2°. Операция обобщенного дифференцирования является непрерывной операцией. Это значит что, если последовательность обобщенных функций $f_n(x) \xrightarrow{D'} f(x)$, то сходится и последовательность $f'_n(x)$ к функции $f'(x)$, т.е. $f'_n(x) \xrightarrow{D'} f'(x)$.

▼Пусть последовательность $f_n(x) \xrightarrow{D'} f(x)$. Тогда для любой основной функции φ будет сходиться числовая последовательность $(f_n(x), \varphi) \to (f(x), \varphi)$. Нужно показать, что, последовательность $(f'_n(x), \varphi) \to (f'(x), \varphi)$.

Т.к. для любой основной функции φ выполняется $(f'_n(x), \varphi) = -(f_n(x), \varphi')$, то в силу предположения будет выполняться

$$(f'_n(x), \varphi) = -(f_n(x), \varphi') \to -(f(x), \varphi') = (f'(x), \varphi).$$

▲

Легко показать, что это свойство справедливо для производных любого порядка.

Пример 1. Так как последовательность $\frac{1}{k^2}\sin kx \underset{k\to\infty}{\to} 0$, то, в силу второго свойства, будут сходиться и последовательности, полученные из нее путем дифференцирования. В частности, $\frac{1}{k}\cos kx \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\sin kx \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $k\cos kx \underset{k\to\infty}{\to} 0$ и, более того, последовательности $k^n\sin kx \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $k^n\cos kx \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Можно показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows u(x)$, то в пространстве обобщенных функций будет сходиться и последовательность частичных сумм $\sum_{n=1}^{k} u_n(x) \xrightarrow{D'} u(x)$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}$. Если для его коэффициентов a_n выполняется неравенство

$$|a_n| \leqslant \frac{C}{n^2}, \tag{37.1}$$

то по признаку Вейерштрасса, он сходится равномерно, так как $|e^{inx}| = 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, если выполняется неравенство (37.1), то рассматриваемый ряд будет сходиться в пространстве обобщенных функций к некоторой функции $u(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx} \xrightarrow{D'} u(x).$$

Так как в D' ряд сходится, то, в силу второго свойства, в D' будет сходиться и ряд, полученный из него дифференцированием k раз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (in)^k e^{inx} \xrightarrow{D'} u^{(k)}(x).$$

Утверждение. Если коэффициенты ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{inx}$ растут не быстрее некоторой степени, т.е. $|b_n| \leqslant Cn^p$, то ряд сходится в пространстве D'.

▼Рассмотрим вспомогательный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n e^{inx}}{(in)^{p+2}}$. По условию, $|b_n| \leqslant Cn^p$. Поэтому $\left|\frac{b_n}{(in)^{p+2}}\right| \leqslant \frac{C}{n^2}$. Ряд $\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, вспомогательный ряд сходится к некоторой функции $v(x)$. Этот ряд сходится равномерно и, следовательно, сходится в смысле теории обобщенных функций. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{inx} \xrightarrow{D'} v^{(p+2)}(x).$$

▲

Замечание. Если для решения смешанной задачи формально применить метод Фурье, то в том случае, когда правая часть и начальные условия не гладкие, ряды Фурье для производных не будут сходиться равномерно. Поэтому формальное решение не будет являться классическим решением. Однако можно показать, что оно будет обобщенным решением, т.е. будет удовлетворять уравнению в смысле обобщенных функций.

38 Обобщенные производные по Соболеву. Соболевские пространства W_p^l.

В предыдущем пункте была введена операция дифференцирования обобщенных функций. Обобщенная производная, определяемая таким образом называется обобщенной производной по Шварцу.

Если функция f обычная, то ее обобщенная производная может быть либо обычной функцией, либо сингулярной обобщенной функцией. Если обобщенная производная является обычной функции, то она называется производной по Соболеву. Другими словами, можно сформулировать определение.

Определение 1 *Пусть f - обычная функция. Функцию $v(x)$, будем называть ее p-ой обобщенной производной по Соболеву, т.е. $v(x) = f^{(p)}$, если p-я обобщенная производная по Шварцу функции f есть обычная функция.*

Это определение можно переформулировать следующим образом:

Определение 2 *Локально интегрируемая функция $v(x)$ называется p-ой обобщенной производной по Соболеву от функции f (т.е. $v(x) = f^{(p)}$), если для любой основной функции Φ имеет место следующее соотношение $(v(x), \Phi) = (-1)^p (f, \Phi^{(p)})$.*

Т.к. f, v - обычные функции, то последнее равенство можно переписать в интегральном виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\Phi(x)dx = (-1)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\Phi^{(p)}(x)\, dx.$$

Очевидно, что обобщенная производная по Соболеву, в отличие от обобщенной производной по Шварцу, существует не всегда. Поясним причины, по которым потребовалось вводить второе определение дифференцирования обобщенных функций.
Одним из подходов к построению обобщенных решений уравнений математической физики является подход, при котором требуется, чтобы функция u удовлетворяла уравнению в смысле обобщенных функций. В этом случае решение u является обобщенной функцией. Если коэффициенты постоянны, то существует теория, справедливая не только для уравнений математической физики, но и для более общих уравнений в частных производных. Сложности возникают когда коэффициенты уравнений переменные. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = 0.$$

Возникает вопрос об определении произведения функции $k(x)$ на производную u_x и $q(x)$ на u. Эти произведения были определены только в случае, когда коэффициенты уравнения бесконечно дифференцируемы. Если же мы будем рассматривать обобщенные производные по Соболеву, то обобщенные производные от обычных функций будут также обычными функциями и в этом случае сложности с определением операции умножения производной на функцию не возникают.
Отметим, что при использовании обобщенных производных по Соболеву, могут возникать парадоксальные на первый взгляд ситуации. Например, функция может иметь вторую производную по Соболеву, но не иметь первой. Если разбить область Ω на две подобласти Ω_1, Ω_2, то функция может иметь обобщенные производные по Соболеву в областях Ω_1, Ω_2, но не иметь в области Ω. Однако можно ввести пространства Соболева W_p^l, в которых таких парадоксов не будет. Существует два способа построения этих пространств.
1) При первом способе мы можем исходить из множества функций $u(x) \in C^l(\overline{\Omega})$. Т.к. эти функции и их производные непрерывны в Ω, следовательно, там они ограничены. Поэтому они будут интегрируемы с p-й степенью, т.е. $u(x) \in L_p(\Omega)$ и

$u^{(k)}(x) \in L_p(\Omega)$, где $k = \overline{0,l}$. В этом пространстве можно ввести следующую норму:

$$\|u\|^p_{\widetilde{W}^l_p} = \|u\|^p_{L_p} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha u\|^p_{L_p}. \tag{38.1}$$

Это пространство является линейным, нормированным, но, в общем случае, неполным относительно введенной нормы. Пространство $\widetilde{W}^l_p$ определяется как результат пополнения исходного множества функций относительно введенной нормы.
2) Второй подход. Рассмотрим множество функций таких, что что $u \in L_p$ и все обобщенные производные по Соболеву порядка l также интегрируемы с $p-$й степенью: $D^\alpha u \in L_p$, $|\alpha| = l$. На этом множестве вводится такая же норма (38.1) и доказывается, что оно является полным пространством. Кроме того, можно показать что оно сепарабельно, т.е. содержит счетное всюду плотное множество. Если граница области достаточно гладкая, то оба подхода определяют одно и тоже пространство. Вспомним, что среди всех пространств L_p особую роль играло пространство L_2, т.к. введя на нем скалярное произведение, можно было превратить его в гильбертово. Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и для пространств W^l_p, а именно, если в пространствах W^l_2 определить скалярное произведение следующим образом:

$$(u, v)_{W^l_2} = (u, v) + \sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

то все эти пространства станут гильбертовыми. В правой части через $(\cdot, \cdot)$ обозначено обычное скалярное произведение в L_2. В результате получим гильбертово пространство W^l_2. В литературе эти пространства обычно обозначают H^l.

Также надо отметить очень важное пространство $\overset{\circ}{W}{}^l_2$ или $W^l_{2,0}$. В него входят функции которые на границе области в некотором смысле обращаются в ноль. Поясним, что значит "в некотором смысле". Любая функция $f \in L_2(\Omega)$ определена с точностью до значения на множестве меры ноль. Поэтому на границе она не определена, т.к. $mes\ \partial\Omega = 0$. Элементами множества L_2 являются классы функций, отличающиеся на множестве меры ноль. В том случае, когда в этом классе есть непрерывная функция (можно показать что если она существует, то она единственна), можно говорить о значении функции f на границе.

Пространство $\overset{\circ}{W}{}^l_2$ можно построить следующим образом. Если в подходе 1) для функции $u \in C^l(\overline{\Omega})$ добавить условие финитности функции u в области Ω, то замыкая это пространство мы получим пространство $W^l_{2,0}$. Так как в этом случае мы замыкаем более узкое множество, то $W^l_{2,0} \subset W^l_2$.

Понятие о теоремах вложения.

1) Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$. В этом пространстве определена норма. Если функция u имеет две непрерывные производные, то ее можно также рассматривать как элемент $C^1(\overline{\Omega})$, или как элемент $C(\overline{\Omega})$. Элемент u по существу один и тот же, но его норма в разных пространствах будет разной. Таким образом, можно определить, так называемые, операторы вложения I, которые каждому элементу $\widetilde{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ ставят в соответствие тот же элемент $u \in C(\overline{\Omega})(C^1(\overline{\Omega}))$. Очевидно, что из определения нормы в пространствах C, C^1, C^2, следует, что I - ограниченный оператор и $||I|| \leqslant 1$, т.к $||u||_{C^1(\Omega)} = ||I\widetilde{u}||_{C^1(\Omega)} \leqslant ||\widetilde{u}||_{C^2(\Omega)}$.

2) Теперь рассмотрим элемент $u \in W_p^l$. Этому элементу можно поставить в соответствие $u \in L_p$, причем норма в W_p^l больше чем в L_p. Т.о, можно определить оператор вложения из W_p^l в L_p, норма которого не превосходит единицы.

Вышеприведенные рассуждения являются тривиальными в отличие от сформулированных в следующей теореме.

Теорема 1 *Оператор вложения из W_p^l в W_p^m $(m \leq l)$ ограничен.*

Напомним, что оператор называется ограниченным, если он ограниченное множество переводит в ограниченное. В частности, из этой теоремы следует, что если функция $f \in W_p^l$, то она имеет не только $l-$е производные по Соболеву, но и все производные по Соболеву меньших порядков.

Возникает вопрос о том, будет ли существовать хотя бы одна обычная производная функции, если существует некоторое число ее производных по Соболеву. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2 (теорема вложения Соболева) *При $l > \dfrac{n}{2} + k$ имеет место вложение*

$$H^l(\mathbb{R}^n) \subset C^k(\mathbb{R}^n), \tag{38.2}$$

причем оператор вложения непрерывен.

Поясним формулировку теоремы. На первый взгляд кажется, что она бессмысленна, поскольку функцию $u \in H^l(\mathbb{R}^n)$ можно как угодно изменять на любом множестве меры нуль, не меняя соответствующей обобщенной функции (и элемента пространства $H^l(\mathbb{R}^n)$). Изменяя же функцию u во всех точках с рациональными координатами (множество точек с рациональными координатами имеет меру ноль), мы можем добиться того, что она всюду будет разрывной. Поэтому включение (38.2) следует понимать так: если $u \in H^l(\mathbb{R}^n)$, то существует единственная функция $u_1 \in C^k(\mathbb{R}^n)$, совпадающая с исходной функцией $u(x)$ почти всюду (для краткости мы вместо u_1 мы снова будем писать u). Заметим, что единственность непрерывного представителя очевидна, так как в любой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдутся точки любого множества полной меры, так что изменение непрерывной функции на множестве меры нуль приводит к функции, которая разрывна во всяком случае во всех точках, где произошло изменение.

Сформулируем теорему, которая будет использоваться в дальнейшем.

Теорема 3 (Реллиха) *Оператор вложения из пространства $W_2^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ является компактным.*

Напомним, что оператор называется компактным или вполне непрерывным, если он ограниченное множество переводит в компактное. Теорема означает, что любое ограниченное множество в норме $W_2^1(\Omega)$ является компактным в $L_2(\Omega)$.

39 Энергетическое пространство положительно определенного оператора.

Пусть дано гильбертово пространство H и действующий в нем оператор A. $\mathcal{D}(A)$ - его область определения, $\mathcal{R}(A)$ - множество значений, $\mathcal{D}(A) \subset H$.
Если оператор A неограниченный, то он не может быть задан на всем пространстве H, т.е. $\mathcal{D}(A) \not\equiv H$. Будем считать что A - плотно определен в H, т.е. для любого элемента $u \in H$ существует последовательность функций $v_n \in \mathcal{D}(A)$ такая что $v_n \to u$. Тогда замыкание $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

Определение 1 *Оператор A называется симметричным, если $\forall u, v \in \mathcal{D}(A)$, выполняется $(Au, v) = (u, Av)$.*

Отметим, что для ограниченных операторов самосопряженность и симметричность в конечномерных пространствах одно и то же. Для неограниченных операторов или в бесконечномерных пространствах эти понятия не являются эквивалентными.

Определение 2 *Симметричный оператор A называется положительно определенным, если $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, выполняется $(Au, u) \geqslant \gamma^2 \|u\|^2$, где $\gamma = const, \gamma \neq 0$.*

Определение 3 *Симметричный оператор A называется положительным, если $\forall u \in \mathcal{D}(A)$, выполняется$(Au, u) \geqslant 0$, причем $(Au, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.*

Из определений видно, что если оператор A положительно определен, то он положителен. Обратное верно лишь для конечномерных пространств.

Пример. Пусть $H = L_2(0, 1)$, $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{D}(A) = C^2(0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Покажем, что оператор A положительный.
Для этого для $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(A)$ рассмотрим скалярное произведение (Au, v) и проинтегрировав два раза по частям и воспользовавшись условием $v(0) = v(1) = 0$, получим

$$(Au, v) = -\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2}\, v\, dx = -\int_0^1 u\, \frac{d^2v}{dx^2}\, dx = (u, Av).$$

Следовательно, оператор A симметричен. Рассмотрим теперь

$$(Au, u) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{du}{dx} dx = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geqslant 0.$$

Из симметричности и последнего неравенства следует положительность оператора A.
Замечание. Для оператора, действующего в конечномерном пространстве, положительность означает, что все его собственные значения будут положительны.

Определение 4 *Пусть $A-$ положительно определенный оператор. Тогда на $\mathcal{D}(A)$ можно ввести новое скалярное произведение*

$$[u, v]_A = (Au, v),$$

которое называется энергетическим скалярным произведением.

Проверим выполнение аксиом линейности, симметричности и положительности.
1) Энергетическое скалярное произведение линейно: $[\alpha u_1 + \beta u_2, v]_A = (A(\alpha u_1 + \beta u_2), v) = (\alpha A u_1 + \beta A u_2, v) = \alpha(Au_1, v) + \beta(Au_2, v) = \alpha[u_1, v]_A + \beta[u_2, v]_A$.
2) Энергетическое скалярное произведение симметрично: $[u, v]_A = (Au, v) = (v, Au) = (Av, u) = [v, u]_A$.
3) Положительно: $[u, u]_A = (Au, u) \geqslant \gamma^2 ||u||^2 \geqslant 0$, в силу положительной определенности оператора A. А также, если $[u, u]_A = 0$, то выполняется неравенство $0 \geqslant \gamma^2 ||u||^2$, а это может быть лишь в том случае, если $u = 0$.

Определение 5 *Если $A-$ положительно определенный оператор, то для любой функции u выполняется*

$$||u|| \leqslant \frac{||u||_A}{\gamma},$$

где $||u||_A = ([u, u]_A)^{1/2}$ называется энергетической нормой.

Рассмотрим пространство $\mathcal{D}(A)$. Оно было бы гильбертовым, если бы выполнялось условие полноты. Если из определения гильбертова пространства исключить условие полноты, то такое пространство называется предгильбертовым. Поэтому $\mathcal{D}(A)$ является предгильбертовым. По теореме из функционального анализа, любое неполное множество можно пополнить с сохранением нормы. *Результат такого пополнения $\mathcal{D}(A)$ относительно энергетической нормы называется энергетическим пространством H_A.* Т.к. H_A является пополнением $\mathcal{D}(A)$, то $\mathcal{D}(A) \subset H_A$. Оказывается, что для пространств H_A и H также справедливо включение $H_A \subset H$.

Теорема 1 (Фридрихса) *Элементы энергетического пространства положительно определенного оператора A принадлежат исходному пространству, т.е. справедлива следующая цепочка вложений: $\mathcal{D}(A) \subset H_A \subset H$.*

▼Для доказательства теоремы достаточно показать, что между элементами пространства H_A и элементами исходного пространства H можно установить линейно изоморфное соответствие.

1. $\forall u \in H_A$ приводится в соответствие один и только один элемент $u' \in H$;
2. Если $u, v \in H_A$ приведены в соответствие $u', v' \in H$, то элементу $\lambda u + \mu v \in H_A$ приведен в соответствие элемент $\lambda u' + \mu v' \in H$;
3. Различным элементам из H_A соответствуют различные элементы из H.

Смотри учебник (Михлин)▲
В заключение покажем, что полученная выше из неравенства положительной определенности оценка

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma}\|u\|_A, \forall u \in \mathcal{D}(A)$$

справедлива не только для элементов из $\mathcal{D}(A)$, но и из всего пространства H_A.

Мы условились считать, что $\mathcal{D}(A)$ всюду плотное в H, следовательно, $\mathcal{D}(A)$ всюду плотное и в H_A. Тогда $\forall u \in H_A$ можно найти последовательность $u_n \in \mathcal{D}(A)$ такую, что $u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} u$ в энергетической норме. Для $\forall\, u_n$ справедливо $\|u_n\| \le \dfrac{1}{\gamma}\|u_n\|_A$. Используя непрерывность нормы, мы получаем при $n \to \infty$, что $\|u\| \le \dfrac{1}{\gamma}\|u\|_A, \forall u \in H_A$

40 Функционал энергии. Обобщенное решение уравнения $Au = f$.

Определение 1 *Пусть $A-$ положительно определенный оператор. Рассмотрим уравнение*

$$Au = f, \tag{40.1}$$

где $f \in H$. Элемент $u \in \mathcal{D}(A)$, удовлетворяющий уравнению (40.1), называется классическим решением уравнения (40.1).

Решение уравнения (40.1) тесно связано с задачей о нахождении минимума *функционала энергии*

$$\Phi(u) = (Au, u) - 2(u, f). \tag{40.2}$$

Теорема 1 *Пусть элемент $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ является классическим решением уравнения (40.1), тогда на этом элементе функционал энергии (40.2) принимает минимальное значение. И наоборот, если на элементе $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ функционал энергии (40.2) принимает минимальное значение, то элемент u_0 является классическим решением уравнения (40.1).*

▼1) Пусть $u_0 \in \mathcal{D}(A)-$ решение уравнения (40.1), тогда для любого элемента $v \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned}
\Phi(u_0 + v) &= (A(u_0 + v), u_0 + v) - 2(u_0 + v, f) \\
&= (Au_0, u_0) - 2(u_0, f) + 2(Au_0 - f, v) + (Av, v) \\
&= \Phi(u_0) + (Av, v) \ge \Phi(u_0),
\end{aligned}$$

так как $(Av, v) \ge 0$ в силу того, что $A-$ положительно определенный оператор.
2)Пусть теперь $u_0 \in \mathcal{D}(A)-$ элемент, на котором функционал энергии (40.2) принимает минимальное значение. Тогда для любого элемента $v \in \mathcal{D}(A)$ функция $G(\alpha) = \Phi(u_0 + \alpha v)$ принимает минимальное значение при $\alpha = 0$.

$$G(\alpha) = \alpha^2(Av, v) + \alpha\left((Av, u_0) + (Au_0, v) - 2(v, f)\right) + \Phi(u_0).$$

Вычисляя $G'(\alpha)$ и приравнивая ее значение в точке $\alpha = 0$ нулю, получим:

$$(Au_0 - f, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

Если бы $Au - f \in \mathcal{D}(A)$, то в качестве v можно было бы взять $Au - f$ и тогда из последнего равенства следовало бы что $||Au - f|| = 0 \Leftrightarrow Au = f$. Однако функция $Au - f \in H$, а $v \in \mathcal{D}(A)$, поэтому так поступить нельзя. Однако можно воспользоваться тем, что множество $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в H. Следовательно, можно найти последовательность $v_n \in \mathcal{D}(A)$, сходящуюся в H к $Au_0 - f$. Затем, совершая предельный переход при $n \to \infty$, и пользуясь непрерывностью скалярного произведения, получим: $\|Au_0 - f\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Au_0 = f$. ▲

Расширим функционал $\Phi(u)$, определенный на $\mathcal{D}(A)$, на энергетическое пространство H_A, положив

$$\Phi(u) = [u, u]_A - 2(u, f). \tag{40.3}$$

Так как на $\mathcal{D}(A)$ выполняется $[u, u]_A = (Au, u)$, то функционалы (40.2) и (40.3) совпадают на $\mathcal{D}(A)$ и, следовательно, функционал (40.3)действительно является расширением функционала (40.2).

Определение 2 *Обобщенным решением уравнения $Au = f$ называется элемент $u_0 \in H_A$, на котором функционал (40.3) принимает минимальное значение*

Теорема 2 *Обобщенное решение уравнения $Au = f$ существует и единственно.*

▼Рассмотрим второе слагаемое в функционале энергии (40.3) и обозначим через $F(u) = (u, f)$. Так как $H_A \subset H$, то $F(u)$, очевидно, представляет собой линейный функционал, определенный на H_A. Покажем, что этот функционал непрерывен. Непрерывность для линейных функционалов равносильна их ограниченности. То есть нам надо показать, что существует такая постоянная C, что для всех $u \in H_A$ выполняется неравенство $|F(u)| \le C\|u\|_A$. Но

$$|F(u)| = |(u, f)| \le \|u\|\|f\| \le \frac{1}{\gamma}\|f\|\|u\|_A,$$

так как $\|u\| \le \frac{1}{\gamma}\|u\|_A$ для всех $u \in H_A$. Следовательно, в качестве постоянной C можно взять $\|f\|/\gamma$.

По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует такой элемент $u_0 \in H_A$, что

$$F(u) = (u, f) = [u, u_0]_A. \tag{40.4}$$

Тогда функционал (40.3) мы можем представить в виде:

$$\Phi(u) = [u, u]_A - 2(u, f) = [u, u]_A - 2[u, u_0]_A = [u - u_0, u - u_0]_A - [u_0, u_0]_A.$$

Отсюда следует, что функционал (40.3) принимает минимальное значение $-\|u_0\|_A^2$ на элементе u_0, который и является обобщенным решением уравнения $Au = f$.

Пусть наряду с u_0 существует элемент u_1, на котором функционал (40.3) принимает минимальное значение $-\|u_0\|_A^2$. Тогда $[u_1 - u_0, u_1 - u_0]_A = 0 \;\Rightarrow u_1 = u_0$. ▲

Пусть исходное гильбертово пространство H сепарабельно. Тогда сепарабельным будет и пространство H_A. Следовательно в нем существует счетная полная ортонормированная система элементов $\{\varphi_i\}$. Разложим u_0 в ряд Фурье по этой системе :

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i \quad \text{где} \quad c_i = [u_0, \varphi_i]_A$$

Но, согласно (40.4), $c_i = [u_0, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i) \Rightarrow$

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i. \tag{40.5}$$

41 Положительная определенность оператора задачи Дирихле.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона.

$$-\Delta u = f, \tag{41.1}$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{41.2}$$

Определим оператор задачи A. Для этого нужно задать его область определения и правило, по которому любому элементу $u \in \mathcal{D}(A)$ ставится в соответствие некоторый элемент $Au \in H$. В качестве исходного пространства H возьмем пространство $L_2(\Omega)$, а в качестве $\mathcal{D}(A)-$ множество дважды непрерывно дифференцируемых и финитных в области Ω функций. Оператор A ставит в соответствие $\forall u \in \mathcal{D}(A)$ элемент $-\Delta u \in L_2(\Omega)$. Тогда задачу (41.1),(41.2) можно записать в операторной форме

$$Au = f.$$

Рассмотрим вопрос о существовании обобщенного решения этой задачи. Если мы покажем, что оператор задачи A положительно определен, то из этого будут следовать существование и единственность обобщенного решения. Для этого нужно показать, что
1) $\mathcal{D}(A)$ всюду плотно в H, т.е. $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$;
2) оператор A симметричен, т.е.$(Au, v) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A)$;
3) для $\forall u \in \mathcal{D}(A)$ выполняется неравенство

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2\|u\|^2. \tag{41.3}$$

1) Из курса функционального анализа известно, что множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций является всюду плотным в H, следовательно, множество дважды непрерывно дифференцируемых функций тем более будет всюду плотно в H, т.е. $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$.

2) Покажем симметричность оператора A. Для этого рассмотрим в $L_2(\Omega)$ скалярное произведение (Au, v) и преобразуем его, воспользовавшись второй формулой Грина:

$$(Au, v) = -\int\limits_{\Omega} v\Delta u\, dx = -\int\limits_{\Omega} u\Delta v\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial n}u - \frac{\partial u}{\partial n}v\right) ds.$$

Так как функции $u, v \in \mathcal{D}(A)$, то на границе они обращаются в ноль. Следовательно, в ноль обращается и последнее слагаемое. Таким образом, мы получили равенство

$$(Au, v) = -\int\limits_{\Omega} u\Delta v\, dx = (u, Av),$$

из которого, по определению следует симметричность оператора.
3) Докажем выполнение неравенства 41.4. Сначала покажем положительность оператора A. Рассмотрим скалярное произведение

$$(Au, u) = -\int\limits_{\Omega} u\Delta u\, dx.$$

Используя третью формулу Грина, получим:

$$(Au, u) = \int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Откуда, с учетом финитности функции u в области Ω, следует что

$$(Au, u) = \int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant 0.$$

Если $(Au, u) = 0$, то $\int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \;\Rightarrow\; u = C,$ где $C = const$. Но $u \in C(\bar{\Omega})$ и на границе обращается в ноль. Следовательно, $C = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$.
Таким образом, мы показали положительность оператора. Чтобы показать положительную определенность докажем неравенство Фридрихса:

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dxdy \leqslant \beta^2 \int\limits_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dxdy,$$

картинка
Поместим область Ω в некоторый прямоугольник Π со сторонами a и b. Рассмотрим функцию u, определенную в Ω и введем функцию

$$\widetilde{u}(x, y) = \begin{cases} u & , \quad x, y \in \Omega \\ 0 & , \quad x, y \notin \Omega \end{cases}$$

Так как функция u финитная в области Ω, то функция $\widetilde{u}$ будет непрерывной в прямоугольнике. Представим функцию $\widetilde{u}(x,y)$ в следующем виде:

$$\widetilde{u}(x,y) = \int\limits_{(x,0)}^{(x,y)} \widetilde{u}_\eta(x,\eta)\,d\eta = \widetilde{u}(x,y) - \widetilde{u}(x,0).$$

Тогда воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получим:

$$\widetilde{u}^2(x,y) = \left(\int\limits_0^y \widetilde{u}_\eta(x,\eta)\,d\eta\right)^2 \leqslant \int\limits_0^y \widetilde{u}_\eta^2(x,\eta)\,d\eta \int\limits_0^y 1^2 d\eta \leqslant \int\limits_0^y \widetilde{u}_\eta^2(x,\eta)\,d\eta \cdot b.$$

Так как $\widetilde{u}_\eta^2(x,\eta)$ - неотрицательная функция, то в последнем интеграле можно расширить промежуток интегрирования:

$$\widetilde{u}^2(x,y) \leqslant \int\limits_0^b \widetilde{u}_\eta^2(x,\eta)\,d\eta \cdot b.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по всему прямоугольнику Π.

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b \widetilde{u}^2(x,y)\,dydx \leqslant b \int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^b \widetilde{u}_\eta^2(x,\eta)\,d\eta dydx =$$

$$= b^2 \int\limits_0^a\int\limits_0^b \widetilde{u}_\eta^2(x,\eta)\,d\eta dx = b^2 \int\limits_0^a\int\limits_0^b \widetilde{u}_y^2(x,y)\,dydx.$$

Этот интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов: по области Ω и по $\Pi\backslash\Omega$. Однако если вспомнить, что в $\Pi\backslash\Omega$ функция $\widetilde{u} = 0$, то последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\int\limits_\Omega u^2 dxdy \leqslant b^2 \int\limits_\Omega u_y^2 dxdy.$$

Аналогично можно получить другое неравенство:

$$\int\limits_\Omega u^2 dxdy \leqslant a^2 \int\limits_\Omega u_x^2 dxdy,$$

Сложим оба неравенства :

$$\int\limits_\Omega u^2 dxdy \leqslant \frac{b^2}{2} \int\limits_\Omega u_y^2 dxdy + \frac{a^2}{2} \int\limits_\Omega u_x^2 dxdy \leqslant \beta^2 \int\limits_\Omega (u_x^2 + u_y^2) dxdy,$$

где $\beta^2 \overset{sign}{=} \max\left(\frac{b^2}{2}, \frac{a^2}{2}\right)$ Полученное неравенство называется неравенством Фридрихса для 2-мерного случая :

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dxdy \leqslant \beta^2 \int\limits_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dxdy.$$

Аналогично можно получить неравенство Фридрихса для n-мерного случая:

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \leqslant \beta^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx.$$

Итак, докажем положительную определенность оператора задачи, используя полученное неравенство:

$$(Au, u) = -\int\limits_{\Omega} u\Delta u \, dx = \int\limits_{\Omega} \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant \frac{1}{\beta^2} \int\limits_{\Omega} u^2 \, dx = \gamma^2 \|u\|^2, \text{где } \gamma = \frac{1}{\beta}$$

Т.о. мы доказали теорему

Теорема 1 *Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона существует и единственно.*

Выясним, что собой представляет пространство H_A, если A - оператор задачи Дирихле. Напомним, что в качестве $\mathcal{D}(A)$ рассматривалось множество дважды непрерывно дифференцируемых и финитных в Ω функций. Это множество мы пополняем относительно следующего скалярного произведения:

$$[u, v] = -\int\limits_{\Omega} v\Delta u \, dx = \int\limits_{\Omega} \sum_{i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \tag{41.4}$$

и получаем пространтво H_A.
Вспомним, что ранеее было введено пространство Соболева $W_{2,0}^1$ Оно получается как результат пополнения множества дважды непрерывно дифференцируемых финитных в Ω функций относительно следующего скалярного произведения:

$$(u, v)_{W_2^1} = \int\limits_{\Omega} uv \, dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \tag{41.5}$$

Покажем что нормы, порождаемые скалярными произведениями (41.4) и (41.5), будут эквивалентными. Напомним, что норма $||\cdot||_A$ называется эквивалентной норме $||\cdot||_B$, если справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| \cdot \|_A \sim \| \cdot \|_B \Leftrightarrow \alpha \|u\|_B \leqslant \|u\|_A \leqslant \beta \|u\|_B.$$

Сравним нормы элемента u в пространствах W_2^1 и H_A.

$$\|u\|_{W_2^1}^2 = \int\limits_{\Omega} u^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \|u\|_{H_A}^2,$$

С другой стороны, используя неравенство Фридрихса, можно записать

$$\|u\|^2_{W_2^1} = \int\limits_\Omega u^2\,dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant \left(1+\frac{1}{\gamma^2}\right)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \beta^2\|u\|^2_{H_A},$$

где $\beta = \sqrt{1+\frac{1}{\gamma^2}}$.

Таким образом, мы получили цепочку неравенств: $\|u\|_{H_A} \leqslant \|u\|_{W_2^1} \leqslant \beta\|u\|_{H_A}$ из которой следует, что нормы эквивалентны. Из курса функционального анализа известно, что если множество замыкать в эквивалентных метриках то получим замыкания с одинаковыми элементами. Следовательно,

$$H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1 .$$

Итак, мы показали, что пространство H_A представляет собой множество функций из L_2, каждая из которых имеет первую обобщенную производную по Соболеву, которая также принадлежит L_2.

Приведенные выше рассуждения справедливы не только для уравнения Лапласа, но и для более общего класса уравнений. В качестве примера можно рассмотреть более общее уравнение :

$$-\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + q(x)u = f, \tag{41.6}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{41.7}$$

Будем считать, что:

1) в каждой точке x_0 квадратичные формы $\sum a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j$ такие что:

$$\alpha\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j \leqslant \beta\sum_{i=1}^n \xi_i^2,$$

где $\alpha, \beta-$ некоторые положительные константы.

2) $q(x) \geqslant 0$.

Из этих двух условий следует эллиптичность уравнения. Вся теория переносится (включая вывод о структуре энергетического пространства) на это уравнение. Неравенство положительной определенности для этой задачи:

$$(Au, u) = -\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)u + q(x)u^2\right) dx.$$

Возьмем этот интеграл по частям и учтем, что $u|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u^2\right) dx \geqslant \alpha\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \overset{\text{н.Фридрикса}}{\geqslant} \alpha\gamma^2\int\limits_\Omega u^2\,dx = \widetilde{\gamma}^2\|u\|^2.$$

Положительная определенность доказана.

Симметричность показать самостоятельно.

42 Минимизирующая последовательность. Метод Ритца.

Пусть дан функционал $\Phi(u)$. Потребуем, чтобы он был полуограничен снизу, т.е. $\Phi(u) \geq C$. Обозначим через $d \stackrel{def}{=} \inf \Phi(u)$. Точная нижняя грань функционала существует в силу его полуограниченности.

Определение 1 *Последовательность u_n, взятая из области определения функционала, будет называться минимизирующей, если*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \Phi(u_n) = d.$$

Теорема 1 *Пусть A - положительно определенный оператор, $\Phi(u)$ - функционал энергии, u_n - минимизирующая последовательность, а u^*— обобщенное решение. Тогда последовательность $u_n \longrightarrow u^*$ как в H_A, так и в H.*

▼Пусть u_n— минимизирующая последовательность. Тогда

$$\Phi(u_n) = \|u_n - u^*\|^2_{H_A} - \|u^*\|^2_{H_A}.$$

Т.к. последовательность u_n является минимизирующей, то, по определению,$\Phi(u_n) \longrightarrow d = -||u^*||^2_{H_A}$. Следовательно, $\|u_n - u^*\|^2_{H_A} \longrightarrow 0$, поэтому $u_n \xrightarrow{H_A} u^*$.
Сходимость в H следует из неравенства положительной определенности

$$\|u_n - u^*\|^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} \|u_n - u^*\|^2_{H_A} \longrightarrow 0.$$

▲
Так как последовательность частичных сумм $\sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i \longrightarrow u^*$, где φ_i— полная в H_A система ортонормированных функций, то ее можно взять в качестве минимизирующей последовательности

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i$$

Таким образом, теоретически вопрос о построении минимизирующей последовательности решен. Однако практически построить эту последовательность сложно в силу высокой трудоемкости процесса ортогонализации системы функций φ_i.
Метод Ритца
Основная его идея сводится к тому, что с его помощью можно более простым способом построить минимизирующую последовательность частичных сумм, а именно, для этого метода не требуется условие ортогональности функций φ_i.
Пусть задана бесконечная система функций $\{\varphi_i\} \in H_A$, обладающая следующими свойствами:
1) Система функций $\{\varphi_i\}$ линейно независима.
2) Система функций $\{\varphi_i\}$ полная в H_A, т.е. любой элемент $u \in H_A$ можно сколь угодно близко приблизить линейными комбинациями вида $\sum_{i=1}^{N} C_i\varphi_i$.

Зададим некоторое N и будем искать минимум функционала на множестве функций $\sum_{i=1}^{N} C_i\varphi_i$.

$$\Phi(u) = [u,u]_{H_A} - 2(u,f) = \left[\sum_{i=1}^{N} C_i\varphi_i, \sum_{k=1}^{N} C_k\varphi_k\right] - 2\left(\sum_{i=1}^{N} C_i\varphi_i, f\right).$$

Т.к. число N - фиксировано и функции φ_i известны, то функционал $\Phi(u)$ можно рассматривать как некоторую функцию G от переменных $C_1, C_2, ..., C_N$, т.е.

$$G(C_1, C_2, ..., C_N) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} C_i\, C_k[\varphi_i, \varphi_k] - 2\sum_{i=1}^{N} C_i(\varphi_i, f).$$

Вычислим частные производные функции G:

$$\frac{\partial G}{\partial C_l} = 2\sum_{i=1}^{N} C_i[\varphi_i, \varphi_l] - 2(f, \varphi_l) = 0,\ l = \overline{1, N}.$$

Таким образом, мы получили линейную систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} C_1[\varphi_1,\varphi_1] & + & C_2[\varphi_1,\varphi_2] & + & \dots & + & C_N[\varphi_1,\varphi_N] & = & (f,\varphi_1), \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ C_1[\varphi_N,\varphi_1] & + & C_2[\varphi_N,\varphi_2] & + & \dots & + & C_N[\varphi_N,\varphi_N] & = & (f,\varphi_N). \end{array}\right. \tag{42.1}$$

Выпишем определитель этой системы:

$$\left|\begin{array}{cccc} [\varphi_1,\varphi_1] & [\varphi_1,\varphi_2] & \dots & [\varphi_1,\varphi_N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\varphi_N,\varphi_1] & [\varphi_N,\varphi_2] & \dots & [\varphi_N,\varphi_N] \end{array}\right|.$$

Этот определитель называется определителем Грамма. Если система функций линейно независима, то он отличен от нуля. Покажем это. Доказательство проведем от противного.

Допустим что определитель Грамма равен нулю. Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} C_1[\varphi_1,\varphi_1] & + & C_2[\varphi_1,\varphi_2] & + & \dots & + & C_N[\varphi_1,\varphi_N] & = & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ C_1[\varphi_N,\varphi_1] & + & C_2[\varphi_N,\varphi_2] & + & \dots & + & C_N[\varphi_N,\varphi_N] & = & 0 \end{array}\right. \tag{42.2}$$

Ее определитель, в силу нашего предположения, равен нулю, следовательно, система имеет хотя бы одно ненулевое решение. Обозначим его через $c_1, c_2, ..., c_N$ и построим функцию $h = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i$. Тогда первое уравнение системы (42.2) можно записать как $[h, \varphi_1] = 0$, второе как $[h, \varphi_2] = 0$, ... , $[h, \varphi_N] = 0$. Рассмотрим $[h, h] = [h, \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i] = 0 \Leftrightarrow h = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i = 0 \Leftrightarrow c_i = 0, \forall i$. Таким образом, мы получили противоречие, следовательно, определитель Грамма не равен нулю.

Итак, в силу того, что определитель системы (42.1) не равен нулю, при любом N система имеет единственное ненулевое решение. Таким образом, для каждого N можно построить приближенное решение u_N. Покажем, что построенная последовательность u_N является минимизирующей. Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} u_N = u^*.$$

Введем вместо системы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$ следующую систему функций:

$$\begin{cases} \psi_1 = \alpha_{11}\varphi_1 \\ \psi_2 = \alpha_{12}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_N = \alpha_{1N}\varphi_1 + \alpha_{2N}\varphi_2 + ... + \alpha_{NN}\varphi_N \end{cases}$$

Тогда множество линейных комбинаций функций $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$ будет совпадать с множеством линейных комбинаций функций $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_N$. Будем искать приближенное решение u_N на множестве линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^N d_i\psi_i$. Можно считать что система ψ_i - ортонормированная, тогда d_i находятся довольно просто. Проделав аналогичные действия, как и с функциями φ_i, мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccccc} d_1[\psi_1,\psi_1] & + & d_2[\psi_1,\psi_2] & + & \dots & + & d_N[\psi_1,\psi_N] & = & (f,\psi_1), \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ d_1[\psi_N,\psi_1] & + & d_2[\psi_N,\psi_2] & + & \dots & + & d_N[\psi_N,\psi_N] & = & (f,\psi_N). \end{array} \end{cases} \tag{42.3}$$

Т.к. $\{\psi_i\}$- ортонормированная система, то $(\psi_i, \psi_j) = 0$ при $i \neq j$. Тогда

$$\begin{cases} d_1 = (f,\psi_1) \\ \dots\dots\dots \\ d_N = (f,\psi_N) \end{cases} \text{, следовательно, } u_n = \sum_{i=1}^{N}(f,\psi_i)\psi_i.$$

Т.о, приближенное решение u_N, построенное по методу Ритца представляет собой частичную сумму ряда Фурье для обобщенного решения по системе функций ψ_i. Следовательно, как уже было показано, т.к. u_N представляет собой минимизирующую последовательность, то она сходится к обобщенному решению u^*.

43 Вариационные свойства собственных значений.

Определение 1 *Пусть A- симметричный оператор, $\mathcal{D}(A)$ - его область определения. Тогда число λ_1 называется собственным значением оператора, если существует такой элемент $u_1 \in \mathcal{D}(A)$, $u_1 \neq 0$, что $Au_1 = \lambda_1 u_1$. Элемент u_1 называется собственным элементом оператора A.*

Напомним некоторые свойства собственных значений оператора, известные из курса функционального анализа.

1°. Собственные значения симметричного оператора вещественны.

2°. Собственные элементы отвечающие различным собственным значениям ортогональны, а собственные элементы, отвечающие одному собственному значению могут быть выбраны ортогональными.
Система собственных элементов после нормировки образует ортонормированную систему. Если система собственных элементов полна, то

$$u = \sum_i C_i u_i, \text{ где } C_i = (u, u_i).$$

Однако в общем случае система собственных элементов симметричного оператора не является полной.

Определение 2 *Говорят, что симметричный оператор A полуограничен снизу, если $\forall u \in \mathcal{D}(A)$*

$$(Au, u) \geq k\|u\|^2.$$

(здесь k не обязательно положительное)

Если $A-$ полуограниченный снизу оператор, то всегда можно рассмотреть оператор $B = A + C \cdot I$, где $C > -k$, который будет положительно определенным. Собственные значения операторов A и B будут отличаться на константу C. Поэтому не умаляя общности можно считать, что рассматриваемые полуограниченные снизу операторы являются положительно определенными.
Пусть λ_1 - собственное значение оператора A, $u-$ собственный элемент. Тогда

$$Au_1 = \lambda_1 u_1. \tag{43.1}$$

Домножим скалярно равенство (43.1) на $\forall \varphi \in H$:

$$(Au_1, \varphi) = \lambda_1(u_1, \varphi). \tag{43.2}$$

Таким образом, если верно (43.1), то справедливо и (43.2).
Обратно, если справедливо (43.2) $\forall \varphi \in H$, то его можно переписать в виде $(Au_1 - \lambda_1 u_1, \varphi) = 0$ и взять в качестве $\varphi = Au_1 - \lambda_1 u_1$. Тогда $\|Au_1 - \lambda_1 u_1\|^2 = 0$следовательно, верно (43.2), $\forall \varphi \in H$. Однако, как доказывалось ранее, для того, чтобы выполнялось (43.1) достаточно требовать выполнение (43.2) не для всего пространства H, а лишь для всюду плотного в нем множества. Поэтому т.к. $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$, то (43.2) справедливо и для $\forall u_1 \in \mathcal{D}(A)$. Таким образом, равенства (43.1) и (43.2) являются эквивалентными.
Условие (43.2) можно обобщить на случай $u_1, \varphi \in H_A$, если в нем рассмотреть не обычное, а энергетическое скалярное произведение:

$$[u_1, \varphi] = \lambda_1(u_1, \varphi)\ ,\ u_1, \varphi \in H_A. \tag{43.3}$$

Таким образом, мы обобщили понятия собственного значения и собственного элемента.

Определение 3 *Число λ_1 называется обобщенным собственным значением, а u_1 называется обобщенным собственным элементом если $\forall \varphi \in H_A$ существует такой элемент $u_1 \in H_A$, $u_1 \neq 0$, что справедливо равенство* (43.3).

Если $u_1 \in \mathcal{D}(A)$, то он представляет собой обычный собственный элемент, в противном случае - обобщенный.

Теорема 1 *Собственные элементы оператора A (как обычные, так и обобщенные), отвечающие различным собственным значениям, ортогональны как в H, так и H_A.*

▼1.) Пусть u_1, u_2 - обычные собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям λ_1, λ_2. Нужно показать, что $[u_1, u_2] = 0,\ u_1, u_2 \in \mathcal{D}(A)$.

$$[u_1, u_2] = (Au_1, u_2) = (\lambda_1 u_1, u_2) = \lambda_1 (u_1, u_2) = 0,$$

т.к. элементы u_1 и u_2 ортогональны в H.
2.) Пусть u_1, u_2 - обобщенные собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям λ_1, λ_2. Тогда $\forall \varphi \in H_A$ выполняются равенства

$$[u_1, \varphi] = \lambda_1 (u_1, \varphi),\ [u_2, \varphi] = \lambda_2 (u_2, \varphi).$$

Возьмем в первом равенстве в качестве φ элемент u_2, а во втором– u_1. Тогда

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= \lambda_1 (u_1, u_2), \\ [u_2, u_1] &= \lambda_2 (u_2, u_1). \end{aligned} \tag{43.4}$$

Вычтем из первого равенства второе и воспользуемся свойством симметричности скалярного произведения:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0.$$

Т.к. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из последнего равенства следует, что $(u_1, u_2) = 0$. Возвращаясь к равенствам (43.4), получаем $[u_1, u_2] = 0$.
Таким образом, мы показали, что элементы u_1, u_2 - ортогональны. ▲
Напомним, что если оператор A полуограничен снизу, то имеет место следующее неравенство:

$$(Au, u) \geq k(u, u).$$

Введем функционал

$$\Phi(u) = \frac{(Au, u)}{(u, u)} \geq k,$$

который называется отношением Релея. Т.к. $\Phi(u)$ полуограничен снизу, то существует его точная нижняя грань. Обозначим ее через

$$d \stackrel{def}{=} \inf_{u \in \mathcal{D}(A)} \frac{(Au, u)}{(u, u)},$$

или, в более общем случае,

$$d \stackrel{def}{=} \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2}.$$

Пусть u_1-собственный элемент оператора A. Вычислим отношение Релея на этом элементе:

$$\Phi(u_1) = \frac{[u_1, u_1]}{(u_1, u_1)} = \frac{\lambda_1 (u_1, u_1)}{(u_1, u_1)} = \lambda_1.$$

Сравним числа λ_1 и d. Т.к. d - точная нижняя грань функционала Релея, а λ_1- значение функционала Релея на некотором собственном элементе , то $\lambda_1 \geq d$.

Теорема 2 *Пусть существует элемент $u_1 \in H_A$, на котором отношение Релея достигает своей точной нижней грани:*

$$\Phi(u_1) = d = \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2}.$$

Тогда u_1 будет собственным элементом, соответствующим минимальному собственному значению $\lambda_1 = d$.

▼Пусть η - произвольный элемент из H_A. Рассмотрим функционал $\Phi(u_1 + t\eta)$, определенный на множестве элементов $u_1 + t\eta$, $t \in \mathbb{R}$. Т.к. на элементе u_1 функционал $\varphi(u)$ достигает точной нижней грани, то для всех t выполняется $\Phi(u_1 + t\eta) \geq \Phi(u_1)$. Элементы u_1 и η - фиксированные, поэтому функционал $\Phi(u_1 + t\eta)$ можно рассматривать как функцию $G(t)$, которая принимает минимальное значение при $t = 0$:

$$G(t) = \frac{\|u_1 + t\eta\|_A^2}{\|u_1 + t\eta\|^2} = \frac{[u_1 + t\eta, u_1 + t\eta]}{(u_1 + t\eta, u_1 + t\eta)} = \frac{[u_1, u_1] + 2t[u_1, \eta] + t^2[\eta, \eta]}{(u_1, u_1) + 2t(u_1, \eta) + t^2(\eta, \eta)}.$$

Вычислим производную функции G и приравняем ее к нулю:

$$G'(t)|_{t=0} = \frac{2[u_1, \eta](u_1, u_1) - 2(u_1, \eta)[u_1, u_1]}{(u_1, u_1)^2} = 0. \tag{43.5}$$

Использовав то, что по условию теоремы

$$\frac{[u_1, u_1]}{(u_1, u_1)} = d$$

и умножив (43.5) на (u_1, u_1), получим:

$$[u_1, \eta] = d(u_1, \eta),\ \forall \eta \in H_A.$$

Сравнивая полученный результат с (43.3), получаем, что число $d-$ обобщенное собственное значение, а u_1- соответствующий ему собственный элемент.
Докажем теперь, что λ_1- минимальное собственное значение. Если $\widetilde{u}$ - произвольный собственный элемент, отвечающий собственному значению $\widetilde{\lambda}$, то

$$\Phi(\widetilde{u}) = \widetilde{\lambda} \geq \inf_{u \in H_A} \Phi(u) = d,$$

т.е. для любого собственного значения $\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\lambda} \geq d$, т.е. d - наименьшее собственное значение. ▲
Вспомнив свойство взаимной ортогональности собственных элемнтов симметричного оператора, следующий собственный элемент u_2 будем искать ортогональным к u_1, собственный элемент u_3 как ортогональный к u_1 и u_2, и т.д. Пусть $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n-$ первые n собственных значений, а $u_1, u_2, ..., u_n-$ соответствующие им собственные элементы тогда следующий собственный элемент будем искать на множестве $H_A^{(n)}$ - множестве элементов энергетического пространства H_A, ортогональных системе собственных элементов $u_1, u_2, ..., u_n$ как в H, так и в H_A. Т.е. если элемент $u \in H_A^{(n)}$, то выполняются условия

$$(u, u_i) = 0\ ,\ i = \overline{1, n},$$
$$[u, u_i] = 0\ ,\ i = \overline{1, n}.$$

Теорема 3 *Рассмотрим функционал $\varphi(u)$, определенный на $H_A^{(n)}$ и обозначим через $d_{n+1} \stackrel{def}{=} \inf_{u \in H_A^{(n)}} \varphi(u)$. Тогда, если существует такой элемент $u_{n+1} \in H_A^{(n)}$, что $\Phi(u_{n+1}) = d_{n+1}$, тогда d_{n+1} - собственное значение ($d_{n+1} = \lambda_{n+1}$), u_{n+1} - собственный элемент, причем $\lambda_{n+1} \geq \lambda_n \geq ...\lambda_1$.*

▼Будем рассуждать аналогично доказательству предыдущей теоремы. Рассмотрим функционал $\Phi(u_{n+1} + t\eta)$. Сразу записать неравенство $\Phi(u_{n+1} + t\eta) \geq \Phi(u_{n+1})$ мы не можем, т.к.элемент $\eta \notin H_A^{(n)}$. Поэтому по этому элементу построим элемент $\xi \in H_A^{(n)}$ следующим образом:

$$\xi = \eta - (\eta, u_1)u_1 - (\eta, u_2)u_2 - ... - (\eta, u_n)u_n,$$

где $u_1, u_2, ..., u_n$ - собственные элементы отвечающие первым n собственным значениям. Проверим, что он ортогонален первым n собственным элементам. Рассмотрим скалярное произведение $(\xi, u_i) = (\eta, u_i) - \sum_{i=1}^{n} (\eta, u_i)(u_i, , u_k),\ \ k = 1..n..$ Т.к. собственные элементы взаимно ортогональны, то все слагаемые, кроме первого и $k-$го обратятся в ноль, а оставшиеся сократятся между собой. Следовательно, $(\xi, u_i) = 0$, и мы показали, что ξ ортогонален $u_1, u_2, ..., u_n$ в H. Осталось показать, что это выполняется и в H_A :

$$[u_i, \xi] = (Au_i, \xi) = \lambda_i(u_i, \xi) = 0.$$

Тогда рассуждая аналогично теореме 2, для $\Phi(u_{n+1}+t\xi)$, получим $[u_{n+1}, \xi] = d_{n+1}(u_{n+1}, \xi)$. Подставляя в явном виде выражение для ξ, получим:

$$[u_{n+1}, \eta] - [u_{n+1}, u_1](\eta, u_1) - ... - [u_{n+1}, u_n](\eta, u_n) =$$

$$= d_n(u_{n+1}, \eta) - (u_{n+1}, u_1)(\eta, u_1) - ... - (u_{n+1}, u_n)(\eta, u_n).$$

Элемент $u_{n+1} \in H_a^{(n)}$ и, следовательно, ортогонален всем $u_1, ..., u_n$ как в исходном пространстве H, так и в энергетическом H_A, т.е. $(u_{n+1}, u_i) = 0,\ [u_{n+1}, u_i] = 0,\ \forall i = \overline{1, n}$. Тогда последнее равенство примет вид:

$$[u_{n+1}, \eta] = d_{n+1}(u_{n+1}, \eta).$$

Следовательно, d_{n+1} - собственное значение, а $u_{n+1}-$ соответствующий ему собственный элемент.
Осталось показать, что $d_{n+1}-$ следующий собственный элемент.

$$d_{n+1} \geq \inf_{u \in H_A^{(n)}} \Phi(u) = \lambda_{n+1} \geq \inf_{u \in H_A^{(n-1)}} \Phi(u) = \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1.$$

Пусть λ' - собственное значение, u' - соответствующий ему собственный элемент, и пусть $u' \in H_A^{(n)}$. Тогда

$$\Phi(u') = \lambda' \geq \inf_{u \in H_A^{(n)}} \Phi(u) = d_{n+1}$$

Таким образом,мы показали что d_{n+1} - наименьшее собственное значение, непосредственно следующее за $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. ▲
Обе теоремы имеют условный характер, т.к. остается вопрос о существовании элементов u_1 и u_{n+1}.

44 Теорема о дискретности спектра.

Определение 1 *Положительно определенный оператор A имеет дискретный спектр, если 1.) множество собственных значений бесконечно:*

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \lambda_n \leqslant \ldots$$

2.) система собственных элементов является полной в H и H_A.

Теорема 1 *Пусть положительно определенный оператор A обладает тем свойством, что любое ограниченное в энергетическом пространстве H_A множество Ω является компактным в исходном гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A имеет дискретный спектр.*

▼1. Докажем существование наименьшего собственного значения и соответствующего ему собственного элемента. Для этого достаточно доказать существование элемента $u_1 \in H_A$, на котором функционал $\Phi(u) = \|u\|_A^2/\|u\|^2$ принимает значение

$$d = \inf_{u \in H_A} \Phi(u).$$

По определению точной нижней грани, существует последовательность элементов $\{u_n\} \in H_A$, для элементов которой справедливы неравенства :

$$d \leq \Phi(u_n) \leq d + 1/n. \tag{44.1}$$

Так как $\Phi(Cu) = \Phi(u)$ для любой постоянной C, то, не ограничивая общности, мы можем считать, что $\|u_n\| = 1$. Таким образом существует последовательность элементов $\{u_n\} \in H_A$, таких что $\|u_n\| = 1$, для которой справедливы неравенства (44.1).

Рассмотрим функционал Φ на элементах вида $u_n + t\eta$, где $\eta \in H(A), t \in R$. Тогда

$$\Phi(u_n + t\eta) = \frac{\|u_n + t\eta\|_A^2}{\|u_n + t\eta\|^2} \geq d \quad \Rightarrow$$

$$[u_n + t\eta, u_n + t\eta] - d(u_n + t\eta, u_n + t\eta) \geq 0$$

или

$$t^2\left([\eta,\eta] - d(\eta,\eta)\right) + 2t\left([u_n,\eta] - d(u_n,\eta)\right) + \left([u_n,u_n] - d(u_n,u_n)\right) \geq 0.$$

Так как при всех t квадратный трехчлен принимает неотрицательные значения, то его дискриминант D меньше или равен нулю.

$$D = \left([u_n,\eta] - d(u_n,\eta)\right)^2 - \left([\eta,\eta] - d(\eta,\eta)\right)\left([u_n,u_n] - d(u_n,u_n)\right) \leq 0,$$

или

$$|[u_n,\eta] - d(u_n,\eta)| \leq \sqrt{(\|\eta\|_A^2 - d\|\eta\|^2)\cdot(\|u_n\|_A^2 - d)} \leq \|\eta\|_A\sqrt{\|u_n\|_A^2 - d}.$$

Применим полученную оценку для $I = \|u_n - u_m\|_A^2 - d\|u_n - u_m\|^2$

$$
\begin{aligned}
I &= ([u_n, u_n - u_m]_A - d[u_n, u_n - u_m]) - ([u_m, u_n - u_m]_A - d[u_m, u_n - u_m]) \\
&\le |[u_n, u_n - u_m]_A - d[u_n, u_n - u_m]| + |[u_m, u_n - u_m]_A - d[u_m, u_n - u_m]| \\
&\le \|u_n - u_m\|_A \left(\sqrt{\|u_n\|_A^2 - d} + \sqrt{\|u_m\|_A^2 - d}\right)
\end{aligned} \tag{44.2}
$$

Так как $\|u_n\|_A^2 = \Phi(u_n) \to d$ при $n \to \infty$, то последовательность $\|u_n\|_A$ ограничена в H_A. Следовательно, по условию теоремы из нее можно выбрать сходящуюся в H подпоследовательность $\{u_n^{(k)}\}$, для которой мы сохраним старое обозначение $\{u_n\}$. Обозначим предел последовательности $\{u_n^{(k)}\}$ в H через $\hat{u}$. Докажем, что эта последовательность сходится к тому же самому элементу и в H_A. Действительно, так как $\|u_n\|_A \le C$, то$\|u_n - u_m\|_A \le 2C$, кроме того $\|u_n\|_A^2 \to d$, поэтому стремится к нулю правая часть неравенства (44.2). Далее, так как последовательность $\{u_n\}$ сходится в H, то она является фундаментальной в H, то есть $\|u_n - u_m\| \to 0$. Следовательно по неравенству (44.2) она является фундаментальной и в H_A. Но так как пространство H_A полное, то она сходится в H_A к некоторому элементу $\tilde{u}$. Осталось доказать, что элементы $\hat{u}$ и $\tilde{u}$ совпадают. Но

$$
\|\hat{u} - \tilde{u}\| \le \|\hat{u} - u_n\| + \|\tilde{u} - u_n\| \le \|\hat{u} - u_n\| + \frac{1}{\gamma}\|\tilde{u} - u_n\|_A \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.
$$

Следовательно элементы $\hat{u}$ и $\tilde{u}$ совпадают.
В силу непрерывности нормы

$$
\Phi(\hat{u}) = \|\tilde{u}\|_A^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_A^2 = d.
$$

Тогда по теореме... $u_1 = \hat{u}$ является собственным элементом отвечающим наименьшему собственному значению $\lambda_1 = d$.
2.Рассмотрим функционал $\Phi(u)$ на подпространстве $H_A^{(n)}$. Пусть

$$
\inf_{u \in H_A^{(n)}} \Phi(u) = d_n.
$$

Повторяя рассуждения п.1, можно доказать существование элемента $u_{n+1} \in H_A^{(n)}$. Таким образом мы получим бесконечную последовательность собственных элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ и отвечающую этому набору последовательность собственных значений $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$.
3.Покажем, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Предположим противное, что все собственные значения ограничены в совокупности, т.е. $|\lambda_n| < M$ для всех n. Рассмотрим совокупность собственных элементов u_n. Не ограничивая общности мы можем считать, что $\|u_n\| = 1$, тогда $\|u_n\|_A^2 = \lambda_n$ и, следовательно, $\|u_n\|_A < \sqrt{M}$. Поэтому совокупность собственных элементов образует ограниченное в энергетической норме множество. Согласно условию теоремы, из него можно выделить сходящуюся в H подпоследовательность $u_n^{(k)}$. Но $\|u_n^{(k)} - u_n^{(l)}\|^2 = \|u_n^{(k)}\|^2 - 2(u_n^{(k)}, u_n^{(l)}) + \|u_n^{(l)}\|^2 = 2$, т.к. $\|u_n^{(k)}\| = 1$, а $(u_n^{(k)}, u_n^{(l)}) = 0$. Следовательно эта последовательность не может сходится в H, т.к. для нее не выполняется критерий Коши. Из полученного противоречия вытекает, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

4.Покажем, что система собственных элементов полна в H_A. (опр.1: любой элемент можно сколь угодно близко приблизить линейной комбинацией из H_A; опр.2: $u_1, \ldots, u_N, \ldots$ является полной, если не существует элемента $v \neq 0$, ортогонального всем элементам этой системы. Для полной системы (1) равносильно (2).)
Проведем доказательство от противного.Воспользуемся вторым определением: пусть найдется такой элемент $v \neq 0$, что $[v, u_i] = 0, i = 1..\infty$. Введем в рассмотрение пространство $H_A^\infty-$ множество элементов, ортогональных всем элементам нашей системы. По предположению, это множество не пустое. Введем функционал $\Phi(u)$ и рассмотрим его на $H_A^\infty : \inf\limits_{u \in H_A^\infty} \dfrac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} = \lambda_\infty$
Для этого подпространства мы можем повторить текстуально п.1, следовательно, получим что существует элемент u_∞ такой, что на нем наш функционал равен λ_∞ и λ_∞ будет собственным значением, отвечающим этому элементу.
Сравним λ_∞ с нашим $\lambda_n : \lambda_n = \inf\limits_{u \in H_A^n} \dfrac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2}, H_A^\infty \subset H_A^n$, следовательно, $\lambda_\infty \geq \lambda_n \to \infty$ по п.3. Таким образом, с одной стороны,$\lambda_\infty-$ конечное число, а с другой стороны, оно больше $\lambda_n \to \infty$. Получили противоречие, следовательно, наша последовательность полна в H_A.
5.Покажем, что наша последовательность полна в исходном пространстве H, используя первое определение.
Пусть $u \in H, \bar{D}(A) = H, D(A) \in H_A$, следовательно,$H_A$ плотно в H. Значит, по $\frac{\varepsilon}{2}$ можно построить элемент $u^* \in H_A : \|u - u^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Т.к. система является полной в H_A, то любой элемент, в частности, u^* можно сколь угодно близко приблизить линейной комбинацией:

$$\|u^* - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\|_A \leq \varepsilon_1.$$

$$\|u^* - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\| \leq \frac{\varepsilon_1}{\gamma} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, в качестве ε_1 возьмем $\frac{\varepsilon\gamma}{2}$. Откуда, добавив $(u^* - u^*)$ и воспользовавшись неравенством треугольника, получим:

$$\|u - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\| \leq \|u - u^*\| + \|u^* - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\| \leq \varepsilon.$$

▲

Следствие 1 *Оператор вложения (теорема Релиха):*$W_2^1 \longrightarrow L_2$ *является вполне непрерывным или компактным.*

Следствие 2 $H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1$, $H = L$ *следовательно оператор задачи Дирихле имеет дискретный спектр.*

45 Минимаксимальный принцип Куранта.

Как было показано ранее, для наименьшего собственного значения λ_1 положительно определенного оператора A справедливо равенство

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2},$$

а для $n+1$ собственного значения

$$\lambda_{n+1} = \inf_{u \in H_A^{(n)}} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2},$$

где подпространство $H_A^{(n)}$ состоит из элементов ортогональных первым n собственным элементам φ_i в H и в H_A:

$$u \in H_A^{(n)} \Leftrightarrow [u, \varphi_j] = 0,\ (u, \varphi_j) = 0, j = 1 \ldots n.$$

Определение 1 *Пусть A и B– два положительно определенных оператора, области определения которых совпадают. Тогда говорят, что $A \geq B$, если $\forall u \in D(A)$*

$$(Au, u) \geq (Bu, u).$$

Построим энергетические пространства H_A и H_B, тогда

$$\|u\|_A = (Au, u) \geq (Bu, u) = \|u\|_B.$$

И , следовательно, для λ_1 получим:

$$\lambda_1^{(A)} = \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} \geq \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_B^2}{\|u\|^2} = \lambda_1^{(B)}.$$

Пусть теперь $D(A) \neq D(B)$.

Определение 2 *Будем говорить, что $A \geq B$, если $D(A) \subset D(B)$ и для $\forall u \in D(A)$ выполняется $(Au, u) \geq (Bu, u)$.*

Для λ_1, как и раньше, получим:

$$\lambda_1^{(A)} = \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} \geq \inf_{u \in H_A} \frac{\|u\|_B^2}{\|u\|^2} \geq \inf_{u \in H_B} \frac{\|u\|_B^2}{\|u\|^2} = \lambda_1^{(B)}.$$

Однако, непосредственно сравнить таким образом другие собственные значения не удается.

Теорема 1 *Пусть элементы $v_1, \ldots, v_n \in H$ линейно независимы. Пусть далее $\tilde{H}_A^{(n)}$– пространство, ортогональное этим n элементам. Обозначим через*

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \inf_{u \in \tilde{H}_A^{(n)}} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2}.$$

Тогда

$$\sup \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda_{n+1},$$

где супремум берется по всем совокупностям n линейно независимых элементов.

▼Установим сначала, что для любой совокупности n линейно независимых элементов

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) \leq \lambda_{n+1}.$$

Для этого достаточно построить элемент $\bar{u} \in \tilde{H}_A^{(n)}$ такой, что $\|\bar{u}\|_A^2/\|\bar{u}\|^2 \leq \lambda_{n+1}$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ первые $n+1$ из собственных элементов оператора A. Они образуют ортонормальную в H систему, т.е. $\|\varphi_i\| = 1$ и $(\varphi_i, \varphi_j) = 0, i \neq j$, кроме того $\|\varphi_i\|_A = \lambda_i,\ [\varphi_i, \varphi_j] = 0, i \neq j$. Построим элемент

$$\bar{u} = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_{n+1}\varphi_{n+1}$$

с неопределенными пока коэффициентами a_i. Отметим, что

$$\|\bar{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2, \qquad \|\bar{u}\|_A^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i^2.$$

Потребуем, чтобы $\bar{u} \in \tilde{H}_A^{(n)}$ т.е.

$$(\bar{u}, v_i) = 0, i = 1...n.$$

Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{lclclcl} a_1(\varphi_1, v_1) & + & a_2(\varphi_2, v_1) & + & a_{n+1}(\varphi_{n+1}, v_1) & = & 0 \\ ... & & ... & & ... & & ... \\ a_1(\varphi_1, v_n) & + & a_2(\varphi_2, v_n) & + & a_{n+1}(\varphi_{n+1}, v_n) & = & 0 \end{array} \right.$$

Это линейная система n уравнений для определения $n+1$ неизвестных. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}-$ некоторое решение этой системы, тогда $\mu a_1, \mu a_2, \ldots, \mu a_{n+1}-$ тоже решение. Поэтому всегда можно добиться такого выбора a_i, чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1$. Тогда

$$\|\bar{u}\|_A^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^2 a_i^2 \leq \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = \lambda_{n+1}.$$

Таким образом $\|\bar{u}\|_A^2/\|\bar{u}\|^2 \leq \lambda_{n+1}$, и тем более

$$\inf_{u \in \tilde{H}_A^{(n)}} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} \leq \lambda_{n+1}.$$

С другой стороны, при конкретном выборе элементов $v_1, \ldots, v_n$, а именно, $v_i = \varphi_i$, имеем

$$\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \inf_{u \in H_A^{(n)}} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} = \lambda_{n+1}.$$

То есть

$$\sup_{(v_1, \ldots, v_n)} \lambda(v_1, \ldots, v_n) = \lambda_{n+1}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{n+1} = \sup_{v_1,\ldots,v_n} \inf_{u \in \tilde{H}_A^{(n)}} \frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2}.$$

Это и есть минимаксимальный принцип Куранта. ▲

Докажем, используя его, что *если $A \geq B$, то для всех собственных значений выполняется неравенство*

$$\lambda_{n+1}^{(A)} \geq \lambda_{n+1}^{(B)}.$$

Действительно, т.к. $A \geq B$, то для всех $u \in H_A$

$$\frac{\|u\|_A^2}{\|u\|^2} \geq \frac{\|u\|_B^2}{\|u\|^2}.$$

Следовательно,

$$\lambda^{(A)}(v_1,\ldots,v_n) \geq \lambda^{(B)}(v_1,\ldots,v_n).$$

Теперь взяв супремум от левой и правой части неравенства, получим

$$\lambda_{n+1}^{(A)} \geq \lambda_{n+1}^{(B)}.$$

Минимаксимальный принцип Куранта применяется для получения оценок для собственных значений.

Примеры.

1)Оценим собственные значения задачи Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = \lambda y, y(0) = y(1) = 0.$$

Будем считать, что выполнены условия

$$k_0 \leq k(x) \leq k_1, q_0 \leq q(x) \leq q_1.$$

Имеем

$$(Ly, y) = \int_0^1 (k(x)y'(x)^2 + q(x)y^2(x))dx.$$

Введем в рассмотрение еще два оператора:

$$B_0 y = -k_0 \frac{d^2y}{dx^2} + q_0 y,$$

$$B_1 y = -k_1 \frac{d^2y}{dx^2} + q_1 y.$$

Т.к.

$$k_1 \geq k \geq k_0, q_1 \geq q \geq q_0,$$

то $B_0 \leq A \leq B_1$. Но собственные значения операторов B_0, B_1 известны :

$$\lambda_n^{(B_0)} = k_0^2 \pi^2 n^2 + q_0,$$

$$\lambda_n^{(B_1)} = k_1^2\pi^2 n^2 + q_1.$$

Таким образом, мы получили двустороннюю оценку для собственных значений нашего оператора:

$$k_0^2\pi^2 n^2 + q_0 \leq \lambda_n^{(A)} \leq k_1^2\pi^2 n^2 + q_1.$$

В частности отсюда следует, что ряд $\sum 1/\lambda_n$ всегда сходится. На этом пути можно получать и более точные оценки.
2)Требуется оценить собственные значения оператора задачи Дирихле в области Ω :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть область Ω содержится в первом квадранте. Поместим ее в некоторый прямоугольник $\Pi : 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b$. Рассмотрим задачу на собственные значения для области Π

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \\ u|_{\partial\Pi} &= 0. \end{aligned}$$

Собственные значения этой задачи известны :

$$\lambda_{n,m} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}.$$

Пусть $A_\Omega-$ оператор задачи Дирихле для области Ω, а $B_\Pi-$ для Π. H_A получается замыканием множества бесконечно дифференцируемых, финитных функций в Ω, H_B- в Π. Поэтому $H_A \subset H_B$, следовательно, $A_\Omega \geq B_\Pi$, откуда $\lambda_n^\Omega \geq \lambda_n^\Pi$.
Вопрос. Как связаны собственные значения краевых задач

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

при различных σ.

46 Обобщенное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= a^2\Delta u + f(x,t); & (46.1)\\ u|_{t=0} &= \varphi(x); & (46.2)\\ u|_{\partial\Omega} &= 0, & (46.3) \end{aligned}$$

или более общую

$$\begin{aligned} u_t &= (A_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + f(x,t); & (46.4)\\ u|_{t=0} &= \varphi(x); & (46.5)\\ u|_{\partial\Omega} &= 0. & (46.6) \end{aligned}$$

Для решения этих задач может быть применен метод Фурье. При этом основными трудностями при применении метода будут доказательство теорем разложения и равномерной сходимости полученных рядов.
Другой подход связан с определением и доказательством существования обобщенного решения к которому мы сейчас и переходим.

Определение 1 *Мы будем говорить, что на числовом множестве E задана абстрактная функция $u(t)$, если каждому элементу (числу) множества E ставится в соответствие элемент банахова пространства X.*

Можно говорить о сильной и слабой непрерывности абстрактной функции, сильной и слабой производной и т. п. Далее мы будем говорить исключительно о сильных вариантах этих понятий и слово "сильно" будем в дальнейшем опускать. Так, например,

Определение 2 *Мы будем говорить, что абстрактная функция $u(t)$ непрерывна в точке t_0, если*

$$\lim_{t\to t_0}\|u(t)-u(t_0)\| = 0. \qquad (46.7)$$

Определение 3 *Мы будем говорить, что абстрактная функция $u(t)$ имеет производную $u'(t)$ в точке t, если*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t)\right\| = 0. \qquad (46.8)$$

Как и для обычных функций, а. ф. имеющая производную непрерывна. Можно ввести и производные высших порядков и т. д. Рассмотрим вкратце ряды а.ф.

Определение 4 *Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)$ а.ф. $u_i(t)$ определенных на множестве E сходится в точке t_0 к $v(t_0)$, если*

$$\lim_{n\to\infty}\|\sum_{i=1}^{n} u_i(t_0) - v(t_0)\| = 0$$

Справедлив критерий Коши (т.к. пространство полное.)Далее, ряд сходится на множестве $E_1 \in E$, если он сходится в каждой точке множества E_1. Ряд сходится равномерно на множестве $E_1 \in E$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N \| \sum_{k=n}^{\infty} u_n(t) \| < \varepsilon \forall t \in E_1$. Теоремы о равномерной сходимости не меняются.
Справедливо и следующее утверждение :

Теорема 1 *Пусть $u(t)$ и $v(t)$ две дифференцируемые а.ф. со значениями в гильбертовом пространстве H. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\left(u(t), v(t)\right) = \left(u'(t), v(t)\right) + \left(u(t), v'(t)\right)$$

Введем следующие обозначения :
$C(E, X)-$ пространство а.ф., определенных на E со значениями в банаховом пространстве X, непрерывных на E.
$C^(k)(E, X)-$ пространство а.ф., определенных на E со значениями в банаховом пространстве X, $k-$ раз непрерывно дифференцируемых на E.
Под классическим решением поставленной задачи мы будем понимать а.ф.$u(t)$,которая

- $u \in C\left([0, \infty), C(\Omega)\right),$
- $u \in C\left((0, \infty), C^2(\Omega)\right),$
- $u \in C^1\left([0, \infty), C^2(\Omega)\right),$
- $u(0) = \varphi(x)$
- $u(t) \in D(L)$, где $D(L)-$ множество функций, обращающихся в нуль на границе области Ω