Артемий Клячин Б05-026

Задача 1.

Алгоритм: Построим искомую последовательность R.

prefix[i] - значение префикс функции для позиции i.

Будем собирать позиции в группы. Группа позиций - это набор позиций, в которых будет проставлен один и тот же символ.

Изначально - каждый элемент - это отдельная группа. Будем объединять группы так, чтобы в итоге получить наименьшую лексикографическую последоватльтеность.

(правило 1) Будем говорить, что элементы i и j точно должны лежат в одной группе, если i == prefix[j].

Следуя этому правилу мы получим несколько групп. Отсортируем в порядке вхождения первого элемента группы в последовательность. И пронумеруем их в этом порядке.

(правило 2) Будем говорить, что элементы i и j точно не должны лежат в одной группе, если prefix[j - 1] >= prefix[j] и i == prefix[j - 1] + 1.

Теперь будем жадно по порядку присваивать группам как можно меньшие по номеру символы алфавита. Первой группе - первый символ, далее присвайвам так, чтобы не нарушить правило 2. (Это можно сделать с помощью СНМ).

Доказательство корректности:

Правило 1 - транзитивно. Поэтому для любые два элемента группы "точно должны лежать в одной группе".

Правило 2 имеет такое свойство, что если оно выполняется для двух элементов, то оно и применимо в целом к группам, в которых содержаться эти два элемента.

Замечание. Рассмотрим корректним корректный набор значений префикс функции (назовём его P, P = [prefix[1], ..., prefix[N]] и P[i] = prefix[i]), тогда: Для последовательности, выполняются правила 1 и 2 <=> последовательностью имеет набор значений префикс функции равный P.

После присваивания группам символов мы построим последовательность с заданной префикс функцией (по замечанию) и она будет наименьшей, потому что если существует меньшая последовательность (для неё в любом случае выполняются правила 1 и 2), то значит существует лучшая раскраска групп, чего быть не может. Эффективность алгоритма доказана.

Задача 3.

Докажем по индукции. База (n = 1) - очевидна

Шаг: пусть доказали, n = k - 1, что число различных палендромов любой последовательности из k-1 элеменов не более k-1. Докажем это для n = k. Предположим это не верно для последоватльности a_i для k. Тогда в в начальном подотрезке длины k - 1 будет не более, чем k - 1 различных палендров. Тогда существуют два различных палендрома содержащих последний элемент и не встречающихся в последовательности из первых k-1 элементов. Но эти два палендрома вложены друг в друга и центы их не совпадают. Сделовательно, в большем палендроме встречается меньший 2 раза (справа и слева). Следовательно, меньший палендром также встречается и в в последовательности из первых k-1 элементов. Противоречие. Следовательно, число различных палендромов любой последовательности из k элеменов не более k.

Доказано.