

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

КОНОВАЛОВ ДМИТРИЙ АНДРЕЕВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО
НАЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА ОСНОВЕ
РАЗРЫВНОГО МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор В.А. Левин

Москва 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.....	20
1.1 Основные уравнения и определяющие соотношения нелинейной теории упругости.....	20
1.2 Основные уравнения и определяющие соотношения теории многократного наложения конечных деформаций.....	21
1.3 Постановка граничных условий.....	22
1.4 Постановка задачи о послойном наращивании изделия аддитивного производства на основе теории многократного наложения конечных деформаций.....	23
ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ.....	28
2.1 Дискретизация уравнений теории многократного наложения конечных деформаций.....	28
2.2 Решение задач теории многократного наложения конечных деформаций методом спектральных элементов.....	30
2.2.1 Аппроксимация решения задачи на четырехугольных спектральных элементах.....	31
2.2.2 Аппроксимация решения задачи на треугольных спектральных элементах.....	33
2.2.3 Аппроксимация решения задачи на гексаэдральных спектральных элементах.....	34
2.2.4 Аппроксимация решения задачи на тетраэдральных спектральных элементах.....	35
2.2.5 Аппроксимация решения задачи на пирамидальных спектральных элементах.....	36
2.2.6 Аппроксимация решения задачи на призматических спектральных элементах.....	37

2.2.7 Численный расчет интегралов на спектральных элементах.....	38
2.2.8 Ассемблирование глобального вектора невязки.....	40
2.3 Контактные граничные условия.....	41
2.3.1 Метод лагранжевых множителей.....	42
2.3.2 Метод штрафных множителей.....	42
2.3.3 Модифицированный метод лагранжевых множителей.....	42
2.3.4 Метод прямого исключения связей.....	43
2.3.5 Матрица связей.....	43
2.3.6 Равенство нормальных напряжений.....	45
2.4 Алгоритмы решения систем дискретных уравнений.....	46
2.4.1 Метод Ньютона и его модификации.....	46
2.4.2 Критерии сходимости нелинейных итераций.....	50
2.4.3 Обзор методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).....	50
ГЛАВА 3. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О МНОГОКРАТНОМ НАЛОЖЕНИИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ВЕРИФИКАЦИЯ.....	52
3.1 Особенности программной реализации.....	52
3.2 Верификационные расчеты.....	54
3.2.1 Задача о вставке цилиндра из гиперупругого материала...54	
3.2.2 Задача об образовании отверстия в образце из слабосжимаемого материала.....	58
3.2.3 Задача об образовании отверстия в образце из нелинейно упругого материала.....	61
3.3 Анализ эффективности программной реализации.....	63
ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПОСЛОЙНОМ НАРАЩИВАНИИ ИЗДЕЛИЙ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА.....	65
4.1 Описание модели и постановка задачи.....	65

4.2 Задача о чистом изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с полностью соединенными слоями.....	68
4.3 Задача об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями в центральной части балки.....	72
4.4 Задача об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями в торцевой части балки.....	74
4.5 Численное моделирование процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания.....	76
4.6 Выводы.....	89
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	91
ЛИТЕРАТУРА.....	98

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Диссертация посвящена математическому моделированию напряженно-деформированного состояния нелинейно-упругих тел при многократном наложении конечных деформаций. В диссертационной работе предложена дискретизация математической модели нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов.

Актуальность темы работы определяется возможностями современного высокотехнологичного оборудования, позволяющего реализовывать конструкторские решения с необходимой точностью и как следствие необходимостью поиска современных высокоточных подходов к математическому моделированию и решению задач инженерного анализа изделий и конструкций из физически нелинейных материалов, в том числе гиперупругих, и композитных материалов. Появление новых материалов и сложных дизайнов изделий предъявляет новые требования к точности описания геометрии конструкции и определяет необходимость построения неструктурированных криволинейных сеток, содержащих различные типы элементов второго и более высокого порядка - гексаэдральные, тетраэдральные, призматические, пирамидальные, четырехугольные и треугольные, позволяющие аппроксимировать геометрию изделия с более высокой точностью, чем при использовании структурированных сеток или неструктурированных сеток первого порядка.

Актуальность связана также с развитием аддитивных технологий изготовления элементов конструкций, необходимостью учета остаточных напряжений при изготовлении изделий с помощью этих технологий с учетом многократного наложения конечных деформаций.

При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния элементов конструкций на основе нелинейной теории упругости и

теории многократного наложения конечных деформаций можно использовать аналитические, полуаналитические и численные методы. Недостатком аналитических методов является сложность и невозможность получения решения для нелинейных задач общего вида, поэтому для решения данного класса задач могут применяться различные численные методы, например, метод конечных разностей, метод конечных объемов, метод конечных элементов [2, 17, 28, 44, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 57, 58, 63, 82, 83, 95, 152, 153] и метод спектральных элементов [61, 62, 64, 77, 80, 81, 98, 99, 100, 102, 105, 112, 119, 135, 138, 148].

В качестве основного подхода к построению численной модели был выбран метод спектральных элементов, который обладает рядом преимуществ по сравнению с классическим методом конечных элементов: высокой точностью аппроксимации решения при существенно меньшем числе необходимых сеточных элементов. Погрешность численного решения можно оценить как: $\|[\mathbf{u}]_h - \mathbf{u}_h\| \leq C(N)$, при этом $C(N) = C_1 h^N e^{-N}$ для метода спектральных элементов и $C(N) = C_2 h^N$ для метода конечных элементов, где C_1 и C_2 – константы, h – характерный размер сетки, N – порядок элемента, \mathbf{u}_h – численное решение. Также при работе с моделью у исследователя отсутствует необходимость перестроения и измельчения сетки для проверки сеточной сходимости, полученного решения, как это было при использовании метода конечных элементов, поскольку при использовании метода спектральных элементов сетка может оставаться изначальной, а изменяться только порядок элементов. Возможность эффективного распараллеливания вычислений для систем с общей или распределенной памятью с помощью технологий OpenMP и MPI делает метод спектральных элементов привлекательным для промышленного применения в различных программных комплексах.

Применение современных численных подходов к математическому моделированию задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций с физически нелинейными материалами,

позволяет выявлять новые качественные эффекты поведения конструкции при определенных типах нагружения и подтверждает результаты, которые ранее были получены только с помощью аналитических или полуаналитических методов для конкретных классов задач, и не позволяют применять полученные решения в рамках промышленных расчетных программных комплексов.

Сложность построения конформных сеток на границе между элементами конструкций приводит к необходимости поиска математических методов, позволяющих сохранять непрерывность параметров на границе между элементами при наличии не конформно стыкованных узлов. Одним из таких наиболее современных и эффективных подходов является разрывный метод Галеркина [47, 73, 123]. В рамках данного исследования разрывный метод Галеркина был адаптирован для использования на не конформно стыкованных спектрально элементных сетках.

Разрывный метод спектральных элементов обеспечивает непрерывность перемещений и напряжений на границе между элементами конструкций, в то время как классический метод спектральных элементов обеспечивает непрерывность только по перемещениям. Задание уравнений связей в узлах граничных поверхностей обеспечивает непрерывность перемещений при решении краевых задач нелинейной теории упругости, а учет равенства нормальных напряжений на границе между контактирующими элементами позволяет обеспечить непрерывность по напряжениям. Разрывный метод спектральных элементов, предложенный для задач с условиями жесткого контакта на границе между элементами конструкций, позволяет расширить область применения метода на задачи с контактным взаимодействием общего вида с трением и без трения, обеспечивая непрерывность перемещений и напряжений на каждой итерации метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений.

Разрывный метод спектральных элементов позволяет проводить расчет послойного наращивания предварительно нагретых или нагруженных слоев в

рамках процесса аддитивного производства, в частности методом селективного лазерного спекания. Возможность использования элементов различных порядков на границе между слоями, в зависимости от их толщины, снимает необходимость перестроения сетки на уже остывших слоях изделия, что позволяет проводить полный цикл виртуального моделирования процесса производства изделия с помощью послойного наращивания.

Степень разработанности темы исследования

Вопросы нелинейной теории упругости подробно исследованы в работах В.И. Блоха [6], А.И. Лурье [21, 22], В.В. Новожилова [27], Б.Е. Победри [29, 30], Л.И.Седова [34, 35, 36], Г.С.Тарасьева [38, 40], М.М. Филоненко-Бородича [42], М. Муни [114], Ф. Мурнагана [115], Р. Огдена [116], Р. Ривлина [687, 688, 689], и многих других. Вопросы решения задач теории многократного наложения конечных деформаций для тел из нелинейно упругих материалов исследованы в работах Г.С. Тарасьева [39], В.А. Левина [15, 19, 20], К.М. Зингермана [12], и ряде других.

Математическое моделирование многократного наложения конечных деформаций с использованием метода спектральных элементов ранее не проводилось.

Целями диссертационной работы являются:

1) Разработка математических моделей напряженно-деформированного состояния изделий, изготавливаемых посредством последовательного присоединения предварительно деформированных частей, на основе теории многократного наложения конечных деформаций.

2) Разработка и верификация методики, алгоритмов и программного обеспечения для численного решения задач теории многократного наложения конечных деформаций методом спектральных элементов, решение модельных задач этой теории, анализ результатов.

Задачами диссертационной работы являются:

1) Разработка и исследование математической модели изгиба слоистой предварительно нагруженной балки, изготовленной посредством последовательного соединения слоев, с не полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

2) Разработка варианта алгоритма численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов.

3) Разработка и тестирование модификации разрывного метода спектральных элементов для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями и разработка алгоритма решения задач нелинейной упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе этой модификации

4) Программная реализация разработанных алгоритмов численного решения в составе промышленной системы компьютерного моделирования Фидесис и верификация разработанного программного обеспечения посредством сравнения с известными аналитическими решениями.

5) Проведение серии вычислительных экспериментов и получение новых качественных эффектов от учета наложения конечных деформаций при численном моделировании краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов с применением разработанного комплекса программ.

6) Выполнение численного моделирования процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания и получение результатов, согласующихся с экспериментальными данными.

Объект и предмет исследования

Объектом исследования являются краевые задачи нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

Предметом исследования являются алгоритмы численного решения краевых задач нелинейно теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями.

Научная новизна полученных результатов

В работе впервые представлена модификация разрывного метода спектральных элементов на гибридных неконформных сетках переменного порядка аппроксимации в подобластях для дискретизации геометрических моделей с нестыкованными граничными поверхностями. Также в работе впервые представлено применение разрывного метода спектральных элементов для решения краевых задач нелинейной упругости и теории многократного наложения больших деформаций. На основе разработанной модели и алгоритма решения реализован комплекс программ на языке программирования C++. Предложена и исследована математическая модель деформирования предварительно нагруженной составной балки с частично соединенными слоями с учетом геометрической и физической нелинейности и дополнительного контактного условия.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость диссертационного исследования определяется предложенной и исследованной математической моделью деформирования предварительно нагруженной составной балки с частично соединенными слоями с учетом геометрической и физической нелинейностей и дополнительного контактного условия. Впервые применен разрывный метод спектральных элементов к численному решению краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций. Разработана модификация разрывного метода спектральных элементов на гибридных сетках переменного порядка аппроксимации в

подобластях для дискретизации геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями

Практическая значимость работы состоит в создании комплекса программ, с помощью которого можно решать краевые задачи нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций для двумерных и трехмерных не конформно стыкованных сеток из смешанных типов элементов с учетом физической и геометрической нелинейностей, используя спектральные элементы высокого порядка. Ряд полученных результатов в виде программных модулей используется в программном комплексе прочностного инженерного анализа Фидесис, лицензионная версия которого установлена на промышленных предприятиях.

Методология диссертационного исследования

Методология исследования основана на применении нелинейной теории упругости и термоупругости и теории многократного наложения больших деформаций к разработке математических моделей, применении разрывного метода спектральных элементов к численному исследованию процессов многоэтапного деформирования нелинейно-упругих тел на основе этих моделей.

Основные положения, выносимые на защиту

1) Математическая модель изгиба слоистой предварительно нагруженной балки, изготовленной посредством последовательного соединения слоев, с не полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

2) Алгоритм численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов, модифицированного для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными

поверхностями, и программная реализация в составе промышленной системы компьютерного моделирования Фидесис.

3) Количественная оценка нелинейных эффектов от учета наложения конечных деформаций в задачах об образовании отверстия в телах из материалов Муни-Ривлина и Мурнагана.

4) Немонотонность зависимости угла поворота конца балки от предварительного растяжения первого слоя в задаче об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями.

5) Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния изделия в процессе аддитивного производства методом селективного лазерного спекания с помощью разработанного комплекса программ и его результаты, согласующиеся с экспериментальными данными.

Степень достоверности результатов

Обоснованность полученных результатов следует из корректности постановки задачи, использования уравнений нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций, граничных условий и определяющих соотношений, опубликованных ранее другими авторами, а также применения апробированных численных методов.

Достоверность результатов подтверждается результатами верификационных расчетов, которые хорошо согласуются с известными аналитическими, полуаналитическими и численными решениями.

Апробация результатов диссертации

Основные положения диссертации обсуждались на следующих научных конференциях: «Ломоносовские чтения» », МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014; Международный молодежный форум «Ломоносов - 2014» », МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2014; XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 2015; 26-й Симпозиум (международная

конференция) проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов, Москва, 2015; «Ломоносовские чтения» », МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2019; NAFEMS World Congress 2019, Quebec, 2019; XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, 2019.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 15 работах, в том числе в 3 статьях в научных журналах, входящих в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК. 3 статьи опубликованы в изданиях, индексируемых в базах Scopus, WoS, RSCI. На модули программного комплекса получены 11 свидетельств о государственной регистрации прав на программное обеспечение.

Личный вклад

Все приведенные в диссертации результаты получены самим автором, либо в рамках сотрудничества. В работах, опубликованных в соавторстве, общая механическая постановка в задачах нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций принадлежит в равной доле В.А. Левину и К.М. Зингерману, математическая постановка, включая выбор определяющих соотношений для материалов и граничных условий, принадлежит автору диссертации, общий алгоритм численного решения нелинейных задач теории упругости на основе метода спектральных элементов принадлежит А.В. Вершинину, алгоритм численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций на основе метода спектральных элементов с использованием гибридных криволинейных сеток, программная реализация алгоритмов, результаты вычислительных экспериментов принадлежат автору

диссертации. Механическая постановка задачи о численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях принадлежит М.Я. Яковлеву, математическая постановка в равных долях принадлежит М.Я. Яковлеву и автору диссертации, алгоритм численного решения на основе метода спектральных элементов и программная реализация алгоритмов принадлежат автору диссертации, результаты вычислительных экспериментов в равных долях принадлежат М.Я. Яковлеву и автору диссертации. Механическая постановка задач нелинейной теории упругости с контактом принадлежит в равных долях А.В. Вершинину и В.А. Левину, математическая постановка задачи принадлежит автору диссертации, формулировка общего подхода к решению задач нелинейной теории упругости с контактом принадлежит А.В. Кукушкину, алгоритмы численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов, модифицированного для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями принадлежит автору диссертации, программная реализация алгоритмов принадлежит автору диссертации, результаты вычислительных экспериментов принадлежат автору диссертации. Разработанные автором диссертации программные модули, на основе предложенных алгоритмов, вошли в состав программного комплекса прочностного инженерного анализа Фидесис.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 111 страницах и содержит 30 рисунков. Список литературы включает 155 источников.

В первой главе представлены основные уравнения и определяющие соотношения нелинейной теории упругости и теории многократного

наложения конечных деформаций, приведены постановки задач и описание математических моделей, используемых в исследовании.

Во второй главе приводится описание численной модели, используемой для решения краевых задач нелинейной теории упругости и теория многократного наложения конечных деформаций.

В параграфе 2.1 описывается переход от дифференциальной к численной (дискретной) постановке задачи с использованием метода Галеркина для решения краевых задач, учитывающий заданные граничные условия типа Неймана и поправки, возникающие от учета равенства нормальных напряжений на границе не конформно стыкованных подобластей в разрывном методе Галеркина.

В параграфе 2.2 предлагается модификация метода спектральных элементов для сеток, состоящих из смешанных типов элементов, в трехмерном (гексаэдры, тетраэдры, призмы, пирамиды) и двумерном (четырёхугольники и треугольники) случаях, при наличии не конформно стыкованных узлов элементов в модели. Также описывается преобразование уравнений вариационной постановки из непрерывной в дискретную форму с использованием дискретизации области интегрирования с помощью спектральных элементов смешанных типов и построения на них линейно независимых функций формы. Для каждого типа элемента приводится подробное описание методики выбора опорных точек (узлов) элементов, алгоритма построения функций формы для соответствующих элементов и отображений из локальных координат элементов в глобальные координаты. Далее описывается алгоритм вычисления интегралов для произвольных функций по элементам, необходимый для вычисления коэффициентов дискретизированной системы уравнений, приводится анализ и выбор наиболее подходящих квадратурных формул с учетом требований к точности интегрирования.

В параграфе 2.3 приводится описание методов учета контактных граничных условий и обоснование выбора метода прямого исключения

неизвестных для программной реализации. Также приведены варианты алгоритмов учета дополнительных соотношений между неизвестными в узлах элементов, накладываемыми в виде условий Дирихле и уравнений связей при построении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Далее описываются методы обеспечения равенства нормальных напряжений на границе не конформно стыкованных подобластей и между соседними спектральными элементами различных порядков.

В параграфе 2.4 приводятся алгоритмы решения систем дискретных уравнений, при этом особое внимание уделено методу Ньютона и критериям сходимости итерационных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений, к которым сводятся после дискретизации задачи нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

В пункте 2.4.1 приводится описание метода Ньютона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Описывается алгоритм и варианты его модификаций с учетом особенностей краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

В пункте 2.4.2 приводятся критерии сходимости итерационных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Выбор наиболее подходящих критериев сходимости при численном решении систем нелинейных алгебраических уравнений является одним из наиболее существенных моментов, влияющих на скорость расчета и точность полученных решений.

В пункте 2.4.3 приводится краткий обзор методов решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих на каждой итерации в процессе решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Выбор типа решателя существенно влияет на скорость решения и необходимое количество вычислительных ресурсов для его получения.

В третьей главе приводятся особенности программной реализации и примеры верификационных расчетов, сравнение полученных для них результатов с известными, опубликованными и апробированными результатами.

В параграфе 3.1 описываются особенности программной реализации метода спектральных элементов для гибридных не конформно стыкованных сеток с поддержкой различного порядка соседних элементов. Приводятся подробности реализации структурных модулей в рамках разработанного комплекса программ.

В параграфе 3.2 описываются примеры верификационных краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций, имеющих известные аналитические решения. Приводится сопоставление результатов, полученных численно с использованием разработанного программного комплекса, с аналитическими решениями.

В пункте 3.2.1 приведены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии, возникающем при вставке цилиндра из гиперупругого материала Блейтца-Ко в предварительно деформированный цилиндр из такого же материала. Эта задача представляет собой обобщение задачи Ламе-Гадолина для случая наложения конечных деформаций.

В пункте 3.2.2 приведены результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии, возникающем при образовании отверстия в предварительно нагруженном образце из слабосжимаемого материала Муни-Ривлина. Эта задача представляет собой обобщение задачи Кирша на случай образования отверстия в одноосно нагруженном образце при конечных деформациях.

В пункте 3.2.3 приведены результаты расчетов задачи о напряженно-деформированном состоянии, возникающем при образовании отверстия в предварительно нагруженном образце из нелинейно упругого материала Мурнагана. Эта задача также представляет собой обобщение задачи Кирша

на случай образования отверстия в одноосно нагруженном образце при конечных деформациях.

В параграфе 3.3 приведен анализ эффективности программной реализации разработанных моделей, методов и алгоритмов. Проведен сравнительный анализ, демонстрирующий преимущества метода спектральных элементов в сравнении с методом конечных элементов по точности и скорости вычислений.

В четвертой главе приведено описание численного моделирования многократного наложения конечных деформаций при послойном наращивании изделия аддитивного производства, позволившего выявить качественные эффекты, некоторые из которых являются новыми.

В параграфе 4.1 приведены описание модели и постановка задачи. В рамках модели происходит послойное наращивание предварительно нагруженных слоев с учетом контактного взаимодействия между ними.

В параграфе 4.2 приведены результаты расчетов для задачи о чистом изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

В параграфе 4.3 приведены решения задачи об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки, слои которой соединены не полностью (в центральной части балки соединение отсутствует), при конечных деформациях.

В параграфе 4.4 приведены результаты расчетов задачи об изгибе слоистой балки предварительно нагруженной балки, слои которой соединены не полностью (в торцевой части балки соединение отсутствует), при конечных деформациях.

В результате решения задачи об изгибе слоистой балки предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями были выявлены новые качественные эффекты, которые ранее не были получены ни в аналитическом, ни в численном виде, для данной постановки задачи:

1) Существование предельного изгибающего момента, который зависит от предварительного нагружения слоев (начальной деформации).

2) Наличие предельной кривизны балки, которая может быть достигнута за счет предварительного нагружения слоев (начальной деформации).

В параграфе 4.5 приведены результаты численного моделирования процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания. В результате вычислительных экспериментов были получены результаты, согласующиеся с экспериментальными данными.

В параграфе 4.6 сделаны выводы о применимости разработанного программного комплекса для моделирования многократного наложения конечных деформаций при послойном наращивании изделия аддитивного производства.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1.1 Основные уравнения и определяющие соотношения нелинейной теории упругости

В рамках нелинейной теории упругости уравнение равновесия в координатах начального состояния записывается в следующем виде [19]:

$$\overset{0}{\nabla} \cdot (\mathbf{P}(u(\mathbf{x}, t))) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

u – вектор перемещений,

\mathbf{P} – первый (несимметричный) тензор Пиолы,

\mathbf{f} – заданный вектор внешних нагрузок.

Аффинор деформаций имеет вид:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{F}^T, \quad (2)$$

\mathbf{F} – градиент деформаций.

Тензор истинных напряжений Коши выражается через первый (несимметричный) тензор Пиолы в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \det(\mathbf{\Psi})^{-1} \mathbf{\Psi}^T \cdot \mathbf{P}. \quad (3)$$

Второй тензором Пиолы-Кирхгофа выражается через первый (несимметричный) тензором Пиолы в следующем виде:

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Psi}^{-1}. \quad (4)$$

Поведение нелинейных гиперупругих слабосжимаемых материалов можно описать, используя определяющие соотношения, которые задаются с помощью следующих функций плотности энергии деформаций.

Для материала Муни-Ривлина функция плотности энергии деформаций имеет вид [114, 116]:

$$\mathbf{W} = C_{10} \left(J^{-\frac{2}{3}} I_1 - 3 \right) + C_{10} \left(J^{-\frac{4}{3}} I_2 - 3 \right) + \frac{1}{2} (J - 1)^2, \quad (5)$$

I_1, I_2 – первый и второй инварианты тензора меры деформаций Грина

J – определитель градиента деформаций, $J = \det(\mathbf{F})$,

\mathbf{F} – градиент деформаций.

Для материала Блейца-Ко функция плотности энергии деформаций может быть представлена в виде [59]:

$$\mathbf{W} = \frac{\mu\alpha}{2} \left[(I_1 - 3) + \beta(J^{-\frac{2}{\beta}} - 1) \right] + \frac{\mu(1-\alpha)}{2} \left[\left(\frac{I_2}{I_3} - 3 \right) + \beta(J^{\frac{2}{\beta}} - 1) \right], \quad (6)$$

I_3 – третий инвариант тензора меры деформаций Грина, $J = \sqrt{I_3}$.

Связь напряжений и деформаций для потенциала Мурнагана представляется в следующем виде [115]:

$$\overset{0}{\Sigma}(\overset{0}{\mathbf{E}}) = \lambda \left(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I} \right) \mathbf{I} + 2G\overset{0}{\mathbf{E}} + 2C_3 \left(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I} \right)^2 \mathbf{I} + C_4 \left(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I} \right) \mathbf{I} + 2C_4 \left(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I} \right) \overset{0}{\mathbf{E}} + 3C_5 \overset{0}{\mathbf{E}}^2, \quad (7)$$

$\overset{0}{\Sigma}$ – тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа второго,

λ – модуль Ламэ, G – модуль сдвига,

\mathbf{I} – единичный тензор, $\left(\overset{0}{\mathbf{E}} : \mathbf{I} \right)$ – свертка тензоров.

$\overset{0}{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ – тензор деформаций Грина,

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ – тензор меры деформаций Грина.

1.2 Основные уравнения и определяющие соотношения теории многократного наложения конечных деформаций

Приводятся уравнения математической модели, описывающие переход между состояниями модели с учетом конечности деформаций. В качестве тензорных характеристик деформаций используется тензор меры деформаций Грина $\mathbf{C}_{q,p}$, описывающий изменение деформаций при переходе из q -го в p -ое состояние [153]:

$$\mathbf{C}_{q,p} = \mathbf{F}_{q,p}^T \mathbf{F}_{q,p}, \quad (8)$$

$\mathbf{F}_{q,p}$ – градиент деформаций при переходе между q -ым и p -ым состояниями, $\mathbf{F}_{q,p} = \mathbf{I} + \sum_{n=q+1}^p \nabla^q u_n$

u_n – перемещения при переходе из $(n - 1)$ -го и n -е состояние,

∇^q – оператор градиента относительно q -го состояния модели.

При расчете в текущем n -ом состоянии относительно начального состояния в определяющих соотношениях и уравнениях используются тензор меры деформаций Грина в виде $\mathbf{C}_{0,n}$ и градиент деформаций в виде $\mathbf{F}_{0,n}$.

1.3 Постановка граничных условий

В качестве граничных условий на внешней границе модели возьмем соотношение для тензора напряжений типа свободная поверхность:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma=\Gamma_\sigma} = 0, \quad (9)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – нормаль на границе тела.

На внутренних границах модели для обеспечения непрерывности перемещений в любой точке на границах между не конформно стыкованными подобластями и соседними спектральными элементами различных порядков накладываются дополнительные условия, уравнения связей. Эти условия задаются на области контакта подобластей. Таким образом, если участки границы, задающие контактную границу между двумя подобластями, обозначить Γ^1 и Γ^2 , то требование равенства координат в координатах любого деформированного состояния можно записать в следующем виде [154]:

$$\mathbf{x}|_{\Gamma^1} = \mathbf{x}|_{\Gamma^2}, \quad (10)$$

где \mathbf{x} – координаты точек на границе не конформно стыкованных подобластей или соседних спектральных элементов различных порядков в деформированном состоянии.

Вторым важным требованием для обеспечения непрерывности напряжений в любой точке на границах между не конформно стыкованными подобластями и соседними спектральными элементами различных порядков является условие равенства нормальных напряжений [146]:

$$\mathbf{t}|_{\Gamma^1} = \mathbf{t}|_{\Gamma^2}, \quad (11)$$

\mathbf{t} – нормальное напряжение на границе не конформно стыкованных подобластей или соседними спектральными элементами различных порядков в деформированном состоянии.

1.4 Постановка задачи о послойном наращивании изделия аддитивного производства на основе теории многократного наложения конечных деформаций

Для моделирования послойного наращивания изделия аддитивного производства используется следующая термомеханическая модель нагружения изделия в ходе его изготовления. Изделие формируется послойно. Первый (нижний) слой присоединяется к подложке. Его верхняя граница нагревается под действием лазерного излучения. В слое возникают начальные деформации, вызванные тепловым воздействием. Затем к этому слою присоединяется сверху второй слой, который предварительно не деформирован. Его верхняя граница нагревается. В результате происходит перераспределение деформаций и напряжений в теле. Далее аналогичным образом к телу присоединяются третий и последующие слои. Данная модель является частной моделью добавления к телу или удаления из тела его напряжённых частей [15, 16].

В соответствии с теорией многократного наложения конечных деформаций выделяются следующие состояния (конфигурации) для нового добавляемого слоя в процессе послойного изготовления изделия аддитивного производства: начальное недеформированное состояние слоя, промежуточное состояние, соответствующее моменту появления температурных деформаций под воздействием лазера в новом присоединяемом слое, и текущее состояние, когда новый слой соединился с остальной уже изготовленной частью изделия и произошло перераспределение конечных деформаций. Для уже изготовленной части изделия во время изготовления нового n -го слоя можно выделить следующие состояния (конфигурации): промежуточное $(n - 1)$ -е состояние с накопленными деформациями, в котором эта часть изделия находится в момент присоединения нагретого нового слоя к уже изготовленной части, и текущее (n) -е состояние в момент окончания перераспределения конечных деформаций и перехода к изготовлению следующего слоя. Постановка и

решение задачи о присоединении очередного n -го слоя осуществляется в координатах $(n - 1)$ -го промежуточного состояния. Декартовы координаты частицы в промежуточном состоянии будем обозначать через x, y, z , а декартовы координаты частицы в текущем состоянии – X, Y, Z . Обозначим через $\Psi_{k,m}$ аффино́р деформаций при переходе из k -го в m -е состояние. $G_{k,m}$ – тензорная мера деформаций при переходе из k -го в m -е состояние, соответствующая мере Коши-Грина. Для краткости будем опускать нижние индексы у тензоров, описывающих переход из $(n - 1)$ -го состояния в n -ое, например, $\Psi_{n-1,n} = \Psi$.

Моделирование процесса послойного наращивания изделий аддитивного производства на основе теории многократного наложения конечных деформаций сводится к решению краевой задачи о присоединении n -го слоя, форма которого задана в момент спекания с остальным телом, в координатах $(n - 1)$ -го промежуточного состояния. Таким образом, уравнение равновесия в координатном базисе $(n - 1)$ -го состояния [19, 21]:

$$\nabla^{n-1} \cdot \mathbf{P}^{n-1} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12)$$

$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{x})$ – первый несимметричный тензор Пиолы относительно $(n - 1)$ -го состояния при добавлении n -го слоя.

Уравнение теплопроводности относительно температуры T [13]:

$$-\nabla^0 \cdot (k(T) \cdot \nabla^0 T) = q, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (13)$$

$k(T)$ – коэффициент теплопроводности, q – объемный источник тепла.

Связь между первым несимметричным тензором Пиолы относительно $(n - 1)$ -го состояния и тензором истинных напряжений (тензор напряжений Коши) в n -ом состоянии:

$$\mathbf{P}^{n-1} = (\det \Psi_{n-1,n}) \cdot (\Psi_{n-1,n}^T)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^n. \quad (14)$$

Определяющее соотношение для изотропного материала Гука при конечных деформациях с учетом температурных деформаций [21, 34]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \cdot \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) + 2\mu \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}), \quad (15)$$

$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \ln(\boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^T)$ – тензор деформаций Генки,

$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{th}} = \alpha \cdot \Delta T$ – тензор температурных деформаций,

ΔT – изменение температуры,

α – коэффициент температурного расширения.

λ, μ – константы Ламэ.

Мультипликативное разложение аффинора полных деформаций в виде произведения аффинора накопленных деформаций за предыдущие шаги послойного изготовления изделия и аффинора дополнительных деформаций при добавлении нового n -го слоя представляется в следующем виде:

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,n} = \boldsymbol{\Psi}_{0,n-1} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{n-1,n}. \quad (16)$$

Аффинор накопленных деформаций представляется через вектор накопленных перемещений в координатах $(n-1)$ -го промежуточного состояния:

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,n-1}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{I} - \sum_{i=k}^{n-1} \nabla \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \right)^{-1} = \left(\mathbf{I} - \nabla \sum_{i=k}^{n-1} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \right)^{-1} \quad (17)$$

k – номер шага послойного изготовления, на котором возник слой, содержащий точку, где вычисляется аффинор накопленных деформаций,

\mathbf{u}_n – дополнительные перемещения, вызванные добавлением n -го слоя, непрерывный во всей расчетной области.

В предположении, что \mathbf{U}^{n-1} – вектор накопленных перемещений (разрывный при переходе от слоя к слою), аффинор накопленных деформаций представляется в следующем виде:

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,n-1}(\mathbf{x}) = \left(\mathbf{I} - \nabla \mathbf{U}^{n-1}(\mathbf{x}) \right)^{-1}, \quad (18)$$

Аффинор дополнительных деформаций представляется через вектор дополнительных перемещений в координатах $(n-1)$ -го промежуточного состояния:

$$\boldsymbol{\Psi}_{n-1,n} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_n. \quad (19)$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 – участки границы расчетной области с заданными напряжениями и перемещениями соответственно, тогда граничные условия на напряжения и перемещения задаются в следующем виде:

$$\mathbf{P}^n \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{u}^n|_{\Gamma_2} = \mathbf{U}^n(\mathbf{x}) - \mathbf{U}(\mathbf{x}), \quad (21)$$

Пусть Γ_3 и Γ_4 – участки границы расчетной области с заданной температурой и условием конвективного теплообмена соответственно, тогда граничные условия для задачи теплопроводности задаются в следующем виде:

$$T^n|_{\Gamma_3} = T(\mathbf{x}), \quad (22)$$

$$\nabla T^n|_{\Gamma_4} = h \cdot (T_{env}^n - T^n), \quad (23)$$

T^n – температура при добавлении n -го слоя,

T_{env}^n – температура внешней среды при добавлении n -го слоя,

h – коэффициент конвективного теплообмена.

В рамках полученной модели при добавлении каждого слоя решается нелинейная система нелинейных уравнений методом Ньютона [154] относительно неизвестного вектора дополнительных перемещений \mathbf{u}^n , непрерывного во всей области, включая границу между телом и спекаемым слоем. После решения системы нелинейных уравнений и нахождения дополнительных перемещений \mathbf{u}^n в каждом узле сетки обновляется вектор \mathbf{U} путем прибавления к нему \mathbf{u}^n .

Деформированная геометрия тела на каждом шаге может быть получена добавлением ко всем узлам сетки вектора \mathbf{U} . Вектор \mathbf{U} , в отличие от классических методов конечных и спектральных элементов, хранится в локальных узлах элементов сетки, по аналогии с напряжениями и деформациями, так как даже для конформной сетки между слоями он терпит разрыв на границах между ними. В то же время, вектор дополнительных перемещений \mathbf{u}^n непрерывен во всей расчетной области, соответствующей n -му шагу, поэтому он задается стандартным для метода спектральных

элементов способом – в физических узлах сетки, общих для элементов на границе между слоями. Так как вектор U разрывный в точках, лежащих на границе между слоями; то для точек с одинаковыми координатами, но принадлежащих различным слоям, вектор накопленных перемещений будет также различным.

После определения изменения формы тела со вновь добавленным слоем путем прибавления к координатам всех точек области вектора u^n , тело переходит в n -е состояние. Далее находится решение задачи о добавлении $(n + 1)$ -го слоя в координатах n -го состояния.

ГЛАВА 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Описывается приведение уравнений вариационной постановки из непрерывной в дискретную форму с использованием дискретизации области интегрирования с помощью спектральных элементов смешанных типов и построения на них линейно независимых функций формы. Для каждого типа элемента приводится подробное описание методики выбора опорных точек (узлов) элементов, построения функций формы для соответствующих элементов и отображений из локальных координат элементов в глобальные координаты. Далее описывается алгоритм вычисления интегралов для произвольных функций по элементам, приводится анализ и выбор наиболее подходящих квадратурных формул с учетом требований к точности интегрирования.

2.1 Дискретизация уравнений теории многократного наложения конечных деформаций

Для перехода от дифференциальной к численной (дискретной) постановке задачи используется метод Галеркина решения краевых задач, учитывающий заданные граничные условия типа Неймана и добавки, возникающие от учета равенства нормальных напряжений в разрывном методе Галеркина. Полученные интегральные соотношения приводятся к виду, готовому для последующего построения численной модели и приведения уравнений к дискретному виду.

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом Галеркина [152]. Умножим уравнение (1) на произвольную пробную функцию $v = v(\mathbf{x})$ из пространства функций, квадратично интегрируемых вместе с их производными (пространство Соболева H^1): $\int_{\Omega} [v^2 + (\nabla v)^2] d\mathbf{x} < \infty$. Затем проинтегрируем полученное уравнение по области Ω :

$$\int_{\Omega} v \cdot \nabla \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1. \quad (24)$$

Упростим второе слагаемое слева:

$$\int_{\Gamma} v \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1. \quad (25)$$

Второе слагаемое равняется нулю в силу поставленных граничных условий:

$$\int_{\Gamma} v \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = v \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0, \quad \forall v \in H^1. \quad (26)$$

В итоге получаем интегральное уравнение в слабой форме:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} v \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \forall v \in H^1. \quad (27)$$

Первый (несимметричный) тензор напряжений Пиолы зависит от производных перемещений $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\nabla \mathbf{u})$, поэтому для выполнения равенства достаточно, чтобы функция \mathbf{u} и ее первые производные были конечными, то есть достаточно, чтобы $\mathbf{u} \in H^1$, а не должна была быть из пространства дважды дифференцируемых функций C^2 , как того требует дифференциальная постановка задачи [152].

Разобьем область Ω на n_e элементов Ω^e ($\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^e$). Это необходимо для учета неоднородностей, разрывов в рассматриваемой области Ω , а также для более корректного описания зон с быстро меняющимися параметрами. Пусть решение задачи \mathbf{u} может быть аппроксимировано с помощью значений \mathbf{U}_k^e в узлах элемента и линейно независимых функций формы $\varphi_k \in H^1$, заданных для каждого типа элементов:

$$\varphi_k = \begin{cases} 1 & \text{в } k\text{-ом узле,} \\ 0 & \text{в других узлах.} \end{cases} \quad (28)$$

Пусть число узлов в элементе m , число функций форм тоже m , тогда решение задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на элементе Ω^e можно представить в следующем виде: $\mathbf{u}^e \approx \sum_{k=1}^m \varphi_k \mathbf{U}_k^e$.

С учетом сделанных предположений из уравнения (27) можно составить систему интегральных уравнений, следующего вида:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \nabla \varphi_k \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^e} \varphi_k \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad k = 1..m. \quad (29)$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $(\mathbf{U}^e)^T = (\mathbf{U}_1^e, \dots, \mathbf{U}_m^e)$, тогда систему интегральных уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{F}^{int^e}(\mathbf{U}^e) - \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{F}^{ext^e} = 0, \quad k = 1..m. \quad (30)$$

$\mathbf{F}^{int^e}(U^e) = \int_{\Omega^e} \nabla \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x}$ – локальный вектор внутренних сил для элемента Ω^e ,

$\mathbf{F}^{ext^e} = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}$ – локальный вектор внешних сил для элемента Ω^e .

2.2 Решение задач теории многократного наложения конечных деформаций методом спектральных элементов

В качестве элементов для двумерного случая выступают семейства четырехугольников и треугольников. В качестве элементов для трехмерного случая выступают семейства гексаэдров, тетраэдров, пирамид и призм. Каждый элемент Ω^e задается с помощью опорных точек. Количество опорных точек для конкретного элемента указывается в его названии.

Каждая опорная точка определяется индексом \mathbf{a} , изменяющимся от 1 до \mathbf{d} , где \mathbf{d} – количество опорных точек конечного элемента. Для каждого элемента строится невырожденное отображение $\mathcal{F}^e: \Lambda \rightarrow \Omega^e$ из базисного (референсного) элемента Λ в Ω^e . Координаты точек элемента в глобальной системе координат $\mathbf{x}^e = (x^e, y^e, z^e)$ и референсной системе координат $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \theta)$ связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{x}^e(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}^e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{\mathbf{d}} N_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_a^e, \quad (31)$$

где $\mathbf{x}^e = (x^e, y^e, z^e)$ – глобальные координаты, в которых задан Ω^e , \mathbf{x}_a^e – глобальные координаты опорной точки \mathbf{a} элемента Ω^e , $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \theta)$ – референсные координаты, в которых задан Λ , $N_a(\boldsymbol{\xi})$ – \mathbf{a} -ая функция формы конечного элемента, $\boldsymbol{\xi} \in \Lambda$.

В общем случае для вычисления интеграла произвольной функции $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e через референсные координаты $\boldsymbol{\xi}$ понадобится определитель матрицы Якоби для отображения $\mathcal{F}^e(\boldsymbol{\xi})$:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} \mathbf{h}^e(\mathbf{x}) \cdot \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\xi}} \right| d\boldsymbol{\xi} = \int_{\Lambda} \mathbf{h}^e(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{J}^e(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (32)$$

где $\mathbf{h}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})|_{\Omega^e}$ – ограничение функции $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, на элемент Ω^e , $\mathcal{J}^e(\boldsymbol{\xi}) = \det \mathbf{J}^e(\boldsymbol{\xi})$ – определитель матрицы Якоби в референсной точке $\boldsymbol{\xi}$. Матрицу Якоби $\mathbf{J}^e(\boldsymbol{\xi})$ можно рассчитать стандартным образом:

$$J^e(\xi) = \frac{dx^e(\xi)}{d\xi} = \sum_{a=1}^d \frac{dN_a^d(\xi)}{d\xi} x_a^e. \quad (33)$$

В трехмерном случае:

$$J^e(\xi) = \begin{pmatrix} J_{x\xi} & J_{x\eta} & J_{x\theta} \\ J_{y\xi} & J_{y\eta} & J_{y\theta} \\ J_{z\xi} & J_{z\eta} & J_{z\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$J^{e-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

В двумерном случае предполагаем, что конечные элементы лежат в плоскости (x, y) , а референсные в плоскости (ξ, η) :

$$J^e(\xi) = \begin{pmatrix} J_{x\xi} & J_{x\eta} \\ J_{y\xi} & J_{y\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$J^{e-1}(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

2.2.1 Аппроксимация решения задачи на четырехугольных спектральных элементах

Семейство четырехугольников QUAD содержит следующие типы конечных элементов по количеству опорных точек: четырехузловой – QUAD4 ($d = 4$), восьмиузловой – QUAD8 ($d = 8$), девятиузловой – QUAD9 ($d = 9$). Референсный элемент Λ для семейства четырехугольников:

$$\Lambda = \{\xi = (\xi, \eta): \xi, \eta \in [-1, 1]\}. \quad (38)$$

Узлами четырехугольного спектрального элемента являются ГЛЛ-узлы. Пусть N – порядок спектрального элемента, тогда количество узлов в элементе:

$$N_\phi^{QUAD} = (N + 1)^2. \quad (39)$$

В одномерном случае ГЛЛ-узлы ищутся как корни ξ_a производной полинома Лежандра P_N степени N , который можно определить в виде:

$$P_N(\xi) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{d\xi^N} (\xi^2 - 1)^N. \quad (40)$$

В двумерном случае координаты ГЛЛ-узлов являются результаты прямого произведения одномерных координат.

Функции формы на элементе Ω^e строятся на основе прямого произведения одномерных полиномов Лагранжа: $\varphi_{ij,N}^{QUAD}(\xi) = \ell_i^N(\xi) \ell_j^N(\eta)$ – ij -ая функция формы степени N . Одномерные полиномы Лагранжа ℓ_a^N степени N определяются так [6]:

$$\ell_a^N(\xi) = \prod_{\substack{b=0 \\ b \neq a}}^N \frac{\xi - \xi_b}{\xi_a - \xi_b}. \quad (41)$$

Каждый полином ℓ_a^N равен 1 на своем узле a и равен 0 на остальных узлах элемента Ω^e , что можно записать с помощью символа Кронекера δ_{ab} :

$$\ell_a^N(\xi_b) = \delta_{ab}. \quad (42)$$

Аппроксимация решения задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на четырехугольном спектральном элементе Ω^e принимает вид ($m = iN + j$):

$$\mathbf{u}^e(\xi) \approx \sum_{m=0}^{N_{\varphi}^{QUAD}} \varphi_m^{QUAD}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_m) = \sum_{i,j=0}^N \varphi_{ij,N}^{QUAD}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_{ij}) = \sum_{i,j=0}^N \varphi_{ij,N}^{QUAD}(\xi) \mathbf{U}_{ij}^e. \quad (43)$$

Для интегрирования произвольной функции $h(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e используется квадратурная формула Гаусса-Лобатто-Лежандра (ГЛЛ):

$$\int_{\Omega^e} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} h^e(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_l h^e(\xi_l) \mathcal{J}^e(\xi_l), \quad (44)$$

где w_l – ГЛЛ-веса, ξ_l – координаты ГЛЛ-узлов.

ГЛЛ-веса в свою очередь рассчитываются так:

$$\begin{cases} w_a = \frac{2}{N(N+1)[P_N(\xi_a)]^2}, & \xi_a \neq \pm 1, \\ w_a = \frac{2}{N(N+1)}, & \xi_a = \pm 1. \end{cases} \quad (45)$$

Координаты ГЛЛ-узлов и ГЛЛ-веса (индексы i, j изменяются в пределах от 0 до N):

$$\xi_l = \xi_{ij} = (\xi_i, \eta_j), \quad \mathbf{w}_l = \mathbf{w}_{ij} = w_i \cdot w_j, \quad l = iN + j. \quad (46)$$

Одной из важнейших особенностей МСЭ является то, что для аппроксимации решения \mathbf{u} уравнения (27) используются полиномы Лагранжа степени N , построенные на тех же ГЛЛ-узлах, что необходимы для вычисления интегралов по области Ω^e с помощью квадратурной формулы Гаусса-Лежандра-Лобатто.

2.2.2 Аппроксимация решения задачи на треугольных спектральных элементах

Семейство треугольников TRI содержит следующие типы конечных элементов по количеству опорных точек: трехузловой – TRI3, шестиузловой – TRI6. Референсный элемент Λ для семейства треугольников:

$$\Lambda = \{\xi = (\xi, \eta): \xi, \eta \in [0,1], \xi + \eta \leq 1\}. \quad (47)$$

Узлами треугольного спектрального элемента являются точки ξ^j , являющиеся решением электростатической задачи, описанной Хестхавеном [93]. Пусть N – порядок спектрального элемента, тогда количество узлов в элементе:

$$N_\varphi^{TRI} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad (48)$$

Функции формы на элементе Ω^e строятся на основе ортогонального базиса (N – порядок спектрального элемента):

$$\psi_{ab}^{TRI} = P_a^{0,0} \left(\frac{2\xi}{1-\eta} - 1 \right) (1-\eta)^a P_b^{2a+1,0} (2\eta-1), \quad 0 \leq a+b \leq N. \quad (49)$$

$P_\gamma^{\alpha,\beta}(x)$ – полиномы Якоби степени γ на отрезке $[-1;1]$, ортогональные с весовой функцией $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В узлах элемента ξ^j вычисляются элементы матрицы Вандермонда (Vandermonde): $V_{m,j}^{TRI} = \psi_m^{TRI}(\xi^j)$, $1 \leq m, j \leq N_\varphi^{TRI}$. Тогда функции формы принимают вид:

$$\varphi_m^{TRI}(\xi) = \sum_{j=1}^{N_\varphi^{TRI}} (V_{m,j}^{TRI})^{-1} \psi_j^{TRI}(\xi). \quad (50)$$

Аппроксимация решения задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на треугольном спектральном элементе Ω^e принимает вид:

$$\mathbf{u}^e(\xi) \approx \sum_{m=0}^{N_\varphi^{TRI}} \varphi_m^{TRI}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_m) = \sum_{m=0}^{N_\varphi^{TRI}} \varphi_m^{TRI}(\xi) \mathbf{U}_m^e. \quad (51)$$

Для интегрирования произвольной функции $h(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e используются симметричные квадратурные формулы с положительными весами, описанные Чангом [151]:

$$\int_{\Omega^e} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} h^e(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{N_{\max}} w_l h^e(\xi_l) \mathcal{J}^e(\xi_l), \quad (52)$$

где w_l – веса, ξ_l – координаты точек, N_{\max} – количество точек в квадратурной формуле, отвечающей спектральному элементу порядка N .

2.2.3 Аппроксимация решения задачи на гексаэдральных спектральных элементах

Семейство гексаэдров HEX содержит следующие типы конечных элементов по количеству опорных точек: восьмиузловой – HEX8, двадцатиузловой – HEX20, двадцатисемиузловой – HEX27. Референсный элемент Λ для семейства гексаэдров:

$$\Lambda = \{\xi = (\xi, \eta, \theta) : \xi, \eta, \theta \in [-1, 1]\}. \quad (53)$$

Узлами четырехугольного спектрального элемента являются ГЛЛ-узлы. Пусть N – порядок спектрального элемента, тогда количество узлов в элементе:

$$N_{\varphi}^{HEX} = (N + 1)^3. \quad (54)$$

Функции формы на элементе Ω^e строятся на основе прямого произведения одномерных полиномов Лагранжа:

$$\varphi_{ijk,N}^{HEX}(\xi) = \ell_i^N(\xi) \ell_j^N(\eta) \ell_k^N(\theta) - ijk\text{-ая функция формы степени } N.$$

Аппроксимация решения задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на гексаэдральном спектральном элементе Ω^e принимает вид ($m = iN^2 + jN + k$):

$$\mathbf{u}^e(\xi) \approx \sum_{m=0}^{N_{\varphi}^{HEX}} \varphi_{m,N}^{HEX}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_m) = \sum_{i,j,k=0}^N \varphi_{ijk,N}^{HEX}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_{ijk}) = \sum_{i,j,k=0}^N \varphi_{ijk,N}^{HEX}(\xi) \mathbf{U}_{ijk}^e, \quad (55)$$

Для интегрирования произвольной функции $h(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e используется квадратурная формула Гаусса-Лобатто-Лежандра (ГЛЛ):

$$\int_{\Omega^e} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} h^e(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{(N+1)^3} w_l h^e(\xi_l) \mathcal{J}^e(\xi_l), \quad (56)$$

где w_l – ГЛЛ-веса, ξ_l – координаты ГЛЛ-узлов.

Координаты ГЛЛ-узлов и ГЛЛ-веса (индексы i, j, k изменяются в пределах от 0 до N):

$$\xi_l = \xi_{ijk} = (\xi_i, \eta_j, \theta_k), \quad \mathbf{w}_l = \mathbf{w}_{ijk} = w_i \cdot w_j \cdot w_k, \quad l = iN^2 + jN + k. \quad (57)$$

2.2.4 Аппроксимация решения задачи на тетраэдральных спектральных элементах

Семейство тетраэдров TETRA содержит следующие типы конечных элементов по количеству опорных точек: четырехузловой – TETRA4, десятиузловой – TETRA10. Референсный элемент Λ для семейства тетраэдров:

$$\Lambda = \{\xi = (\xi, \eta, \theta): \xi, \eta, \theta \in [0,1], \xi + \eta + \theta \leq 1\}. \quad (58)$$

Узлами тетраэдрального спектрального элемента являются точки ξ^j , являющиеся решением электростатической задачи, описанной Хестхавеном [93]. Пусть N – порядок спектрального элемента, тогда количество узлов в элементе:

$$N_\varphi^{TET} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}. \quad (59)$$

Функции формы на элементе Ω^e строятся на основе следующего ортогонального базиса (N – порядок спектрального элемента):

$$\psi_{abc}^{TET} = P_a^{0,0} \left(\frac{2\xi}{1-\eta-\theta} - 1 \right) (1-\eta-\theta)^a P_b^{2a+1,0} \left(\frac{2\eta}{1-\theta} - 1 \right) (1-\theta)^b P_c^{2a+2b+2,0} (2\theta-1), \quad 0 \leq a+b+c \leq N. \quad (60)$$

$P_\gamma^{\alpha,\beta}(x)$ – полиномы Якоби степени γ на отрезке $[-1;1]$, ортогональные с весовой функцией $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В узлах элемента ξ^j вычисляются элементы матрицы Вандремонда [57]: $V_{m,j}^{TET} = \psi_m^{TET}(\xi^j)$, $1 \leq m, j \leq N_\varphi^{TET}$.

Тогда функции формы принимают вид:

$$\varphi_m^{TET}(\xi) = \sum_{j=1}^{N_\varphi^{TET}} (V_{m,j}^{TET})^{-1} \psi_j^{TET}(\xi). \quad (61)$$

Аппроксимация решения задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на тетраэдральном спектральном элементе Ω^e принимает вид:

$$\mathbf{u}^e(\xi) \approx \sum_{m=0}^{N_\varphi^{TET}} \varphi_m^{TET}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_m) = \sum_{m=0}^{N_\varphi^{TET}} \varphi_m^{TET}(\xi) \mathbf{U}_m^e, \quad (62)$$

Для интегрирования произвольной функции $h(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e используются симметричные квадратурные формулы с положительными весами, описанные Чангом [151]:

$$\int_{\Omega^e} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} h^e(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{N_{max}} w_l h^e(\xi_l) \mathcal{J}^e(\xi_l), \quad (63)$$

где w_l – веса, ξ_l – координаты точек, N_{max} – количество точек в квадратурной формуле, отвечающей спектральному элементу порядка N .

2.2.5 Аппроксимация решения задачи на пирамидальных спектральных элементах

Семейство пирамид PYRAMID содержит следующие типы конечных элементов по количеству опорных точек: пятиузловой – PYRAMID5, тринадцатизузловой – PYRAMID13. Референсный элемент Λ для семейства пирамид:

$$\Lambda = \{\xi = (\xi, \eta, \theta): \xi, \eta, \theta \in [-1, 1], |2\xi + \theta| \leq 1, |2\eta + \theta| \leq 1\}. \quad (64)$$

Узлами пирамидального спектрального элемента являются точки ξ^j , совпадающие с ГЛЛ-узлами на квадратном основании пирамиды и узлами для треугольного спектрального элемента на треугольных боковых поверхностях пирамиды. Внутренние точки расположены на плоскостях параллельных квадратному основанию пирамиды в масштабированных ГЛЛ-узлах. Пусть N – порядок спектрального элемента, тогда количество узлов в элементе:

$$N_\varphi^{PYR} = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}. \quad (65)$$

Функции формы на элементе Ω^e строятся на основе следующего ортогонального базиса (N – порядок спектрального элемента):

$$\psi_{abc}^{PYR} = P_a^{0,0} \left(\frac{2\xi}{1-\theta} \right) P_b^{0,0} \left(\frac{2\eta}{1-\theta} \right) \left(\frac{1-\theta}{2} \right)^b P_c^{2\max(a,b)+2,0}(\theta), \quad (66)$$

$$0 \leq c \leq N, \quad 0 \leq a + b \leq N - c,$$

$P_\gamma^{\alpha,\beta}(x)$ – полиномы Якоби степени γ на отрезке $[-1;1]$, ортогональные с весовой функцией $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. В узлах элемента ξ^j вычисляются элементы матрицы Вандремонда [57]: $V_{m,j}^{PYR} = \psi_m^{PYR}(\xi^j)$ $1 \leq m, j \leq N_\phi^{PYR}$. Тогда функции формы принимают вид:

$$\varphi_m^{PYR}(\xi) = \sum_{j=1}^{N_\phi^{PYR}} (V_{m,j}^{PYR})^{-1} \psi_j^{PYR}(\xi). \quad (67)$$

Аппроксимация решения задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на пирамидальном спектральном элементе Ω^e принимает вид:

$$\mathbf{u}^e(\xi) \approx \sum_{m=0}^{N_\phi^{PYR}} \varphi_m^{PYR}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_m) = \sum_{m=0}^{N_\phi^{PYR}} \varphi_m^{PYR}(\xi) \mathbf{U}_m^e. \quad (68)$$

Для интегрирования произвольной функции $h(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e используются симметричные конические квадратурные формулы с положительными весами, описанные Фелиппа [87]:

$$\int_{\Omega^e} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} h^e(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{N_{max}} w_l h^e(\xi_l) \mathcal{J}^e(\xi_l), \quad (69)$$

где w_l – веса, ξ_l – координаты точек, N_{max} – количество точек в квадратурной формуле, отвечающей спектральному элементу порядка N .

2.2.6 Аппроксимация решения задачи на призматических спектральных элементах

Семейство призм WEDGE содержит следующие типы конечных элементов по количеству опорных точек: шестиузловой – WEDGE6, пятнадцатиузловой – WEDGE15. Референсный элемент Λ для семейства призм:

$$\Lambda = \{\xi = (\xi, \eta, \theta): \theta \in [-1,1], \xi, \eta \in [0,1], \xi + \eta \leq 1\}. \quad (70)$$

Узлами призматического спектрального элемента являются точки ξ^j , являющиеся результатом прямого произведения узлов для треугольного спектрального элемента и одномерных ГЛЛ-точек. Пусть N – порядок спектрального элемента, тогда количество узлов в элементе:

$$N_\phi^{WEDGE} = N_\phi^{TRI}(N + 1). \quad (71)$$

Функции формы на элементе Ω^e строятся на основе произведения функций формы для треугольного спектрального элемента и полиномов Лагранжа:

$$\varphi_{ik}^{WEDGE}(\xi) = \varphi_i^{TRI}(\xi, \eta) \ell_k^N(\theta). \quad (72)$$

Аппроксимация решения задачи $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}|_{\Omega^e}$ на треугольном спектральном элементе Ω^e принимает вид ($m = kN_\phi^{TRI} + i$):

$$\mathbf{u}^e(\xi) \approx \sum_{m=0}^{N_\phi^{WEDGE}} \varphi_m^{WEDGE}(\xi) \mathbf{u}^e(\xi_m) = \sum_{m=0}^{N_\phi^{WEDGE}} \varphi_m^{WEDGE}(\xi) \mathbf{U}_m^e. \quad (73)$$

Для интегрирования произвольной функции $h(\mathbf{x})$ по элементу Ω^e используются квадратурные формулы, являющиеся объединением квадратурных формул для треугольных спектральных элементов и квадратурной формулы Гаусса-Лежандра-Лобатто:

$$\int_{\Omega^e} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} h^e(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \sum_{l=1}^{N_{max}} w_l h^e(\xi_l) \mathcal{J}^e(\xi_l), \quad (74)$$

где w_l – веса, ξ_l – координаты точек, N_{max} – количество точек в квадратурной формуле, отвечающей спектральному элементу порядка N .

2.2.7 Численный расчет интегралов на спектральных элементах

Определив координаты точек интегрирования и соответствующие им веса, построив функции формы для аппроксимации решения, можно переходить непосредственно к вычислению интегралов на элементах локального вектора невязки. Локальный вектор невязки определяется следующим образом:

$$\mathbf{F}^{int}_i(\mathbf{U}^e) = \int_{\Omega^e} \nabla N_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Lambda} \nabla N_i(\xi) \cdot \mathbf{P}(\xi) \mathcal{J}^e(\xi) d\xi. \quad (75)$$

Выражение для x -овой компоненты локального вектора внутренних сил в i -ом узле для двумерного случая можно записать так (71):

$$\begin{aligned} F^{int}_{x,i}(\mathbf{U}_x^e) &= \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial x} P_{xx}(\mathbf{x}) + \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial y} P_{xy}(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Lambda} \left[\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} P_{xx}(\mathbf{x}) + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} P_{xy}(\mathbf{x}) \right] \mathcal{J}^e(\xi) d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Lambda} \left\{ \left[\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] P_{xx}(x) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] P_{xy}(x) \right\} J^e(\xi) d\xi = \\
&= \int_{\Lambda} \left\{ \left[\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} J_{\xi x}^{-1} + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \eta} J_{\eta x}^{-1} \right] P_{xx}(\xi) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} J_{\xi y}^{-1} + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \eta} J_{\eta y}^{-1} \right] P_{xy}(\xi) \right\} J^e(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Введем ряд обозначений для упрощения формулы (75):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{pmatrix} = (\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y), \quad \nabla_{\xi} N_i = \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right), \quad (76)$$

где $\nabla_{\xi} N_i$ – градиент i -ой функции формы в референсных координатах ξ .

С учетом сделанных упрощений и (64) выражение для x -овой компоненты локального вектора внутренних сил в i -ом узле для двумерного случая примет вид:

$$\begin{aligned}
F_{x,i}^{int e}(\mathbf{U}_x^e) &= \int_{\Lambda} \nabla_{\xi} N_i(\xi) \cdot \mathbf{J}^{e-1}(\xi) \cdot \mathbf{P}_x \cdot \mathbf{J}^e(\xi) d\xi, \\
i &= 1..(d+1)^{d_s}, \quad e = 1..n_e.
\end{aligned} \quad (77)$$

В трехмерном случае уравнения выражение для x -овой компоненты локального вектора внутренних сил в i -ом узле будет иметь вид (27) с учетом следующих обозначений:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z), \quad \nabla_{\xi} N_i = \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \right). \quad (78)$$

Первый (несимметричный) тензор напряжений Пиолы является некоторой заданной функцией градиента вектора перемещений: $\mathbf{P}|_{\Omega^e} = \mathbf{P}(\nabla \mathbf{u}^e)$. Производные вектора перемещений \mathbf{u}^e через значения перемещений в узлах элемента \mathbf{U}^e , с учетом того, что $\mathbf{u}^e \approx \sum_{k=1}^m N_k \mathbf{U}_k^e$, $m = 1..n_e$ вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_x^e}{\partial x} = \frac{\partial \sum_{k=1}^m N_k \mathbf{U}_k^e}{\partial x} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial N_k}{\partial x} \mathbf{U}_k^e = \sum_{k=1}^m \nabla_{\xi} N_k \cdot \mathbf{J}^{e-1}(\xi) \cdot \mathbf{U}_k^e. \quad (79)$$

2.2.8 Ассемблирование глобального вектора невязки

Рассчитав локальный вектор невязки, необходимо добавить значения его элементов в глобальный вектор. Это необходимо сделать, так как одни и те же узлы могут принадлежать разным элементам, и для каждого из них на узле будут получаться какие-то значения в локальном векторе невязки. Таким образом, каждый раз, вычисляя значения элементов локального вектора внутренних сил для i -го узла мы добавляем эти значения, путем операции сложения в соответствующие -ому узлу компоненты глобальной матрицы масс и глобального вектора внутренних сил. Для удобства ассемблирования глобальных векторов можно построить матрицу связности, где в i, e элементе содержится глобальный номер узла, соответствующего i -ому локальному узлу e -го элемента. После расчета уравнений для каждого элемента у нас имеется система уравнений:

$$\mathbf{F}^{int^e}(\mathbf{U}^e) - \mathbf{F}^{ext^e} = 0, \quad e = 1..n_e, \quad (80)$$

\mathbf{U}^e – локальный вектор узловых перемещений. Глобальная система уравнений имеет вид:

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}) - \mathbf{F}^{ext} = 0, \quad (81)$$

\mathbf{U} – глобальный вектор узловых перемещений,

$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{U}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{P} d\mathbf{x}$ – глобальный вектор внутренних сил для элемента Ω^e ,

$\mathbf{F}^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x}$ – глобальный вектор внешних сил для элемента Ω^e .

Глобальная система уравнений является нелинейной системой уравнений относительно перемещений, так как в ней учитываются геометрические и физические нелинейности задачи. Для разрешения нелинейной системы уравнений применяется модифицированный метод Ньютона [153].

2.3 Контактные граничные условия

Для обеспечения непрерывности перемещений и напряжений в любой точке на границах между не конформно стыкованными подобластями и соседними спектральными элементами различных порядков накладываются дополнительные условия, описанные в параграфе 1.3.

Основными хорошо известными подходами для добавления уравнений связей в глобальную систему уравнений являются:

- метод Лагранжевых множителей [118, 121],
- метод штрафных множителей [120, 129],
- модифицированный метод Лагранжевых множителей [43, 154],
- метод исключения связей [71, 107],
- разрывный метод Галеркина с внутренними штрафными множителями [47, 74].

Все перечисленные методы имеют свои преимущества и недостатки для применения в составе программных продуктов. Первые три подхода наиболее широко распространены, поэтому опишем их кратко. В качестве основного метода для программной реализации был выбран метод исключения связей.

2.3.1 Метод лагранжевых множителей

Потенциал для множителей Лагранжа имеет следующий вид [118]:

$$П_i = \int_{\Gamma_i} \lambda^T (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\Gamma^i, \quad (82)$$

где $\lambda = t^1 = -t^2$ - множитель.

Метод добавляет новую неизвестную в систему уравнений для каждой пары контактных элементов. В результате, как и все методы множителей Лагранжа, на диагонали матрица глобальной системы уравнений возникают нули для каждого множителя. Таким образом, нужно дополнительное внимание к решению СЛАУ, чтобы избежать деления на нулевой диагональный элемент и соответственно необходим подходящий выбор

базисных функций для корректной аппроксимации функционала множителей Лагранжа [121].

2.3.2 Метод штрафных множителей

Метод штрафных множителей использует следующее условие [129]:

$$P_i = \frac{k}{2} \int_{\Gamma_i} (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)^2 d\Gamma^i, \quad (83)$$

где k – штрафной множитель.

Выбор значения штрафного коэффициента не является очевидным, поскольку если коэффициент слишком большой, это приводит к плохо обусловленной матрице СЛАУ, а если слишком мал, то происходит взаимное проникновение контактных подобластей. Непрерывность по нормальным напряжениям не достигается без введения дополнительных условий.

2.3.3 Модифицированный метод Лагранжевых множителей

Модифицированный метод Лагранжевых множителей сочетает в себе простоту метода штрафных множителей и в то же время не включает часть его недостатков. Потенциал имеет следующий вид [43]:

$$P_i = \frac{k}{2} \int_{\Gamma_i} (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)^2 d\Gamma^i + \int_{\Gamma_i} \lambda^T (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\Gamma^i, \quad (84)$$

где λ_i обновляется на итерациях следующим образом:

$$\lambda_i^{(m+1)} = \lambda_i^{(m)} - k(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)^{(m)}. \quad (85)$$

Выбор штрафного множителя в данном методе все еще остается не очевидным, однако дополнительный множитель Лагранжа повышает точность расчета, если штрафной множитель недостаточно большой. Большая гибкость метода приводит к дополнительным итерациям при решении системы нелинейных уравнений, которые могут разойтись. Непрерывность нормальных напряжений на контактирующей границе между подобластями следует из формулировки естественным образом.

2.3.4 Метод прямого исключения связей

В отличие от метода Лагранжевых множителей метод прямого исключения связей сокращает размерность системы уравнений. Однако в данном методе существует необходимость определения независимых и зависимых степеней свободы для уравнений связей. В дальнейшем размерность глобальной системы уравнений может быть уменьшена за счет исключения зависимых степеней свободы через независимые, используя полученные уравнения связей. Алгоритм выбора зависимых и независимых степеней свободы нетривиален и для того, что наложить уравнений связей на координаты подобласти в деформированном состоянии, используя метод прямого исключения связей, необходимо представить их в следующем виде [107]:

$$\mathbf{x}^d = F(\mathbf{x}^i) = \sum_{j=0}^n \alpha_j(\xi) \mathbf{x}_j^i, \quad (86)$$

где \mathbf{x}^d – зависимые степени свободы,

\mathbf{x}^i – независимые степени свободы,

$\alpha_j(\xi)$ – коэффициенты разложения.

Полученные уравнения добавляются в матрицу и правую часть СЛАУ во время процесса ассемблирования одним из способов исключения зависимых неизвестных [120]. Непрерывность нормальных напряжений на границе контактирующих подобластей необходимо учитывать дополнительно.

2.3.5 Матрица связей

Элементы, принадлежащие границе между не конформно стыкованными подобластями, или соседние спектральными элементы различных порядков будем называть контактными. Контактные элементы образуют контактные пары, в которых один из элементов назначается главным, а другой подчиненным. Как правило, подчиненным выбирается элемент более высокого порядка. На грани подчиненного элемента, по

которой происходит стыковка контактных элементов, выбираются, так называемые, контактные точки. Выбор контактных точек может производиться различными способами, при этом для обеспечения необходимого порядка аппроксимации, не повышая требований к вычислительным ресурсам, является выбор точек, используемых при интегрировании по грани элемента является одним из наиболее оптимальных способов выбора этих точек.

После определения контактных пар в каждой контактной точке, накладываемые соотношения, можно записать в общем виде следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{K^s} N_k^s(\xi^s) \mathbf{x}_k^s = \sum_{k=1}^{K^m} N_k^m(\xi^m) \mathbf{x}_k^m, \quad (87)$$

ξ^s – поверхностные локальные координаты контактной точки в референсных координатах контактной грани подчиненного контактного элемента,

ξ^m – поверхностные локальные координаты контактной точки в референсных координатах контактной грани главного контактного элемента,

\mathbf{x}_k^s – координаты в узлах контактной грани подчиненного контактного элемента,

\mathbf{x}_k^m – координаты в узлах контактной грани главного контактного элемента,

$N_k^s(\xi^s)$ – значения функций формы элемента в контактной точке контактной грани подчиненного элемента,

$N_k^m(\xi^m)$ – значения функций формы элемента в контактной точке контактной грани главного элемента.

Полученная система уравнений связей является прямоугольной и может быть приведена к редуцированной построчно ступенчатой форме (Reduced Row Echelon Form), используя методы линейной алгебры для диагонализации прямоугольных разреженных матриц, например QR-разложение. В результате зависимые степени свободы отделяются от

независимых степеней свободы и уравнений связей могут быть использованы при ассемблировании матрицы и правой части СЛАУ.

2.3.6 Равенство нормальных напряжений

Равенство нормальных напряжений на контактной границе может быть задано в следующем виде [145, 146]:

$$\int_{\Gamma^s} N_i^s \mathbf{P}^m \mathbf{n}^s d\Gamma^s + \int_{\Gamma^m} N_i^m \mathbf{P}^s \mathbf{n}^m d\Gamma^m = 0, \quad (88)$$

где Γ^s - граница зависимой подобласти,

N_i^s – функции формы элементов зависимой подобласти,

\mathbf{n}^s - нормаль на границе зависимой подобласти,

\mathbf{P}^m - первый (несимметричный) тензор напряжений Пиолы в элементах главной подобласти,

Γ^m - граница главной подобласти,

N_i^m - функции формы элементов главной подобласти,

\mathbf{n}^m - нормаль на границе главной подобласти,

\mathbf{P}^s - первый (несимметричный) тензор напряжений Пиолы в элементах зависимой подобласти.

В общем случае дополнительные соотношения приводят к несимметричной матрице СЛАУ и, как результат, необходимо использовать требовательные к вычислительным ресурсам алгоритмы решения СЛАУ общего вида с разреженными матрицами. Однако, в частных случаях существуют подходы к симметризации матрицы СЛАУ [86].

Приведенное выше равенство не является универсальным и в ряде постановок задачи может приводить к несовместным или некорректным результатам, в таких ситуациях можно использовать модифицированную форму уравнения, основную на подходах, применяемых в разрывном методе Галеркина [47, 74]:

$$\int_{\Gamma^s} N_i^s \frac{1}{2} (\mathbf{P}^m + \mathbf{P}^s) \mathbf{n}^s d\Gamma^s + \int_{\Gamma^m} N_i^m \frac{1}{2} (\mathbf{P}^m + \mathbf{P}^s) \mathbf{n}^m d\Gamma^m = 0. \quad (89)$$

Данная постановка обобщает условие равенства нормальных напряжений на случай наличия разрывов по напряжениям на контактной границе, например, за счет накопленных напряжений, температурных деформаций и т.п. или при расчете собственных частот и собственных форм конструкции, а также с учетом нелинейного преднагружения.

2.4 Алгоритмы решения системы дискретных уравнений

При решении краевой задачи нелинейной теории упругости и теории наложения конечных деформаций возникает система дискретных уравнений, образующая систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha, \mathbf{x}_0) = 0, \quad (90)$$

$\mathbf{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ - вектор нелинейной невязки,

\mathbf{x} – неизвестный вектор решения,

\mathbf{x}_0 – начальное приближение неизвестного вектора решения,

α – коэффициент пропорциональности для вектора внешних нагрузок.

Одним из стандартных способов решения системы нелинейных алгебраических уравнений является метод Ньютона.

2.4.1 Метод Ньютона и его модификации

Последовательность итераций в методе Ньютона можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}^{v+1} = \mathbf{x}^v + \Delta \mathbf{x}^v, \\ \Delta \mathbf{x}^v = -\mathbb{J}^{-1}(\mathbf{x}^v) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}^v, \alpha, \mathbf{x}_0) \end{cases} \quad (91)$$

где \mathbf{x}^v – приближение неизвестного вектора решения на v -ой итерации,

$\mathbb{J}(\mathbf{x}^v) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha, \mathbf{x}_0)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^v}$ – матрица Якоби системы нелинейных алгебраических уравнений при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^v$.

В итоге порождается последовательность векторов приближений неизвестного вектора решения \mathbf{x}^v , $v = 0, 1, \dots$, которая должна сходиться к неизвестному вектору решения \mathbf{x} системы нелинейных алгебраических уравнений для фиксированного α .

Полученная система уравнений является частным случаем явной разностной схемы первого порядка для фиксированной динамической системы, в которой индекс итерации v – непрерывная величина:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, & n = 0 \\ \frac{d\mathbf{x}}{dv} = -\mathbb{J}^{-1}(\mathbf{x}^v) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}^v, \alpha, \mathbf{x}_0), & v > 0 \end{cases} \quad (92)$$

Явная разностная схема первого порядка для приведенной системы уравнений по непрерывной величине v имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, & v = 0 \\ \mathbf{x}^{v+1} = \mathbf{x}^v - \Delta v \cdot \mathbb{J}^{-1}(\mathbf{x}^v) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}^v, \alpha, \mathbf{x}_0), & v > 0 \end{cases} \quad (93)$$

Таким образом, метод Ньютона аппроксимирует производную вектора неизвестных по непрерывному индексу итераций v , используя разностную схему первого порядка с единичным шагом при $\Delta v = 1$. Известно, что явная разностная схема первого порядка по времени может быть неустойчивой [73], т.е. иметь ограничения на шаг по времени, в этом случае итерации метода Ньютона могут не сходиться. При решении реальных задач, в которых метод на все-таки сходится, скорость его сходимости может быть ниже теоретической, в идеальном случае метод Ньютона имеет квадратичную сходимость. В этом случае появляется необходимость прекращения выполнения итераций при условии достижения максимально разрешенного числа итераций и отсутствии сходимости. Затем итерационный процесс начинается заново, уже с меньшим α , но в большинстве задач сложно точно определить, какое значение α обеспечит сходимость итераций. Для поиска таких α был создан ряд способов, в большей или меньшей степени связанных с перебором различных значений α , начиная с максимального и вычислительными затратами на пересчеты и перезапуски итерационного процесса. Построение прямой зависимости между значением α и скоростью сходимости итераций является вычислительно дорогой процедурой, так как требует анализа устойчивости системы, сильно зависящего от типа задачи и аналитически трудноразрешимого для реальных прикладных задач. Полная схема метода Ньютона имеет следующий вид:

Алгоритм 1. Метод Ньютона

1. Инициализация. Выбираем значение α , начальное приближение \mathbf{x}_0 , максимальное число итераций v_{max} , коэффициент уменьшения δ при перезапуске итерационного процесса, такой что $\delta \cdot \alpha < 1$ и вид критерия сходимости.

2. Задаем $v := 0$, $\mathbf{x}^v := \mathbf{x}_0$.

3. Вычисляем $\mathbb{J}(\mathbf{x}^v)$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x}^v, \alpha, \mathbf{x}_0)$.

4. Определяем вектор приращения $\Delta \mathbf{x}^v$ путем решения СЛАУ:

$$\mathbb{J}^{-1}(\mathbf{x}^v) \cdot \Delta \mathbf{x}^v = -\mathbf{R}(\mathbf{x}^v, \alpha, \mathbf{x}_0).$$

5. Выполняем коррекцию вектора приращений.

6. Вычисляем $\mathbf{x}^{v+1} := \mathbf{x}^v + \Delta \mathbf{x}^v$ и присваиваем $v := v + 1$.

7. Если удовлетворяется критерий сходимости, то переходим к шагу 10.

8. Перезапуск. Если $v \geq v_{max}$, то положим $\alpha := \delta \cdot \alpha$ и переходим к шагу 2.

9. Переходим к шагу 4.

10. Выход. Присваиваем $\mathbf{x} := \mathbf{x}^v$.

В общем случае итерации метода Ньютона могут сходиться медленно или вовсе расходиться, поэтому был разработан ряд способов улучшения сходимости на основе подавления больших скачков в векторе приращения $\Delta \mathbf{x}^v$ [154]. Все эти способы можно рассматривать как разные пути определения диагональной матрицы $\Delta \mathbf{v} = \text{diag}(\Delta v_1, \dots, \Delta v_N)$, который имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}^{v+1} = \mathbf{x}^v - \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbb{J}^{-1}(\mathbf{x}^v) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{x}^v, \alpha, \mathbf{x}_0). \quad (94)$$

Если сравнить общий вид метода Ньютона с учетом подавления больших скачков в векторе приращения с методом Ньютона без модификаций, то диагональные веса Δv_i можно интерпретировать как различные локальные шаги по непрерывному индексу итераций в системе уравнений, записанной по непрерывной величине v . В методе Ньютона без модификаций все эти веса выбираются равными единице, в то время как

метода Ньютона с учетом подавления больших скачков в векторе приращения все диагональные элементы берутся равными единице на первой итерации, после чего в процессе решения задачи они масштабируются постоянными множителями. Основными способами поиска масштабирующих множителей являются [154]:

- линейный поиск (определяются исходя из скорости изменения нормы невязки),
- алгоритм доверительных интервалов (определяются оценкой качества приближения внутри фиксированной окрестности сходимости).

В ряде промышленных комплексов программ выбор масштабирующих множителей производится, используя значения физических параметров в каждом элементе сетки, так как в большинстве случаев плохая сходимость итераций обусловлена неудачно выбранным начальным приближением, поскольку метода Ньютона имеет локальную сходимость, высокими градиентами деформаций, изменением граничных условий на шагах нагружения. В связи с этим появилась идея ограничения изменения значений приращений вектора решения, таким образом, значения приращений корректируются в следующих случаях [154]:

- если приращение перемещений по абсолютной величине больше заданного порога, оно приравнивается пороговому значению,
- если приращение градиентов деформаций превышает некоторое пороговое значение,
- если элемент «переходит» через критическое значение (изменение свойств материала между шагами, компоненты градиентов деформаций близки к критическим значениям, возникновение или удаление элементов из модели), то приращения ограничивается при заданном параметре α .

Также требуется обеспечение положительности якобианов в точках интегрирования по элементам в деформированном состоянии, иначе значение якобиана прошло бы через 0, что означало бы, что элемент выродился и дальнейшее продолжение решения невозможно без перестроения сетки.

2.4.2 Критерии сходимости решения системы нелинейных уравнений

Выбор наиболее подходящих критериев сходимости при решении систем нелинейных алгебраических уравнений является одним из наиболее существенных моментов, влияющих на скорость расчета и точность полученных решений. В качестве основных критериев используются следующие параметры:

- относительная точность вектора невязок

$$\frac{\|R(x^v, \alpha, x_0)\|}{\|R(x^0, \alpha, x_0)\|} \leq \varepsilon_{rel}^R, \quad (95)$$

- абсолютная точность вектора невязок

$$\|R(x^v, \alpha, x_0)\| \leq \varepsilon_{abs}^R, \quad (96)$$

- относительная точность вектора решения

$$\frac{\|\Delta x^v\|}{\|x^v\|} \leq \varepsilon_{rel}^x, \text{ или } \frac{\|\Delta x^v\|}{\|x^v - x^0\|} \leq \varepsilon_{rel}^x, \quad (97)$$

- абсолютная точность вектора решения

$$\|x^v\| \leq \varepsilon_{abs}^x, \quad (98)$$

Максимальное число итераций является критерием, на остановку итераций и перезапуск решения системы нелинейных алгебраических уравнений с измененными параметрами:

$$v < v_{max}. \quad (99)$$

В зависимости от типов решаемых задач, а также выбранных значений параметров, для оценки сходимости нелинейных итераций может использоваться один или несколько критериев одновременно.

2.4.3 Обзор методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

На каждой нелинейной итерации метода Ньютона необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$, что в сумме составляет значительную часть вычислительных затрат. В силу специфики краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного

наложения конечных деформаций (существенные отличия свойств материалов между элементами до $\sim 10 \div 10^6$, наличие в системе уравнений, которые учитывают геометрические, физические нелинейности и контактно взаимодействие), такие системы являются плохо обусловленными системами общего вида (несимметричными и не положительно определенными). Поэтому эффективность решение СЛАУ является критичной для эффективной работы всего алгоритма решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

В настоящее время существуют два класса методов для решения линейных систем — прямые и итерационные методы. Прямые методы (на основе -разложения) требуют больших вычислительных затрат, что, делает неприемлемым их использование для задач больших размерностей (1млн и выше). Основной идеей итерационных методов является получение решения с помощью повторяющегося процесса в результате последовательных приближений к решению. Наиболее универсальными, эффективными и употребительными на практике в настоящее время являются так называемые проекционные итерационные методы, в частности, методы на основе подпространств Крылова [126]. Среди методов этого типа для решения больших разреженных несимметричных систем линейных алгебраических уравнений общего вида чаще всего используют методы BICGSTAB (стабилизированный метод бисопряженных градиентов) и метод FGMRES (гибкий обобщённый метод минимальных невязок) [126] в комбинации с различными видами предобуславливателей, повышающих эффективность методов.

ГЛАВА 3. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О МНОГОКРАТНОМ НАЛОЖЕНИИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ВЕРИФИКАЦИЯ

3.1. Особенности программной реализации

Программный комплекс состоит из нескольких основных модулей:

1) Модуль создания модели, построения сетки для заданной геометрии, задания свойств материалов, задания граничных условий.

2) Модуль загрузки входных данных (сетка, свойства материалов, граничные условия) и перестроения сетки из конечно-элементной в спектрально-элементную с учетом заданных порядков элементов.

3) Модуль управления решением систем нелинейных алгебраических уравнений.

4) Модуль аналитического построения матрицы Якоби и вычисления вектора невязок на итерациях решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

5) Модуль решения систем линейных алгебраических уравнений.

6) Модуль расчета физических параметров модели на основе найденного решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

7) Модуль выгрузки результатов расчета для последующей визуализации.

Модуль загрузки входных данных происходит перестроение сетки из конечно-элементной в спектрально-элементную с учетом заданных порядков элементов, что приводит к необходимости построения графа связности модели, вычисления расположения новых узлов сетки на основе формул, приведенных в параграфе 2.2 для вычисления координат узлов спектральных элементов в зависимости от их типа и порядка, и объединении узлов, в случае одинаковых порядков соседних спектральных элементов и назначении контактных пар в случае различных порядков соседних спектральных элементов. Дополнительно происходит пересчет граничных условий из узлов

конечно-элементной сетки на спектрально-элементную, используя в качестве интерполяционных полиномов внутри элементов функции формы конечных элементов.

Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений в качестве основного метода используется метод Ньютона, а также ряд его модификаций, для повышения устойчивости и скорости сходимости. В программной реализации используются требования на одновременное выполнение критериев на относительную точность вектора невязок и относительную точность вектора решения, либо на один из критериев на абсолютную точность вектора невязок или абсолютную точность вектора решения.

Вычисление интегралов по спектральным элементам, учет граничных и контактных условий с прямым исключением неизвестных при ассемблировании глобальной матрицы Якоби происходит в аналитическом виде на основе квадратурных формул и алгоритмов, описанных в параграфах 2.2 и 2.3. В программном комплексе реализовано вычисление квадратур на спектральных элементах до 9 порядка включительно.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений в качестве основного используется прямые методы решения системы СЛАУ, в силу того, что было необходимо получать точное решение, для корректного сравнения работы методов решения нелинейной системы уравнений по точности и скорости сходимости. Размерности верификационных задач позволяют применять прямые методы решения СЛАУ, не вынуждая затрачивать значительное время на эту часть выполнения программы.

Вычисление физических параметров модели происходит с помощью аналитически записанных соотношений, в том числе вычисление напряжений происходит с помощью аналитически выписанных производных функций плотности энергии деформаций.

3.2 Верификационные расчеты

В качестве верификационных примеров взят ряд задач, имеющих опубликованные аналитические решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций.

3.2.1 Задача о вставке цилиндра из гиперупругого материала

В качестве примера для апробации разработанного алгоритма использовалась задача о вставке цилиндра из гиперупругого материала. В качестве определяющего соотношения для материала использовался потенциал Блейтца-Ко (6). Для проверки результатов использовались результаты аналитических расчетов [12].

Данная задача представляет собой обобщение задачи Ламе-Гадолина для случая наложения конечных деформаций. Круговой упругий цилиндр внешнего радиуса $r_0(1 + e)$ и внутреннего радиуса $0.5r_0$ деформируется по действием внутреннего давления, таким образом, что внешняя радиус цилиндра становится равным r_0 . Затем этот цилиндр вставляется в другой недеформируемый цилиндр с внешним радиусом $1.5r_0$ и внутренним радиусом r_0 , таким образом, внешняя граница предварительно нагруженного цилиндра совпадает с внутренним радиусом ненагруженного цилиндра. После этого нагрузка с первого цилиндра опускается до 0 и цилиндры приходят во взаимодействие, вклад инерционных членов в данной постановке мы не учитываем. В результате границы цилиндров изменяются, в обоих цилиндрах возникают деформации, и нормальные напряжения на границе между цилиндрами выравниваются и выполняются условия нормального контакта без трения.

Постановка задачи о вставке цилиндра из гиперупругого материала основана на теории наложения конечных деформаций [19] и может быть описана в терминах трех состояний. Нулевое или начальное состояние: два цилиндра находятся в недеформированном состоянии. Первое или промежуточное состояние: два цилиндра находятся в состоянии равновесия с

жестким контактом на границе между внешней границей первого цилиндра и внутренней границей второго цилиндра, остальные поверхности цилиндров свободные. Четверть цилиндра использовалась для расчетов, так как задача осесимметрична, на границах симметрии задавались перемещения из условий симметрии. Уравнение равновесия (1) и граничные условия на напряжения и перемещения образуют замкнутую систему уравнений относительно перемещений. Решение проводилось в два шага для определения формы границ цилиндров в промежуточном и конечном состояниях.

Расчеты проводились для параметра $e = 1.46$, чтобы сравнить полученные решения с решениями, полученными аналитически [12]. Константы материала Блейтца-Ко брались следующие: $\mu = 1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$. Начальная грубая конечно элементная сетка представлена на Рис. 1. Радиальная координата – r_0 . Желтая часть модели – геометрия первого цилиндра в начальном состоянии. Распределения нормальных и касательных компонент тензора напряжений вдоль радиуса в конечном состоянии представлены на Рис. 2 и Рис. 3. Распределения главных удлинений вдоль радиуса представлены на Рис. 4 и Рис. 5.

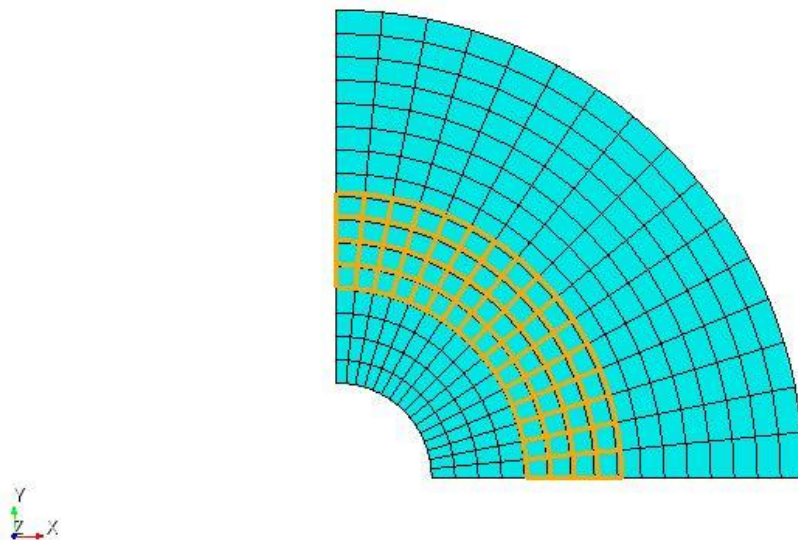


Рис. 1. Начальная конечно элементная сетка.

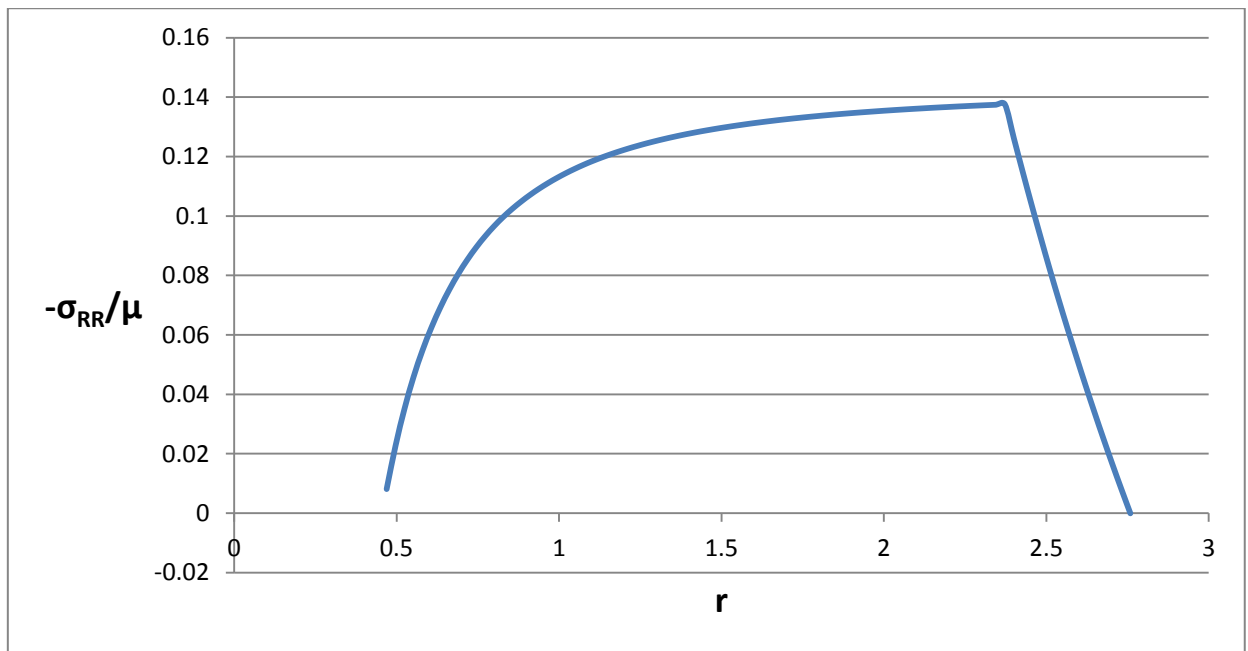


Рис. 2. Распределение нормальных напряжений вдоль радиуса цилиндра.

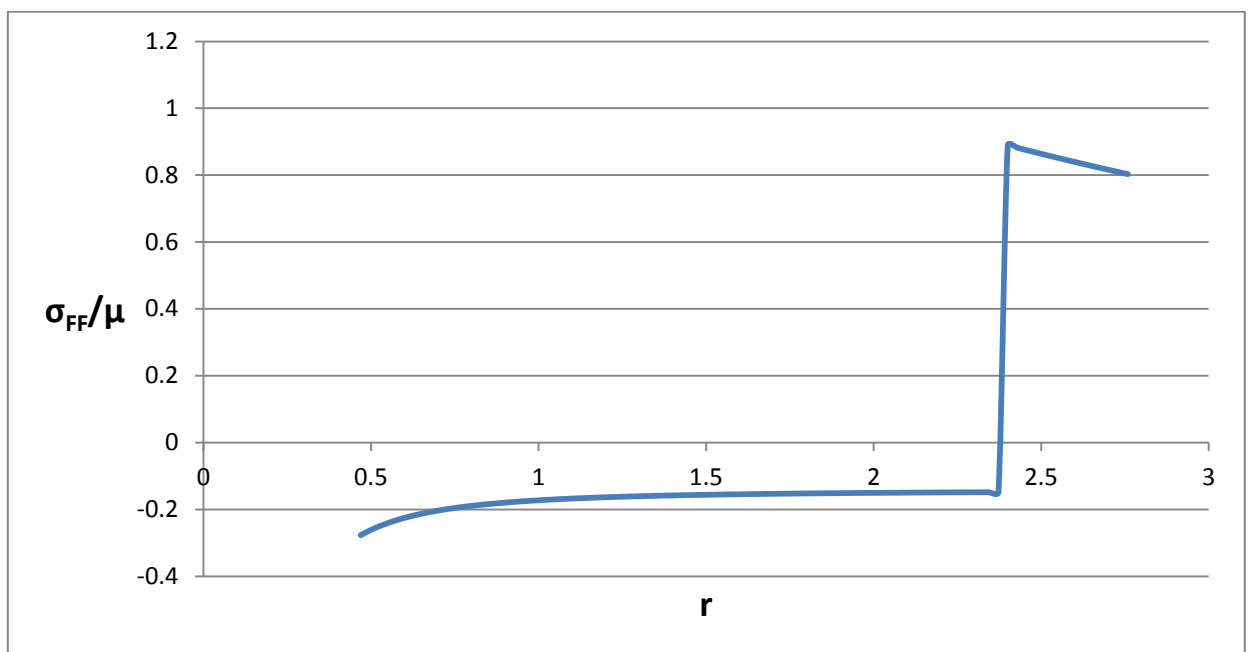


Рис. 3. Распределение касательных напряжений вдоль радиуса цилиндра.

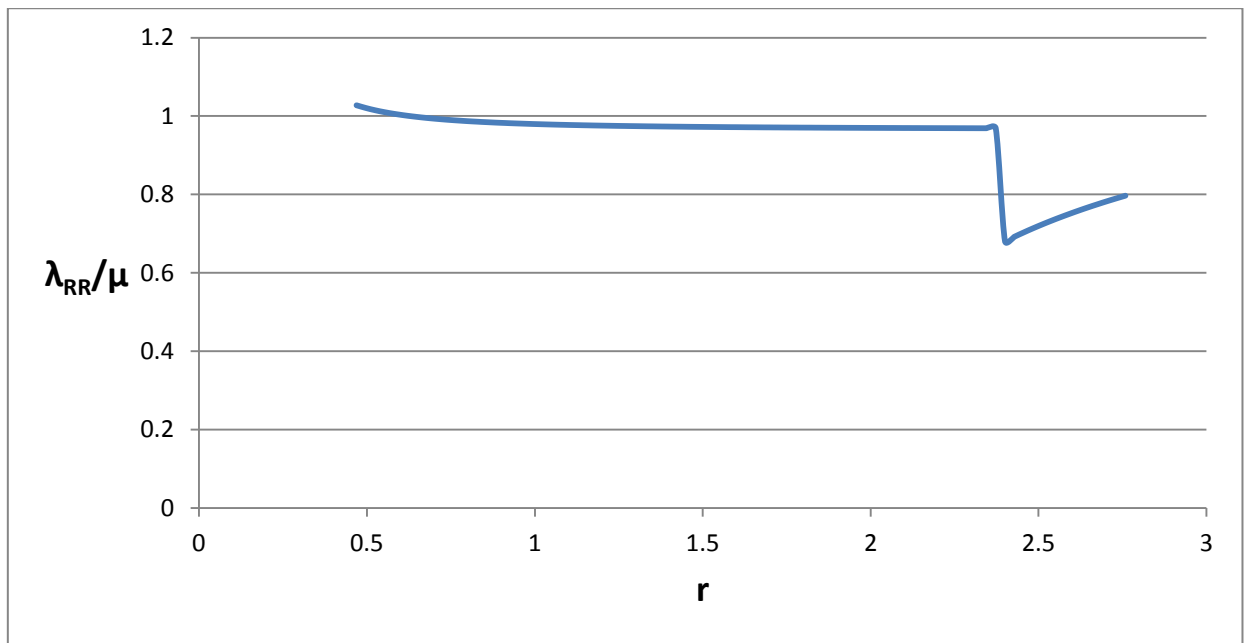


Рис. 4. Распределение нормальных главных удлинений вдоль радиуса цилиндра.

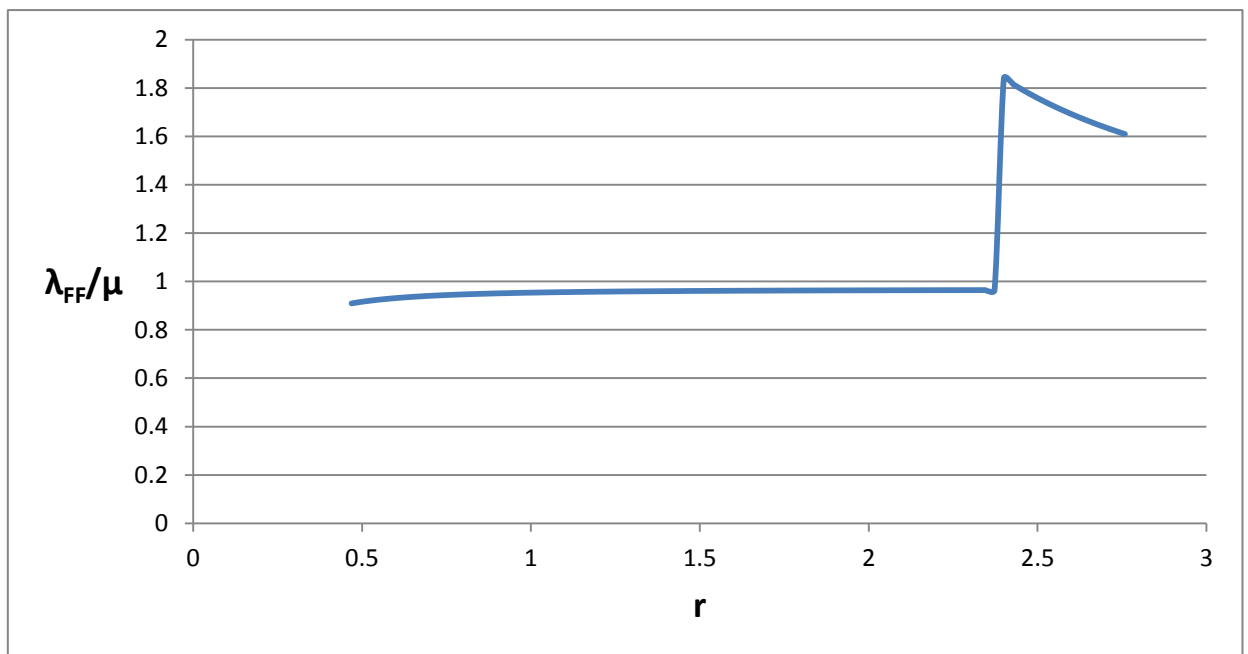


Рис. 5. Распределение касательных главных удлинений вдоль радиуса цилиндра.

Полученные результаты на основе метода спектральных элементов качественно и количественно совпадают с результатами, полученными

аналитически и полу-аналитически [12] для данной постановки задачи. Относительная погрешность не превысила 1%.

3.2.2 Задача об образовании отверстия в образце из слабосжимаемого материала

В качестве еще одного верификационного примера использовалась задача об образовании отверстия в образце из слабосжимаемого материала. В качестве определяющего соотношения для материала использовался потенциал Муни-Ривлина (5). Для проверки результатов использовались данные полученные аналитическими методами [12].

Данная задача представляет собой обобщение задачи Кирша на случай образования отверстия в одноосно нагруженном образце при конечных деформациях. Будем считать, что отверстие находится в начале координат, а границы образца удалены достаточно далеко, что напряжения на них близко к напряжениям на бесконечности, если бы образец был бесконечным. На первом шаге к границам образца прикладывается давление p , после этого в образце образуется отверстие радиуса R_0 и происходит перераспределение конечных деформаций. Координатные оси и схема нагружения изображены на Рис. 6. Решение задачи проводится в плоско-деформированном состоянии.

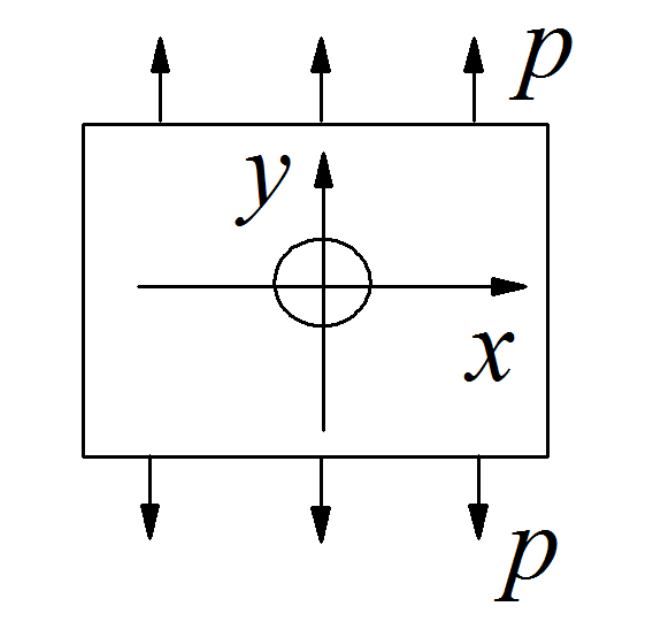


Рис. 6. Схема нагружения образца в задаче об образовании отверстия.

Постановка задачи об образовании отверстия в преднагруженном образце основана на теории наложения конечных деформаций [12] и может быть описана в терминах трех состояний. Нулевое или начальное состояние: образец находится в недеформированном состоянии. Первое или промежуточное состояние: образец находится в одноосном напряженно-деформированном состоянии под действием давлений приложенных на границе образца. Затем в преднагруженном образце образуется отверстие, а воздействие удаленной части модели на оставшуюся часть образца на границе отверстия заменяется внешними силами по принципу освобождения от связей. Третье или конечно состояние: образец с отверстием деформируется, так как внешние силы на границе отверстия заменяются на условие свободной поверхности. В силу симметрии модели для моделирования бралась четверть изображенной геометрии, а на границе разреза накладывались условия симметрии на перемещения. Уравнение равновесия (1) и граничные условия на напряжения и перемещения образуют замкнутую систему уравнений относительно перемещений. Решение проводилось в два шага для определения формы границ образца в промежуточном и конечном состояниях.

Серия расчетов проводилась для p от $-0.3G$ до $0.3G$, где G - модуль сдвига. Материал Муни-Ривлина использовался со следующими константами: $C_{10} = 0.25$, $C_{01} = 0.25$, $D = 50C_{10}$. Зависимость радиальных перемещений v на границе отверстия в точке $(0, R_0)$ от множителя нагрузки представлена на Рис. 7. Зависимость концентратора напряжений, отношение касательных напряжений в точке $(0, R_0)$ к приложенной нагрузке p , от множителя нагрузки представлена на Рис. 8.

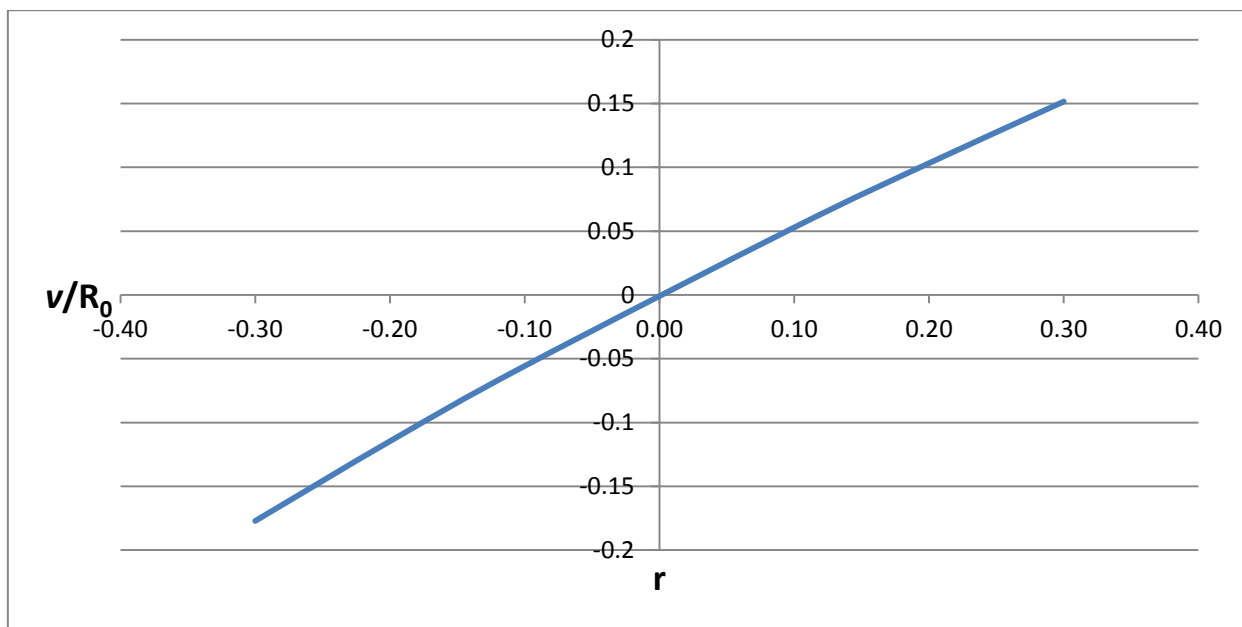


Рис. 7. Перемещения v на границе отверстия от множителя нагрузки p/G для образца из материала Муни-Ривлина.

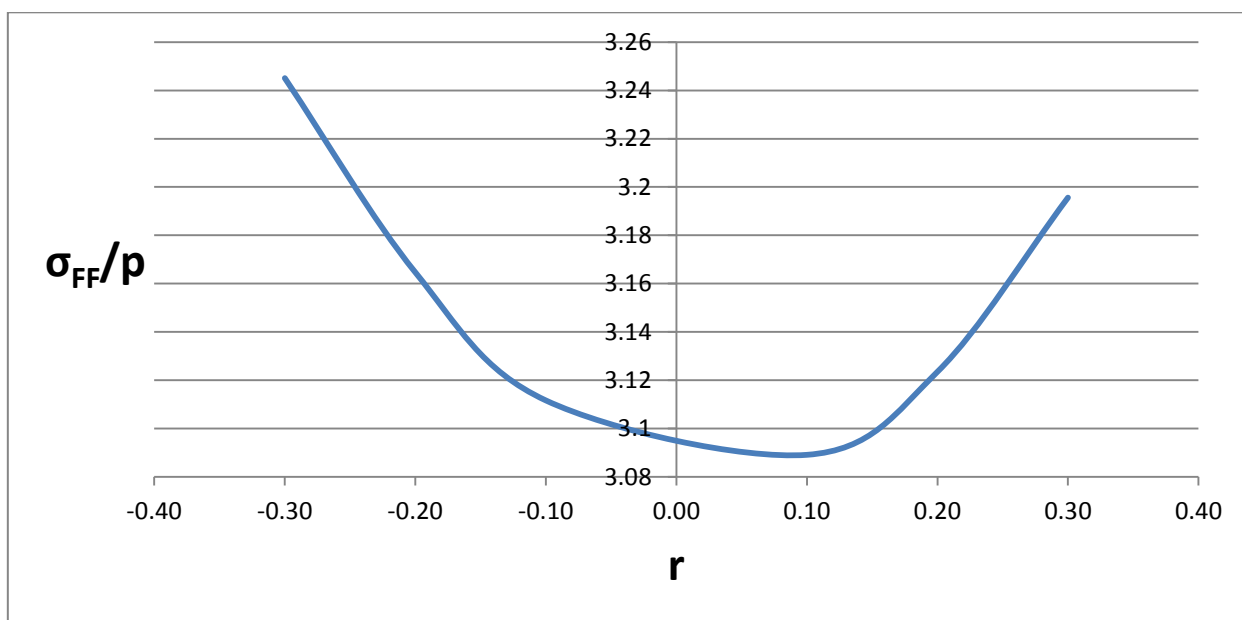


Рис. 8. Отношения концентратора напряжений от множителя нагрузки p/G для образца из материала Муни-Ривлина.

Результаты расчетов методом спектральных элементов подтверждают результаты и эффекты, с которыми происходило сравнение.

3.2.3 Задача об образовании отверстия в образце из нелинейно упругого материала

Для выявления нелинейных эффектов в нелинейно упругих материалах при наложении конечных деформаций использовалась задача об образовании отверстия в образце из нелинейного материала. В качестве определяющего соотношения использовался материал Мурнагана (4). Для проверки результатов использовались данные полученные аналитическими методами [12].

Постановка задачи аналогично предыдущему верификационному примеру из параграфа Рис. 6, но с изменениями в модели материала и в размере нагрузки, прикладываемой к образцу.

Серия расчетов проводилась для p от $-0.04G$ до $0.05G$, где G - модуль сдвига, а в качестве материала использовался нелинейно упругий материал Мурнагана со следующими константами: $\frac{\lambda}{G} = 2.25$, $\frac{c_3}{G} = -1.96$, $\frac{c_4}{G} = 3.61$, $\frac{c_5}{G} = 11.13$. Зависимость радиальных перемещений v на границе отверстия в точке $(0, R_0)$ от множителя нагрузки представлена на Рис. 9. Зависимость концентратора напряжений, отношение касательных напряжений в точке $(0, R_0)$ к приложенной нагрузке p , от множителя нагрузки представлена на Рис. 10.

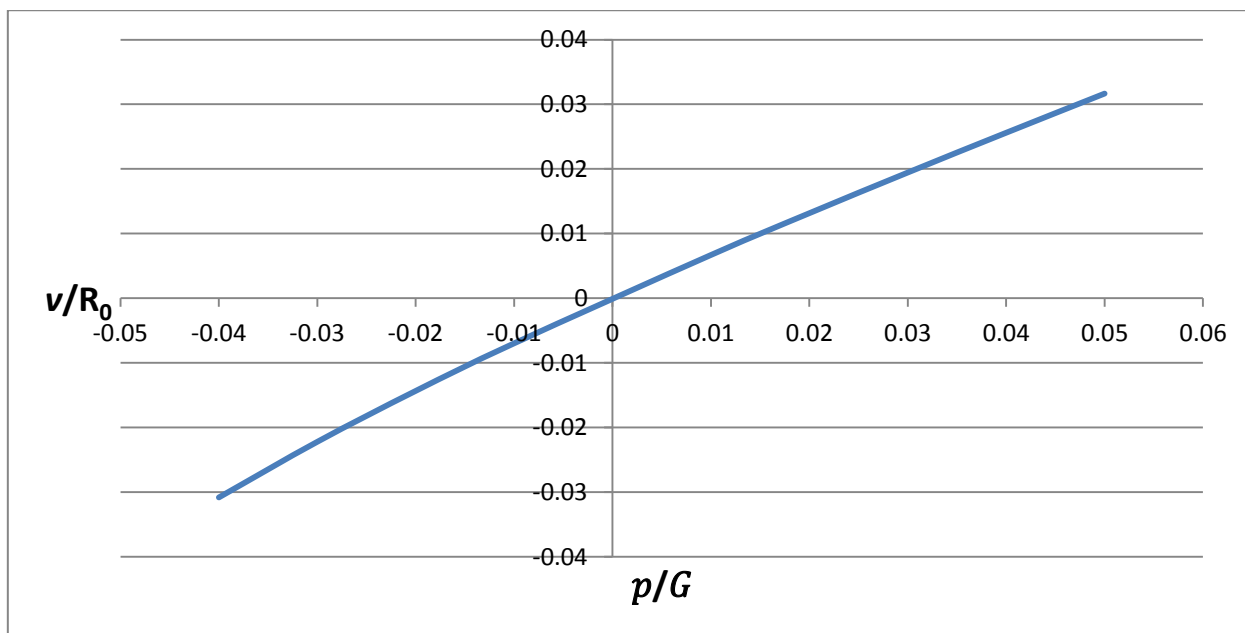


Рис. 9. Перемещения v на границе отверстия от множителя нагрузки p/G для образца из материала Мурнагана.

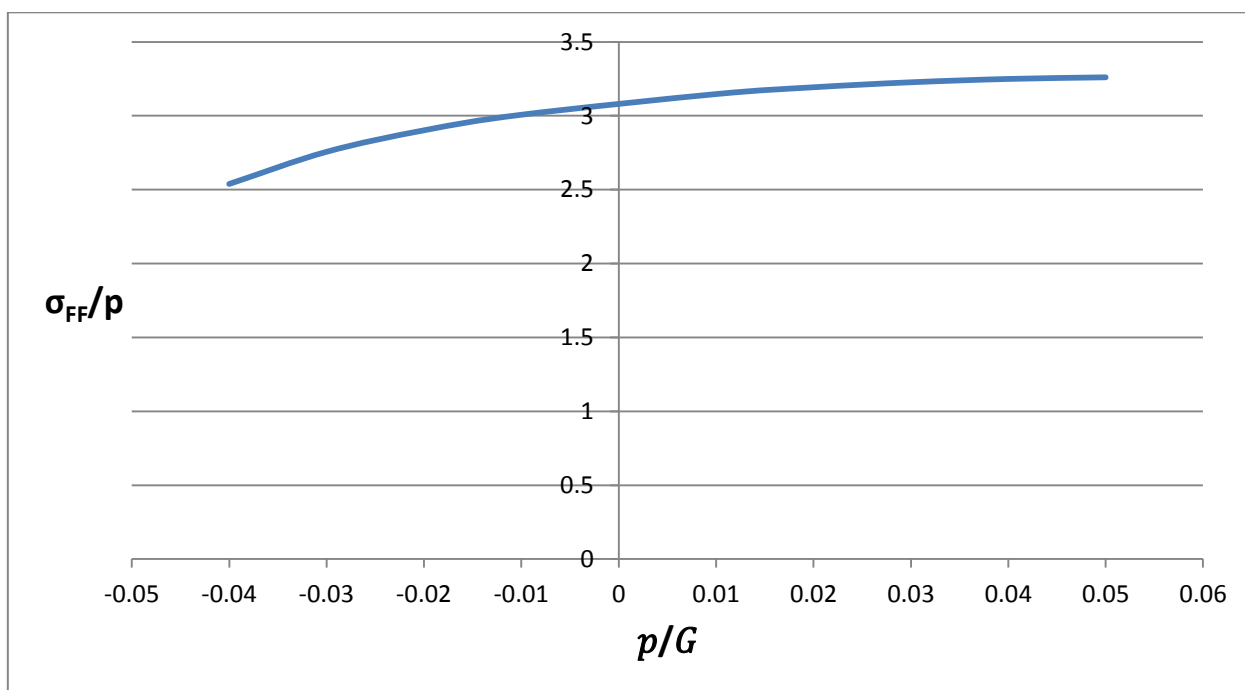


Рис. 10. Отношения концентратора напряжений от множителя нагрузки p/G для образца из материала Мурнагана.

Результаты расчетов методом спектральных элементов подтверждают результаты и эффекты, с которыми происходило сравнение

3.3 Анализ эффективности программной реализации

Для анализа эффективности программной реализации разработанных моделей, методов и алгоритмов для решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций, использовались программные средства разработчика, позволяющие определить временные и вычислительные затраты на каждом этапе работы вычислительного алгоритма в рамках разработанного комплекса программ.

Сравнительный анализ, демонстрирующий преимущества метода спектральных элементов в сравнение с методом конечных элементов по точности и скорости вычислений, проводился для верификационных примеров.

Приведем примеры по точности расчета для расчета задачи Ламе в нелинейной упругости с гиперупругим материалом Муни-Ривлина. Пусть задан цилиндр из гиперупругого материала Муни-Ривлина с заданными константами материала C_{10} , C_{01} и D , и приложенным внутренним давлением p . Расчеты проводились для следующих значений $p = 0.25C_{10}$, $p = 0.5C_{10}$ и $p = 0.7C_{10}$. Для каждого вида нагружения варьировался параметр D от $D = 2C_{10}$ до $D = 64C_{10}$. Итоговые результаты приведены в таблице 1. Таким образом, при наличии одного элемента по толщине и выборе 5-го порядка элементов или выше погрешность решения относительно аналитического решения уложилась в 1% [36].

$p/C_{10}=0.25$			
D/C_1	SEM (1 thickness element) Order 5	Analytical	ε , %
2	0.634	0.63	0.63
64	0.639	0.64	0.16
$p/C_{10}=0.5$			
D/C_1	SEM (1 thickness element) Order 5	Analytical	ε , %
2	1.66	1.65	0.61
64	1.632	1.62	0.74
$p/C_{10}=0.7$			
D/C_1	SEM (1 thickness element) Order 5	Analytical	ε , %
2	3.7	3.67	0.82
64	3.117	3.09	0.87

Таблица 1. Погрешность численного решения задачи в сравнении с аналитическим решением при 1 элементе по толщине цилиндра и 5 порядке спектральных элементов.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОКРАТНОГО НАЛОЖЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПОСЛОЙНОМ НАРАЩИВАНИИ ИЗДЕЛИЙ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА

4.1 Описание модели и постановка задачи

Описание процесса послойного наращивания изделий аддитивного производства с учетом конечных деформаций сводится к решению краевой задачи о наращивании n -го слоя, форма которого задана в момент спекания с остальным телом, в координатах $(n - 1)$ -го промежуточного состояния. Таким образом, уравнение равновесия в координатном базисе $(n - 1)$ -го состояния:

$$\nabla^{n-1} \cdot \left(\det(\Psi_{0,n-1})^{-1} \cdot \Sigma_{0,n}^{n-1} \cdot \Psi_{n-1,n} \right) = f(\mathbf{x}, t). \quad (100)$$

$\Sigma_{0,n}^{n-1}$ – тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода в координатах $(n - 1)$ -го промежуточного состояния,

$\Psi_{n-1,n}$ – аффино́р деформаций при переходе из $(n - 1)$ -го состояния в n -ое.

Связь тензоров напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода в координатах различных состояний:

$$\Sigma_{0,n}^{n-1} = \Psi_{0,n-1}^T \cdot \Sigma_{0,n}^0 \cdot \Psi_{0,n-1} \quad (101)$$

Аффино́р полных деформаций $\Psi_{0,n}$ представляется в виде (16). Аффино́р накопленных деформаций $\Psi_{0,n-1}$ представляется в виде (17)-(18).

Аффино́р дополнительных деформаций $\Psi_{n-1,n}$ представляется через вектор дополнительных перемещений в координатах $(n - 1)$ -го промежуточного состояния в виде (19).

Граничные условия задаются в следующем виде:

$$\mathbf{P}^n \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = \vec{p}^n(\mathbf{x}), \quad (102)$$

$$\mathbf{u}^n|_{\Gamma_2} = U^n(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}), \quad (103)$$

где \vec{p}^n - заданный вектор внешних сил, действующих на границе Γ_1 , для n -го шага,

U^n - заданный вектор полных перемещений для n -го шага на границе Γ_2 .

Для улучшения сходимости метода Ньютона при решении возникающей системы нелинейных уравнений внешняя нагрузка может прикладываться не одномоментно за один шаг, а постепенно на подшагах внутри текущего n -го шага. При этом на каждом подшаге решается аналогичная система уравнений с граничными условиями:

$$\mathbf{P}^n \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = \gamma(\vec{p}^n(\mathbf{x}) - \vec{p}^{n-1}(\mathbf{x})) + \vec{p}^{n-1}(\mathbf{x}), \quad (104)$$

$$\mathbf{u}^n|_{\Gamma_1} = \gamma(U^n(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x})), \quad (105)$$

где γ монотонно увеличивается от 0 до 1 на подшагах.

Если при переходе с $(n - 1)$ -го на n -й шаг какая-то часть граничных условий добавляется или снимается, то для условий типа Неймана (на напряжения) это соответствует добавлению с соответствующим множителем γ или занулению соответствующий нагрузки. Для условий типа Дирихле: добавление перемещений соответствует заданию фиксированных приращений перемещений в узлах сетки с соответствующим множителем γ , а снятие граничных условий на перемещения соответствует, по принципу освобождения от связей, заданию на этой части границы условия:

$$\mathbf{P} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = (1 - \gamma)\mathbf{P}^{n-1} \cdot \vec{n}, \quad (106)$$

где \mathbf{P}^{n-1} - полные напряжения на этой границе на $(n - 1)$ -м шаге, что в интегральном смысле эквивалентно силам реакции в соответствующих узлах.

Данная краевая задача решается относительно неизвестного вектора дополнительных перемещений \mathbf{u}^n , непрерывного во всей области, включая границу между телом и спекаемым слоем. После решения системы

нелинейных уравнений и нахождения дополнительных перемещений \mathbf{u}^n в каждом узле сетки обновляется вектор \mathbf{U} путем прибавления к нему \mathbf{u}^n .

В случае слишком сильного искажения начальной формы тела, накопленного в процессе послойного наращивания с многократным наложением конечных деформаций, может потребоваться перестроение расчетной сетки на очередном n -м шаге, чтобы продолжить численный расчет. В противном случае, итерационный процесс решения нелинейной системы уравнений методом Ньютона на каждом шаге наращивания перестанет сходиться ввиду слишком сильного искажения элементов, их дисторсии, то есть будет недопустимое качества сетки для решения методом спектральных элементов, например, станет отрицательным определить матрицы Якоби в n -ом состоянии.

При перестроении сетки необходимо осуществить перенос вектора накопленных перемещений из узлов старой сетки на новую, а именно для каждого узла новой сетки, соответствующего некоторой Лагранжевой точке тела, нужно определить значение вектора \mathbf{U} в данной точке. При численной дискретизации на основе метода спектральных элементов вектор \mathbf{U} представляется следующим образом внутри спектрального элемента с номером e :

$$\mathbf{U}^e(\xi) = \sum_{i=1}^N U_i^e \varphi_i^e(\xi), \quad (107)$$

где U_i^e – значения вектора накопленных перемещений в локальных узлах элемента, так как вектор \mathbf{U} может быть разрывным на границе между элементами, если данные элементы принадлежат разным слоям,

φ_i^e – функции формы элемента, заданные в референсных координатах элемента ξ .

Для нахождения значения вектора \mathbf{U} в узле новой сетки с координатами \mathbf{x} , необходимо определить внутренние координаты ξ для элемента старой сетки с номером e , внутри которого находится данный узел. Данные

координаты могут быть найдены из решения следующей в общем случае нелинейной системы алгебраических уравнений относительно ξ :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^N x_i^e \varphi_i^e(\xi), \quad (108)$$

где x_i^e – координаты сдвинутых узлов старой сетки.

При вычислении градиента накопленных деформаций путем прямого дифференцирования вектора U используется правило дифференцирования сложной функции: $\nabla_x = \nabla_\xi \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}$.

После добавления нового слоя и определения изменения текущей формы изделия путем прибавления к координатам всех точек области вектора приращения перемещений \mathbf{u}^n , тело переходит в следующее n -е состояние. Далее решается задача о добавлении $(n+1)$ -го слоя в координатах n -го состояния.

4.2 Задача о чистом изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с полностью соединенными слоями

Задача о чистом изгибе двухслойной предварительно нагруженной балки с полностью соединенными слоями при конечных деформациях и предварительно деформированным одним из слоев выбрана для верификации предлагаемых алгоритмов. Сравнение численного решения производилось с аналитическими результатами, полученными для балки из несжимаемых материалов [16]. Данное решение в дальнейшем может быть использовано для верификации численных решений.

Постановка задачи об изгибе слоистой балки основана на теории наложения конечных деформаций [19] и может быть описана в терминах трех состояний. В начальном или недеформированном состоянии балка с прямоугольным сечением подвергается начальному однородному растяжению и переходит во второе или промежуточное состояние. Далее, вторая балка присоединяется к недеформированной балке. На границе склейки балок предполагается условие жесткого контакта, то есть приращения

перемещений на границе балок совпадают. Затем слоистая балка деформируется как единое целое под действием начальной деформации первого слоя и переходит в третье или конечное состояние. Рассматривается плоско-деформированное состояние.

Следующий нелинейный эффект был обнаружен при численном моделировании: существует максимальная предельная кривизна балки, которая может быть достигнута за счет начального растяжения нижнего слоя.

Начальные главные деформации первого слоя изменяются в диапазоне от 1 до 2.25. Константы материала Муни-Ривлина для нижнего слоя: $C_{10} = 0.25$ Па, $C_{01} = 0.25$ Па, $D = 50C_{10}$, для присоединяемого слоя: $C_{10} = 0.125$, $C_{01} = 0.125$, $D = 50C_{10}$. Толщина слоев $h = 0.05l$, где l – длина балки в промежуточном состоянии. Изгиб балки характеризуется углом поворота ее конца. Для сравнения полученных численных результатов с аналитическими решениями [16], вычисляется приведенный угол равный отношению угла поворота к отношению длины балки в промежуточном состоянии к толщине первого слоя в этом состоянии.

Начальная неконформная конечно-элементная сетка в промежуточном состоянии представлена на Рис. 11. Распределение напряжений по Мизесу (Па) для начальных главных деформаций $\lambda = 1.9$ изображено на Рис. 12. Зависимость приведенного угла поворота конца балки от начальных главных деформаций первого слоя изображены на Рис. 13. Синий график соответствует численному решению, а красный график – аналитическому решению [16]. Следует отметить, что численные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными аналитически. Особенно следует отметить немонотонность обеих зависимостей. Угол поворота изображен относительно соотношения длины и толщины балки. Зависимость максимальных напряжений по Мизесу (Па) от начальных главных деформаций в линейном и нелинейном случаях представлены на Рис. 14. Существенные нелинейные эффекты видны на представленном графике.

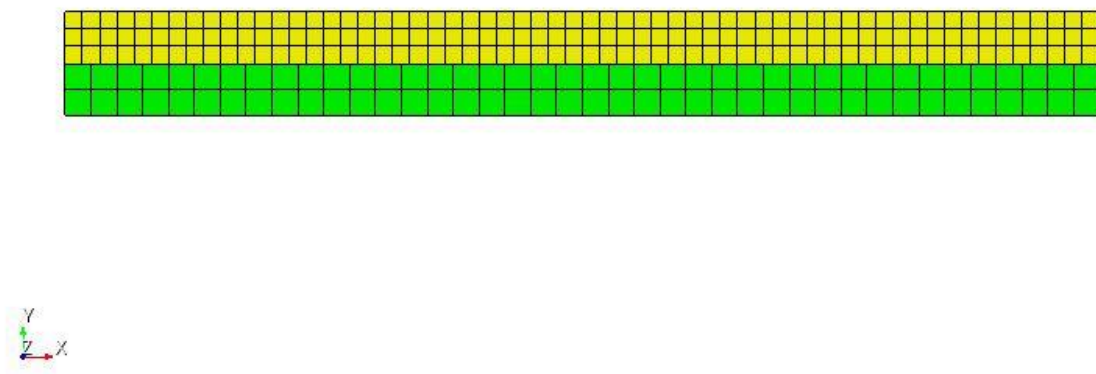


Рис. 11. Конечно-элементная сетка в промежуточном состоянии

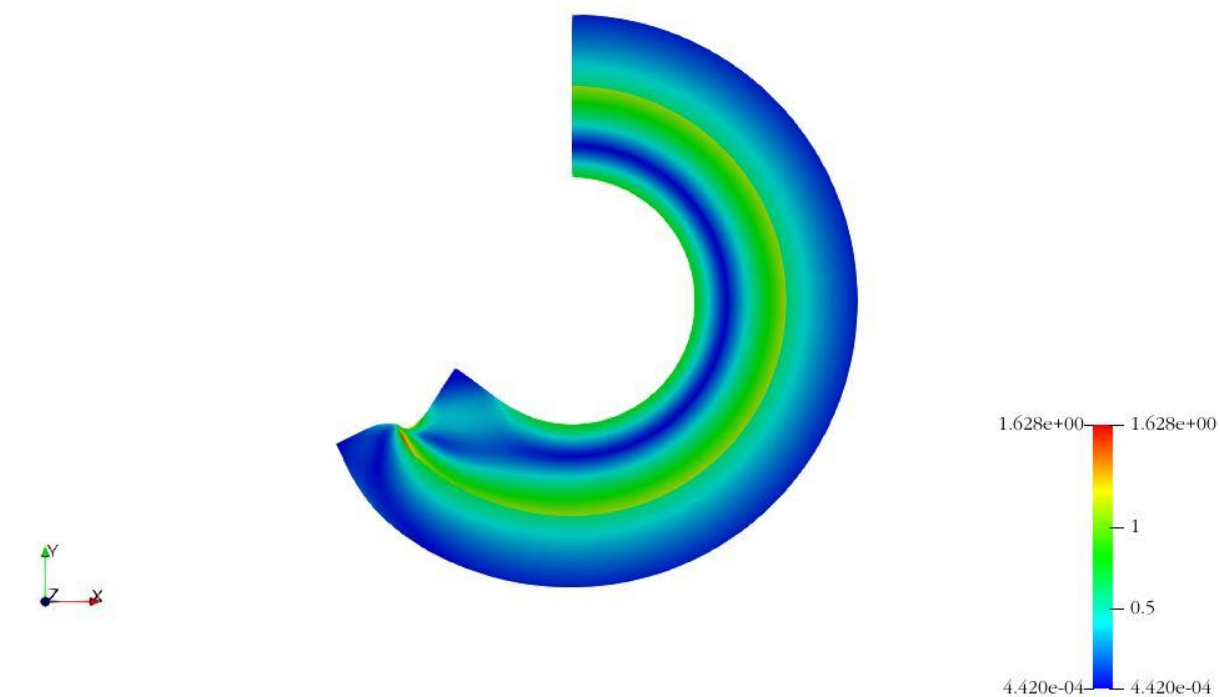


Рис. 12. Распределение напряжений по Мизесу (Па) для начальных главных деформаций $\lambda = 1.9$ первого слоя.

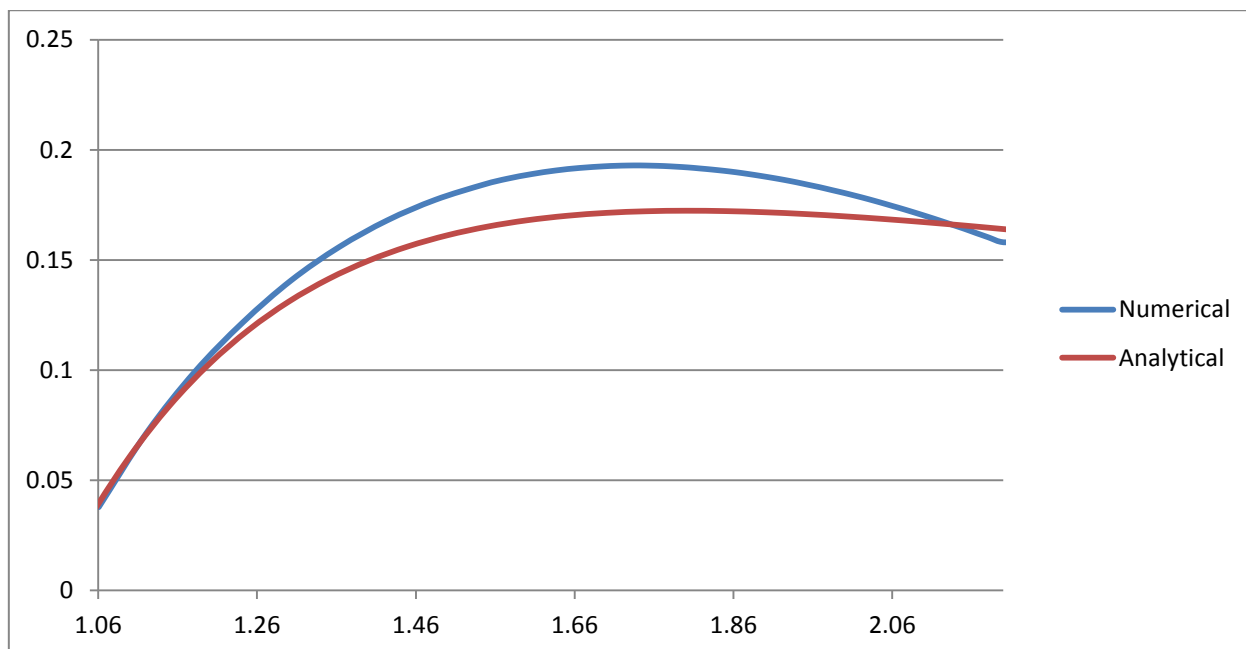


Рис. 13. Зависимость приведенного угла поворота конца балки от начальных главных деформаций первого слоя. Численное решение (синий) и аналитическое решение (красный).

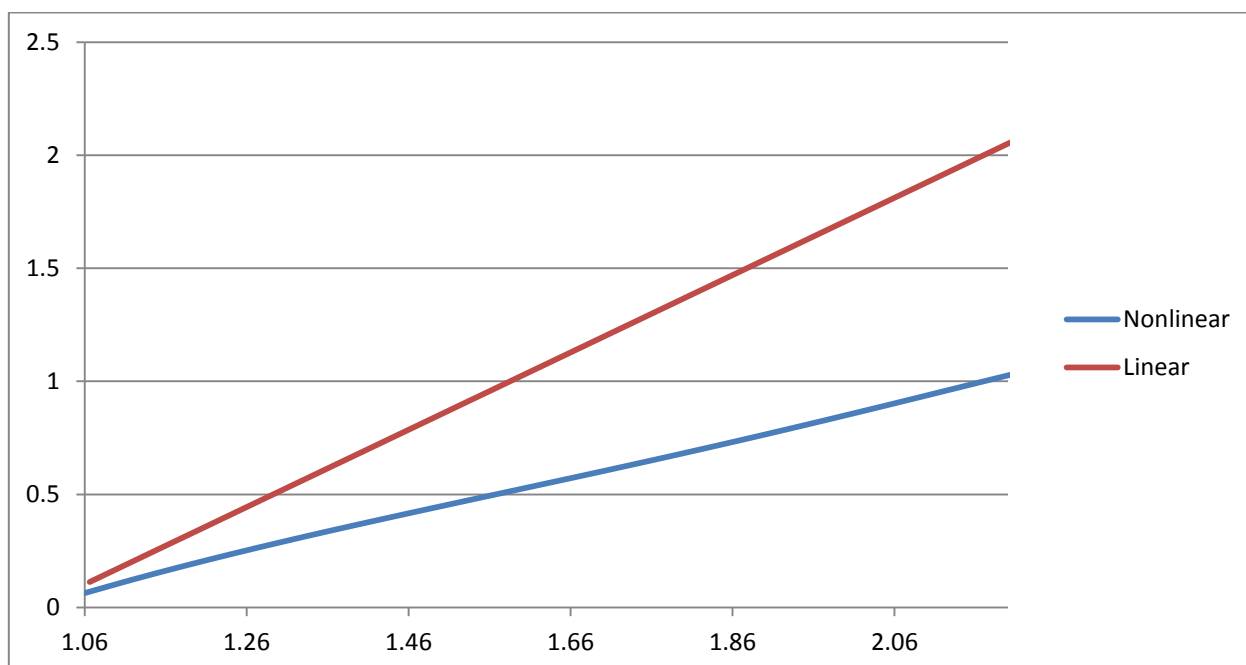


Рис. 14. Зависимость максимальных напряжений по Мизесу (Па) в линейном (красный) и нелинейном (синий) случаях от начальных главных деформаций первого слоя.

Численные результаты с переменным порядком спектральных элементов на неконформных сетках продемонстрировали ожидаемые нелинейные эффекты и результаты, сходные с аналитическими решениями, в случае если изменять коэффициент D в материале Муни-Ривлина, чтобы сделать его более близким по свойствам к несжимаемому материалу.

4.3 Задача об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями в центральной части балки

Задача о чистом изгибе двухслойной предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями в центральной части балки при конечных деформациях и предварительно деформированным одним из слоев выбрана для получения новых нелинейных эффектов, которые не могут быть получены аналитически и требуют численного расчета на основе разработанного алгоритма.

Постановка рассматриваемой задачи сходна с предыдущим примером с тем лишь исключением, что вместо полностью соединенных слоев, заданы слои несоединенные в центральной части балки. Распределение напряжений по Мизесу (Па) для начальных главных деформаций $\lambda = 1.9$ первого слоя изображено на Рис. 15. Зависимость угла поворота (радиан) конца балки от начальных главных деформаций первого слоя изображены на Рис. 16.

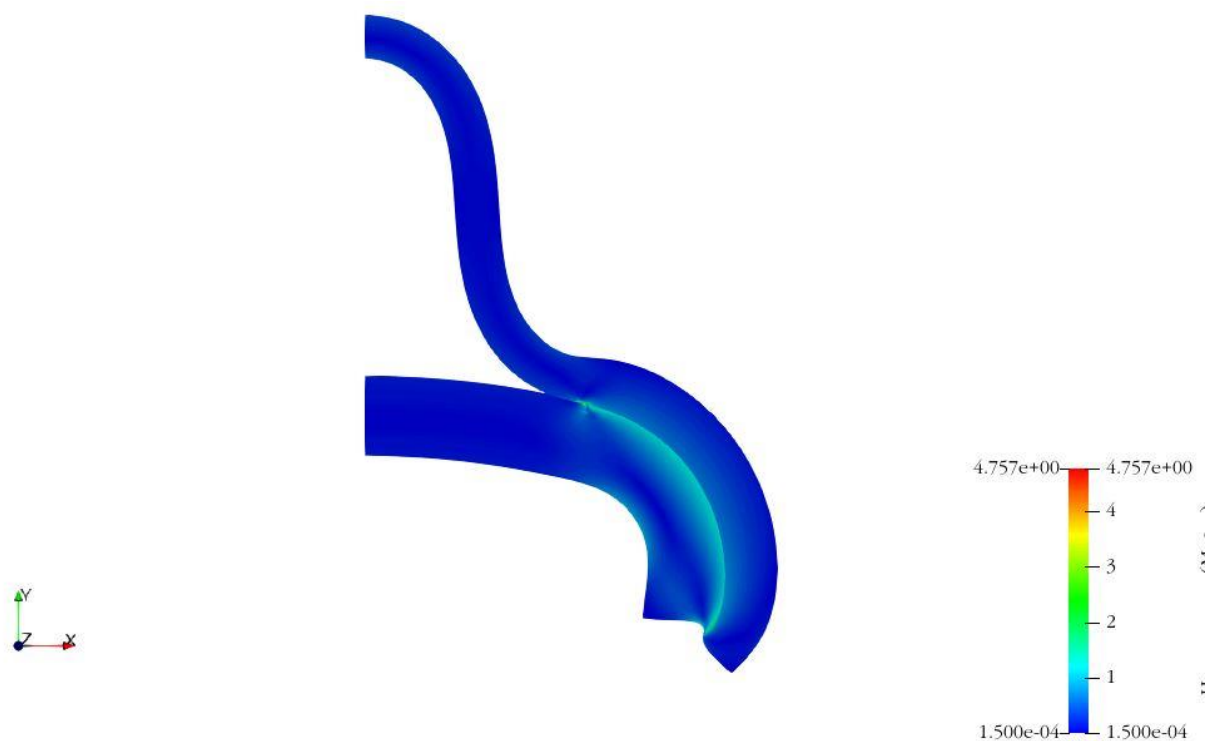


Рис. 15. Распределение напряжений по Мизесу (Па) для начальных главных деформаций $\lambda = 1.9$ первого слоя в случае не полностью соединенных слоев в центральной части балки. Представлена половина балки.

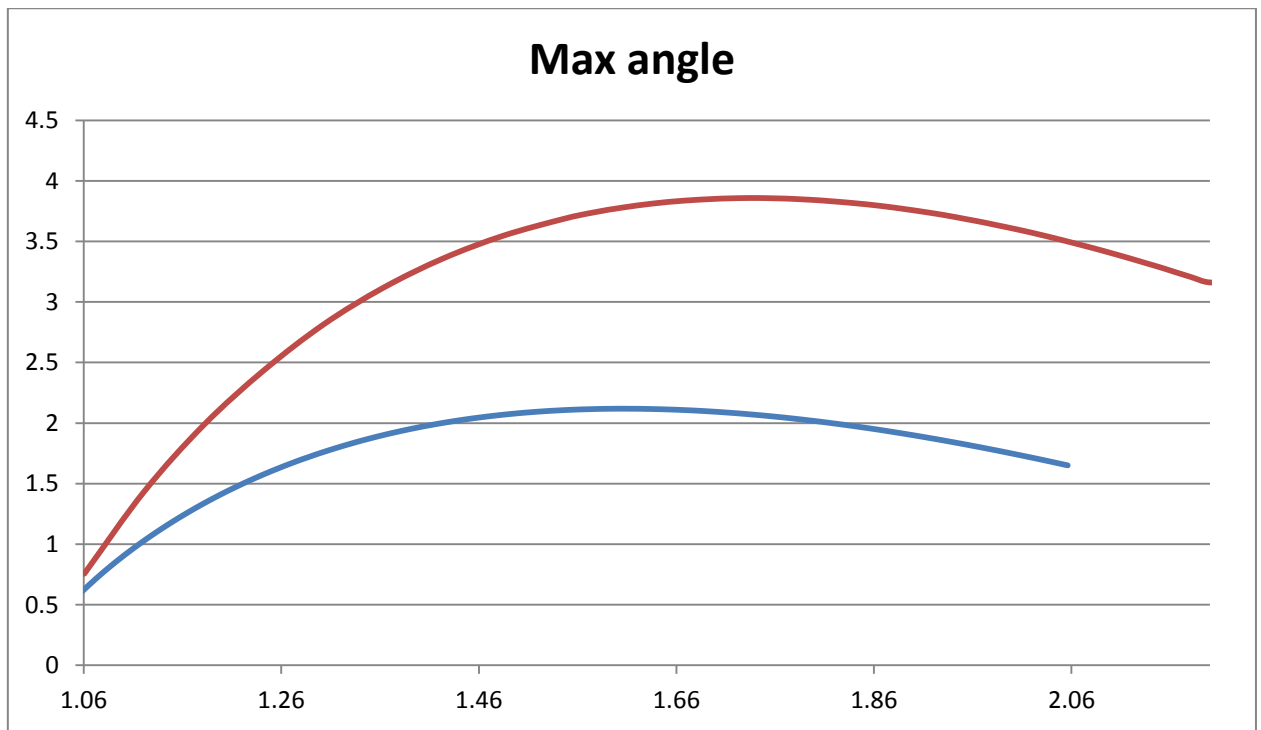


Рис. 16. Зависимость угла поворота (радиан) конца балки от начальных главных деформаций первого слоя в случае не полностью соединенных слоев в центральной части балки (синий) и полностью соединенных слоев (красный).

Численные результаты расчета изгиба балки с не полностью соединенными слоями в центральной части балки при конечных деформациях и предварительно деформированным одним из слоев продемонстрировали ожидаемые нелинейные эффекты.

4.4 Задача об изгибе слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями в торцевой части балки

Задача о чистом изгибе двухслойной предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями в торцевой части балки при конечных деформациях и предварительно деформированным одним из слоев выбрана для получения новых нелинейных эффектов, которые не могут быть получены аналитически и требуют численного расчета на основе разработанного алгоритма.

Постановка рассматриваемой задачи сходна с предыдущим примером с тем лишь исключением, что вместо полностью соединенных слоев, заданы слои несоединенные в торцевой части балки. Распределение напряжений по Мизесу (Па) для начальных главных деформаций $\lambda = 1.7$ изображено на Рис. 17. Зависимость угла поворота (радиан) конца балки от начальных главных деформаций первого слоя изображена на Рис. 18.

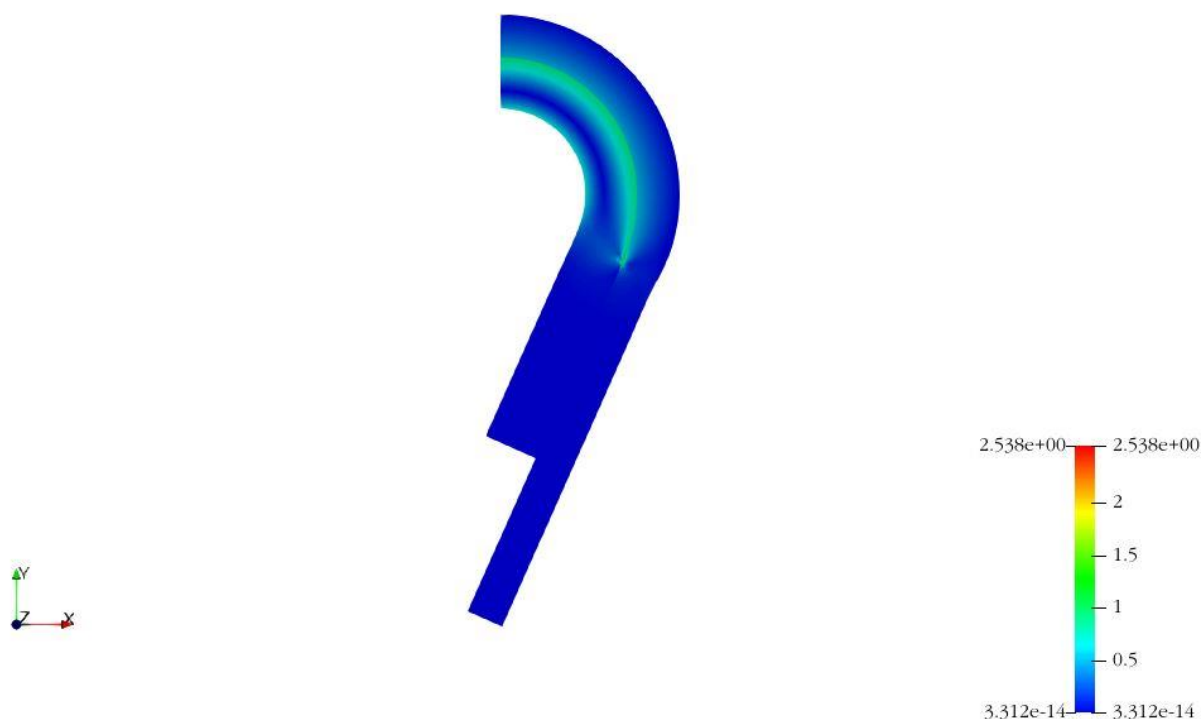


Рис. 17. Распределение напряжений по Мизесу (Па) для начальных главных напряжений $\lambda = 1.7$ первого слоя в случае не полностью соединенных слоев в торцевой части балки. Представлена половина балки.

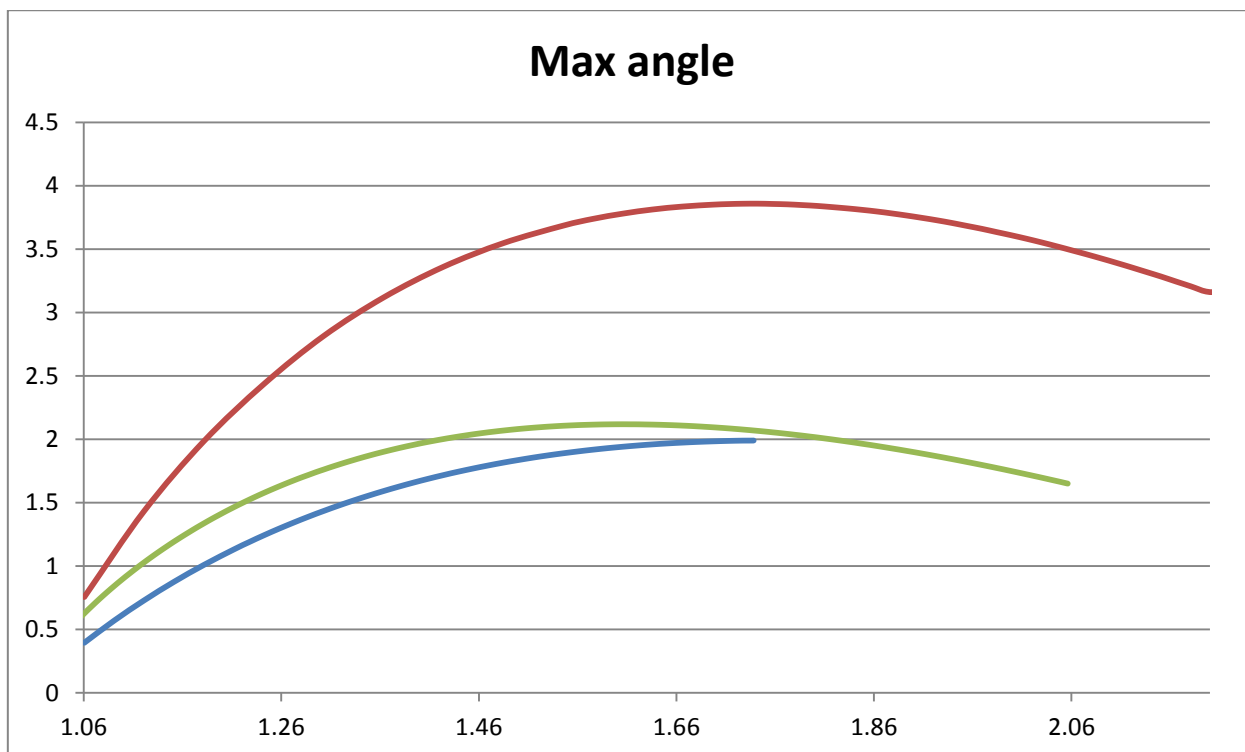


Рис. 18. Зависимость угла поворота (радиан) конца балки от начальных главных деформаций первого слоя в случае не полностью соединенных слоев в торцевой части балки (синий), в центральной части балки (зеленый) и полностью соединенных слоев (красный).

Численные результаты расчета изгиба балки с не полностью соединенными слоями в торцевой части балки при конечных деформациях и предварительно деформированным одним из слоев продемонстрировали ожидаемые нелинейные эффекты.

4.5 Численное моделирование процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания

Численное моделирование процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания можно свести к задаче о послойном наращивании изделия с предварительно нагруженными слоями. Сравнение численного решения производилось с опубликованными результатами натурных экспериментов [142].

Приведем описание натурального эксперимента, с которым проводилось сравнение при численном моделировании послойного наращивания изделия аддитивного производства. Изделие в форме бруса размером (45мм x 6мм x 5мм) с вырезами печатается на цилиндрической платформе радиусом 50мм и высотой 20мм. Форма вертикального сечения бруса и платформы представлена на рис. 19. Температура порошка для печати TI-6AL-4V считается равной 26 С°. На основании платформы в процессе печати поддерживается постоянная температура 150 С°. Мощность лазера составила 200Вт, время воздействия лазера 40мкс, толщина слоя печати 60мкм. После печати изделия медленно выполняется горизонтальный разрез в его верхней части. В результате накопленных остаточных напряжений в изделии происходит вертикальный изгиб верхней надрезанной части изделия. Измеренные перемещения (мм) верхней грани изделия в процессе эксперимента [142] представлены на рис. 20.

Численное моделирование проводилось в плоско-деформированном состоянии на сетке и геометрии, представленных на рис. 1. Для расчета использовались 10 слоев наращивания. Термоупругие свойства порошка TI-6AL-4V зависят от температуры [142]. При моделировании несколько слоев печати объединялись в один слой наращивания, к которому передавалось количества тепла, равное передаваемому лазером при печати всех слоев внутри слоя наращивания. Расчет распределения температуры в слое проводился путем решения нелинейного уравнения теплопроводности, поскольку механические и тепловые свойства материала зависят от температуры. После расчета распределения температуры в слое, полученные температурные деформации использовались как начальные деформации при добавлении нового слоя наращивания. На рис. 21 приведены вычисленные вертикальные перемещения (м) верхней грани изделия при малых деформациях (пунктирная линия) и при конечных деформациях (сплошная линия). На рис. 22 показаны вычисленные вертикальные перемещения (мм) в

сечении изделия аддитивного производства после выполнения надреза. Существенные нелинейные эффекты видны на представленном графике.

На Рис. 23-30 приведены распределения первых главных деформаций и напряжений по Мизесу (Па) при малых и конечных деформациях на последнем шаге печати и после разрезания модели.

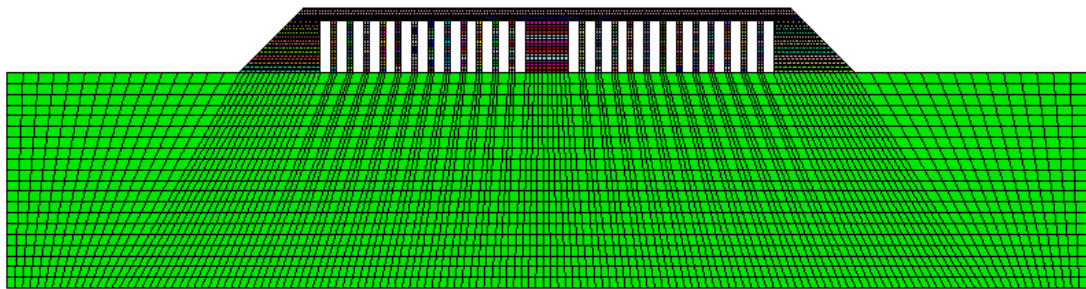


Рис. 19. Вертикальное сечение изделия и платформы с конечноэлементной сеткой.

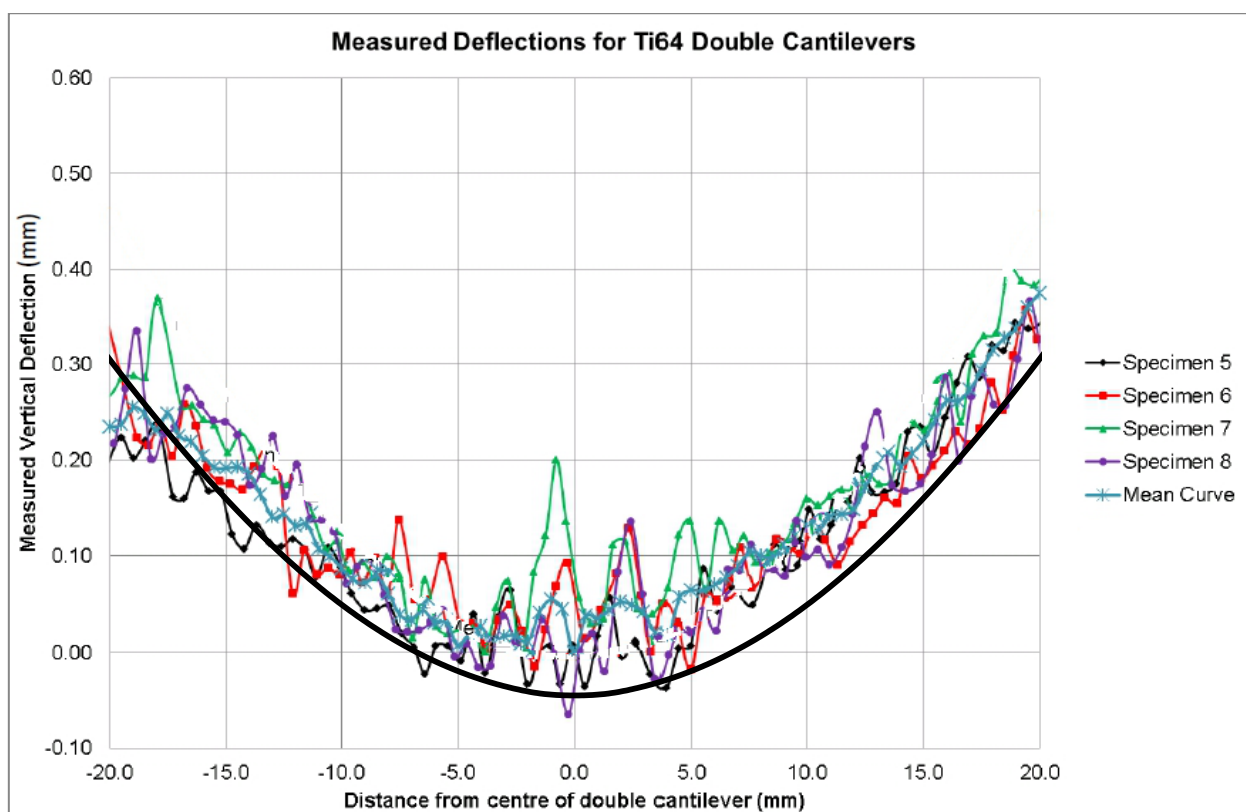


Рис. 20. Вертикальные перемещения (мм) верхней грани изделия по результатам натурного эксперимента и численного моделирования с учетом многократного наложения конечных деформаций.

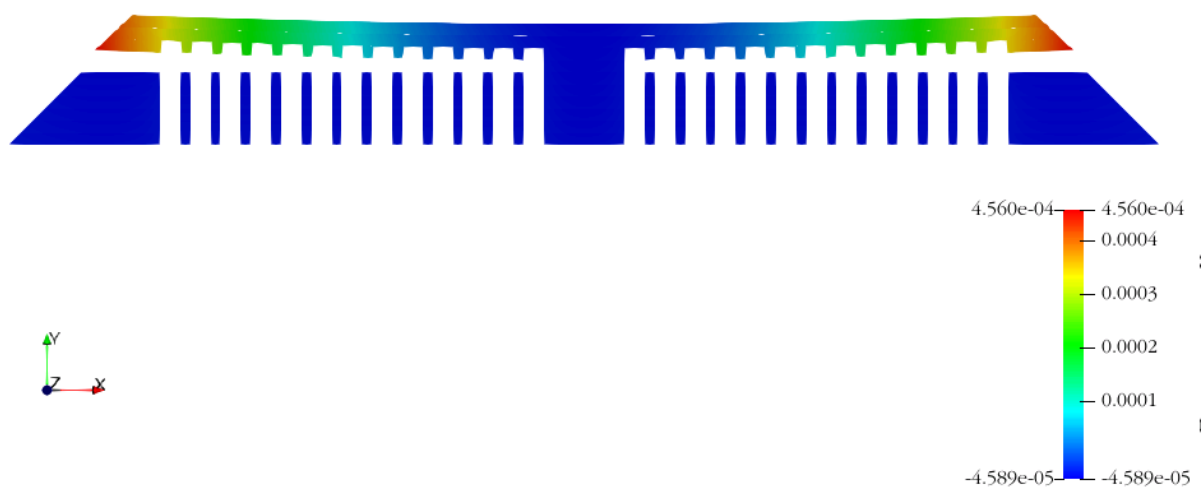


Рис. 21. Вычисленные вертикальные перемещения (м) в сечении изделия аддитивного производства после выполнения надреза.

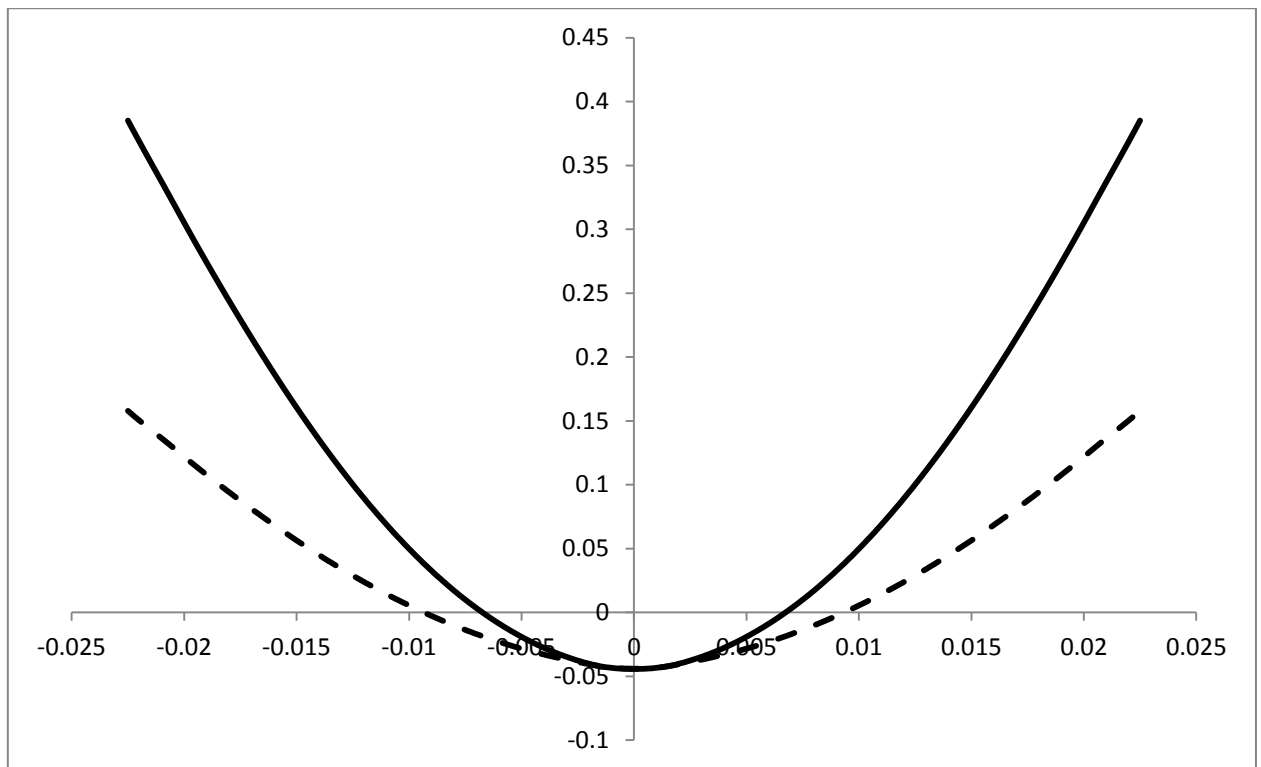


Рис. 22. Вычисленные вертикальные перемещения (мм) верхней грани изделия при малых деформациях (пунктирная линия) и при конечных деформациях (сплошная линия) в зависимости от расстояния до центра балки.



Рис. 23. Распределение первых главных деформаций на последнем шаге печати при малых деформациях.

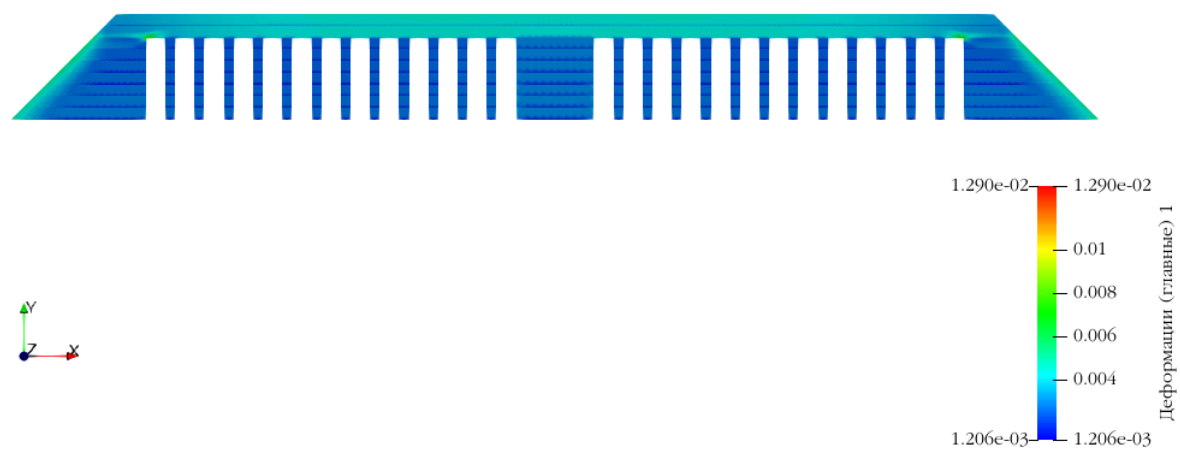


Рис. 24. Распределение первых главных деформаций на последнем шаге печати при конечных деформациях.

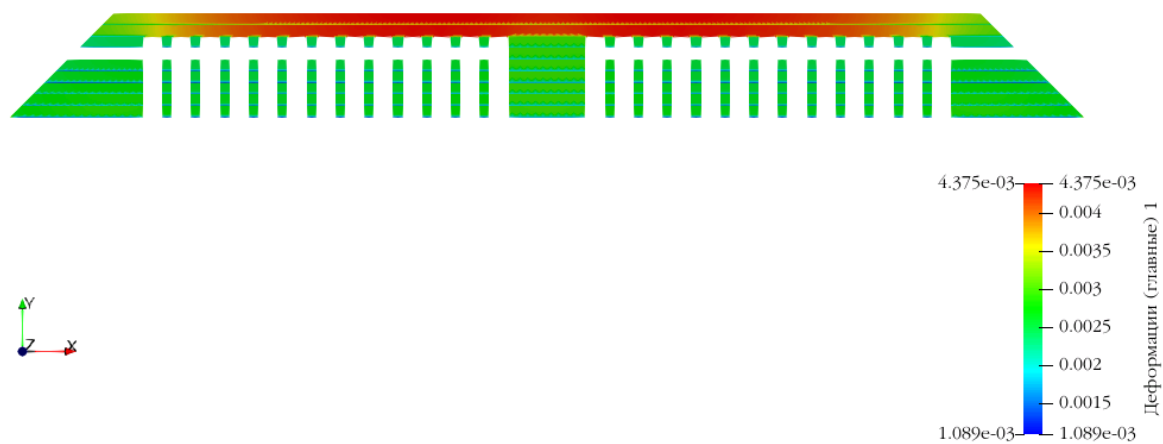


Рис. 25. Распределение первых главных деформаций после разреза при малых деформациях.

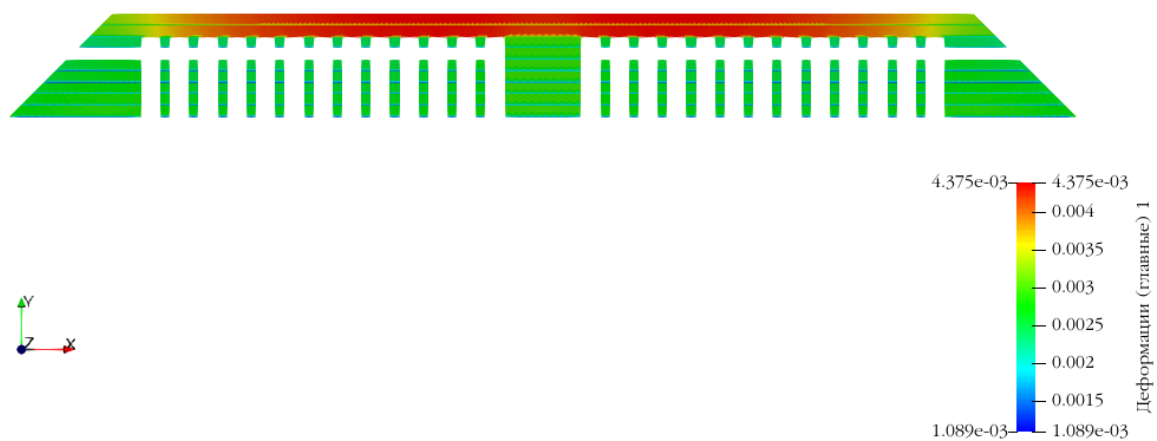


Рис. 26. Распределение первых главных деформаций после разреза при конечных деформациях.

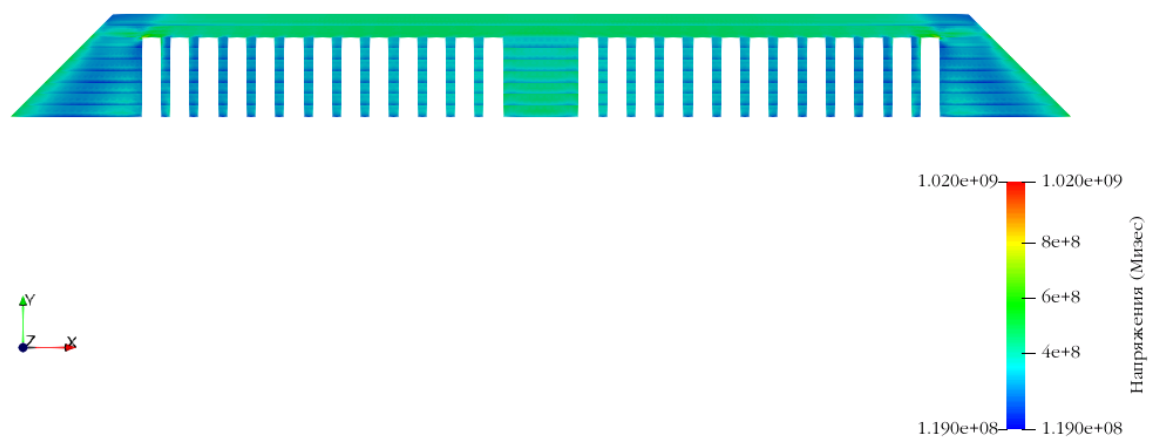


Рис. 27. Распределение напряжений по Мизесу (Па) на последнем шаге печати при малых деформациях.

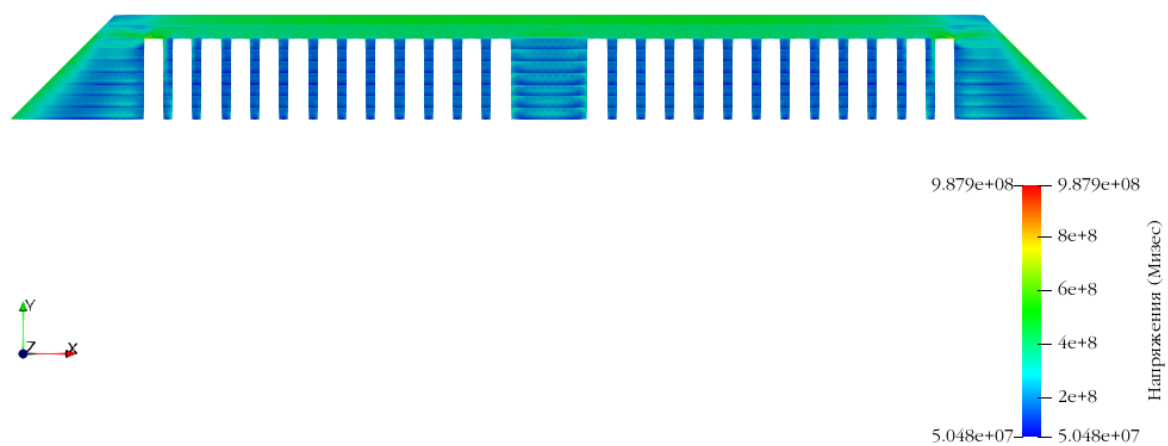


Рис. 28. Распределение напряжений по Мизесу (Па) на последнем шаге печати при конечных деформациях.

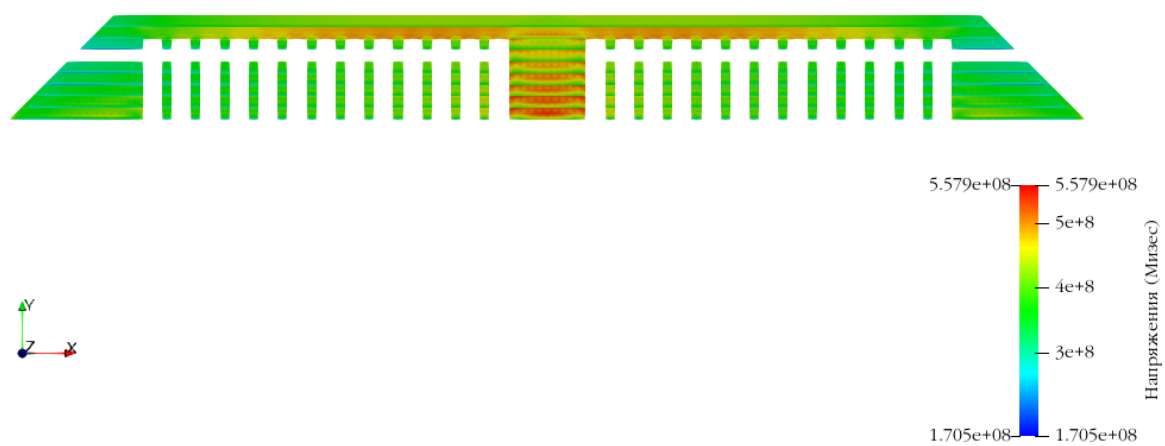


Рис. 29. Распределение напряжений по Мизесу (Па) после разреза при малых деформациях.

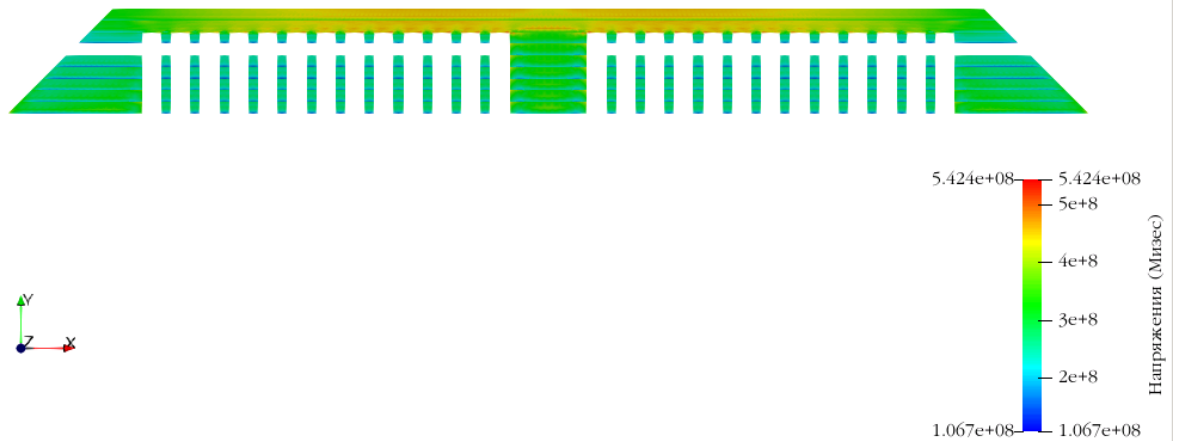


Рис. 30. Распределение напряжений по Мизесу (Па) после разреза при конечных деформациях.

Полученные при численном моделировании результаты хорошо согласуются с результатами натурного эксперимента, что подтверждает корректность предложенного подхода к анализу напряженно-деформированного состояния и расчету остаточных напряжений в изделии аддитивного производства, изготовленного методом селективного лазерного спекания, на основе теории многократного наложения конечных деформаций.

4.6 Выводы

Представленные примеры численного моделирования многократного наложения конечных деформаций при послойном наращивании изделия аддитивного производства с переменным порядком спектральных элементов для неконформных неструктурированных сеток продемонстрировали свою применимость для данного класса задач. Разработанные алгоритмы и комплекс программ позволили выявить нелинейные эффекты, зависящие от

главных деформаций преднагруженных слоев. Метод спектральных элементов с переменным порядком элементов на смешанных неконформных неструктурированных сетках продемонстрировал высокую вычислительную точность и корректность полученных результатов в сравнении с аналитическими и полуаналитическими решениями верификационных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы:

1) Разработана и исследована математическая модель изгиба слоистой предварительно нагруженной балки, изготовленной посредством последовательного соединения слоев, с не полностью соединенными слоями при конечных деформациях.

2) Разработан вариант алгоритма численного решения краевых задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе разрывного метода спектральных элементов.

3) Разработана и протестирована модификация разрывного метода спектральных элементов для геометрических моделей с не конформно стыкованными граничными поверхностями, разработан алгоритм решения задач нелинейной теории упругости и теории многократного наложения конечных деформаций на основе этой модификации.

4) Выполнена программная реализация разработанных алгоритмов численного решения в виде модулей, вошедших в состав промышленной системы компьютерного моделирования Фидесис, и выполнена верификация разработанного программного обеспечения посредством сравнения с известными аналитическими решениями.

5) Установлено, что поправка от учета эффектов наложения конечных деформаций для максимальной концентрации напряжений в задачах об образовании кругового отверстия в предварительно деформированных телах достигает 8 % для тел из материала Муни-Ривлина и 16 % для тел из материала Мурнагана в исследованном диапазоне нагрузок для выбранных параметров материалов.

6) Результаты численного моделирования изгиба слоистой предварительно нагруженной балки с не полностью соединенными слоями показали, что зависимость угла поворота конца балки от предварительного растяжения первого слоя немонотонна.

7) Выполнено численное моделирование процесса аддитивного производства методом селективного лазерного спекания и получены результаты, согласующиеся с экспериментальными данными.

Результаты диссертационного исследования использованы при выполнении научно-исследовательских работ в рамках Федеральной целевой программы "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы" по Соглашению о предоставлении субсидии № 14.577.21.0271 с Министерством образования и науки Российской Федерации (идентификатор проекта RFMEFI57717X0271).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации по теме диссертации в журналах Scopus, WoS, RSCI

1. Konovalov D. A., Vershinin A. V., Zingerman K. M., Levin V. A. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes. // Modeling and Simulation in Engineering 2017 (2017), DOI:10.1155/2017/1797561

2. Коновалов Д. А., Яковлев М. Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys. // Чебышевский сборник, том 18, 3 (2017), 316–329, DOI: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-316-329

3. Kukushkin A. V., Konovalov D. A., Vershinin A. V., Levin V. A., Numerical simulation in CAE Fidesys of bonded contact problems on non-conformal meshes. // Journal of Physics: Conference Series, Volume 1158, Issue 3 (2019), DOI:10.1088/1742-6596/1158/3/032022

Остальные публикации

4. Yakovlev M. Y., Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., and Konovalov D. A. Application of finite and spectral element methods for rock modeling at different scales // Proceedings of the International SPDM Conference NAFEMS World Congress. Quebec City, Canada, 2019

5. Vershinin A. V., Levin V. A., Kukushkin A. V., and Konovalov D. A.. Application of variable order spectral element method on non-conformal unstructured meshes for an engineering analysis of assemblies with geometric inaccuracies // Proceedings of the International SPDM Conference NAFEMS World Congress. Quebec City, Canada, 2019

6. Левин В. Ан, Зингерман К. М., Вершинин А. В., Коновалов Д. А. Многократное наложение конечных упругих деформаций. Аддитивные технологии // Современные проблемы математики и механики,

том 2, Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко, 2019, МАКС Пресс Москва, с. 718–721

7. Вершинин А. В., Левин В. Ан, Коновалов Д. А, Яковлев М. Я. Трехмерное геомеханическое моделирование на основе метода спектральных элементов переменного порядка аппроксимации // Новые идеи в геологии нефти и газа 2019, N76, Издательство Перо Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2019, с. 74–78

8. Вершинин А. В., Коновалов Д. А., Кукушкин А. В., Левин В. Ан. Моделирование контактного взаимодействия методом спектральных элементов на неконформных сетках // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, республика Башкортостан, Россия. Аннотации докладов, РИЦ БашГУ Уфа, 2019, с. 248–248

9. Вершинин А. В., Зингерман К. М., Коновалов Д. А., Левин В. Ан. Численное моделирование в CAE Fidesys процесса аддитивного производства на основе метода спектральных элементов на неконформных сетках // Современные проблемы математики и механики, том 2, Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовниченко, МАКС Пресс Москва, 2019, с. 642–647

10. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. Ан. Численное моделирование послойной 3d-печати с учётом наложения конечных деформаций на неконформных сетках // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа, республика Башкортостан, Россия. Аннотации докладов, РИЦ БашГУ Уфа, 2019. с. 85–185

11. Яковлев М. Я., Коновалов Д. А., Лукьянчиков И. С., Левин В. А. К вопросу о численной оценке нелинейно-упругих характеристик предварительно нагруженных композитов с эластичной матрицей // Сборник трудов 28 Международного симпозиума «Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов», 2018, ООО НКПЦ Веском Москва, с. 381-390

12. Левин В. А., Веселов И. В., Гамлицкий Ю. А., Вершинин А. В., Коновалов Д. А. Промышленный пакет прочностного инженерного анализа CAE Fidesys. Разработка отраслевых специализированных решений в интересах шинной промышленности // Сборник докладов 26 Международного симпозиума «Проблемы шин, РТИ и эластомерных композитов», 2015, ООО НКПЦ Веском Москва

13. Петровский К. А., Коновалов Д. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции при конечных деформациях с учетом изменения толщины оболочечного элемента // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов, Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015, с. 222

14. Вершинин А. В., Коновалов Д. А., Левин В. А., Неугодов, Д. А. Математическое моделирование двумерных и трёхмерных нестационарных задач линейной теории упругости с использованием метода спектральных элементов. // Волны напряжения в сплошных средах. К 100-летию со дня рождения профессора А.Я. Сагомоняна. Тезисы докладов подсекции "Газовая и волновая динамика" секции "Механика" научной конференции "Ломоносовские чтения", 2014, Издательство Московского университета Механико-математический факультет, НИИ механики МГУ, г. Москва, с. 41–42

15. Коновалов, Д. А. Математическое моделирование двумерных и трехмерных нестационарных задач линейной теории упругости с использованием метода спектральных элементов. // Материалы Международного молодежного научного форума ЛОМОНОСОВ-2014, МАКС Пресс Москва, 2014.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

1. Вершинин А. В., Привалов А. Н., Левин В. А., Коновалов Д. А., Козлов В. В., Кукушкин А. В., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа расчета на основе метода конечных элементов тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений в изделии в процессе его создания методом селективного лазерного спекания в трёхмерном случае // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018664109, 12 ноября 2018 г.

2. Привалов А. Н., Вершинин А. В., Левин В. А., Коновалов Д. А., Комолова Е. Д., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа расчета на основе метода конечных элементов скалярного поля температуры в изделии в процессе его создания методом селективного лазерного спекания в трёхмерном случае // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663890, 6 ноября 2018 г.

3. Привалов А. Н., Вершинин А. В., Левин В. А., Коновалов Д. А., Комолова Е. Д., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа расчета на основе метода спектральных элементов скалярного поля температуры в изделии в процессе его создания методом селективного лазерного спекания в трёхмерном случае // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663889, 6 ноября 2018 г.

4. Вершинин А. В., Привалов А. Н., Левин В. А., Коновалов Д. А., Зингерман К. М., Кукушкин А. В., Петровский К. А., Яковлев М. Я. Программа задания механических и теплофизических свойств материалов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663472, 29 октября 2018 г.

5. Левин В. А., Вершинин А. В., Яковлев М. Я., Юшутин В. С., Петровский К. А., Коновалов Д. А. Программа прочностных расчётов "CAE Fidesys" - расчёт вязкоупругости // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018610690, 16 января 2018 г.

6. Левин В. А., Вершинин А. В., Коновалов Д. А., Петровский К. А. Программа прочностных расчётов «САЕ - Fidesys» - расчёт тонкостенных конструкций // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018610686, 15 января 2018 г.

7. Левин В. А., Коновалов Д. А., Вершинин А. В. Модуль расчета напряженно-деформированного состояния для задач термоупругости в "САЕ Fidesys" // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017611119, 19 января 2017 г.

8. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. А. Модуль расчета методом спектральных элементов собственных частот и форм колебаний линейно упругих тел в "САЕ Fidesys" v.1 // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015662988, 8 декабря 2015 г.

9. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. А. Модуль расчета методом спектральных элементов линейных статических задач в «САЕ Fidesys» v.1 // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 20155662987 , 8 декабря 2015 г.

10. Коновалов Д. А., Вершинин А. В., Левин В. А. Модуль расчета методом спектральных элементов линейных динамических задач в «САЕ Fidesys» v.1 // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015662738, 30 ноября 2015 г.

11. Зингерман К. М., Вершинин А. В., Яковлев М. Я., Янгирова А. В., Никифоров И. В., Стёпин Н. Е., Громов И. М., Фрейман Е. И., Кукушкин А. В., Улькин Д. А., Юшутин В. С., Коновалов Д. А. Полнофункциональная многоплатформенная система прочностного инженерного анализа с реализацией при конечных деформациях учета перераспределения деформаций, дискретного или непрерывного изменения массы, формы, свойств части материала элемента конструкции, адаптация под гибридные супер-ЭВМ // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013617002, 30 июля 2013 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. Т. 1. М.: Мир, 1983, 520 с.
2. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. — М.: Стройиздат, 1982. - 448 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001, 630с.
4. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994, 444 с.
5. Белых С.В., Бормотин К.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н. О больших изотермических деформациях материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С.144-156
6. Блох В. И. Теория упругости. — Харьков: Изд-во Харьк. ун-т, 1964. — 483 с.
7. Василевский Ю.В., Данилов А.А. , Липников К.Н., Чугунов В.Н. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (под общей редакцией В.А. Левина). Т. 4. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток (предисловие проф. В.А. Левина), М.:Физматлит , 2016, 214с.
8. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филиппенко Е.В., Яковлев М.Я. К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокомпозита // Каучук и резина, №4, 2010. – С. 22–25.
9. Горбачев В.И., Победря Б.Е. О некоторых критериях разрушения. Известия Армянской ССР, Т. 38, № 4, 1985, с. 30-37
10. Гузь А. Н., Роджер А. А., Гузь И. А. О построении теории разрушения нанокомпозитов при сжатии // Прикл. мех. 2005. Т. 41, № 3. С. 3–29.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. - 536 с

12. Зингерман К.М., Левин В.А. Обобщение задачи Ламе-Гадолина для больших деформаций и ее аналитическое решение, Прикладная математика и механика, Том 77 вып.2, 2013
13. Лавит И. М., Толоконников Л. А. Термоупругопластическая задача механики разрушения для полого цилиндра с внутренними трещинами // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1990. С. 55–60
14. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М., Теоретическая физика, том 6, Гидродинамика. М.: Наука, 1988
15. Левин В. А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. (Предисловие академика Л.И. Седова)— М.: Наука, Физматлит, 1999. — 223 с.
16. Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (предисловие академика Г.И. Марчука) т.1 Модели и методы. Образование и развитие дефектов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015 — 454 с.
17. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности в 5 томах (под общей редакцией В.А. Левина) т. 2 Численные методы. Реализация на высокопроизводительных вычислительных системах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015 — 543с.
18. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады РАН. 2007. Т. 415. № 1. С. 52-54.
19. Левин В.А., Зингерман К.М. Точные и приближённые аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. – 546 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина: В 5 т. Т. 3)
20. Левин В.А., Зубов Л.М., Зингерман К.М. Точное решение задачи о нелинейном изгибе составного бруса с предварительно деформированным слоем при конечных деформациях// Доклады РАН, 2015, т. 460, № 2, с. 155–158.

21. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.
22. Лурье А.И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. - 940 с.
23. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера. М.: ЛЕНАНД, 2015. 408с
24. Мясников В. П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
25. Нигматулин Н.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987
26. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1948. - 211 с.
27. Новожилов В.В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
28. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов, 1981, 152 с.
29. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. — М.: МГУ, 1984. - 336 с.
30. Победря Б. Е., Шешенин С. В., Холматов Т. Задача в напряжениях. — Ташкент: Изд-во ФАН, 1988. - 197 с.
31. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975
32. Рябенкий В.С. Введение в вычислительную математику: Учеб. пособие. 2-е изд., исправ. М.: ФИЗМАЛИТ, 2000, 296 с.
33. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. под ред. Б.Е.Победри. — М.: Мир, 1979. - 376 с.
34. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962. — 284 с.
35. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1994. — 528 с.
36. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1994. — 560 с.
37. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.:Мир, 1979, 195 с.
38. Тарасьев Г. С., Толоконников Л. А. Концентрация напряжений около полостей в несжимаемом материале // Концентрация напряжений. Вып. 1. — Киев: Наук. думка, 1965. — С. 251.
39. Тарасьев Г. С. Конечные деформации упругого изотропного материала // ДАН СССР. 1970. Т. 194, № 4. С. 162–166.

40. Тарасьев Г. С. Об одной оценке «малого» параметра в одной задаче нелинейной теории упругости // Прикл. мех. 1980. Т. 16, № 7. С. 137–139.
41. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. 2-е изд, испр. и доп. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008, 503 с.
42. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. - 364 с.
43. Abel J F and Shephard M S 1979 An algorithm for multipoint constraints in finite element analysis Int. J. Numer. Meth. Engng 14 464–467
44. Adjerdid S.M., Aiffa M., Flaherty J.E. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements // Comput. Method. Appl. M., 190, 2001, pp. 2925-41.
45. Allgower E. L., Georg K. Introduction to Numerical Continuation Methods // No45 Philadelphia, Pennsylvania: Classics in Applied Mathematics, SIAM, 2003
46. Anderson D.A, Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, Philadelphia, Pennsylvania, 1984
47. Arnold D N, Brezzi F, Cockburn B and Marini D 2002 Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems SIAM J. Numer. Anal. 39 1749–1779
48. Babuška I. Recent progress in the p and h-p versions of the finite element method // Pitman Research Notes In Mathematics Series, Longman Publishing Group
49. Babuška I., Elman H.C., Markley K. Parallel implementation of the hp-version of the finite element method on a shared-memory architecture // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 13, 1992, pp. 1433–59.
50. Babuška I., Suri M. Optimal convergence rate of the p-version of the finite element method // SIAM J Numer. Anal. 24, 1987, pp. 750-76.
51. Babuška I., Suri M. The p and h–p versions of the finite element method, basic principles and properties // SIAM Review, 36, 1994, pp. 578–632.
52. Babuška I., Szabo B.A. On the rates of convergence of the finite element method // Int. J. Numer. Meth. Eng. 18, 1982, pp. 323-41.

53. Babuška I., Szabo B.A., Katz I.N. The p-version of the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 18, 1981, pp. 515-45.
54. Balay S., Gropp W.D., McInnes L.C., Smith B.F. Efficiency management of parallelism in object oriented numerical software libraries // Modern Software Tools in Scientific Computing. Birkhauser Press, 1997. P. 163–202.
55. Bao H., Bielak J., Ghattas O., Kallivokas L. F., O'Hallaron D. R., Shewchuk J. R., Xu J. Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 152, 1998, pp. 85-102.
56. Bathe, K.J. Finite Element Procedures. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1996
57. Bergot M., Cohen G., Durufle M. Higher-order Finite Elements for Hybrid Meshes Using New Nodal Pyramidal Elements, SIAM Journal of Scientific Computing, Vol. 42, No. 3, 2010, pp. 345-381
58. Bittencourt M.L., Vazquez M.G., Vazquez, T.G. Construction of shape functions for the h- and p-versions of the FEM using tensorial product // Int. J. Numer. Meth. Eng. 71, 2007, pp. 529-63.
59. Bronstein J.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Muchkig H. Taschenbuch der Mathematik, 4. Auflage. Harri Deutch, Frankfurt a. M., 1999.
60. Brown P.N., Hindmarsh A.C. Matrix-Free Methods for Stiff Systems of ODE's // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1986. V. 23. № 3. P. 610–638.
61. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Springer: New York, 1988
62. Capdeville Y., Chaljub E., Vilotte J.-P., Montagner J.-P. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in global earth models // Geophys. J. Int. 152, 2003, pp. 34–67.
63. Carnevali P., Morris R.B., Tsuji Y., Taylor, G. New basis functions and computational procedures for p-version finite element analysis // Int. J. Numer. Meth. Eng. 36, 1993, pp. 3759-79.

64. Casadei F., Gabellini E. Implementation of a 3D coupled spectral element solver for wave propagation and soil-structure interaction simulations // Technical Report EUR17730EN, European Commission Joint Research Center, Ispra, Italy, 1997.
65. Cao. H. Development of Techniques for General Purpose Simulator // Ph.D. dissertation, Stanford University, 2002
66. Chaljub E. Numerical modelling of the propagation of seismic waves in spherical geometrie: applicaton to global seismologyi. Ph.D. thesis, Université Paris VII Denis Diderot, Paris, France, 2000.
67. Chaljub E., Capdeville Y., Vilotte J.-P. Solving elastodynamics in a fluid solid heterogeneous sphere: a parallel spectral element approximation on non-conforming grids // J. Comput. Phys., 187, 2003, 457–491.
68. Chen Q., Babuška I. Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 128,1995, p. 405
69. Chen Q., Babuška I. The optimal symmetrical points for polynomial interpolation of real functions in the tetrahedron // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 137, 1996, p. 89.
70. Chow E, Manteuffel T A, Tong C and Wallin B K 2001 Algebraic elimination of slide surface constraints in implicit structural analysis Int. J. Numer. Meth. Engng 01 1-21
71. Coats K. H. A Note on IMPES and Some IMPES Based Simulation Models // Paper SPE 49774, Proceedings of the 15th SPE Symposium on Reservoir Simulation, Houston, TX, February 14-17, 1999
72. Coats K. H. IMPES Stability: The Stable Step // Paper SPE 69225, SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 11-14 February, 2001
73. Cockburn B, Karniadakis G E and Shu Chi-Wang 2000 Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications (Berlin: Springer-Verlag)
74. Cook R.D., Malkus, D.S., Plesha M.E., Witt R.J. Concepts and Applications of Finite Element Analysis / Wiley: New York, 2002.

75. Cuthill E., McKee J. Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetrical Matrices // Proc. ACM Nat. Conf. New York, 1969. P. 157–172.
76. Dauksher W., Emery A.F. Accuracy in modeling the acoustic wave equation with Chebyshev spectral finite elements // Finite Elements in Analysis and Design. 26, 1997, pp. 115–128.
77. Dauksher W., Emery A.F. The solution of elastoplastic and elastodynamic problems with Chebyshev spectral finite elements // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 188, 2000, pp. 217–233
78. Deuffhard P. Newton Methods for Nonlinear Problems: Affine Invariance and Adaptive Algorithms // No35 Berlin: Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, 2004
79. Deville M.O., Fischer P.F., Mund E.H. High-order Methods for Incompressible Fluid Flow. Cambridge University Press: Cambridge, 2002.
80. Dubiner M. Spectral methods on triangles and other domains // J. Sci. Comp. 6, 1993, p. 345
81. Duruflé M., Grob P., Joly P. Influence of the Gauss and Gauss-Lobatto quadrature rules on the accuracy of a quadrilateral finite element method in the time domain. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2009, vol. 25, no. 3, pp. 526-551.
82. Duster A., Bröker H., Rank E. The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures // Int. J. Numer. Meth. Eng. 52, 2001, pp. 673-703
83. Duster A., Rank E. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity // Comput. Method. Appl. M. 190, 2001, pp. 1925-1935.
84. Farkas E. Comparison of Linearization Techniques of Nonlinear Partial Differential Equations in Numerical Reservoir Simulation // Ph.D. Dissertation. Reservoir Engineering Department of the Montanuniversitat Leoben, Austria, 1997
85. Felippa C., A compendium of FEM integration formulas for symbolic work, Engineering Computation, Vol. 21, No. 8, 2004, pp. 867-890

86. Felippa C A 2004 Introduction to finite element methods. Chapter 8 Multifreedom constraints I (Colorado: Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder) 1-17
87. Fornberg B. The pseudospectral method - Comparisons with finite differences for the elastic wave equation // *Geophysics*, 52(04), 1987, pp. 483–501.
88. Fried I., Malkus D.S. Finite element mass matrix lumping by numerical integration with no convergence rate loss // *Int. J. of Solids and Struct.* 11, 1975, pp.461–466.
89. Gottlieb D., Orszag S.A. Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications // SIAM: Philadelphia, PA, 1977.
90. Haga T, Sawada K and Wang Z.J. An Implicit LU-SGS Scheme for the Spectral Volume Method on Unstructured Tetrahedral Grids. *Commun. Comput. Phys.* 2009. V. 6. № 5. P. 978–996.
91. Harten A., Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes // *Int. J. of Numerical Analysis.* 1987.
92. Hesthaven J. S. From electrostatics to almost optimal nodal sets for polynomial interpolation in a simplex // *SIAM J. Numer. Anal.* 35, 1998, p. 655
93. Hesthaven J.S., Teng C.H. Stable Spectral Methods on Tetrahedral Elements, *SIAM Journal of Scientific Computing*, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 2352-2380.
94. Holzer S.M., Yosibash Z. The p-version of the finite element method in incremental elasto-plastic analysis // *Int. J. Numer. Method. Eng.* 39, 1996, pp. 1859-1878.
95. Hughes T.J.R. The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, London, 1987
96. Jeremic B., Xenophontos C. Application of the p-version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation // *Commun. Numer. Meth. En.* 15, 1999, pp. 867-76.
97. Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // *Journal of Computational Physics.* 2004. V. 193. № 2. P. 357–397.

98. Komatitsch D. Spectral and spectral-element methods for the 2D and 3D elastodynamics equations in heterogeneous media. Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe, Paris, France, 1997.
99. Komatitsch D., Martin R., Tromp J., Taylor M. A., Wingate B. A. Wave propagation in 2-D elastic media using a spectral element method with triangles and quadrangles // *J. Comput. Acoust.*, 9(2), 2001, 703–718.
100. Komatitsch D., Tromp J. Introduction to the spectral-element method for 3-D seismic wave propagation // *Geophys. J. Int.*, 139, 1999, pp. 806–822.
101. Komatitsch D., Tromp J. A Perfectly Matched Layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation // *Geophys. J. Int.*, 154, 2003, pp. 146–153.
102. Komatitsch D., Violette J.-P. The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. *Bulletin of Seismological Society of America*, 88(2), 1998
103. Konovalov D A, Vershinin A V, Zingerman K M and Levin V A 2017 The Implementation of Spectral Element Method in a CAE System for the Solution of Elasticity Problems on Hybrid Curvilinear Meshes *Modelling and Simulation in Engineering* DOI:10.1155/2017/1797561
104. Krasnopolsky B. The reordered bicgstab method for distributed memory computer systems // *Procedia Computer Science*. 2010. V. 1. P. 213–218.
105. Lahaye D. J. P., Maggio F., and Quarteroni A. Hybrid finite element-spectral element approximation of wave propagation problems // *East-West J. Numer. Math.* 5, 1997, p. 265
106. Landers J A and Taylor R L 1985 An augmented Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems Technical Report SESM 85/09 University of California, Berkeley
107. Lyness J. and Cools R. A survey of numerical cubature over triangles // *Proc. Symposia in Applied Mathematics* 48, 1994, p. 127

108. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2000. V. 67, No. 4. – P. 667-670
109. Levin V.A., Vdovichenko I.I., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya., Zingerman K.M. Numerical estimation of effective mechanical properties for reinforced Plexiglas in the two-dimensional case // Model. Simulat. Eng., 2016 DOI: 10.1155/2016/9010576
110. Levin V.A., Zingermann K.M. Effective Constitutive Equations for Porous Elastic Materials at Finite Strains and Superimposed Finite Strains// Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics. 2003. Vol. 70, No. 6. – P. 809–816
111. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Compos. Struct., V. 131, 2015. – P. 25–36
112. Maday Y., Patera A.T. Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations // State of the Art Surveys on Computational Mechanics, eds. A.K. Noor and J.T. Oden, ASME, New York, 1989, pp. 71–142.
113. Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, New York: Academic Press, 1970
114. Mooney M. Theory of large elastic deformation // J. Appl. Phys., 11, 1940, pp. 582–592
115. Murnaghan F D 1951 Finite deformation of an elastic solid. New York: Wiley.
116. Ogden R 1984 Non-linear elastic deformations. Ellis Horwood: Chichester.
117. Ortega J. M., Rheinboldt W. C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, New York: Academic Press, 1970
118. Papadopoulos P, Solberg J M and Lagrange A 1998 Multiplier method for the finite element solution of frictionless contact problems Math. Comput. Model. 28 373–384
119. Patera A.T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion // Journal of Computational Physics 54, 1984, pp. 468–488.

120. Peric D and Owen R J 1992 Computational model for 3-d contact problems with friction based on the penalty method *Int. J. Numer. Meth. Engng* 35 1289-1309
121. Popp A, Wohlmuth B, Gee M and Wall W 2012 Dual Quadratic Mortar Finite Element Methods for 3D Finite Deformation Contact *SIAM Journal on Scientific Computing* 34 DOI:10.1137/110848190.
122. Priolo E., Seriani G. A numerical investigation of Chebyshev spectral element method for acoustic wave propagation // In *Proc. 13th IMACS Conf. on Comp. Appl. Math.*, v. 2, Dublin, Ireland, 1991, pp. 551–556.
123. Rasetarinera P., Hussaini M.Y. An efficient implicit discontinuous Galerkin method // *Journal of Computational Physics*. 2001. V. 172. № 2. P. 718–738.
124. Reddy J.N. Layerwise theory and variable kinematic models // In: Reddy JN, editor. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC, Florida, 2004, pp. 725-753.
125. Ronquist E.M., Patera A.T. A Legendre spectral element method for the Stefan problem // *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, 1987, pp. 2273–2299.
126. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Second Edition. SIAM, 2003
127. Schubert B. The spectral-element method for seismic wave propagation: theory, implementation and comparison to finite difference methods, *Tech. rep.*, University of Munich, Germany, 2003, 165 pp.
128. Seriani G. 3-D large-scale wave-propagation modeling by the spectral element method on a Cray T3E multiprocessor // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 164, 1998 pp. 235–247.
129. Shephard M S 1984 Linear multipoint constraints applied via transformation as part of a direct stiffness assembly process *Int. J. Numer. Meth. Engng* 20 2107-2112
130. Sherwin S. J. and Karniadakis G. E. A triangular spectral element method: Applications to the incompressible Navier-stokes equations // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 123, 1995, p. 189

131. Sherwin S.J., Karniadakis G.E. New triangular and tetrahedral basis for highorder (hp) finite element methods // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 38, 1995, pp. 3775-3802
132. Shroff G. M., Keller H. B. Stabilization of Unstable Procedures: The Recursive Projection Method. // *SIAM J. Numer. Anal.* 30, PP. 1099-1120, 1993
133. Simo J C and Vu-Quoc L 1986 A three-dimensional finite strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects *Comput.Methods Appl.Mech. Eng.* 58 79–116
134. Sprague M.A, Geers T.L. A spectral-element method for modeling cavitation in transient fluid–structure interaction // *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60, 2004, pp. 2467–2499.
135. Sprague M.A, Geers T.L. Legendre spectral finite elements for structural dynamics analysis // *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, 2008, pp. 1953–1965.
136. Sprague M.A, Geers T.L. Spectral elements and field separation for an acoustic fluid subject to cavitation // *Journal of Computational Physics* 184, 2003, pp. 149–162.
137. Sridhar R., Chakraborty A., Gopalakrishnan S. Wave propagation analysis in anisotropic and inhomogeneous uncracked and cracked structures using pseudospectral finite element method // *International Journal of Solids and Structures* 43, 2006, pp. 4997–5031.
138. Stupazzini M. A spectral element approach for 3D dynamic soil-structure interaction problems, *Dottorato in Ingegneria Sismica*, Politecnico di Milano, Italy, 2004, 158 pp.
139. Sun Y., Wang Z.J., Liu Y., Chen C.L. Efficient implicit LU-SGS algorithm for high-order spectral difference method on unstructured hexahedral grids. *AIAA Paper № 2007–0313*, 2007.
140. Taylor M.A., Wingate B.A., Vincent R.E. An algorithm for computing fekete points in the triangle, *SIAM Journal of Scientific Computing*, Vol. 38, No. 5, 2000, pp. 1707-1720.

141. Thompson L.L., Pinsky P.M. Complex wavenumber Fourier analysis of the p-version finite element method // Computational Mechanics 13, 1994, pp. 255–275
142. Tripathy S., Chin C., London T., Ankalkhope U., Oancea V. Process Modeling and Validation of Powder Bed Metal Additive Manufacturing // NAFEMS World Congress 2017, Stockholm
143. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J. Stiffness and detection analysis of complex structures // J. Aerospace Sci. Tech. 23, 1956, pp. 805-823.
144. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboyshakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Adv. Eng. Softw., V. 86, 2015. – P. 80–84.
145. Wang D.W., Katz I.N., Szabo B.A. Implementation of C1 triangular element based on the p – version of the finite element method // Comput. Struct. 19, 1984, pp. 381-392.
146. Wang X, Prakash A, Chen JS and Tacioglu E 2017 Variationally consistent coupling of non-matching discretizations for large deformation problems Comput Mech 60 465 DOI:10.1007/s00466-017-1417-0
147. Webb J.P., Abouchacra R. Hierarchal triangular elements using orthogonal polynomials // Int. J. Numer. Meth. Eng. 38, 1995, pp. 245-257
148. Wingate B. A. and Boyd J. P. Spectral element methods on triangles for geophysical fluid dynamics problems // in Proc. Third International Conference on Spectral and High-order Methods, eds. A. V. Ilin and L. R. Scott, Houston J. Mathematics, Houston, Texas, 1996, pp. 305-314.
149. Woo K.S., Hong C.H., Basu P.K. J-integral and fatigue life computations in the incremental plasticity analysis of large scale yielding by p-version of F.E.M // Struct. Eng. Mech. 17, 2004, pp. 51-68.
150. Younis R.M., Tchelepi H.A., Aziz K. Adaptively Localized Continuation-Newton Method-Nonlinear Solvers That Converge All the Time. // SPE Journal, V. 15, N. 2, PP. 526-544, 2010

151. Zhang L. Cui T., Liu H. A set of symmetric quadrature rules on triangle and tetrahedral, Journal of Computational Mathematics, Vol. 27, No 1, 2009, pp. 89-96.
152. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 1. The basis. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 707 pp.
153. Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. The finite element method. Vol. 2. Solid mechanics. Butterworth-Heinemann: Oxford, United Kingdom, 2000, 479 pp.
154. Zienkiewicz O C and Taylor R L 2014 The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Seventh Edition (Amsterdam: Elsevier)
155. Fidesys LLC official website. Available online: <http://cae-fidesys.com>