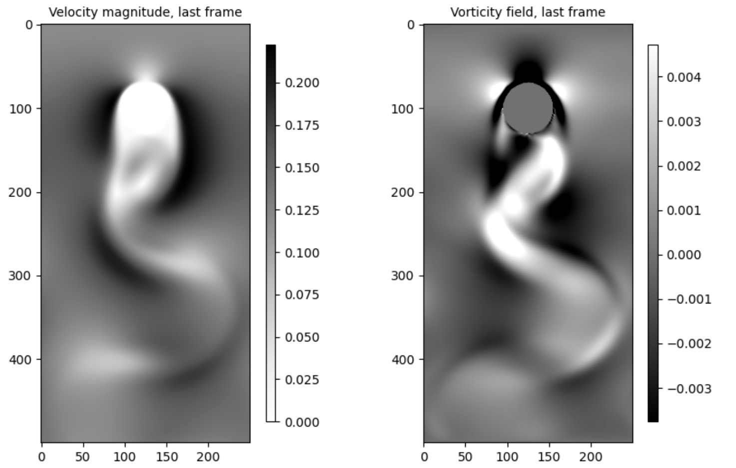
Двумерный метод решёток Больцмана



Метод решёток Больцмана (Lattice Boltzmann Method, LBM) представляет собой численный метод для моделирования течений жидкостей и газов. В отличие от традиционных методов вычислительной гидродинамики, LBM моделирует поведение жидкости на микроскопическом уровне, отслеживая эволюцию функций распределения частиц на дискретной решётке в пространстве скоростей. Функция распределения скоростей частиц по дискретным направлениям является ядром метода.

Интуиция и описание

Модель D2Q9 (2 dimensions, 9 directions) представляет собой двумерную решётку с 9 возможными направлениями движения частиц. Частицы могут оставаться на месте или перемещаться к одному из восьми соседних узлов в зависимости от дискретных скоростей $\mathbf{e}_i$.

Основные формулы

1. Уравнение Больцмана на решётке с оператором столкновений BGK

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x}, t) \right) \tag{1}$$

где:

- $f_i(\mathbf{x}, t)$ — функция распределения в узле $\mathbf{x}$ в момент времени t в направлении i;
- $\mathbf{e}_i$ — дискретные скорости в модели D2Q9;
- Δt — шаг по времени;
- τ — время релаксации;
- f_i^{eq} — равновесная функция распределения.

2. Дискретные скорости $\mathbf{e}_i$ в модели D2Q9

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0,0), & i = 0 \\ (1,0), & i = 1 \\ (0,1), & i = 2 \\ (-1,0), & i = 3 \\ (0,-1), & i = 4 \\ (1,1), & i = 5 \\ (-1,1), & i = 6 \\ (-1,-1), & i = 7 \\ (1,-1), & i = 8 \end{cases} \tag{2}$$

3. Весовые коэффициенты w_i

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 0 \\ \frac{1}{9}, & i = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{36}, & i = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{3}$$

4. Равновесная функция распределения $f_i^{\mathbf{eq}}$

$$f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x},t) = w_i \rho(\mathbf{x},t) \left[1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t))^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{2c_s^2} \right] \tag{4}$$

где:

- $\rho(\mathbf{x},t)$ — плотность в узле $\mathbf{x}$;
- $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ — макроскопическая скорость в узле $\mathbf{x}$;
- c_s — скорость звука на решётке, $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Вычисление макроскопических величин

$$\rho(\mathbf{x},t) = \sum_{i=0}^{8} f_i(\mathbf{x},t) \tag{5}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x},t)} \sum_{i=0}^{8} f_i(\mathbf{x},t) \mathbf{e}_i \tag{6}$$

6. Связь кинематической вязкости и времени релаксации

$$\nu = c_s^2 \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \tag{7}$$

7. Алгоритм LBM

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. **Столкновение (релаксация):**

$$f_i^*(\mathbf{x},t) = f_i(\mathbf{x},t) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(f_i(\mathbf{x},t) - f_i^{\mathrm{eq}}(\mathbf{x},t) \right) \tag{8}$$

2. **Перенос (стриминг):**

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i^*(\mathbf{x}, t) \tag{9}$$

3. **Вычисление макроскопических величин:**

$$\rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \sum_{i=0}^{8} f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t) \tag{10}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t + \Delta t)} \sum_{i=0}^{8} f_i(\mathbf{x}, t + \Delta t)\mathbf{e}_i \tag{11}$$

8. Граничные условия

Для корректного моделирования необходимо задавать граничные условия:

- *Условия прилипания* для твёрдых стенок (bounce-back).
- *Условия на входе и выходе* (например, по скорости или давлению).
- *Условия периодичности* для повторяющихся областей.