Atividade 3 - Paradigmas de computação

Arthur Moreira Rodrigues Alves

August 2019

1 (questão 7). Pesquise sobre a Codificação de Church para incorporar operadores aritméticos e números no cálculo-lambda. Veja também como calcular o sucessor e predecessor de um número. Escreva algumas anotações e exemplos sobre este tópico, por exemplo, tente encontrar o sucessor de 0, 1 e 2. Também tente somar 0 + 1 e 1 + 2. Escreva os números de 1 até 10 utilizando a codificação de Church. Faça 1- 0 e 2 - 1.

Sobre a codiicação de Church:

Para representar qualquer número inteiro n ultiliza-se:

$$n = (nfx = f^{\circ n}x) = \lambda f.\lambda x.f^{\circ n}x$$

Sendo assim, caso deseje-se representar o intervalo $[1, 10]$ usando essa notação, teremos que:

$$\lambda f.\lambda x.x = 0$$
$$\lambda f.\lambda x.fx = 1$$
$$\lambda f.\lambda x.f^2x = \lambda f.\lambda x.f(fx) = 2$$
$$\lambda f.\lambda x.f^3x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(x))) = 3$$
$$\lambda f.\lambda x.f^4x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(x)))) = 4$$
$$\lambda f.\lambda x.f^5x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(x))))) = 5$$
$$\lambda f.\lambda x.f^6x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(f(x)))))) = 6$$
$$\lambda f.\lambda x.f^7x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(f(f(x))))))) = 7$$
$$\lambda f.\lambda x.f^8x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))) = 8$$
$$\lambda f.\lambda x.f^9x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(f(f(f(f(x))))))))) = 9$$
$$\lambda f.\lambda x.f^{10}x = \lambda f.\lambda x.f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))))) = 10$$

Caso seja necessário calcular a soma de dois números, usando a definicão apresentada acima temos que a soma de dois termos é dada por:

$$f^{\circ m+n}(x) = f^{\circ m}(f^{\circ n}(x)) = \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$$

Caso tente-se somar $0 + 1$

$$\lambda m.(\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.mf(nfx))))(0, 1)$$
$$\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.(0)f(nfx)))(1)$$
$$\lambda f.(\lambda x.(0)f((1)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda f.\lambda x.x)f((\lambda f.\lambda x.fx)fx))$$

$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda f.\lambda x.x)f((\lambda x.fx)x))$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda f.\lambda x.x)f(fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda x.x)(fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.fx) = 1$$

Caso tente-se somar 1 + 2

$$\lambda m.(\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.mf(nfx))))(1,2)$$
$$\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.(1)f(nfx)))(2)$$
$$\lambda f.(\lambda x.(1)f((2)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda f.\lambda x.fx)f((\lambda f.\lambda x.f(fx))fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda f.\lambda x.fx)f(\lambda x.f(fx))x)$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda f.\lambda x.fx)f(f(fx)))$$
$$\lambda f.(\lambda x.(\lambda x.fx)(f(fx)))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f(f(fx))) = 3$$

Para calcular o sucessor basta adicionar $+1$, logo:

$\lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$, que é igual à $n+1$

Calculando o sucessor de 0 temos:

$$\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.f(nfx)))(0)$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((0)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((\lambda f.\lambda x.x)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((\lambda x.x)x))$$
$$\lambda f.(\lambda x.fx) = 1$$

Calculando o sucessor de 1 temos:

$$\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.f(nfx)))(1)$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((1)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((\lambda f.\lambda x.fx)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((\lambda x.fx)x))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f(fx)) = 2$$

Calculando o sucessor de 2 temos:

$$\lambda n.(\lambda f.(\lambda x.f(nfx)))(2)$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((2)fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((\lambda f.\lambda x.f(fx))fx))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f((\lambda x.f(fx))x))$$
$$\lambda f.(\lambda x.f(f(fx))) = 3$$

Para se efetuar a subtração entre dois valores, sabendo que a função para se definir o predecessor é dada por:

$$pred(n) = \{0 \text{ se } n = 0 \text{ OU } (n-1) \text{ caso contrário}$$

que em termos de cálculo-λ pode ser escrita como:

$$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.u)$$

Tem-se que a subtração pode ser definida como:

$$\lambda m.(\lambda n.(n \quad (pred) \quad)m)$$
$$\lambda m.(\lambda n.(n(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.u)))m)$$

Para calcular 1 - 0

$$\lambda m.(\lambda n.(n(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.u)))m)(1,0)$$

$$\lambda n.(n(\lambda n.\lambda f.\lambda x.n(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.u)))(1)(0)$$
$$(1)(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(1)(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.u)))(0)$$
$$(\lambda f.\lambda x.fx)(\lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.fx)(\lambda g.\lambda h.h(gf))(\lambda u.u)))(\lambda f.\lambda x.x)$$

— não consegui continuar :(

2 (questão 8). Pesquise sobre o Combinador Y. o que é? O que ele faz? Descreva um pouco seu funcionamento.

O Combinador Y(ponto fixo) representa uma função y que, quando aplicada á uma função arbitrária f, produz o mesmo resultado que f aplicada para o resultado da aplicação f para y. Ou seja:

$$yf = f(y \quad f) \text{ para todo } f$$

Esse combinador possui natureza recursiva, e quando aplicado à funções de duas variáveis permite implementar estruturas como for, $while$ e outros tipos de $loop$. Em cálculo-λ é representado por: