Васильев Руслан 317

№ 1

$$\underbrace{(A+UCV)}_{P}{}^{-1} \overset{?}{=} \underbrace{A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}}_{Q}$$

Так как $P^{-1}=Q \Leftrightarrow PQ=I$, докажем последнее тождество:

$$\begin{aligned}
PQ &= (A+UCV)\cdot(A^{-1}-A^{-1}U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) \\
&= (A+UCV)A^{-1}(I - U(C^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}) \\
&= (I+UC\underbrace{VA^{-1}}_{B})(I - U(C^{-1}+\underbrace{VA^{-1}}_{B}U)^{-1}\underbrace{VA^{-1}}_{B}) \\
&= (I+UCB)(I-U(\underbrace{C^{-1}+BU}_{D})^{-1}B) \\
&= (I+UCB)(I-UD^{-1}B) \\
&= I+U(C-D^{-1}-CBUD^{-1})B \\
&= I+U(CDD^{-1}-D^{-1}-CBUD^{-1})B \\
&= I+U(CD-I-CBU)D^{-1}B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CD-I-CBU &= C(C^{-1}+BU)-I-CBU \\
&= I+CBU-I-CBU \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I+U\cdot 0\cdot D^{-1}B \\
&= \boxed{I}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} tr\, AB = tr\, BA \\ \forall A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B\in\mathbb{R}^{n\times m}\ (*) \end{array}}$$

док-во:

$$tr\, AB = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = tr\, BA$$

№ 2

a) $\|uv^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2$

$$= \langle uv^T - A, uv^T - A\rangle - \langle A, A\rangle$$

$$= \langle uv^T, uv^T\rangle - 2\langle uv^T, A\rangle + \langle A, A\rangle - \langle A, A\rangle$$

$$= \langle uv^T, uv^T\rangle - 2\langle uv^T, A\rangle$$

$$= tr\, vu^T uv^T - 2\, tr\, vu^T A$$

$$= tr\, \underbrace{v^T v u^T u}_{\in\mathbb{R}} - 2\, tr\, \underbrace{u^T A v}_{\in\mathbb{R}}$$

$$= v^T v \cdot u^T u - 2u^T A v$$

$$= \|u\|^2 \|v\|^2 - 2\langle Av, u\rangle$$

b) $tr\left((2I_n + aa^T)^{-1} (uv^T + vu^T)\right)$ - ? $\qquad I := I_n$

$$(2I + aa^T)^{-1} = (2I + aI_1 a^T)^{-1}$$ т-во Вудбери

$$= \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} I a \left(1 + a^T \cdot \frac{1}{2} I \cdot a\right)^{-1} a^T \frac{1}{2} I$$

$$= \frac{1}{2}\left(I - a\left(1 + \frac{1}{2}a^T a\right)^{-1} a^T\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(I - \frac{aa^T}{1 + a^T a}\right)$$

Далее мы воспользуемся линейностью следа, $(*)$ и тем, что

$$tr\, xy^T = tr\, y^T x = y^T x = x^T y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$tr\left[(2I + aa^T)(uv^T + vu^T)\right] = tr\left[\frac{1}{2}\left(I - \frac{aa^T}{1 + a^T a}\right)(uv^T + vu^T)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} tr\left[uv^T + vu^T - \frac{aa^T uv^T}{1 + a^T a} - \frac{aa^T vu^T}{1 + a^T a}\right]$$ $tr\, AB = tr\, A B^T$

$$= \frac{1}{2} u^T v + \frac{1}{2} u^T v - \frac{1}{1 + a^T a}\left(tr\, aa^T uv^T + tr\, aa^T vu^T\right)$$

$$= u^T v - \frac{1}{2 + a^T a}\left(\underbrace{v^T aa^T u}_{\in\mathbb{R} \Rightarrow\ " (v^T aa^T u)^T = u^T aa^T v} + u^T aa^T v\right)$$

$$= u^T v - \frac{u^T a a^T v}{1 + a^T a}$$

$$= \boxed{\langle u, v \rangle - \frac{\langle u, a \rangle \langle v, a \rangle}{1 + \|a\|^2}}$$

c) $\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle - ?$, $S = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T$

$$A := [a_1 \dots a_n] \in \mathbb{R}^{d \times n} \Rightarrow S = A A^T$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^T S^{-1} a_i$$

$$= \operatorname{tr} \operatorname{diag} \{a_1^T S^{-1} a_1, \dots, a_n^T S^{-1} a_n\}$$

$$= \operatorname{tr} \begin{bmatrix} a_1^T S^{-1} a_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^T S^{-1} a_n \end{bmatrix}$$

поскольку мы берем след, то внедиагональные нули могут быть заменены любыми числами

$$= \operatorname{tr} \begin{bmatrix} a_1^T S^{-1} a_1 & \dots & a_1^T S^{-1} a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^T S^{-1} a_1 & \dots & a_n^T S^{-1} a_n \end{bmatrix}$$

в позиции (i,j) число $a_i^T S^{-1} a_j$

$$= \operatorname{tr} \begin{bmatrix} a_1^T S^{-1} A \\ \dots \\ a_n^T S^{-1} A \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{tr} A^T S^{-1} A$$

$$= \operatorname{tr} A A^T S^{-1}$$

$$= \operatorname{tr} S S^{-1}$$

$$= \operatorname{tr} I_d$$

$$= \boxed{d}$$

№3

a) $df(t) = d\det(A-tI) \qquad I := I_n$

$$= \det(A-tI)\cdot \mathrm{tr}\{(A-tI)^{-1} d(A-tI)\}$$
$$= \det(A-tI)\cdot \mathrm{tr}\{(A-tI)^{-1}(-I\,dt)\}$$
$$= -\det(A-tI)\cdot \mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\, dt$$

$$\Rightarrow f'(t) = -\det(A-tI)\cdot \mathrm{tr}(A-tI)^{-1}$$

$$d^2 f(t) = d\left[-\det(A-tI)\cdot \mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\, dt_1\right]$$

$$= \left[-\mathrm{tr}(A-tI)^{-1} d\det(A-tI) - \det(A-tI)\, d\,\mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\right] dt_1$$

$$d\,\mathrm{tr}(A-tI)^{-1} = \mathrm{tr}\, d(A-tI)^{-1} = \mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\left[d(A-tI)\right](A-tI)^{-1} = -\mathrm{tr}(A-tI)^{-2} dt_2$$

$M \in \mathbb{R}^{n\times n}: \det M \neq 0, \quad M^{-m} := (M^{-1})^m$

$$= \left[\det(A-tI)\cdot\left(\mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\right)^2 + \det(A-tI)\,\mathrm{tr}(A-tI)^{-2}\right] dt_1\, dt_2$$

$$= \det(A-tI)\left[\left(\mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\right)^2 + \mathrm{tr}(A-tI)^{-2}\right] dt_1\, dt_2$$

$$\Rightarrow f''(t) = \det(A-tI)\left[\left(\mathrm{tr}(A-tI)^{-1}\right)^2 + \mathrm{tr}(A-tI)^{-2}\right]$$

б) $df(t) = d\,\|(A+tI)^{-1}b\|, \quad v(t) := (A+tI)^{-1}b$

∘ $A \in S^n_+ \Rightarrow A+tI \in S^n_{++},\ \forall t \in \mathbb{R}_{++}$ (из свойств собств. значений)
$(A+tI)^{-1} \in S^n_{++}$

∘ $d\|v\| = d(v^T v)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|v\|^{-1} d\, v^T v = \|v\|^{-1} v^T dv = \|v\|^{-1}\langle v, dv\rangle$

$v \neq 0$ – будет соблюдаться из-за полож. опр-ти $(A+tI)^{-1}$

$\circ\ dv(t) = d(A+tI)^{-1}b = [-(A+tI)^{-1} d(A+tI)\cdot(A+tI)^{-1}]b = -\underbrace{(A+tI)^{-2}b}_{(A+tI)^{-1}v(t)}\,dt$

$$df(t) = -\|v(t)\|^{-1}\langle (A+tI)^{-1}b,\ (A+tI)^{-2}b\rangle\, dt$$

$$= -\|v(t)\|^{-1}\langle [(A+tI)^{-2}]^T (A+tI)^{-1}b,\ b\rangle\, dt$$

$$= -\|v(t)\|^{-1}\langle (A+tI)^{-3}b,\ b\rangle\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(t) = -\|(A+tI)^{-1}b\|^{-1}\langle (A+tI)^{-3}b,\ b\rangle}$$

$$d^2f(t) = -d\left[\|v(t)\|^{-1}\langle (A+tI)^{-3}b,\ b\rangle\, dt_1\right]$$

$$= -\left[\langle (A+tI)^{-3}b,\ b\rangle\, d\|v(t)\|^{-1} + \|v(t)\|^{-1} d\langle (A+tI)^{-3}b,\ b\rangle\right] dt_1$$

$\circ\ M(t) := (A+tI)^{-1} \Rightarrow dM = [-(A+tI)^{-1} d(A+tI)\cdot(A+tI)^{-1}] = -M^2\, dt$

$\circ\ d[M^3] = 3M^2\, dM = -3M^4\, dt$

$\circ\ d\|v(t)\|^{-1} = -\|v(t)\|^{-2}\, d\|v(t)\| = -\|Mb\|^{-2}\, df(t) = +\|Mb\|^{-3}\langle M^3b,\ b\rangle\, dt$

$$= -\left[\langle M^3b,\ b\rangle^2 \|Mb\|^{-3} + \|Mb\|^{-1}\langle -3M^4b,\ b\rangle\right] dt,\ dt_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} f''(t) = 3\|Mb\|^{-1}\langle M^4b,\ b\rangle - \|Mb\|^{-3}\langle M^3b,\ b\rangle^2 \\ \text{где } M = M(t) = (A+tI)^{-1} \end{gathered}}$$

№4

а) $df(x) = d\,\frac{1}{2}\|xx^T - A\|_F^2$

$= \frac{1}{2} d\left(\|xx^T - A\|_F^2 - \|A\|_F^2\right)$

$= \frac{1}{2} d\left(\|x\|^4 - 2\langle Ax, x\rangle\right)$

$= \frac{1}{2} d\langle x, x\rangle^2 - 2\langle Ax, dx\rangle$

$= 2\langle \|x\|^2 x - Ax, dx\rangle$

добавим константу под дифф-л
Воспользуемся №2 (а)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla f(x) = 2(\|x\|^2 x - Ax) = 2(\|x\|^2 I - A)x}$$

Чтобы найти $\nabla^2 f(x)$, приведем $d^2 f(x)$ к виду $\langle \nabla^2 f(x) dx_1, dx_2 \rangle$.

$$\begin{aligned}
d^2 f(x) &= d\, 2\langle \|x\|^2 x - Ax, dx_1 \rangle \\
&= 2\, dx_1^T (x\, d x^T x + \|x\|^2 dx_2 - A dx_2) \\
&= 2\, dx_1^T (2 x x^T dx_2 + \|x\|^2 dx_2 - A dx_2) \\
&= 2\, dx_1^T (2 x x^T + I_n \|x\|^2 - A)\, dx_2 \qquad \text{симметричность} \\
&= 2\, dx_2^T (2 x x^T + I_n \|x\|^2 - A)\, dx_1 \\
&= \langle 2(2 x x^T + I_n \|x\|^2 - A) dx_1, dx_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 f(x) = 2(2 x x^T + I_n \|x\|^2 - A)}$$

в) $f(x) = \langle x, x \rangle^{\langle x, x \rangle}, \quad x \neq 0$

Сначала разберемся с $g(y) = y^y, \; y > 0$:

$$\begin{aligned}
g'(y) &= (e^{y \ln y})' = (e^{y \ln y}) \cdot (y \ln y)' = y^y (\ln y + 1) \\
g''(y) &= g'(y)(\ln y + 1) + y^y \cdot \frac{1}{y} = y^{y-1}[(\ln y + 1)^2 y + 1]
\end{aligned}$$

$$y = \langle x, x \rangle \Rightarrow dy = 2x^T dx = 2\langle x, dx \rangle$$

$$\begin{aligned}
d f(x) &= d g(\langle x, x \rangle) \\
&= g'(\langle x, x \rangle)\, d\langle x, x \rangle \\
&= \langle x, x \rangle^{\langle x, x \rangle} (\ln \langle x, x \rangle + 1) \cdot 2 \langle x, dx \rangle
\end{aligned}$$

$(\ln\langle x, x\rangle + 1)\langle x, x\rangle$

$[\ln\langle x, x\rangle + 1]^2 \langle x, x\rangle + 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla f(x) = 2\langle x, x \rangle^{\langle x, x \rangle} (\ln \langle x, x \rangle + 1)\, x}$$

$$d^2 f(x) = d^2 g(\langle x,x\rangle) = d\langle 2g'(\langle x,x\rangle)x,\ dx_1\rangle$$
$$= 2dx_1^T[g''(\langle x,x\rangle)2\langle x, dx_2\rangle x + g'(\langle x,x\rangle)dx_2]$$
$$= 2dx_1^T[2g''(\langle x,x\rangle)xx^T + g'(\langle x,x\rangle)\cdot I_n]dx_2 \quad \text{симм-ть}$$
$$= 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle-1}\langle(2([\ln\langle x,x\rangle+1]^2\langle x,x\rangle+1)xx^T + \langle x,x\rangle[\ln\langle x,x\rangle+1]I_n)dx_1, dx_2\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 f(x) = 2\langle x,x\rangle^{\langle x,x\rangle-1}\left(2([\ln\langle x,x\rangle+1]^2\langle x,x\rangle+1)xx^T + \langle x,x\rangle[\ln\langle x,x\rangle+1]I_n\right)}$$

c) $f(x) = \|Ax-b\|^p$, $p \geq 2$

Напрямую сводить к уже найденному дифф-лу $\|\cdot\|$ нельзя из-за неопределенности в нуле. Посчитаем по след. схеме ($y \in \mathbb{R}^m$):

- $d\|y\|^2 = d\langle y,y\rangle = 2\langle y, dy\rangle$
- $d\|y\|^p = d(\|y\|^2)^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2}(\|y\|^2)^{\overbrace{\frac{p}{2}-1}^{\geq 0}} d\|y\|^2 = p\|y\|^{p-2}\langle y, dy\rangle$

$$df(x) = d\|Ax-b\|^p$$
$$= p\|Ax-b\|^{p-2}\langle(Ax-b), d(Ax-b)\rangle$$
$$= p\|Ax-b\|^{p-2}\langle(Ax-b), A\,dx\rangle$$
$$= p\|Ax-b\|^{p-2}\langle A^T(Ax-b), dx\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(x) = p\|Ax-b\|^{p-2}A^T(Ax-b)}$$

Как и при расчете градиента, сначала рассмотрим $g(y) = \|y\|^p$, ($y \in \mathbb{R}^m$)

а затем подставим $y = Ax - b$:

$$d^2 g(y) = d\, p\|y\|^{p-2}\langle y, dy_1\rangle$$

$$= p\, dy_1^T\, d\, \|y\|^{p-2} y$$

$y \neq 0$

$$= p\, dy_1^T\left((p-2)\|y\|^{!\,p-3} d\|y\| \cdot y + \|y\|^{p-2} dy_2\right)$$

$$= p\, dy_1^T\left((p-2)\|y\|^{p-4} y^T dy_2\, y + \|y\|^{p-2} dy_2\right)$$

$$= p\, dy_2^T\left((p-2)\|y\|^{p-4} y y^T + I_m \|y\|^{p-2}\right) dy_1$$

Мы посчитали $d^2 g(y)$ и гессиан $\nabla^2 g(y) = p\left((p-2)\|y\|^{p-4} y y^T + I_m \|y\|^{p-2}\right)$, но результат формально верен только для $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ — причем на этом множестве $\nabla^2 g(y)$ непрерывен. Чему равен предел в нуле?

1) $p = 2$: $\nabla^2 g(y) \equiv 2 I_m \; \forall y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \lim_{y \to 0} \nabla^2 g(y) = 2 I_m$$

2) $p > 2$

$$\lim_{y\to 0}\left[\nabla^2 g(y)\right] = \lim_{y \to 0} p\left((p-2)\|y\|^{p-4} y y^T + I_m \underbrace{\|y\|^{\overset{p>2}{p-2}}}_{\to 0}\right)$$

$$= p(p-2)\lim_{y\to 0}\|y\|^{p-4} y y^T$$

Заметим, что

$$\left\|\|y\|^{p-4} y y^T\right\|_F = \|y\|^{p-4}\|y y^T\|_F \overset{\text{N2(a)}}{=\!=} \|y\|^{p-4}\|y\|\|y\| = \|y\|^{p-2} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to 0}\left[\nabla^2 g(y)\right] = 0$$

Теперь найдем $\nabla^2 g(0)$. Ранее мы посчитали $d\|y\|^p = p\|y\|^{p-2}\langle y, dy\rangle$

$\Rightarrow \nabla g(y) = p\|y\|^{p-2} y.$

1) $p=2$

$$d^2 g(y) = d\, 2\cdot 1\cdot \langle y, dy_1\rangle = 2\langle dy_2, dy_1\rangle = \langle 2I_m dy_1, dy_2\rangle$$

$\Rightarrow \nabla^2 g(y) = 2I_m \ \forall y \in \mathbb{R}^m$ – то есть при $p=2$ никаких проблем не возникает, $\nabla^2 g(y) = \text{const} \Rightarrow g \in C^2(\mathbb{R}^m)$

2) $p>2$

Посчитаем гессиан в нуле покомпонентно:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y_i}[\nabla g(y)]_j\Big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y_i} p\|y\|^{p-2} y_j\Big|_{y=0} =$$

$$= \begin{cases} i=j: & p\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|(0,\dots,0+t,\dots,0)\|^{p-2}(0+\cancel{t})-0}{\cancel{t}} = p\lim\limits_{t\to 0}|t|^{p-2}=0 \\ i\neq j: & p\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\|(0,\dots,0+t,\dots,0)\|^{p-2}\cdot 0-0}{t} = p\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{0}{t}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 g(0) = 0 = \lim_{y\to 0}\nabla^2 g(y) \Rightarrow \nabla^2 g(y) \in C(\mathbb{R}^m) \Rightarrow g(y) \in C^2(\mathbb{R}^m)$$

То есть мы доказали, что $g(y)$ дважды непрерывно дифференцируема далее мы покажем, что $\|y\|^{p-4} yy^T$ в нуле доопределяется нулём (а при $p=2$ это слагаемое даже не возникает)

Вернёмся к переменной x: $y = Ax-b \Rightarrow dy = A\,dx$

$$d^2 f(x) = d^2 g(Ax-b)$$

$$= p\,(A dx_2)^T\left((p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + I_m\|Ax-b\|^{p-2}\right)A dx_1$$

$$= \left\langle pA^T\left((p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + I_m\|Ax-b\|^{p-2}\right)A dx_1, dx_2\right\rangle$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\nabla^2 f(x)} = \boxed{\begin{cases} p>2,\ Ax-b\neq 0: & pA^T\left((p-2)\|Ax-b\|^{p-4}(Ax-b)(Ax-b)^T + I_m\|Ax-b\|^{p-2}\right)A \\ p>2,\ Ax-b=0: & 0 \\ p=2: & 2A^TA \end{cases}}$$

№ 5

а) $d f(X) = d\, tr\, X^{-1}$ $\qquad d\, tr\, Y = d\langle I, Y\rangle = \langle I, dY\rangle = tr\, dY$

$= tr\, dX^{-1}$

$= tr\, -X^{-1} dX X^{-1}$

$= -tr\, X^{-2} dX$

напомним, что X^{-2} – обозначение:
$X^{-2} = (X^{-1})^2$

$$d^2 f(X) = d(-tr\, X^{-2} dX_1)$$
$$= -tr\, dX_1\, dX^{-2}$$
$$= -2 tr\, dX_1 X^{-1} dX^{-1}$$
$$= +2\, tr\, dX_1 X^{-1} X^{-1} dX_2 X^{-1}$$
$$= 2 tr\, X^{-1} dX_1\, X^{-2} dX_2$$

$$d^2 f(X)[H,H] = 2 tr\, X^{-1} H X^{-2} H$$
$$= 2 tr\, X^{-\frac{1}{2}} X^{-\frac{1}{2}} H X^{-1} X^{-1} H$$
$$= 2\, tr\, X^{-\frac{1}{2}} H X^{-1}\, X^{-1} H X^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 2 tr\, (X^{-1} H X^{-\frac{1}{2}})^T X^{-1} H X^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 2\, \|X^{-1} H X^{-\frac{1}{2}}\|_F^2 \geqslant 0$$

$X \in S^n_{++} \Rightarrow X^{-1} \in S^n_{++} \Rightarrow$
$\exists X^{-\frac{1}{2}} \in S^n_{++}: \; X^{-\frac{1}{2}} \cdot X^{-\frac{1}{2}} = X^{-1}$

б) $d f(X) = d\, (\det X)^{\frac{1}{n}}$

$= \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}-1} d \det X$

$= \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}} \langle X^{-T}, dX\rangle$

$= \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}} \langle X^{-1}, dX\rangle$

$X \in S^n_{++} \Rightarrow \det X > 0$, т.к. определитель равен произведению всех собств. значений, которые положительны у положительно определенных матриц

$$d^2 f(X) = d \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}} \langle X^{-1}, dX_1\rangle$$

$$= \frac{1}{n} \left[d (\det X)^{\frac{1}{n}}\right] \langle X^{-1}, dX_1\rangle + \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}} \langle dX^{-1}, dX_1\rangle$$

$$= \frac{1}{n^2} (\det X)^{\frac{1}{n}} \langle X^{-1}, dX_2\rangle \langle X^{-1}, dX_1\rangle - \frac{1}{n} (\det X)^{\frac{1}{n}} \langle X^{-1} dX_2 X^{-1}, dX_1\rangle$$

$$d^2 f(X)[H,H] = \frac{1}{n}\underbrace{(\det X)^{\frac{1}{n}}}_{>0}\left[\frac{1}{n}\langle X^{-1}, H\rangle^2 - \langle X^{-1} H X^{-1}, H\rangle\right]$$

- $\langle X^{-1} H X^{-1}, H\rangle = \langle H X^{-1}, X^{-1} H\rangle = \langle H X^{-1}, H X^{-1}\rangle = \|H X^{-1}\|_F^2$
- $\langle X^{-1}, H\rangle^2 = \langle H X^{-1}, I_n\rangle^2 \underset{\text{КБ}}{\leq} \|H X^{-1}\|_F^2 \|I_n\|_F^2 = n \|H X^{-1}\|_F^2$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{n}\langle X^{-1}, H\rangle^2 - \langle X^{-1} H X^{-1}, H\rangle\right] \leq \|H X^{-1}\|_F^2 - \|H X^{-1}\|_F^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad d^2 f(X)[H,H] \leq 0$$

№6

а) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle c, x\rangle + \frac{\sigma}{3}\|x\|^3$, $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\sigma > 0$

$$df(x) = \langle c, dx\rangle + \frac{\sigma}{3} d\|x\|^3 \quad \text{№3 (c)}$$
$$= \langle c, dx\rangle + \frac{\sigma}{3} 3\|x\|\langle x, dx\rangle$$
$$= \langle c + \sigma\|x\| x, dx\rangle$$

$$\nabla f(x) = 0 \iff c + \sigma\|x\| x = 0 \iff x\|x\| = -\frac{c}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \|x\|x\|\| = \|-\frac{c}{\sigma}\| \iff \|x\|^2 = \frac{\|c\|}{\sigma} \iff \|x\| = \sqrt{\frac{\|c\|}{\sigma}}$$

$x = 0$ не является решением $x\|x\| = -\frac{c}{\sigma}$, т.к. $c \neq 0$, тогда

$x = -\frac{c}{\|x\|\sigma} = -\frac{c}{\sqrt{\|c\|\sigma}}$ – единственная точка стационарности (ТС), существует при любых допустимых в условии c и σ.

б) $f: \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle b, x\rangle < 1\}$, $f(x) = \langle a, x\rangle - \ln(1 - \langle b, x\rangle)$, $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$df(x) = \langle a, dx\rangle - (1 - \langle b, x\rangle)^{-1}(-\langle b, dx\rangle)$$
$$= \langle a + b(1 - \langle b, x\rangle)^{-1}, dx\rangle$$

$$\nabla f(x)=0 \iff \underbrace{a+b(1-\langle b,x\rangle)^{-1}}=0$$

$\Rightarrow$ a и b линейно зависимы, т.е. $b=\alpha\cdot a$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\iff a(1+\alpha(1-\langle b,x\rangle)^{-1})=0 \overset{a\neq 0}{\iff} \alpha=\langle b,x\rangle-1$$

$\Rightarrow$ т.к. $\langle b,x\rangle<1$, имеем $\alpha<0$

$\iff$ $\langle b,x\rangle=\alpha+1$ – множество стационарных точек принадлежит указанной гиперплоскости, причем ТС существуют, учитывая приведенные ограничения из условия, только при дополнительном ограничении $b=\alpha a$, $\alpha\in\mathbb{R}_{--}$. Уравнение мн-ва можно записать в форме: $\langle b,x\rangle=\frac{\|a\|-\|b\|}{\|a\|}$

c) $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x)=\langle c,x\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle}$, $c\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $A\in\mathbb{S}^n_{++}$

$$df(x)=\langle c,dx\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle}+\langle c,x\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle}(-2\langle Ax,dx\rangle)$$

$$=\langle e^{-\langle Ax,x\rangle}\cdot c-2\langle c,x\rangle e^{-\langle Ax,x\rangle}\cdot Ax,\ dx\rangle$$

$$\nabla f(x)=0 \iff \underbrace{e^{-\langle Ax,x\rangle}}_{>0}\cdot c-2\langle c,x\rangle \underbrace{e^{-\langle Ax,x\rangle}}\cdot Ax=0 \iff$$

$$\iff c-2\langle c,x\rangle Ax=0 \iff \langle c,x\rangle x=\frac{1}{2}A^{-1}c$$

$$\Rightarrow \langle c,x\rangle^2=\frac{1}{2}\langle A^{-1}c,c\rangle\ (>0,\ \text{т.к. } A^{-1}\in\mathbb{S}^n_{++}) \iff \langle c,x\rangle=\pm\sqrt{\frac{\langle A^{-1}c,c\rangle}{2}}$$

$$\nabla f(x)=0 \iff \pm\sqrt{\frac{\langle A^{-1}c,c\rangle}{2}}\cdot x=\frac{1}{2}A^{-1}c \iff x=\pm(2\langle A^{-1}c,c\rangle)^{-\frac{1}{2}}A^{-1}c$$

Таким образом, при ограничениях из условия, имеем две ТС.

Бонус

$X \in S^n_{++}$, $\quad monster := \lim\limits_{k\to\infty} tr\left(X^{-k} - (X^k + X^{2k})^{-1}\right)$ — ?

① Убедимся, что в выражении внутри monster всё определено. Действительно:

- $X \in S^n_{++} \Rightarrow \exists\, X^{-1} \in S^n_{++} \Rightarrow \exists\, X^{-k}$
- т.к. все собственные значения $\lambda_i(X) > 0$, то и
  $\lambda_i(X^k) = [\lambda_i(X)]^k > 0 \Rightarrow X^k \in S^n_{++}$
- $\forall A, B \in S^n_{++} \Rightarrow A + B \in S^n_{++}$, т.к. $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$,
  $\langle (A+B)y, y\rangle = \langle Ay, y\rangle + \langle By, y\rangle > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
  $\Rightarrow X^k + X^{2k} \in S^n_{++} \Rightarrow \exists\, (X^k + X^{2k})^{-1}$

② Решим задачу при $n=1$. В этом случае $S^1_{++} = \mathbb{R}_{++}$ и

$$monster\Big|_{n=1} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{x^k} - \frac{1}{x^k + x^{2k}}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1 + x^k - 1}{x^k(1+x^k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+x^k}$$

$$l(x) := \quad = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

③ Для общего случая воспользуемся:

- линейностью следа
- $\lambda_i(X^k) = [\lambda_i(X)]^k$, т.к. если v_i – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_i(X)$, то

$$X^k v_i = X^{k-1}(X v_i) = X^{k-1}\lambda_i(X)\, v_i = \lambda_i(X)\, X^{k-1} v_i = \ldots = [\lambda_i(X)]^k$$

замечание: мы сохраняем i-й номер собственного значения для удобства, при суммировании порядок будет не важен

- $\lambda_i(X^k + X^{2k}) = [\lambda_i(X)]^k + [\lambda_i(X)]^{2k}$, т.к.

$$(X^k + X^{2k}) v_i = X^k v_i + X^{2k} v_i = [\lambda_i(X)]^k v_i + [\lambda_i(X)]^{2k} v_i = \left([\lambda_i(X)]^k + [\lambda_i(X)]^{2k}\right) v_i$$

- $\lambda_i(X^{-1}) = [\lambda_i(X)]^{-1}$, т.к.

$$X v_i = \lambda_i(X) v_i \Rightarrow X^{-1} X v_i = \lambda_i(X) X^{-1} v_i \Rightarrow X^{-1} v_i = \frac{1}{\lambda_i(X)} v_i$$

- $\operatorname{tr} X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X)$ – след равен сумме собств. значений матрицы

$$\begin{aligned}
\text{monster} &= \lim_{k\to\infty}\left[\operatorname{tr} X^{-k} - \operatorname{tr}\left(X^k + X^{2k}\right)^{-1}\right] \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(X)]^{-k} - \sum_{i=1}^{n}\left([\lambda_i(X)]^k + [\lambda_i(X)]^{2k}\right)^{-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lim_{k\to\infty}\left[[\lambda_i(X)]^{-k} - \left([\lambda_i(X)]^k + [\lambda_i(X)]^{2k}\right)^{-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ell(\lambda_i(X)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}[\underbrace{0 <}_{\lambda_i(X) > 0\ \forall X \in S^n_{++}} \lambda_i(X) < 1] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(X) = 1] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(X) < 1] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\lambda_i(X) = 1]
\end{aligned}$$

здесь квадратные скобки означают индикаторы (нотация Айверсона)