Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 8 / 4 / 1

Выполнил:
студент 104 группы
Васильев Р. Л.

Преподаватель:
Сенюкова О. В.

Москва
2019

Содержание

Постановка задачи

В рамках задания решается задача, связанная с вычислением площади плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми. Для решения реализуется два численных метода: комбинированный метод хорд и касательных, позволяющий приближенно вычислять корень уравнения, и метод прямоугольников для численного интегрирования функции.

Кривые, исследование которых необходимо провести, заданы следующими уравнениями:

$$f_1(x) = e^x + 2$$
$$f_2(x) = -2x + 8$$
$$f_3(x) = -\frac{5}{x}$$

Математическое обоснование

Для корректного применения комбинированного метода приближенного решения уравнения $h(x) = 0$ (где $h(x) = f(x) - g(x)$) необходимо найти отрезок $[a, b]$, на котором уравнение имеет ровно один корень. Достаточное условие сходимости таково: на концах отрезка функция $h(x)$ имеет разные знаки и на всем отрезке отрезке первая и вторая производные функции не меняли свой знак [2]. Проведем анализ заданного набора кривых и определим границы отрезков.

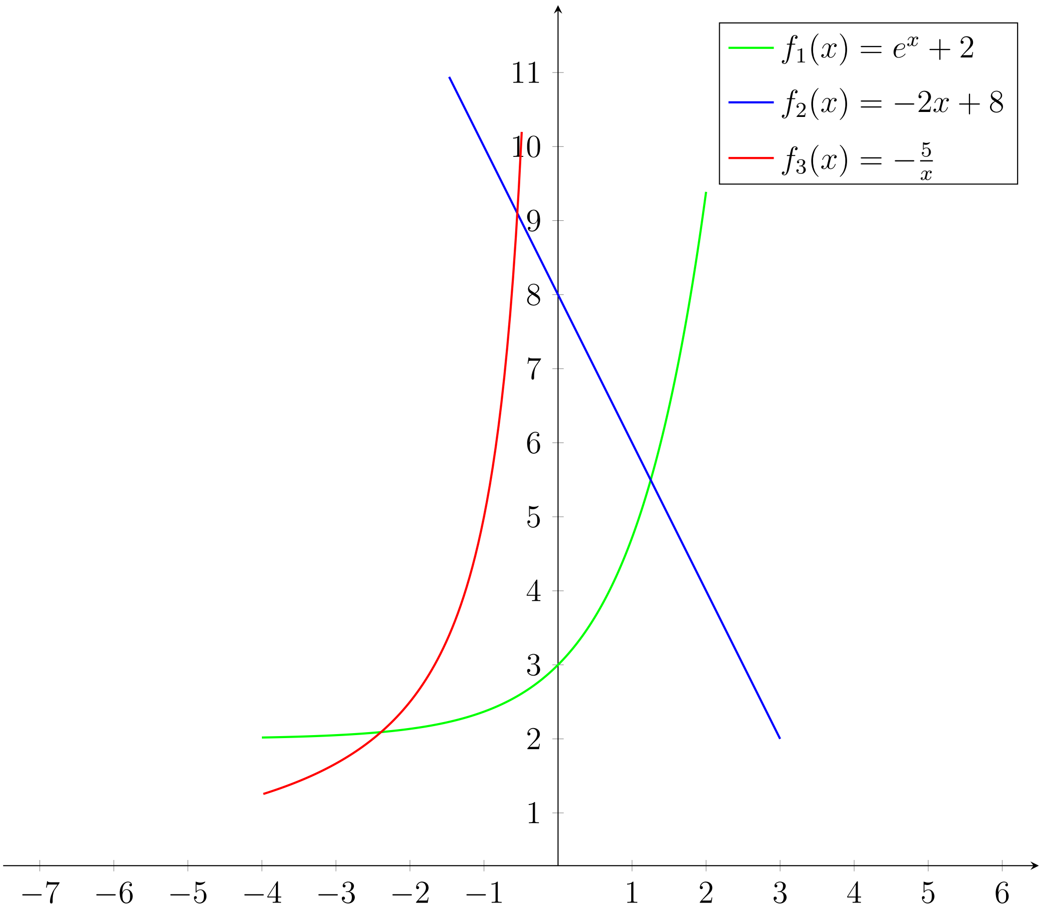

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

1. $h(x) = f_1(x) - f_3(x) = e^x + 2 + \frac{5}{x}$

   Покажем, что в качестве отрезка можно взять $[-3, -2]$, то есть положим $a = -3$ и $b = -2$:

   $h(-3) = e^{-3} + 2 + \frac{5}{-3} = e^{-3} + \frac{1}{3} > 0$

   $h(-2) = e^{-2} + 2 + \frac{-5}{2} = e^{-2} - \frac{1}{2} < 2^{-2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} < 0$

   Итак, $h(a)$ и $h(b)$ имеют разные знаки. Рассмотрим знакопостоянство первой и второй производной:

   $h'(x) = e^x - \frac{5}{x^2} < e^{-2} - \frac{5}{(-3)^2} < 2^{-2} - \frac{5}{9} = \frac{-11}{36} < 0 \ \ \forall x \in [a, b]$

   $h''(x) = e^x + \frac{10}{x^2} > 0 \ \ \forall x \in [a, b]$

Получается, $h'(x) < 0$ и $h''(x) > 0 \ \ \forall x \in [-3, -2]$.

2. $h(x) = f_2(x) - f_3(x) = -2x + 8 + \frac{5}{x}$

   $a := -1,\ b := -0.1$

   $h(a) = 2 + 8 - 5 = 5 > 0$

   $h(b) = -0.2 + 8 - 50 < 0$

   $h'(x) = -2 - \frac{5}{x^2} < 0 \ \ \forall x \in [a, b]$

   $h''(x) = \frac{10}{x^3} < 0 \ \ \forall x \in [a, b]$

3. $h(x) = f_1(x) - f_2(x) = e^x + 2 - (-2x + 8)$

   $a := 0,\ b := 2$

   $h(a) = 1 - 6 = -5 < 0$

   $h(b) = e^2 + 4 - 6 > 2^2 - 2 = 2 > 0$

   $h'(x) = e^x + 2 > 0 \ \ \forall x \in [a, b]$

   $h''(x) = e^x > 0 \ \ \forall x \in [a, b]$

Приведем теоретические оценки погрешностей численных методов из [1]. Оценка отклонения $n-$го приближения от точного значения корня c функции f на отрезке $[a, b]$:

$$|x_n - c| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\underset{a \leqslant x \leqslant b}{inf} |f'(x)|}$$

При использовании метода прямоугольников (n – число точек разбиения) погрешность составляет:

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = O(\frac{1}{n^2}),\ a < \xi < b$$

Видим, что квадратурная формула имеет второй порядок точности.

По условию, требуется найти значение площади **S** с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Для вычисления площади потребуется приближенно вычислить три определенных интеграла. Поскольку у каждого погрешность составит ε_2, то общая погрешность при численном интегрировании составит $\varepsilon_2 \cdot 3$.

Что касается приближенного вычисления корней уравнений x_1, x_2, x_3, то при использовании формулы прямоугольников можно считать, что при вычислении каждого из трех интегралов мы допускаем ошибку на границах: $f(x_i)\varepsilon_1 + f(x_j)\varepsilon_1$. Поскольку максимальное значение функций на исследуемых отрезках не превышает 10 (рис. 1), то погрешность при использовании приближенных корней можно оценить так:

$$3 \cdot 2 \cdot max\, f(x) \cdot \varepsilon_1 \leqslant 6 \cdot 10 \cdot \varepsilon_1 = 60\varepsilon_1$$

Итак, положим $\varepsilon_1 = 0.00001$ и $\varepsilon_2 = 0.0001$, тогда

$$\varepsilon \leqslant 60\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 = 0.0009 < 0.001$$

Результаты экспериментов

Приведем результаты вычислений.

Кривые	x	y
1 и 3	-2.39054	2.09158
2 и 3	-0.54951	9.09902
1 и 2	1.25176	5.49648

Таблица 1: Координаты точек пересечения

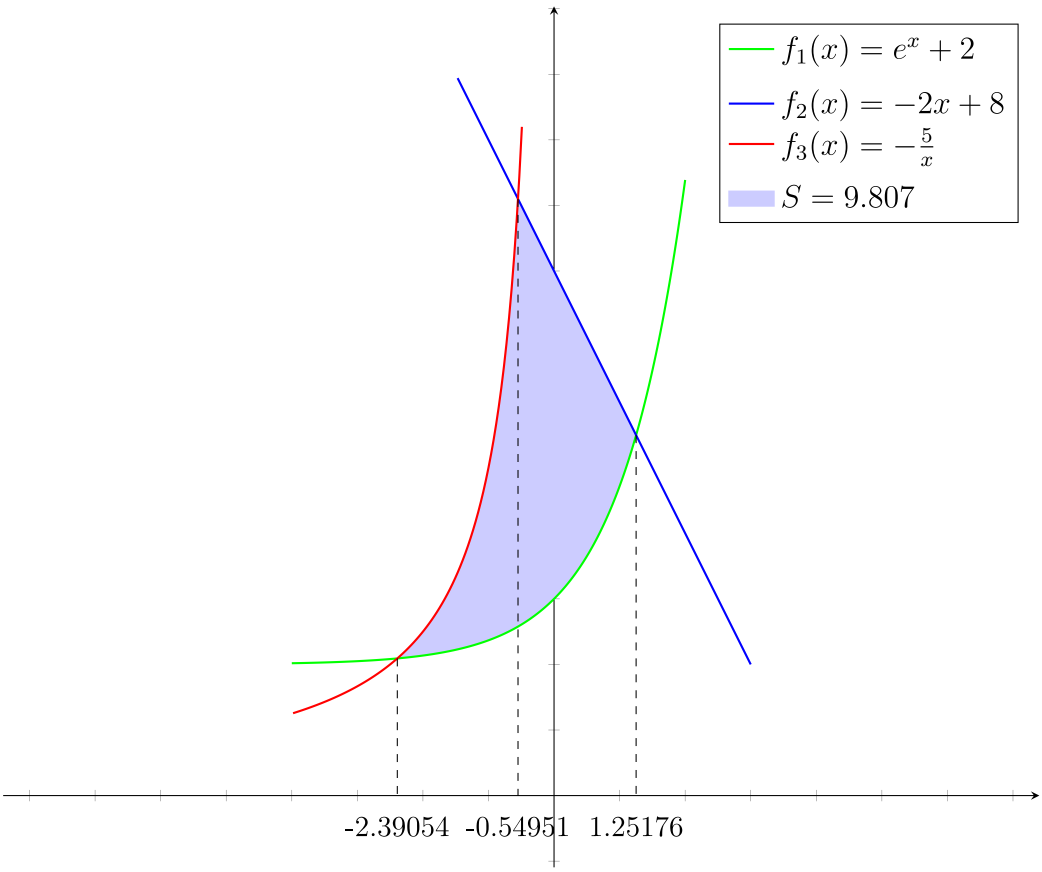

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Координаты точек пересечения кривых приведены в Таблице 1. Искомая площадь фигуры

$$\mathbf{S} \approx 9.807$$

Структура программы и спецификация функций

Программа состоит из следующих модулей:

- *funcs.asm* (сокращение *numerical methods*) определяет математические функции из варианта задания (`f1, f2, f3`), а также их производные (`df1, df2, df3`). Каждая из функций принимает и возвращает `double`.

- В *num_ meths.c* (сокращение *numerical methods*) реализованы численные методы – функции `root` и `integral`.

  1. ```
     double root(
         double (*f)(double), //1-я функция
         double (*g)(double), //2-я функция
         double (*df)(double), //производная 1-й функции
         double (*dg)(double), //производная 2-й функции
         double a, //левая граница
         double b, //правая граница
         double eps1) //погрешность
     ```

     Вычисляет с точностью ε_1 корень x уравнения $f(x) = g(x)$ на отрезке $[a, b]$.

  2. ```
     double integral(
         double (*f)(double), //подынтегральная функция
         double a, //нижний предел
         double b, //верхний предел
         double eps2) //погрешность
     ```

     Вычисляет с точностью ε_2 величину определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

- В *tests.c* определены функции для тестирования `root` и `integral`.

  1. `void test_rt(double eps1)` принимает на вход допустимую погрешность ε_1, считывает с клавиатуры номера тестируемых функции и промежуток, выводит на печать корень уравнения, вычисляемый с помощью `root`.
  2. `void test_itg(double eps2)` в качестве единственного аргумента принимает ε_2, считывает с клавиатуры номер тестируемой функции и границы интегрирования, выводит на печать значение интеграла, вычесляемое с помощью `integral`.

  Также в файле определена математическая функция `f4` и её производная `df4` – использовались для отладки программы (подробнее в соответствующем разделе), прототипы:

  ```
  static double f4(double x);
  static double df4(double x);
  ```

- Заголовочный файл <u>*decls.c*</u> (сокращение *declarations*) содержит объявления глобальных функций, глобальной константы `int cnt` (счетчик итераций), а также подключает исходные файлы стандартной библиотеки Си.

- <u>*main.c*</u> содержит единственную функцию `int main(int argc, char *argv[])`, которая, принимая и обрабатывая ключи командной строки, вычисляет площадь фигуры.

Изобразим связи между модулями графически.

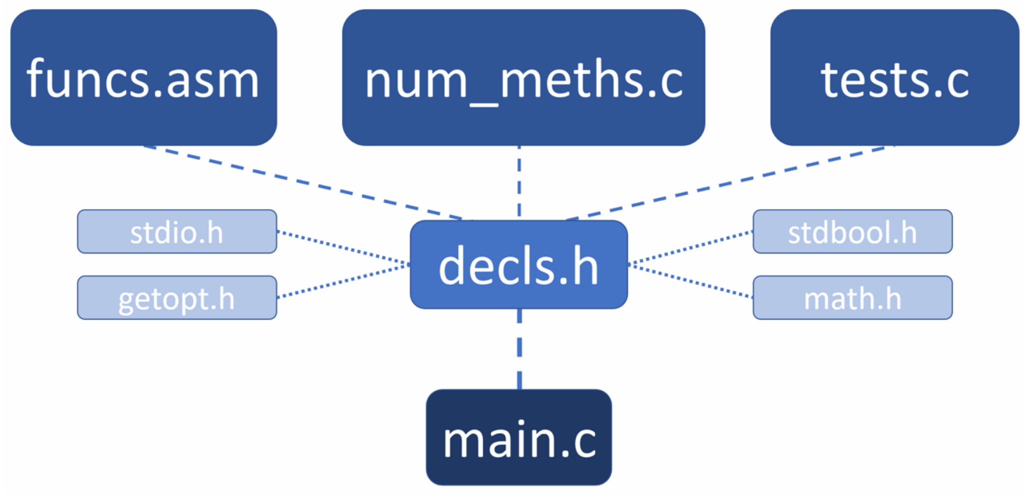

Рис. 3: Схема модулей

Сборка программы (Make-файл)

Текст Make-файла:

```
all: prg
prg: main.o funcs.o num_meths.o tests.o
    gcc -m32 -o prg main.o funcs.o num_meths.o tests.o -lm
main.o: main.c decls.h
    gcc -std=c99 -m32 -c -o main.o main.c
num_meths.o: num_meths.c
    gcc -std=c99 -m32 -c -o num_meths.o num_meths.c
tests.o: tests.c
    gcc -std=c99 -m32 -c -o tests.o tests.c
funcs.o: funcs.asm
    nasm -f elf32 -o funcs.o funcs.asm
clean:
    rm -f *.o prg
```

Зависимости модулей при сборке описываются нижеприведенной схемой.

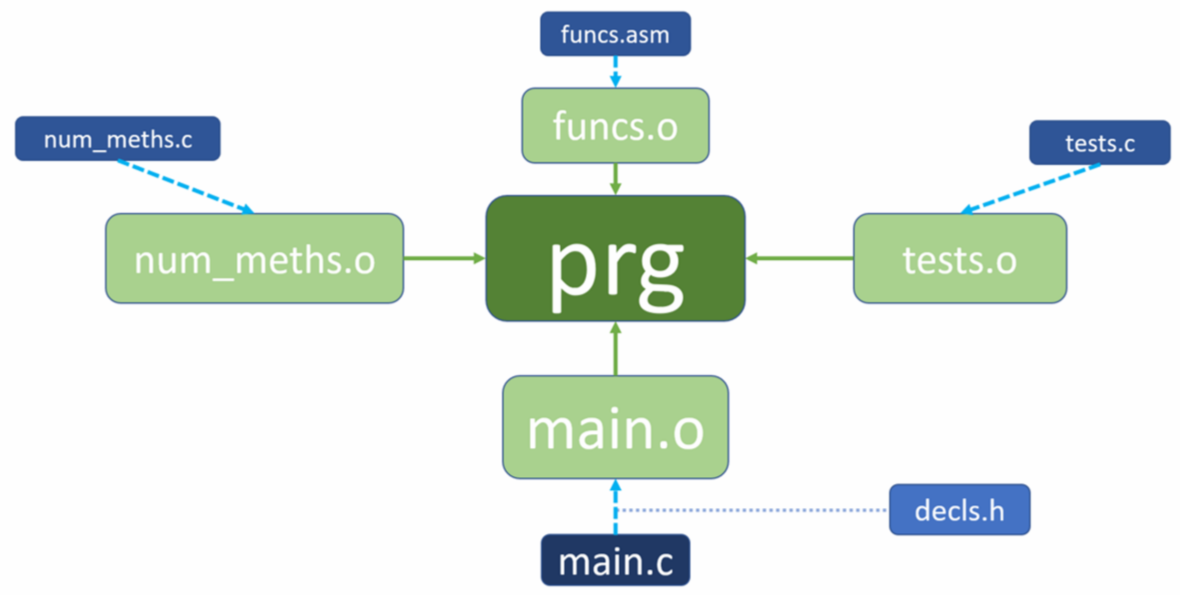

Рис. 4: Диаграмма зависимостей

Отладка программы, тестирование функций

Тестирование и отладка численных методов производились на функциях из варианта, а также с помощью «удобной»[1] дополнительной функции

$$f_4(x) = x^3 + 2.5x^2 - 0.5x + 3$$

Проведем тестирование комбинированного метода хорд и касательных. Для этого при вызове программы будем использовать ключ `-r` и вводить нижеуказанные параметры:

1. $f_1(x) = f_4(x) \;\Leftrightarrow\; e^x + 2 = x^3 + 2.5x^2 - 0.5x + 3$
   Верный ответ: **0** (здесь и далее проверяется непосредственной подстановкой).
   Вывод программы, отрезок $[-0.5, 0.5]$: **0.00000**

2. $f_2(x) = f_4(x) \;\Leftrightarrow\; -2x + 8 = x^3 + 2.5x^2 - 0.5x + 3$
   Верный ответ: **1**.
   Вывод программы, отрезок $[0.5, 1.5]$: **1.00000**

3. $f_3(x) = f_4(x) \;\Leftrightarrow\; -\frac{5}{x} = x^3 + 2.5x^2 - 0.5x + 3$
   Верный ответ: **-1**.
   Вывод программы, отрезок $[-1.5, -0.5]$: **-1.00000**

Рассмотрим теперь реализацию метода прямоугольников, вызывая программу с опцией `-i`:

1. $\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 (e^x + 2)dx = (e^x + 2x)|_0^1 = e + 1 \approx$ **3.71828**
   Результат программы: **3.7182**

2. $\int_{-1}^1 f_2(x)dx = \int_{-1}^1 (-2x + 8)dx = (-x^2 + 8x)|_{-1}^1 =$ **16**
   Результат программы: **16.0000**

3. $\int_1^e f_3(x)dx = \int_1^e (-5/x)dx = (-5ln|x|)|_1^e =$ **-5**
   Результат программы ($e \approx 2.71828$): **-5.0000**

[1]Уравнение вида $f_i(x) = f_4(x)$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ имеет целый корень

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к данному отчету.

Анализ допущенных ошибок

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.

[2] Трифонов Н. П., Пильщиков В. Н. Задания практикума на ЭВМ (1 курс). Учебное пособие, 2-е исправленное издание. — М.: МГУ, 2001.