Определение. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$ пишут, что $\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, если случаная величина ξ принимает значения $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ с вероятностями

$$\mathbb{P}\left(\{\xi = k\}\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

где $k \in \{0, 1, \ldots\}$

Утверждение. Если $\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$, то $\mathbb{E}\left[\xi\right] = \mathbb{D}\left[\xi\right] = \lambda$

Замечание. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{=e^{\lambda}} = 1$

№8

Имеется случайная величина $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda = 100)$

а) $\mathbb{P}\left(\{x = 0\}\right) = \dfrac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-100}$

б) $\mathbb{P}\left(\{x > 0\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\{x = 0\}\right) = 1 - e^{-100}$

в) $\mathbb{P}\left(\{x < 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\varnothing\right) = 0$

г) По определению, $\mathbb{E}\left[\xi\right] = \lambda$. Докажем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}\left(\{x = k\}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!}\right) \lambda e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

д) Для того, чтобы посчитать дисперсию X сначала посчитаем мат.ожидание X^2, а для этого посчитаем $\mathbb{E}\left[X(X-1)\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(X-1)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}\left(\{x = k\}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Тогда, $\lambda^2 = \mathbb{E}\left[X(X-1)\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right] \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right] = \lambda + \lambda^2$

Теперь можем выразить дисперсию через известное равенство:

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

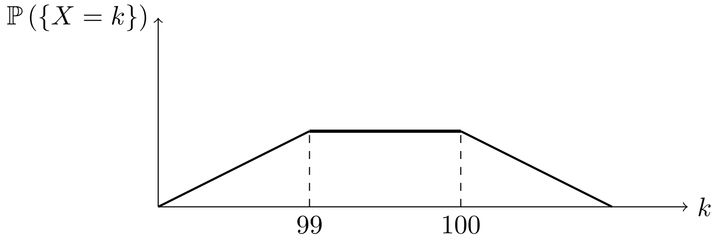
е) Предположим, что $X = k$ и есть наиболее вероятное значение, принимаемое X. При этом, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Так как k — дискретная, то дифференцированием мы воспользоваться не можем, тогда посчитаем $\dfrac{\mathbb{P}(\{X = k+1\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(\{X = k+1\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})} &= \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}} \\ &= \frac{\lambda}{k+1} \\ &= \frac{100}{k+1}\end{aligned}$$

Теперь проанализируем при каких k это отношение будет больше, меньше или равно 1:

- $\dfrac{100}{k+1} > 1 \Longrightarrow k < 99$
- $\dfrac{100}{k+1} < 1 \Longrightarrow k > 99$
- $\dfrac{100}{k+1} = 1 \Longrightarrow k = 99$

Значит, 99 и 100 — наиболее вероятные значения, принимаемые случайной величиной X



№9

а) Пусть $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й } \textit{пассажир} \text{ вышелна шестом этаже} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. При этом $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тогда, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_5$ — число *пассажиров*, которые вышли на шестом этаже

Заметим, что $\xi_1, \ldots, \xi_5$ — независимые, а также $\xi_i \sim \mathrm{Be}\left(p = \frac{1}{9}\right)$. Тогда, $\xi \sim \mathrm{Bi}\left(n = 5, p = \frac{1}{9}\right)$

$\mathbb{P}(\{\xi > 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\xi = 0\}) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5$

б) $\mathbb{P}(\{\xi = 0\}) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^0 \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \left(\frac{8}{9}\right)^5$

в) Пусть $\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й } \textit{пассажир} \text{ вышел на 6 этаже или выше} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. При этом $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тогда, $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_5$ — число *пассажиров*, которые вышли на шестом этаже и выше

Заметим, что $\eta_1, \ldots, \eta_5$ — независимые, а также $\eta_i \sim \mathrm{Be}\left(p = \frac{5}{9}\right)$. Тогда, $\eta \sim \mathrm{Bi}\left(n = 5, p_1 = \frac{5}{9}\right)$

$\mathbb{P}(\{\eta = 5\}) = C_5^5 \cdot p_1^5 \cdot q^0 = \left(\frac{5}{9}\right)^5$

№10

$\xi_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda = 3)$ — число сбоев за i-е сутки

а)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\xi_i > 0\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{\xi_i = 0\}) \\ &= 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-3}\end{aligned}$$

б) Требуется вычислить вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя. То есть нужно найти вероятность двух событий: $\{\xi_1 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 0\}$. Заметим, что эти события независимы. Формально:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\xi_1 = 0\} \cap \{\xi_2 = 0\}) &= \mathbb{P}(\{\xi_1 = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{\xi_2 = 0\}) \\ &= e^{-3} \cdot e^{-3}\end{aligned}$$

Определение. Пусть ξ принимает значения $a_1, \ldots, a_m$, а случайная величина η принимает значения $b_1, \ldots, b_n$. Тогда, случайные величины ξ и η независимы, если

$$\forall\ i \in \{1, \ldots, m\},\ \forall\ j \in \{1, \ldots, n\} \text{ события } \{\xi = a_i\} \text{ и } \{\eta = b_j\} \text{ независимы}$$

Формально: $\mathbb{P}(\{\xi = a_i\} \cap \{\eta = b_j\}) = \mathbb{P}(\{\xi = a_i\}) \cdot \mathbb{P}(\{\eta = b_j\})$