Имеется пространство (множество) элементарных исходов Ω. В этом пространстве определяется функция вероятности $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$, где $\mathcal{F}$ - σ-алгебра — система подмножеств в Ω

Определение. Дано непустое Ω. Система подмножеств $\mathcal{A}$ в Ω называется **алгеброй**, если выполняются такие аксиомы

(a1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(a2) если $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$

(a3) если $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, то $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

Примечание. Ω называется **единицей** алгебры $\mathcal{A}$, то есть если мы определим операцию пересечения множеств, как умножение, то получим, что $\forall A \in \mathcal{A}\colon A \cap \Omega = A$

Пример. Пусть $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$. Проверим, являются ли следующие множества алгебрами

- $\mathcal{K}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}\}$ — алгебра
- $\mathcal{K}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{\heartsuit, \diamondsuit\}\}$ — не алгебра, так как $\{\heartsuit, \diamondsuit\} \in \mathcal{K}_2$, но $\{\heartsuit, \diamondsuit\}^c = \{\spadesuit, \clubsuit\} \notin \mathcal{K}_2$

Определение. Пусть $\Omega \neq \varnothing$. Система подмножеств $\mathcal{F} \in \Omega$ называется **σ-алгеброй**, если

(σ1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(σ2) если $A \in \mathcal{F}$, то $A^c \in \mathcal{F}$

(σ3) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$

Задача №1

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, докажите, что $\varnothing \in \mathcal{A}$

Проверим выполнение условий **(a1)** и **(a2)**:

- $\Omega \in \mathcal{A} - \varnothing \in \Omega \Longrightarrow$ **(a1)** выполнено
- $\varnothing = \Omega^c \in \mathcal{A} \Longrightarrow$ **(a2)** выполнено

Примечание. Если $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, то доказательство аналогично

Задача №2

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра и $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$

a) Доказать, что $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

Применим формулы де Моргана: $A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c) \in \mathcal{A}$

b) Доказать, что $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

Аналогично, используем де Моргана: $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap \underbrace{A_2^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

Задача №3

Доказать, что всякая σ-алгебра является алгеброй

Решение. $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, то есть для нее выполнены аксиомы $\sigma1$, $\sigma2$, $\sigma3$. При этом, аксиомы $\sigma1$ и $\sigma2$ аналогичны аксиомам **(a1)** и **(a2)**. Значит, осталось проверить, что для $\mathcal{F}$ выполняется **(a3)**

Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$. Положим, что $A_n = \varnothing \in \mathcal{F}$ при $n \geqslant 3$, тогда

$$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{=A_1 \cup A_2} \in \mathcal{F}$$

Примечание. Из задач 2 и 3 следует, что если $\mathcal{F}$ — σ-алгебра и $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, то

$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}, \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}, \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$$

Задача №4

Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра и $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Доксаать, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ **Доказательство.**

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n^c}_{\in \mathcal{F}}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

Примечание. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, тогда в общем случае из условия, что $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ **не следует ни одно** из условий:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

Задача №5

$\Omega = \{a, b, c, d\}$. Какие из множеств являются σ-алгебрами?

a) $\mathcal{S}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$ — самая бедная σ-алгебра

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}_1$$

b) $\mathcal{S}_2 = 2^\Omega$ — множество всех подмножеств в множестве Ω

$$A \in 2^\Omega \Longleftrightarrow A \subseteq \Omega \Longrightarrow \Omega \setminus A \subseteq \Omega \Longleftrightarrow \underbrace{\Omega \setminus A}_{=A} \in 2^\Omega$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \Omega \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in 2^\Omega$$

c) $\mathcal{S}_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
$\Omega \in \mathcal{S}_3 \implies \mathcal{S}_3$ — не σ-алгебра

d) $\mathcal{S}_4 = \{\varnothing, \Omega, \{a, b\}\}$
$\{a, b\} \in \mathcal{S}_4$, но $\{a, b\}^c \notin \mathcal{S}_4$

Задача №6

Имеется полуинтервал $\Omega = (0, 1]$, тогда

$$\mathcal{A} = \{A = \bigcup_{k=1}^{n} (a_k; b_k] \colon n \in \mathbb{N}, (a_k; b_k] \subseteq \Omega, (a_k; b_k] \cap (a_l; b_l] = \varnothing, l \neq k\}$$

Или же, говоря в терминах дизъюнктного объединения:

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k; b_k] \right\}$$

a) Докажите, что $\mathcal{A}$ — алгебра

$A \cup B = A \sqcup B$ для $A \cap B = \varnothing$, значит $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Пусть у нас имеется A, определяемое как

$$A = (0.1, 0.25] \cup (0.33, 0.47] \cup (0.9, 1] \in \mathcal{A}$$

Тогда, если мы попытаемся включить $\{0.1\}$ в A, получим, что

$$\begin{aligned} A = [0.1, 0.25] \cup (0.33, 0.47] \cup (0.9, 1] = 0.1 \cup (0.1, 0.25] \cup (0.33, 0.47] \cup (0.9, 1] \notin \mathcal{A} \\ (0.1, 0.1] = \{x \colon 0.1 < x \leqslant 0.1\} = \varnothing \\ (a; b] = \{x \colon a < x \leqslant b\} \Longrightarrow \Omega = (0, 1] \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

При этом,

$$A^c = (0, 0.1] \sqcup (0.25, 0.33] \sqcup (0.47, 0.9] \in \mathcal{A}$$

b) Приведите пример: $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, но $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}$

$$A_1 = \underbrace{\varnothing}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}, A_n = \underbrace{\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\in \mathcal{A}}, n \leqslant 2$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1) \notin A$$

$\Longrightarrow \mathcal{A}$ — не σ-алгебра

Задача №7

$\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b, c, d\}\}, \mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega, \{a, b, c\}, \{d\}\}$

Пункт а является тривиальной проверкой выполнения аксиом, начнем с с

c) Является ли $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ σ-алгеброй?

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{A \colon A \in \mathcal{F}_1 \text{ и } A \in \mathcal{F}_2\} = \{\varnothing, \Omega\}$ — σ-алгебра

e) Является ли $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ σ-алгеброй?

$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{A \colon A \in \mathcal{F}_1 \text{ или } A \in \mathcal{F}_2\} = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{d\}\}$

$$\{a\}, \{d\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

$$\{a\} \cup \{d\} = \{a, d\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

$\Longrightarrow$ это не σ-алгебра

Задача №9

Доказать, что пересечение любого семейста σ-алгебр с одной и той же единицей является σ-алгеброй

Пусть у нас имеется σ-алгебры $\mathcal{F}_j$, где $j \in J$ — производьный набор индексов, $\forall j \in J \ \Omega \in \mathcal{F}_j$

Также определим $\hat{\mathcal{F}}_j := \bigcap\limits_{j \in J} \mathcal{F}_j$

a) $\Omega \in \hat{\mathcal{F}} \ \forall j \in J \Longrightarrow \Omega \in \mathcal{F}_j \Longrightarrow \Omega \in \bigcap\limits_{j \in J} \mathcal{F}_j = \hat{\mathcal{F}}$

b) Пусть $A \in \hat{\mathcal{F}}$. Значит, $\forall j \colon A \in \mathcal{F}_j \Longrightarrow \forall j \in A^c \in \mathcal{F}_j \Longrightarrow A^c \in \hat{\mathcal{F}}$, так как $\mathcal{F}_j$ — σ-алгебра

c)

$$
\begin{aligned}
\text{Пусть } A_1, \ldots, A_n \in \hat{\mathcal{F}} &\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in J \ A_n \in \mathcal{F}_j \\
&\Longrightarrow \forall j \in J (\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \in \mathcal{F}_j) \\
&\Longrightarrow \forall j \in J \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_j \\
&\Longrightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j = \hat{\mathcal{F}}
\end{aligned}
$$

Определение. Пусть $\Omega \neq \varnothing$ и $\mathcal{S}$ — это непустая система подмножеств множества Ω

Минимальной σ-алгеброй, содержащей систему $\mathcal{S}$ называется такая σ-алгебра $\sigma(\mathcal{S})$, что

- $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$
- $\forall$ σ-алгебры $\mathcal{G}$, которая содержит систему $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$) справедливо, что $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}$

Определение. Минимальная σ-алгебра, содержащая все полуинтервалы вида $(a; b] \in \mathbb{R}$, где a и b, такие что $a, b \in (-\infty; +\infty)$ называется **борелевской σ-алгеброй** на числовой прямой и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Элементы борелевской σ-алгебры называются **борелевскими множествами**