Определение. Случайная величина ξ абсолютно непрерывная если существует интегрируемая функция $f_\xi(t)$, такая что для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$F_\xi = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

При этом, функция $f_\xi(t)$ называется плотностью распределения случайной величины ξ

№1

$\Omega = [0;1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0;1])$, $\mathbb{P}(\{A\})$ — длина $A \in \mathcal{F}$, $\xi(\omega) = \omega^2$ — случайная величина

a)

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= \mathbb{P}(\{\xi \leqslant x\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant x\}) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in [0;1] : \omega^2 \leqslant x\right\}\right) \\ &= \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим $x \in [0;1]$:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in [0;1] : \omega^2 \leqslant x\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in [0;1] : -\sqrt{x} \leqslant \omega \leqslant \sqrt{x}\right\}\right) \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\left\{[0;\sqrt{x}]\right\}\right)$$

b)

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in [0;1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \\ &= \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x}dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\xi^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 \\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\left[\xi\right] &= \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\xi\right]\right)^2 \\ &= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{45}\end{aligned}$$

№2

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx, & x\in[0;1] \\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$$

a)

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F_\xi(x) = 1$:

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt \\ &= \int_0^1 ctdt \\ &= c\left.\frac{t}{2}\right|_0^1 \\ &= \frac{c}{2}\end{aligned} \qquad \Longrightarrow c = 2$$

b)

Определение. Пусть ξ — абсолютная непрерывная величина. Тогда, $\forall B(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mathbb{P}\left(\{\xi\in B\}\right) = \int\limits_B f_\xi(t)dt$$

Требуется найти $\mathbb{P}\left(\left\{\xi\leqslant\frac{1}{2}\right\}\right)$. Тогда, исходя из определения выше:

$$\begin{aligned}\int_0^{0.5} f_\xi(t)dt &= \int_0^{0.5} 2tdt \\ &= \left.t^2\right|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{\xi \in [0.5; 1.5]\}\right) &= \int\limits_B f_\xi(t)dt \\
&= \int_{0.5}^{1} 2tdt \\
&= t^2\Big|_{0.5}^{1} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

d)

$$\mathbb{P}\left(\{\xi \in [2; 3]\}\right) = \int\limits_{[2;3]} \underbrace{f_\xi(t)}_{=0,\text{по усл.}} dt = 0$$

e)

Пусть $x < 0 \Longrightarrow F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt = 0$

Пусть $0 \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_\xi(t)dt + \int_0^x \\
&= t^2\Big|_0^x \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

Пусть $x > 1$, тогда

$$
\begin{aligned}
F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_\xi(t)dt + \int_0^1 f_\xi(t)dt + \int_1^x f_\xi(t)dt \\
&= 1
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx \\
&= \int_0^1 x2xdx \\
&= 2\int_0^1 x^2dx \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx \\
&= \int_0^1 x^2 2x dx \\
&= 2\int_0^1 x^3 dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}\left[\xi\right] &= \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\xi\right]\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sqrt{\xi}\right] &= \int_0^1 \sqrt{x} 2x dx \\
&= 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx \\
&= 2 \cdot \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Определение. Пусть случайная величина ξ имеет плотность $f_\xi(t)$

Квантилью уровня $u \in (0;1)$ случайной величины ξ называется наименьшее число $q \in R$:

$$
\int_{-\infty}^{q} f_\xi(t)dt = u
$$

№3

ξ — продолжительность ругания Васи, $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Longleftrightarrow f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$

$\mathbb{E}\left[\xi\right] = \dfrac{1}{\lambda} = 6 \Longrightarrow \lambda = 6,\ \mathbb{D}\left[\xi\right] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{\xi > 6\}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\{\xi \leqslant 6\}\right)\\ &= 1 - F_\xi(6)\\ &= 1 - \left[1 - e^{-\lambda 6}\right]\\ &= e^{-\lambda 6}\\ &= e^{-1}\end{aligned}$$

b)

$\mathbb{D}\left[\xi\right] = \dfrac{1}{\lambda^2} = 36$

c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\xi \leqslant 7\}|\{\xi > 6\}) &= \frac{\mathbb{P}\left(\{6 < \xi \leqslant 7\}\right)}{\underbrace{\mathbb{P}\left(\{\xi > 6\}\right)}_{=e^{-1}}}\\ &= \frac{F_\xi(7) - F_\xi(6)}{e^{-1}}\\ &= 1 - e^{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$