Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 12 сентября 2024 г.

Содержание

1 Кратные интегралы. Брусья. Интегрируемые функции по Риману

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i \in \{1, n\}\} \\ &= [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$
2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\, I_i, I_j$ не имею общих внтренних точек, и $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = I$, то

   $$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, тогда

   $$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup_{i=1}^{k} I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \leq i \leq k}$

Определение. Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi\}_{i=1}^{k}$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I $(f : I \to \mathbb{R})$, если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int \underset{I}{\dots} \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.5 Пример константной функции

Пуусть у нас есть функция $f = \mathrm{const}$

$$\begin{aligned} \forall (\mathbb{T}, \xi) : \ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{const} \cdot |I_i| \\ &= \mathrm{const} \cdot |I| \Longrightarrow \int_I f(x) \mathrm{d}x = \mathrm{const} \cdot |I| \end{aligned}$$

1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall \, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \overline{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall \, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot |I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i верхние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy,\ |I| = \dfrac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i \cdot j \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{n(n+1)}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$