Теория вероятности и математическая статистика—1
Теоретический и задачный минимумы
ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил @danya_vin

Версия от 3 октября 2024 г.

Содержание

1 Теоретический минимум

1.1 Сформулируйте классическое определение вероятности

Имеет место, когда исходы равновероятны

Определение.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Определение. $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$

1.2 Выпишите формулу условной вероятности

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \; \forall B : P(B) > 0$

1.3 Дайте определение независимости (попарной и в совокупности) для n случайных событий

Определение. События A и B называются **попарно независимыми**, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A|B)P(B) = P(A) \cdot P(B) \text{ — вытекает интуитивное определение}$$

Определение. События $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если:

$$\forall i_1 < \ldots < i_k < \ldots < i_n \; \forall k = 1, \ldots, n :$$
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Примечание. Для A_1, A_2, A_3:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

1.4 Выпишите формулу полной вероятности, указав условия её применимости

Пусть $\{H_i\}$ — полная группа несовместных событий (разбиение Ω)

Должны быть выполнены такие свойства:

- $H_i \cap H_j = \varnothing \; \forall i \neq j$ — несовместность
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ — полнота

Теорема. Тогда, $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i) \end{aligned}$$

□

1.5 Выпишите формулу Байеса, указав условия её применимости

Пусть $H_1, H_2, \dots$ — полная группа событий, и A — некоторое событие, вероятность которого положительна. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} P(H_k|A) &= \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)} \end{aligned}$$

2 Задачный минимум

2.1 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A \cap B) = 0.1$

a) Найдите $P(A|B)$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.4} = 0.25$

b) Найдите $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$

c) Являются ли события A и B независимыми?

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение. События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$

Пусть $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$. Тогда, A и B несовместны, то A и B зависимы

$$0 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \neq 0 \Longrightarrow A \text{ и } B \text{ зависимы}$$

2.2 Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА...

Способ №1 (С помощью формулы умножения вероятностей)

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

Пусть имеются такие события:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{первая буква — К}\} \\ A_2 &:= \{\text{вторая буква — О}\} \\ A_3 &:= \{\text{третья буква — Р}\} \\ A_4 &:= \{\text{четвертая буква — Т}\} \end{aligned}$$

Тогда, искомая вероятность:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{4290} \end{aligned}$$

Способ №2 (комбинаторный)

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|},\ \Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 \in L, a_2 \in L, a_3 \in L, a_4 \in L, a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j\}$

$|\Omega| = \dfrac{13!}{9!} = 17160$

$A = \{(K_1, O_1, P_1, T_1), (K_2, O_1, P_1, T_1), (K_1, O_2, P_1, T_1), (K_2, O_2, P_1, T_1)\} \longrightarrow 4$ исхода

Индекс у букв означают какой по счету встретилась буква в слове «КОМБИНАТОРИКА»

Тогда, искомая вероятность$= \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{17160} = \dfrac{1}{4290}$

2.3 В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй — 8 белых и 4 черных шара, в третьей — 2 белых и 13 черных шаров

$D_i := \{\text{выбираем } i\text{-ю урну}\}$, где $i = 1, 2, 3$ — разбиение Ω

Заметим, что урну мы выбираем равновероятно, то есть $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \dfrac{1}{3}$

a) Вычислите вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым

Формуа полной вероятности

$$P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + \ldots + P(A|D_n) \cdot P(D_n)$$

В нашем случае, формула будет иметь вид

$$P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) + P(A|D_3) \cdot P(D_3)$$

$A := \{$шар оказался белым$\}$

Заметим, что $P(A|D_1) = \frac{7}{10}, P(A|D_2) = \frac{2}{3}, P(A|D_3) = \frac{2}{15}$, тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) + P(A|D_3) \cdot P(D_3) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $P(D_1|A) = \dfrac{P(A|D_1) \cdot P(D_1)}{P(A|D_1)P(D_1) + P(A|D_2)P(D_2) + P(A|D_3)P(D_3)} = \dfrac{7}{15}$

2.4 В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных

Обозначим сотрудников так:

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{\textbf{опытный } \text{сотрудник}\} \\ D_2 &:= \{\textbf{неопытный } \text{сотрудник}\} \end{aligned}$$

Пусть $A := \{$совершена ошибка$\}$

Тогда, условия задачи можно записать так:

$$\begin{aligned} P(A|D_1) &= 0.01 \\ P(A|D_2) &= 0.1 \end{aligned}$$

a) $P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) = 0.01 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.028$

b) $P(D_2|A) = \dfrac{P(A|D_2) \cdot P(D_2)}{P(A)} = 0.714$

Заметим, что события $(D_2|A)$ и $(D_1|A)$ образуют полную группу вероятностей, то есть

$$P(D_2|A) + P(D_1|A) = 1 \Longrightarrow P(D_1|A) = 0.286$$

2.5 Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(\{X = x\})$	0.25	c	0.25

а) $\Omega = \{X = -1\} + \{X = 0\} + \{X = 1\}$ и $1 = \mathbb{P}(\{X = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) \implies c = 0.5$

б) $\mathbb{P}\{X \geqslant 0\} = \mathbb{P}(\{X = 0\} \sqcup \{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) = 0.75$

в) $\mathbb{P}(\{X < -3\}) = 0$, т.к. Ω — дискретное простраство, или же $\{X < -3\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < -3\}$

г) $\mathbb{P}(\{X \in [-0.5; 0.5]\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 0.5$, т.к. Ω — дискретное простраство

2.6 Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения

а) Аналогично предыдущей задаче — $c = 0.5$

б) $\mathbb{E}[X] = -1 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 = 0$

в) $\mathbb{E}[X^2] = (-1)^2 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 = 0.5$
$\mathbb{E}[\sin(X)] = \sin(-1) \cdot 0.25 + \sin(0) \cdot 0.5 + \sin(1) \cdot 0.25$

г) $\mathbb{D}[X] \equiv \mathbb{D}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$

д) $\mathbb{E}[|X|] = |-1| \cdot 0.25 + |0| \cdot 0.25 + |1| \cdot 0.25 = 0.5$

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(\{\xi = x\})$	0.25	c	0.25

2.7 Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0.75$

$X \sim \mathrm{Bi}(n = 4, p = \frac{3}{4})$. Напомним, что $\mathbb{P}(X = k) = C_4^k (\frac{3}{4})^k (\frac{1}{4})^{4-k}$

а) $\mathbb{P}(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

б) $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4$

в) $\mathbb{P}(X < 0) = 0$, так как количество успехов в биномиальном распределении $\geqslant 0$

г) $\mathbb{E}[X] = n \cdot p = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

д) $\mathbb{D}[X] = np(1-p) = \frac{3}{4}$

е) Нужно посчитать наиболее вероятную величину. Всего есть 5 значений — 5 возможных успешных исходов

$\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

$\mathbb{P}(X = 1) = C_4^1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$

$\mathbb{P}(X = 2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\mathbb{P}(X = 3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1$

$\mathbb{P}(X = 4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0$

2.8 Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$

Имеется случайная величина $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda = 100)$

а) $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-100}$

б) $\mathbb{P}(\{X > 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{x = 0\}) = 1 - e^{-100}$

в) $\mathbb{P}(\{X < 0\}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

г) По определению, $\mathbb{E}[X] = \lambda$. Докажем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(\{x = k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \lambda e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

д) Для того, чтобы посчитать дисперсию X сначала посчитаем мат.ожидание X^2, а для этого посчитаем $\mathbb{E}[X(X-1)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(\{x = k\}) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Тогда, $\lambda^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X] \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right] = \lambda + \lambda^2$

Теперь можем выразить дисперсию через известное равенство:

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

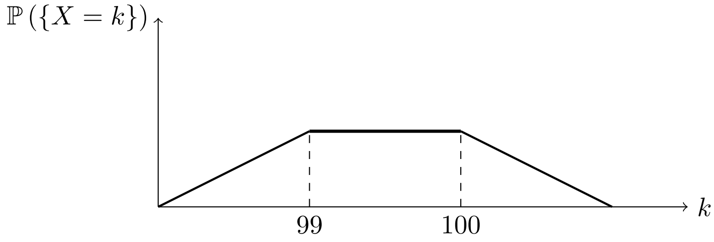
е) Предположим, что $X = k$ и есть наиболее вероятное значение, принимаемое X. При этом, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Так как k — дискретная, то дифференцированием мы воспользоваться не можем, тогда посчитаем $\dfrac{\mathbb{P}(\{X = k+1\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(\{X = k+1\})}{\mathbb{P}(\{X = k\})} &= \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} \\
&= \frac{\lambda}{k+1} \\
&= \frac{100}{k+1}
\end{aligned}$$

Теперь проанализируем при каких k это отношение будет больше, меньше или равно 1:

- $\dfrac{100}{k+1} > 1 \Longrightarrow k < 99$
- $\dfrac{100}{k+1} < 1 \Longrightarrow k > 99$
- $\dfrac{100}{k+1} = 1 \Longrightarrow k = 99$

Значит, 99 и 100 — наиболее вероятные значения, принимаемые случайной величиной X



2.9 В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек

а) Пусть $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й } \textit{пассажир} \text{ вышел на шестом этаже} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. При этом $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тогда, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_5$ — число *пассажиров*, которые вышли на шестом этаже

Заметим, что $\xi_1, \ldots, \xi_5$ — независимые, а также $\xi_i \sim \text{Be}\left(p = \frac{1}{9}\right)$. Тогда, $\xi \sim \text{Bi}\left(n = 5, p = \frac{1}{9}\right)$

$\mathbb{P}(\{\xi > 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\xi = 0\}) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5$

б) $\mathbb{P}(\{\xi = 0\}) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^0 \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \left(\frac{8}{9}\right)^5$

в) Пусть $\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й } \textit{пассажир} \text{ вышел на 6 этаже или выше} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. При этом $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тогда, $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_5$ — число *пассажиров*, которые вышли на шестом этаже и выше

Заметим, что $\eta_1, \ldots, \eta_5$ — независимые, а также $\eta_i \sim \text{Be}\left(p = \frac{5}{9}\right)$. Тогда, $\eta \sim \text{Bi}\left(n = 5, p_1 = \frac{5}{9}\right)$

$\mathbb{P}(\{\eta = 5\}) = C_5^5 \cdot p_1^5 \cdot q^0 = \left(\frac{5}{9}\right)^5$

2.10 При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои

$\xi_i \sim \text{Pois}(\lambda = 3)$ — число сбоев за i-е сутки

а)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\xi_i > 0\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{\xi_i = 0\}) \\ &= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-3} \end{aligned}$$

б) Требуется вычислить вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя. То есть нужно найти вероятность двух событий: $\{\xi_1 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 0\}$. Заметим, что эти события независимы. Формально:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\xi_1 = 0\} \cap \{\xi_2 = 0\}) &= \mathbb{P}(\{\xi_1 = 0\}) \cdot \mathbb{P}(\{\xi_2 = 0\}) \\ &= e^{-3} \cdot e^{-3} \end{aligned}$$