№1

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.4} = 0.25$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$

c) A и B — независимы?

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение. События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$

Пусть $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$. Тогда, A и B несовместны, то A и B зависимы

$0 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \neq 0 \Longrightarrow A$ и B зависимы

№2

Способ №1 (С помощью формулы умножения вероятностей)

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

Пусть имеются такие события:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{первая буква — К}\} \\ A_2 &:= \{\text{вторая буква — О}\} \\ A_3 &:= \{\text{третья буква — Р}\} \\ A_4 &:= \{\text{четвертая буква — Т}\} \end{aligned}$$

Тогда, искомая вероятность:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{4290} \end{aligned}$$

Способ №2 (комбинаторный)

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|},\ \Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 \in L, a_2 \in L, a_3 \in L, a_4 \in L, a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j\}$

$|\Omega| = \dfrac{13!}{9!}$

$A = \{(K_1, O_1, P_1, T_1), (K_2, O_1, P_1, T_1), (K_1, O_2, P_1, T_1), (K_2, O_2, P_1, T_1)\} \longrightarrow 4$ исхода

Индекс у букв означают какой по счету встретилась буква в слове «КОМБИНАТОРИКА»

№3

Определение. Совокупность событий $D_1, \ldots, D_n$ называется **разбиением** пространства элементарных событий, если

$$\Omega = D_1 \sqcup D_2 \sqcup \ldots \sqcup D_n$$

$D_i := \{\text{выбираем } i\text{-ю урну}\}$, где $i = 1, 2, 3$ — разбиение Ω

$a)$ **Формуа полной вероятности**

$$P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + \ldots + P(A|D_n) \cdot P(D_n)$$

То есть, в нашем случае формула примет вид

$$P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) + P(A|D_3) \cdot P(D_3)$$

$A :=$ {шар оказался белым}

$b)$ $P(D_1|A) = \dfrac{P(A|D_1) \cdot P(D_1)}{P(A|D_1)P(D_1) + P(A|D_2)P(D_2) + P(A|D_3)P(D_3)} = \ldots$

№4

Обозначим сотрудников так:

$$D_1 := \{\textbf{опытный} \text{ сотрудник}\}$$
$$D_2 := \{\textbf{неопытный} \text{ сотрудник}\}$$

Пусть $A :=$ {совершена ошибка}

Тогда, условия задачи можно записать так:

$$P(A|D_1) = 0.01$$
$$P(A|D_2) = 0.1$$

$a)$ $P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) = 0.01 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.028$

$b)$ $P(D_2|A) = \dfrac{P(A|D_2) \cdot P(D_2)}{P(A)} = 0.714$

Заметим, что события $(D_2|A)$ и $(D_1|A)$ образуют полную группу вероятностей, то есть

$$P(D_2|A) + P(D_1|A) = 1 \Longrightarrow P(D_1|A) = 0.286$$