Определение. Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ называется *измеримой* функцией относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, если

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\} \in \mathcal{F}$$

Назовем условием измеримости функцию, измеримую относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, также называемую $\mathcal{F}$-измеримой функцией или функцией, согласованной с σ-алгеброй $\mathcal{F}$

Задача №1

$\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, $\mathcal{F} = \{\varnothing, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \Omega\}$, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$

ω	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\xi(\omega)$	1	1	2	3
$\eta(\omega)$	3	2	1	1

а) Является ли ξ $\mathcal{F}$-измеримой? мяу мяу мяу всем привет от яны

1) $c > 3 :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > c = 100\} = \varnothing \in \mathcal{F}$
2) $c = 3 :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > 3\} = \varnothing \in \mathcal{F}$
3) $c \in (2; 3) :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > c = 27\} = \{\clubsuit\} \in \mathcal{F}$
4) $c = 2 :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > 2\} = \{\clubsuit\} \in \mathcal{F}$
5) $c \in (1; 2) :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > c = 13\} = \{\spadesuit, \clubsuit\} \in \mathcal{F}$
6) $c = 1 :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > 1\} = \{\spadesuit, \clubsuit\} \in \mathcal{F}$
7) $c < 1 :\ \{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > c = -200\} = \Omega \in \mathcal{F}$

б) Является ли η $\mathcal{F}$-измеримой?
$c = 2.5 :\ \{\omega \in \Omega : \eta(\omega) > 2.5\} = \{\heartsuit\} \notin \mathcal{F} \Longrightarrow$ не является fk-измеримой

№2

$\Omega = \mathbb{R},\ \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \xi(\omega) = \omega^2$. Определить, ξ — $\mathcal{F}$-измерима?

- $c < 0 :\ \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\} = \{\omega \in \mathbb{R} : \underbrace{\omega^2}_{\geqslant 0} > c\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
- $c \geqslant 0 :$

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\} &= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega^2 > c\} \\ &= \{\omega \in \mathbb{R} : \omega < -\sqrt{c}\} \cup \{\omega \in \mathbb{R} : \omega > \sqrt{c}\} \\ &= \left(-\infty; -\sqrt{c}\right) \cup \left(\sqrt{c}; +\infty\right) \\ &= \underbrace{\mathbb{R}}_{\mathcal{B}(\mathbb{R})} \setminus \underbrace{[-\sqrt{c}; \sqrt{c}]}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

№3

$(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{F}$-измеримая функция $\forall c \in \mathbb{R}$

Доказать утверждения

а) $\underbrace{\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) \geqslant c\}}_{=LHS} = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \left\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > c - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}}_{=RHS}$

- $(LHS \subseteq RHS)$: $\omega_0 \in LHS \Longrightarrow \xi(\omega) \geqslant c \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \xi w_0 > c - \frac{1}{n} \Longrightarrow \omega_0 \in RHS$
- $(RHS \subseteq LHS)$: $\omega_0 \in RHS \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \xi(\omega_0) > c - \frac{1}{n} \Longrightarrow \xi(\omega_0) \geqslant \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(c - \frac{1}{n}\right) = c \Longrightarrow \omega_0 \in LHS$

b) $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = c\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \geqslant c\}}_{\in\mathcal{F}(\text{см.п.a})} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\}}_{\in\mathcal{F}(\text{по опр. }\mathcal{F}\text{-изм.ф-и})} \in \mathcal{F}$

c) $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant c\} = \underbrace{\Omega}_{\in\mathcal{F}} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\}}_{\in\mathcal{F}(\text{по опр. }\mathcal{F}\text{-изм.ф-и})} \in \mathcal{F}$

d) $\{\omega \in \omega : \xi(\omega) < c\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant c\}}_{\in\mathcal{F}(\text{см. п.c})} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = c\}}_{\in\mathcal{F}(\text{см.п.b})}$

№4

$(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{F}$-измеримая функция

Докажите, что $\xi^2(\omega)$ — $\mathcal{F}$-измерима

- $c < 0:\ \{\omega \in \Omega : \xi^2(\omega) > c\} = \Omega \in \mathcal{F}$
- $c \geqslant 0:\ \{\omega \in \Omega : \xi^2(\omega) > c\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < -\sqrt{c}\}}_{\in\mathcal{F}(\text{см. п.3d})} \cup \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > \sqrt{c}\}}_{\in\mathcal{F}(\text{по опр.}\mathcal{F}\text{-изм.ф-и})} \in \mathcal{F}$