Рекомендованная литература

Б.А.Севастьянов. Курс ТВиМС

Д.А.Борзых. Элементраное введение в функан (гл.1)

Программа

Сем1: множества

Сем2: алгебра, σ-алгебры множеств

Сем3: вероятностная мера

Сем4: условная вероятность, формула умножения вер-ти, Байес, полная вер-ть

№1

$A = \{\heartsuit, r\}, B = \{\{\heartsuit\}, \{r\}\}, C = \{\heartsuit, r, \{\heartsuit\}, \{r\}\}, D = \{\heartsuit, r\{\heartsuit\}, \{r\}, \{\heartsuit, r\}\}$

$\#A = 2$

$\#B = 2$

$\#C = 4$

$\#D = 5$

№2

$A = \{\heartsuit, r\}, B = \{\{\heartsuit\}, \{r\}\}, C = \{\heartsuit, r, \{\heartsuit\}, \{r\}\}, D = \{\heartsuit, r\{\heartsuit\}, \{r\}, \{\heartsuit, r\}\}$

Верно ли, что:

$a)$ $A \subseteq B$ — нет, так как $\heartsuit \in A, \heartsuit \notin B$

$b)$ $\{\heartsuit\} \in A$ — нет

$c)$ $\{\heartsuit\} \subseteq A$ — да

$d)$ $\heartsuit \in A$ — да, более того, пункт c равносилен пункту d

$e)$ $\heartsuit \subseteq A$ — нет, так как $\heartsuit$ не является множеством

$f)$ $\{\heartsuit\} \in B$ — да

$g)$ $\{\heartsuit\} \subseteq B$ — нет, так как $\{\heartsuit\}$ - мешочек, а в B нет мешочка с $\heartsuit$

$h)$ $\heartsuit \in B$ — нет

$i)$ $\{\heartsuit\} \in C$ — да

$j)$ $\{\heartsuit\} \subseteq C$ — да

$k)$ $\heartsuit \in C$ — да

$l)$ $A \in C$ — нет, так как в C нет мешка равного A

$m)$ $A \subseteq C$ — да

$n)$ $A \in D$ — да

$o)$ $A \subseteq D$ — да

$p)$ $B \in D$ — нет

$q)$ $B \subseteq D$ — да

№3

a) $\#\varnothing = 0$

b) $\#\{\varnothing\} = 1$

c) $\#\{\varnothing, \varnothing\} = 1$

d) $\#\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = 2$

e) $\#\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}\} = 3$

№4. Формулы де Моргана

- $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$
  $A^c = \Omega \setminus A$
  Пусть $\omega \in LHS \iff (\omega \in A \ or \ \omega \in B) \iff (w \notin A^c \ or \ w \notin B^c) \iff (\omega \notin A^c \cap B^c) \iff (\omega \in (A^c \cap B^c)^c)$
- $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$
  $\omega \in LHS \iff (\omega \in A \ and \ \omega \in B) \iff (\omega \notin A^c \ and \ \omega \notin B^c) \iff (\omega \notin A^C \cap B^c) \iff (\omega \in (A^c \cup B^c)^c)$
- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i^c\right)^c$. I — произвольное множество индексов
  $\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \exists i \in I : \omega \in A_i\}$
  $\bigcap\limits_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \forall i \in I : \omega \in A_i\}$
  $\omega \in LHS \iff (\exists i \in I : \omega \in A_i) \iff (\exists i \in I : \omega \notin A^c) \iff (\omega \notin \bigcap\limits_{i \in A} A_i^c) \Longleftarrow \omega \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i^c\right)^c$

№5

Доказать, что $(A \triangle B) \subseteq ((A \triangle B) \cup (C \triangle B))$

$$\omega \in A \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega \in A \setminus B \\ \omega \in B \setminus A \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega \in A \cap B^c \\ \omega \in B \cap A^c \end{array}\right. \longrightarrow \left[\ \left[\begin{array}{c} \omega \in A \cap B^c \cap C \\ \omega \in A \cap B^c \cap C^c \\ \omega \in B \cap A^c \cap C \\ \omega \in B \cap A^c \cap C^c \end{array}\right.\right.$$

№6

a) TODO

b) $(1;2) = \bigcap\limits_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}\right]$

Включение справо налево очевидно

$x \in LH \to 1 < x < 2$

Пусть $\varepsilon := \min(x-1; 2-x) > 0$

$1 + \frac{1}{n} \mapsto 1, \quad 2 - \frac{1}{n} \mapsto 2$ при $n \mapsto \infty$

Заметим, что $\exists N \in \mathbb{N} : -\varepsilon < 1 + \frac{1}{n} - 1 < \varepsilon; -\varepsilon < 2 - \frac{1}{n} - 2 < \varepsilon$

Из первого следует, что $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \leqslant 1 + (x-1) = x$

Из второго получим, что $2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon \geqslant 2 - (2-x) = x$

Отсюда, получаем, что $x \in \left[1 + \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}\right] \subseteq RHS$

№9

Хотим доказать, что $(0;1)$ — не является счетным

Предположим противное, пусть $(0;1)$ — счетный. Значит, можно пронумеровать каждое число в этом множестве можно пронумеровать

А дальше, смотрите тех коллока-1 по дискре, там тоже самое :)[1]

[1] it's a joke, чуть позже добавлю