

## Consultation for Exam—2 by Alena Zarodnyuk

**2020/2021. Вариант 1. Задача 5.** Про ортогональный линейный оператор  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  известно, что  $\varphi((1, -1, 1)) = (-1, 1, -1)$ ,  $\varphi((2, 0, 1)) = (-2, 1, 0)$  и  $\varphi$  не самосопряжен. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора  $\varphi$  имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу

Пусть  $v = (1, -1, 1)$ , тогда  $\varphi(v) = \lambda v$ , где  $\lambda = -1$ . Это означает, что  $v$  — собственный вектор  $\varphi$ . Тогда, канонический вид матрицы оператора  $\varphi$ :

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть  $e_3 = v$ . Тогда, нужно найти вектора  $e_1, e_2 \in (e_3)^\perp$

Решим ОСЛУ:

$$(1, -1, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = e_3 \oplus (e_3)^\perp$ , тогда любой вектор  $w \in \mathbb{R}^3$  может быть представлен в виде  $w = c_1 + y$ , где  $c_1 = \text{pr}_{e_3} w$

Рассмотрим  $w = (2, 0, 1)$ , тогда  $\text{pr}_{e_3} w = \frac{(w, e_3)}{(e_3, e_3)} e_3 = \frac{3}{3} \cdot e_3 = e_3$

Тогда, вектор  $w = e_3 + y$

Мы знаем как оператор действует на  $w$  и  $e_3$ , тогда пусть  $y = e_1$ ,  $y = w - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда мы сможем определить  $(\varphi(e_1), e_1) = \cos \alpha$ ,  $(\varphi(e_1), e_2) = \sin \alpha$ . В таком случае, остается найти вектор  $e_2$ , ортогональный к  $y, e_3$

$$\varphi(e_1) = \varphi(w - e_3) = \varphi(w) - \varphi(e_3) = (-1, 0, 1)^T$$

Найдем  $e_2$ , как ФСР такой системы<sup>1</sup>:

$$\begin{matrix} e_2 \perp e_1 \\ e_2 \perp e_3 \end{matrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(\tilde{e}_1) = \varphi\left(\frac{e_1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = (\varphi(\tilde{e}_1), \tilde{e}_1) = -\frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = (\varphi(\tilde{e}_2), e_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом, канонический вид матрицы оператора  $\varphi$ :

$$\boxed{\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

А также,  $e = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$  — искомый базис

<sup>1</sup>Вектор  $e_1$  записывается в нижнюю строку матрицы, а вектор  $e_3$  — в верхнюю

**2020/2021. Вариант 1. Задача 6.** Существует ли матрица  $A \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  ранга 2 со следующими свойствами:

1. одно из сингулярных значений матрицы  $A$  равно  $\sqrt{50}$
2. ближайшая к  $A$  по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть  $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Если существует, то предъявите такую матрицу

$$B = u_1 \sigma_1 v_1^T$$

Найдем сингулярное значение матрицы  $B$ , если оно окажется меньше  $\sqrt{50}$ , то требуемой матрицы  $A$  не существует<sup>2</sup>

$$BB^T = \begin{pmatrix} 54 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(BB^T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 54 - \lambda & 18 \\ 18 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 60\lambda = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 60 \implies \sigma_1 = \sqrt{60} > \sqrt{50}$$

Значит, матрица  $A$  представима в виде  $A = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T = B + u_2 \sigma_2 v_2^T$

Найдем SVD матрицы  $B = U \Sigma V^T$

$$\boxed{\text{Для } \lambda = 60:} \begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 18 & -54 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \implies u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Найдем } v_1 = \frac{1}{\sqrt{60}} B^T \cdot u_1 = \frac{1}{10\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Выберем } u_2 \perp u_1. \text{ Пусть это будет } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ }^3$$

$$\text{Выберем } v_2 \perp v_1. \text{ Пусть это будет } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} A &= B + u_2 \sigma_2 v_2^T \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{50} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{2} + 3 & -6 & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2} + 1 & -2 & -\frac{3\sqrt{10}}{2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Если окажется равной  $\sqrt{50}$ , то можно восстановить  $A$

<sup>3</sup>Так как  $u_1$  ортогонален к вектору  $(1, -3)^T$ , то в качестве вектора, ортогонального к  $u_1$ , можно взять  $(1, -3)^T$

**2020/2021. Вариант 1. Задача 7.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 0$$

определяет однополосный гиперboloид в  $\mathbb{R}^3$ . Для каждого найденного значения  $a$  укажите прямоугольную декартову систему координат в  $\mathbb{R}^3$  (выражение старых координат через новые), в которых данное уравнение принимает канонический вид

Приведем к главным осям<sup>4</sup> квадратичную форму  $2y^2 - 3z^2 + 4xz$ . Составим ее матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$

Так как у симметричной матрицы разные собственные значения, то собственные векторы ортогональны

$$\boxed{\text{Для } \lambda = 2 :} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Для } \lambda = -4 :} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\text{Для } \lambda = 1 :} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Мы определили собственные вектора  $(v_3, v_1, v_2)$ , соответствующие собственным значениям  $(1, 2, -4)$

Тогда форма  $Q$  будет такой:

$$Q = (x')^2 + 2(y')^2 - 4(z')^2$$

Матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Добавим к форме линейную часть исходного уравнения и получим<sup>5</sup>:

$$(x')^2 + 2(y')^2 - 4(z')^2 - 12y' + a = 0$$

Теперь про параллельный перенос:

$$\begin{aligned} (x')^2 + 2((y')^2 - 6y' + 9) - 18 - 4(z')^2 + a &= 0 \\ (x')^2 + 2(y' - 3)^2 - 4(z')^2 &= 18 - a \end{aligned}$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} x' = x'' \\ (y' - 3) = y'' \\ z' = z'' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + 3 \\ z' = z'' \end{cases}$$

Получаем

$$(x'')^2 + 2(y'')^2 - 4(z'')^2 = 18 - a \quad (1)$$

Рассмотрим случаи:

<sup>4</sup>Квадратичная форма в главных осях выглядит так:  $Q = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ , где  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  — собственные значения. Для приведения к главным осям находим собственные значения и векторы

<sup>5</sup> $y'$  появился при умножении матрицы перехода на  $(x', y', z')^T$

1. Если  $18 - a > 0$ , то это точно однополосный гиперболоид, т.к. можно поделить уравнение 1 на  $18 - a$  и получить [каноническое уравнение гиперболоида](#)
2. Если  $18 - a = 0$ , то мы получим конус
3. Если  $18 - a < 0$ , то получим [двуполостный гиперболоид](#)

Таким образом, выражение старых координат через новые:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
 &= C \left( \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**2021/2022. Вариант 1. Задача 4.** Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов  $\varphi, \psi$  в  $\mathbb{R}^2$ , для которых оператор  $5\varphi - 2\psi$  диагонализуем и отличен от нуля

Оператор недиагонализуем, если его матрица недиагональна, а характеристический многочлен

$$(k - \lambda)^2 + b > 0, \quad (2)$$

то есть не имеет корней

Пусть есть матрицы операторов

$$5\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad -2\psi = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Чтобы получить выражение 2 для матрицы  $5\varphi$  расположим на главной диагонали одинаковые числа, например 1. Тогда мы получим часть  $(k - \lambda)^2$

На побочной диагонали разместим числа с противоположными знаками

В матрице  $-2\psi$  на главной диагонали расположим 0, а на побочной — числа, противоположные соответствующим числам в матрице  $5\varphi$

$$5\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad -2\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что по отдельности каждая матрица не диагональна, а в сумме они дают диагональную матрицу

Чтобы получить сами операторы  $\varphi, \psi$  просто разделим матрицы на 5 и  $-2$  соответственно

**2021/2022. Вариант 1. Задача 8.** Линейный оператор  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства  $\mathbb{R}^4$ , в котором матрица оператора  $\varphi$  имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda = 3$$

$$\boxed{\text{Для } \lambda = 3 :} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rk } A = 2$$

$d_1 = 2$  — количество жордановых клеток, а также размерность соответствующего ядра

$$B = A - 3E$$

$$d_2 = 4 - \text{rk } (B^2) = 4$$

$$d_2 - d_1 = 2 \implies \text{количество жордановых клеток размером } \geq 2 \text{ равно двум}$$

Это означает, что жордановы клетки имеют размер  $2 \times 2$

Жорданова нормальная форма матрицы:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & & 3 \end{array} \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Применим эту матрицу к базисным векторам

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ f_2 \end{pmatrix}}_{f_1} \xrightarrow{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_2 \\ f_4 \end{pmatrix}}_{f_3} \xrightarrow{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{f_3} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим линейную независимость

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ f_3 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ не выражаются друг через друга } \implies \text{линейно независимы}$$

Значит,  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  — жорданов базис

**2021/2022. Вариант 1. Задача 1.** Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  при условии, что в образе не содержится вектор  $v = (1, 0, -1, 2)$

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = 4$$

$$\dim (\ker \varphi + \operatorname{Im} \varphi) = 4 - \dim (\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi)$$

Пусть  $\dim (\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi) = k$ , тогда  $k \leq 2$

Проверим: если  $k \geq 3$ , тогда

$$\begin{cases} \dim \ker \varphi \geq 3 \\ \dim \operatorname{Im} \varphi \geq 3 \end{cases} \implies \dim (\ker \varphi + \operatorname{Im} \varphi) \geq 6, \text{ чего не может быть}$$

Значит, возможные значения  $k = 0, 1, 2$

Распределим базисные векторы и  $v$  так, чтобы  $\dim (\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi) = 0$

Так как  $v \notin \operatorname{Im} \varphi$ , то  $v \in \ker \varphi$  и

$$v : (1, 0, -1, 2) \longrightarrow (0, 0, 0, 0)$$

Дополним  $v$  векторами  $e_1, e_2, e_3$  до базиса всего пространства

Сами вектора переведем в самих себя

$$e_1 : (1, 0, 0, 0) \longrightarrow (1, 0, 0, 0)$$

$$e_2 : (0, 1, 0, 0) \longrightarrow (0, 1, 0, 0)$$

$$e_3 : (0, 0, 1, 0) \longrightarrow (0, 0, 1, 0)$$

$$v : (1, 0, -1, 2) \longrightarrow (0, 0, 0, 0)$$

Тогда,  $\dim (\ker \varphi \cap \operatorname{Im} \varphi) = 0$ , так как  $e_1, e_2, e_3$  линейно независимы

Последующие случаи рассматриваются аналогично

**Ссылки**

1. [Видео—разбор](#)
2. [Экзамен 2020/2021](#)
3. [Экзамен 2021/2022](#)