

Имеется пространство (множество) элементарных исходов  $\Omega$ . В этом пространстве определяется функция вероятности  $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , где  $\mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра — система подмножеств в  $\Omega$

**Определение.** Дано непустое  $\Omega$ . Система подмножеств  $\mathcal{A}$  в  $\Omega$  называется **алгеброй**, если выполняются такие аксиомы

$$(a1) \quad \Omega \in \mathcal{A}$$

$$(a2) \quad \text{если } A \in \mathcal{A}, \text{ то } A^c \in \mathcal{A}$$

$$(a3) \quad \text{если } A_1, A_2 \in \mathcal{A}, \text{ то } A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$$

**Примечание.**  $\Omega$  называется **единицей** алгебры  $\mathcal{A}$ , то есть если мы определим операцию пересечения множеств, как умножение, то получим, что  $\forall A \in \mathcal{A}: A \cap \Omega = A$

**Пример.** Пусть  $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ . Проверим, являются ли следующие множества алгебрами

- $\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}\}$  — алгебра
- $\mathcal{K}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{\heartsuit, \diamondsuit\}\}$  — не алгебра, так как  $\{\heartsuit, \diamondsuit\} \in \mathcal{K}_2$ , но  $\{\heartsuit, \diamondsuit\}^c = \{\spadesuit, \clubsuit\} \notin \mathcal{K}_2$

**Определение.** Пусть  $\Omega \neq \emptyset$ . Система подмножеств  $\mathcal{F} \subseteq \Omega$  называется  **$\sigma$ -алгеброй**, если

$$(\sigma 1) \quad \Omega \in \mathcal{F}$$

$$(\sigma 2) \quad \text{если } A \in \mathcal{F}, \text{ то } A^c \in \mathcal{F}$$

$$(\sigma 3) \quad A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, \text{ то } \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$$

## Задача №1

Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра, докажите, что  $\emptyset \in \mathcal{A}$

Проверим выполнение условий **(a1)** и **(a2)**:

- $\Omega \in \mathcal{A} - \emptyset \in \Omega \implies \textbf{(a1)}$  выполнено
- $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A} \implies \textbf{(a2)}$  выполнено

**Примечание.** Если  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра, то доказательство аналогично

## Задача №2

Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра и  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$

a) Доказать, что  $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

Применим формулы де Моргана:  $A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c \in \mathcal{A}$

b) Доказать, что  $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

Аналогично, используем де Моргана:  $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap \underbrace{A_2^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$

### Задача №3

Доказать, что всякая  $\sigma$ -алгебра является алгеброй

**Решение.**  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра, то есть для нее выполнены аксиомы  $\sigma 1$ ,  $\sigma 2$ ,  $\sigma 3$ . При этом, аксиомы  $\sigma 1$  и  $\sigma 2$  аналогичны аксиомам **(a1)** и **(a2)**. Значит, осталось проверить, что для  $\mathcal{F}$  выполняется **(a3)**

Пусть  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ . Положим, что  $A_n = \emptyset \in \mathcal{F}$  при  $n \geq 3$ , тогда

$$\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}_{=A_1 \cup A_2} \in \mathcal{F}$$

**Примечание.** Из задач 2 и 3 следует, что если  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра и  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ , то

$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}, \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}, \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{F}$$

### Задача №4

Пусть  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра и  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ . Доказать, что  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$  **Доказательство.**

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n^c}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

**Примечание.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра, тогда в общем случае из условия, что  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  не следует ни одно из условий:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

### Задача №5

$\Omega = \{a, b, c, d\}$ . Какие из множеств являются  $\sigma$ -алгебрами?

a)  $\mathcal{S}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$  — самая бедная  $\sigma$ -алгебра

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}_1$$

b)  $\mathcal{S}_2 = 2^\Omega$  — множество всех подмножеств в множестве  $\Omega$

$$A \in 2^\Omega \iff A \subseteq \Omega \implies \Omega \setminus A \subseteq \Omega \iff \underbrace{\Omega \setminus A}_{=A} \in 2^\Omega$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \Omega \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in 2^\Omega$$

c)  $\mathcal{S}_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$

$\Omega \in \mathcal{S}_3 \implies \mathcal{S}_3$  — не  $\sigma$ -алгебра

d)  $\mathcal{S}_4 = \{\emptyset, \Omega, \{a, b\}\}$

$\{a, b\} \in \mathcal{S}_4$ , но  $\{a, b\}^c \notin \mathcal{S}_4$

## Задача №6

Имеется полуинтервал  $\Omega = (0, 1]$ , тогда

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \bigcup_{k=1}^n (a_k; b_k] : n \in \mathbb{N}, (a_k; b_k] \subseteq \Omega, (a_k; b_k] \cap (a_l; b_l] = \emptyset, l \neq k \right\}$$

Или же, говоря в терминах дизъюнктного объединения:

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \bigsqcup_{k=1}^n (a_k; b_k] \right\}$$

а) Докажите, что  $\mathcal{A}$  — алгебра

$$A \cup B = A \sqcup B \text{ для } A \cap B = \emptyset, \text{ значит } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Пусть у нас имеется  $A$ , определяемое как

$$A = (0.1, 0.25] \cup (0.33, 0.47] \cup (0.9, 1] \in \mathcal{A}$$

Тогда, если мы попытаемся включить  $\{0.1\}$  в  $A$ , получим, что

$$\begin{aligned} A &= [0.1, 0.5] = 0.1 \cup (0.1, 0.5] \notin \mathcal{A} \\ (0.1, 0.1] &= \{x : 0.1 < x \leq 0.1\} = \emptyset \\ (a; b] &= \{x : a < x \leq b\} \implies \Omega = (0, 1] \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

При этом,

$$A^c = (0, 0.1] \sqcup (0.25, 0.33] \sqcup (0.47, 0.9] \in \mathcal{A}$$

б) Приведите пример:  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ , но  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin \mathcal{A}$

$$A_1 = \emptyset \in \mathcal{A}, A_n = \underbrace{\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\in \mathcal{A}}, n \leq 2$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1) \notin \mathcal{A}$$

$\implies \mathcal{A}$  — не  $\sigma$ -алгебра

## Задача №7

$$\Omega = \{a, b, c, d\}, \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c, d\}\}, \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a, b, c\}, \{d\}\}$$

Пункт а является тривиальной проверкой выполнения аксиом, начнем с с

с) Является ли  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$   $\sigma$ -алгеброй?

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{A : A \in \mathcal{F}_1 \text{ и } A \in \mathcal{F}_2\} = \{\emptyset, \Omega\} — \sigma\text{-алгебра}$$

е) Является ли  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$   $\sigma$ -алгеброй?

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{A : A \in \mathcal{F}_1 \text{ или } A \in \mathcal{F}_2\} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{d\}\}$$

$$\{a\}, \{d\} \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

$$\{a\} \cup \{d\} = \{a, d\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

$\implies$  это не  $\sigma$ -алгебра

## Задача №9

Доказать, что пересечение любого семейства  $\sigma$ -алгебр с одной и той же единицей является  $\sigma$ -алгеброй

Пусть у нас имеется  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_j$ , где  $j \in J$  — произвольный набор индексов,  $\forall j \in J \Omega \in \mathcal{F}_j$

Также определим  $\hat{\mathcal{F}} := \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j$

$$\text{a) } \Omega \in \hat{\mathcal{F}} \forall j \in J \implies \Omega \in \mathcal{F}_j \implies \Omega \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j = \hat{\mathcal{F}}$$

b) Пусть  $A \in \hat{\mathcal{F}}$ . Значит,  $\forall j: A \in \mathcal{F}_j \implies \forall j: A^c \in \mathcal{F}_j \implies A^c \in \hat{\mathcal{F}}$ , так как  $\mathcal{F}_j$  —  $\sigma$ -алгебра

c)

$$\begin{aligned} \text{Пусть } A_1, \dots, A_n \in \hat{\mathcal{F}} &\implies \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in J A_n \in \mathcal{F}_j \\ &\implies \forall j \in J (\forall n \in \mathbb{N} A_n \in \mathcal{F}_j) \\ &\implies \forall j \in J \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_j \\ &\implies \bigcup_{j \in J} A_j \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{F}_j = \hat{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть  $\Omega \neq \emptyset$  и  $\mathcal{S}$  — это непустая система подмножеств множества  $\Omega$

**Минимальной  $\sigma$ -алгеброй**, содержащей систему  $\mathcal{S}$  называется такая  $\sigma$ -алгебра  $\sigma(\mathcal{S})$ , что

- $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$
- $\forall \sigma$ -алгебры  $\mathcal{G}$ , которая содержит систему  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}$ ) справедливо, что  $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{G}$

**Определение.** Минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все полуинтервалы вида  $(a; b] \in \mathbb{R}$ , где  $a$  и  $b$ , такие что  $a, b \in (-\infty; +\infty)$  называется **борелевской  $\sigma$ -алгеброй** на числовой прямой и обозначается  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Элементы борелевской  $\sigma$ -алгебры называются **борелевскими множествами**