Содержание

1 Определения

1.1 Что такое предел отображения в точке между двумя метрическими просстранствами?

Пусть заданы метрические пространства E, E' и подмножество $A \subseteq E$. Отображение $f : A \to E'$. Точка $a \in \bar{A}$ - точка замыкания множества A

В случае $a \notin A$, $f(x)$ будет иметь предел $a' \in E'$ при $x \to a(x \in A)$, если отображение $\bar{f} : A \cup \{a\} \to E'$ непрерывно в точке a. Отображение $\bar{f}(x)$ определено вот так:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ a', & x = a \end{cases}$$

В этом случае мы пишем $a' := \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$

В случае $a \in A$ мы пользуемся той же терминологией, наше отображение f должно быть непрерывно в точке a, причем $a' := f(a)$

1.2 Какой критерий непрерывности отображения в точке между двумя метрическими пространствами?

Пусть $f : E \to E'$. Для того, чтобы f было непрерывно в точке $x_0 \in E$ (x_0 - точка замыкания множества $E \setminus \{x_0\}$), необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} f(x)$

1.3 Что такое сходимость в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$?

Если последовательность $(\mathbf{x}_m)$ точек в $\mathbb{R}^n$ сходится в точку $\mathbf{a}$, i.e. $\lim\limits_{m \to \infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{a}$, то она сходится покоординатно, i.e. $\lim_{m \to \infty} x_{km} = a_k$, где $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$

1.4 Что такое произведение метрических пространств и какая там метрика?

Пусть $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ - два метрических пространства, где d_1, d_2 - расстояния в E_1, E_2. Для любой пары точек $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ положим

$$d(x, y) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

Так как:

(1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, z) = \max\{d_1(x_1, z_1), d_2(x_2, z_2)\} \leqslant \max\{d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1), d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2)\} \leqslant$
$\leqslant \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\} + \max\{d_1(y_1, z_1), d_2(y_2, z_2)\} = d(x, y) + d(y, z)$

Мы проверили, что это метрика. Поэтому мы получаем метрическое пространство (E, d), где $E = E_1 \times E_2$

1.5 Что такое нормированное пространство?

Нормированное пространство - векторное пространстово, в котором задана норма

Норма в векторном пространстве E есть отображение (обычно записываемое $x \mapsto \|x\|$) пространства E в $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, обладающее следующими свойствами:

(1) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ - нулевой вектор

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}$

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$ (неравенство треугольника)

1.6 Что такое эквивалентность норм?

Пусть на ветктором пространстве E заданы две нормы $\|?\|_1$ и $\|?\|_2$. Нормы эквивалентны, если $\exists a, b > 0 :$

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1 \quad (\forall x \in E)$$

Эквивалентность норм - это отношение эквивалентности

1.7 Что значит выражение $f = \mathbf{o}(g)$, при $x \to a$?

Говорят, что f - бесконечно малая по сравнению с g при $x \to a$, если $f(x) = h(x)g(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} h(x) = 0$. Используется обозначение $f = \mathbf{o}(g)$ при $x \to a$

В частном случае, $f = \mathbf{o}(1)$ при $x \to a$ означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = 0$ и говорят, что f - бесконечно малая функиия при $x \to a$

1.8 Что такое линейное отображение и как его можно задать?

Линейное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - это такое отображение, что $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Его можно задать матрицей размера $m \times n$

1.9 Что геометрически означает линейное отображение между конечномерными векторными пространствами?

Геометрически $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$ показывает, что образ прямой - прямая линия

1.10 Что значит отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$?

Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ - векторные пространства с евклидовой нормой $\|?\|$. Отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, если существует такое линейное отображение (зависящее от точки a) $\mathrm{d}F_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что:

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + \mathrm{d}F_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$$

1.11 Что геометрически означает то, что отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $a \in \mathbb{R}^n$?

Из дифференцируемости имеем, что существует линейное отображение в точке:

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + \mathrm{d}F_{\mathbf{a}}(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|)$$

А значит, геометрически в этой точке отображение локально линейно

1.12 Что такое дифференциал отображения в точке?

Линейное отображение $\mathrm{d}F_{\mathbf{a}}$ - *дифференциал оотображения* в точке $\mathbf{a}$

1.13 Что такое производная функции от одной переменной?

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 - это предел:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

который принято обозначать $f'\left(x_0\right)$, $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}\left(x_0\right)$. А если x - это параметр времени, который обозначается через t, то производную обозначают $\dot{f}\left(t_0\right)$

1.14 Производная функции то же самое, что дифференциал?

Дифференциал - это линейная часть приращения функции, а производная - это предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении стремящемся к нулю. Это не одно и то же

1.15 Может ли быть так, что функция везде непрерывна, но нигде не дифференцируема? Ответ обоснуйте

Да, например, функция Вейерштрасса:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos \left(b^n \pi x\right)}$$

где $0<a<1, \quad b-$ положительное нечетное целое, а также выполняется $ab>1+\frac{3 \pi}{2}$

По сути функция Вейерштрасса резко меняет свое направление в каждой точке, поэтому она не дифференцируема, и при этом она непрерывна.

1.16 Что такое частная производная?

$$a_i = \lim_{h_i \mapsto 0} \frac{f(\mathbf{x}+h_i \mathbf{e}_i)+f(\mathbf{e})}{h_i}$$

$\mathbf{e}_i$ - базисный вектор

Частная производная - это предел отношения приращения функции по выбранной переменной к приращению этой переменной, при стремлении этого приращения к нулю

1.17 Геометрический смысл частной производной

Геометрически, частная производная даёт производную по направлению одной из координатных осей

1.18 Что такое производная по направлению?

Пусть есть непрерывное отображение $\gamma : (-c, c) \to \mathbb{R}^n$ - кривая в $\mathbb{R}$.

Пусть $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$ и пусть γ дифференцируема в точка $t = 0$ и $\dot{\gamma}(0) = \mathrm{v}$. Наконец, пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - дифференцируемая в точке $\mathbf{x}_0$ функция, тогда число

$$\nabla_{\dot{\gamma}(0)}(f) := \langle \nabla f\left(x_0\right), \gamma(0) \rangle$$

называется произоводной по направлению функции f вдоль вектора $\gamma(0)$

1.19 Что такое градиент функции?

Дифференицал $(\mathrm{d}f)_{\mathbf{x}_0}$ функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x}_0$ называется градиентом функции. Принято обозначение $\nabla_{\mathbf{x}_0} f$ для градиента

1.20 Что значит то, что линейное отображение ограничено?

Линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ограничено, если $\exists K \geqslant 0 : \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \ \|L(\mathbf{v})\| \leqslant K\|\mathbf{v}\|$

1.21 Что такое полином Тейлора для функции?

Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в точке $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, тогда полином вида:

$$T_f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\mathbf{a})}{k!}(x - \mathbf{a})^k$$

называется полиномом Тейлора для функции f

2 Доказательства

2.1 Докажите, что отображение между метрическими пространствами может иметь лишь один предел по множеству A в данной точке $a \in \bar{A}$

Предположим, что отображение имеет два предела $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a'$ и $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b'(a \neq b)$ тогда согласно одному из определений предела:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a' \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in A \text{ и } d(x,a) < \delta \Longrightarrow d'\left(a', f(x)\right) < \varepsilon$$

Тогда, если предела два:

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = a' \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : x \in A$ и $d(x,a) < \delta_1 \Longrightarrow d'\left(a', f(x)\right) < \varepsilon$

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b' \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_2 > 0 : x \in A$ и $d(x,a) < \delta_2 \Longrightarrow d'\left(b', f(x)\right) < \varepsilon$

Однако, по неравенству треугольника $d'\left(a', b'\right) \leqslant d'\left(a', f(x)\right) + d'\left(b', f(x)\right) < 2\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$
$\Longrightarrow d'\left(a', b'\right) = 0 \Longleftrightarrow a' = b'$. Получили противоречие. Q.E.D.

2.2 Докажите критерий непрерывности в точке

(1) $f : E \to E'$ непрерывно в $x_0 \in E$ (x_0 - точка замыкания $E \setminus \{x_0\}$) $\Longleftrightarrow (2) f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} f(x)$

Более подробно:

(1) $\Longrightarrow$ (2): Если f непрерывна и определена в точке x_0, то можно сказать, что есть отображение $f_0 : (E \setminus \{x_0\}) \to E'$, определенное на множестве, из которого выкинули точку замыкания x_0. Положим, что $\overline{f_0}(x) = f(x)$. Это отображение будет иметь предел $\overline{f_0}(x_0) = f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} f_0(x) =$
$= \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} f(x)$

(2)$\Longrightarrow$(1): Если существует предел $f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} f(x)$. Это значит, что по определению предела: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in E$ и $d(x_0, x) < \delta \Longrightarrow d'\left(f(x_0), f(x)\right) < \varepsilon$, значит f непрерывна в точке x_0 по определению непрерывности отображения

2.3 Пусть E, E', E'' - метрические пространства, $A \subseteq E, f : A \to E'$, $g : E' \to E''$ - отображения. Если $\lim\limits_{x \to a, x \in A} f(x) = a'$ и g непрерывно в точке a', то $g(a') = \lim\limits_{x \to a, x \in A} g(f(x))$

Если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ существует в точке a, значит, $\bar{f}$ - непрерывна в точке a и принимает значение a'. А так как g непрерывна в точке a'. По теореме о непрерывности композиции непрерывных отношений: $g(\bar{f}(x))$ - непрерывно.

Обозначим $h = g \circ f$, тогда $\bar{h} = g \circ \bar{f}-$ непрерывно в точке a. Отсюда имеем $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} h(x) = \bar{h}(a)$
$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(f(x)) = g(\bar{f}(a)) = g(a')$

2.4 Для любой точки $a \in \bar{A}$ существует такая последовательность $\{x_n\}$ точек из A, что $a = \lim\limits_{x \to a, x \in A} x_n$

Так как a - точка замыкания множества A, то $\forall$ шар $B(a, r)$ содержит хотя бы одну точку из A

$(B(a,r) \cap A \neq \varnothing)$.

Пусть $r = \frac{1}{n}(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1) \Longrightarrow B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \varnothing$.

По Аксиоме выбора мы можем для каждого n взять $x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Осталось показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Покажем это по критерию Коши. Пусть $n < m : x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right), x_m \in B\left(a, \frac{1}{m}\right)$

$$d\left(x_n, x_m\right) \leqslant d\left(a, x_n\right) + d\left(a, x_m\right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n}$$

Для всех элементов начиная с n-го $x_n, x_{n+1}, \ldots \in B\left(a, \frac{2}{n}\right)$. Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел и сходится к точке a. Q.E.D.

2.5 Пусть $f : A \to E'$ - отображение множества $A \subseteq E$ в метрическое пространство E' и $a \in \bar{A}$. Для того, чтобы f имело предел $a' \in E'$ в точке a по A, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $\{s_n\}$ точек из A, сходящейся к a, последовательность $f\left(s_n\right)$ сходилась к a'

Необходимость

Пусть $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = a'$ и пусть $s : \mathbb{N} \to A \cup \{A\}-$ последовательность $\{s_n\}$. По условию, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Так как существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = a'$, то $\bar{f}-$ непрерывна в точке a. $s' := \bar{f} \circ s : \mathbb{N} \to E'$ $(s'_n = f\left(s_n\right))$. А отсюда по теореме 2.3 о пределе композиции: если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$, а $\bar{f}$ непрерывна в a, то $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(s_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} s'_n = \bar{f}(a) = a' = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$

Достаточность

Докажем от противного, пусть предел у отображения не a'.

Пусть для любой последовательности $\{s_n\}$ точек из A выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$, а значит $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(s_n\right) = a'$. Но $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) \neq a'$

Тогда из определения предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$, начиная с какого-то $N : \forall n > N : d\left(a, s_n\right) < \varepsilon$

Но с другой стороны $a' \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ а значит отображение $\bar{f}$ не является непрерывным в точке a. Тогда существует $\varepsilon > 0$, что для любого номера n найдется такая точка $x_n \in A$, удовлетворяющая условиям $d\left(a, s_n\right) < \frac{1}{n}$ и $d'\left(a', f\left(s_n\right)\right) \geqslant \varepsilon$ (если бы выполнялась непрерыность, то $d'\left(a', f\left(x_n\right)\right) < \varepsilon$ из определения предела). Но тогда последовательность $\{f\left(s_n\right)\}$ не сходится к a', что протиоречит условию

2.6 Если $(\mathbf{x}_n)$ последовательность в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{a}$, то она сходится покоординатно, т.е., $\lim\limits_{m\to\infty} x_{mk} = a_k$, где $\mathbf{a} = \left(a_1, \ldots, a_n\right)^T$

$$\boxed{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|}$$

Из этого неравенства имеем: $\forall k(1 \leqslant k \leqslant n) : |x_{km} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_{km} - a_k\right)^2} = d\left(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}\right)$

$\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{a} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists M : \forall m > M : d\left(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}\right) = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{a}\| < \varepsilon$ (по определению предела последовательности)

$$\iff \forall k(1 \leqslant k \leqslant n) : |x_{km} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_{km} - a_k)^2} = d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x}_{km} - a_k\| < \varepsilon$$

$$\iff \lim_{m\to\infty} x_{km} = a_k (1 \leqslant k \leqslant n) - \text{ сходится покоординатно} \qquad \text{Q.E.D.}$$

2.7 Докажите обобщенную теорему Больцано-Вейерштрасса

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой d, и пусть имеется такая последовательность $\{\mathbf{x}_m\}$, элементы которой целиком лежат в каком-то шаре $B(\mathbf{a}, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда в ней имеется сходящаяся подпоследовательность.

Если $\{\mathbf{x}_m\} \subseteq B(\mathbf{a}, r) \Longrightarrow d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) < r$

Далее из неравенства:

$$|x_{km} - a_k| \leqslant \max_{q \leqslant k \leqslant n} |x_{km} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_{km} - a_k)^2} = d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) < r$$

Так как $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ - фиксированная точка, значит, если мы рассмотрим покоординатно, каждая последовательность (x_{km}) ограничена при каждом m и $1 \leqslant k \leqslant n$. Если последовательность ограничена, то в ней есть сходящаяся подпоследовательность по теореме Больцано-Вейерштрасса, значит и в последовательности (x_{1m}) есть сходящаяся подпоследовательность $\left(x_{1m_{t_1}}\right) \subseteq (x_{1m})$, где t_1 пробегает некоторое множество индексов T_1. Далее мы можем найти такую сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{2m_{t_2}}\right) \subseteq (x_{2m})$, в которой t_2 пробегает множество индексов $T_2 \subseteq T_1$. Продолжая таким образом получим набор подопследовательностей

$$\left\{ \left(x_{1m_{t_1}}\right), \left(x_{2m_{t_2}}\right), \ldots, \left(x_{nm_{t_n}}\right) \right\}$$

где каждый t_k пробегает множество индексов T_k, при этом $T_n \subseteq T_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq T_2 \subseteq T_1$

Тогда пусть все они пробегают одно и то же множество T_n, тогда получаем сходящююся подпоследовательность:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \left(x_{1m_{t_n}}\right) \\ \left(x_{2m_{t_n}}\right) \\ \cdots \\ \left(x_{nm_{t_n}}\right) \end{pmatrix} = \left(\mathbf{x}_{m_{t_n}}\right)$$

Q.E.D.

2.8 Пусть F, E_1, E_2 - метрические пространства, и пусть $f_1 : F \to E_1$, $f_2 : F \to E_2$. Тогда отображение $f : F \to E_1 \times E_2$, $z \mapsto (f_1(z), f_2(z))$ будет непрерывным в точке $z_0 \in F$, если и только если оба отображения f_1 и f_2 непрерывны в точке z_0

Пусть $p_0 = (f_1(z_0), f_2(z_0)$, покажем что

$$f^{-1}(B(p_0, r)) = f_1^{-1}(B(f(z_0), r)) \cap f_2^{-1}(B(f_2(z_0), r))$$

Действительно, $z \in f^{-1}(B(p_0, r)) \iff$

$$
\begin{aligned}
&\iff f(z) \in B(p_0, r) \\
&\iff (f_1(z), f_2(z)) \in B_1(f(z_0), r) \times B_2(f_2(z_0), r) \\
&\iff \{z \in F : f_1(z) \in B_1(f_1(z_0), r)\} \cap \{z \in F_1 : f_2(z) \in B_2(f_2(z_0), r)\} \\
&\iff z \in f_1^{-1}(B(f(z_0), r)) \cap f_2^{-1}(B(f_2(z_0), r))
\end{aligned}
$$

Используя лемму о том, что объединение любого семейства открытых множеств открыто и пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто, заключаем, что прообраз любогго открытого при f открыт, что доказывает предложение. Q.E.D

2.9 Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны

Так как эквивалентность норм есть отношение эквивалентности, то достаточно показать, что любая норма $\|?\|_1$ эквивалентна евклидовой норме $\|?\|$

(1) Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, тогда

$$\|x\|_1 = \|x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\| \leq |x_1| \cdot \|\mathbf{e}_1\|_1 + \cdots + |x_n| \cdot \|\mathbf{e}_n\|_1 ,$$

так как $|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ для каждого $1 \leq i \leq n$, то мы получили

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq (\|\mathbf{e}_1\|_1 + \cdots + \|\mathbf{e}_n\|_1)\, \|\mathbf{x}\|.$$

(2) Будем рассуждать от противного. Пусть не существует такого числа c, что $\|\mathbf{x}\| \leq c\|\mathbf{x}\|_1$. Это значит, что для любого натурального $N \in \mathbb{N}$ найдётся $x_N \neq 0$ такой, что $\|x_N\| > N\,\|x_N\|_1$. С другой стороны, для любого $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\|\lambda x_N\| > N\,\|\lambda x_N\|_1$.

Пусть $\mathbf{y}_N := \frac{\mathbf{x}_N}{\|\mathbf{x}_N\|}$, тогда $\|\mathbf{y}_N\| > N\,\|y_N\|_1$, и так как $\|y_N\| = 1$, получаем, что $\|y_N\|_1 < \frac{1}{N}$. Это значит, что $\lim_{N\to\infty} \|y_N\|_1 = 0$

Далее, мы получаем последовательность $(\mathbf{y}_N)$, для которой $\|y_N\| = 1$, то есть все y_N лежат в шаре $B(0, r) \subseteq (\mathbb{R}^n, \|?\|)\,, r > 1$, т.е. она ограничена по норме $\|?\|$. Тогда по обобщённой теореме Больцано-Вейерштрасса найдётся сходящаяся подпоследовательность $(\mathbf{y}_{N_k})$, $\lim_{N_k\to\infty} \mathbf{y}_{N_k} = \mathbf{a}$

Мы уже показали, что $\|y_{N_k} - \mathbf{a}\|_1 \leq c\,\|y_{N_k} - \mathbf{a}\|$, но это значит, что тогда последовательность (y_{N_k}) также сходится к $\mathbf{a}$ и по норме $\|?\|_1$. С другой стороны, мы уже показали, что $\lim_{N\to\infty} \|y_N\|_1 = 0$, тогда $\|\mathbf{a}\|_1 = 0$, m.e. $\mathbf{a} = 0$. Но $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{y}_{N_k}\| = \|a\|$, тогда $\|\mathbf{a}\| = 1$, потому что все $\|y_{N_k}\| = 1$, а значит, $\mathbf{a} \neq 0$, что даёт противоречие. Q.E.D.

2.10 Докажите, что любое линейное отображение $\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо

Так как $\mathscr{L}$ линейное, то $\forall \mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \mathscr{L}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathscr{L}(\mathbf{x}) + \mathscr{L}(\mathbf{h})$

Полагая, что $\mathrm{d}\mathscr{L}_{\mathbf{x}} := \mathscr{L}$, и так как нулевая функция 0 точно лежит в $o(\|\mathbf{h}\|)$, мы получаем, что линейное отображение дифференцируемо. Q.E.D

2.11 Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке

Нужно показать, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, так как значение $f(x_0)$ определено по определению. Пусть $x := x_0 + h$, тогда если $h \to 0$, то $x_0 \to 0$ и из определения производной в точке следует, что существует предел:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$$

Это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, что означает непрерывность функции. Q.E.D

2.12 Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке

Докажем, что она ограничена сверху (ограниченность снизу доказывается аналогично)

Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ на отрезке $[a, b]$ есть такая точка x_n, что $f(x_n) > n$. Мы получаем ограниченную последовательность (x_n), тогда можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}). Пусть тогда $\lim_{n \to \infty} x_{n_k} = x_0$. Тогда, $a \leq x_0 \leq b$

Далее, так как $f(x)$ непрерывна на всём отрезке, то $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, но тогда $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_{n_k})$, но мы предположили, что $f(x_{n_k}) > n_k$, тогда $\lim_{n \to \infty} f(x_{n_k}) = \infty$, что даёт противоречие

2.13 Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает максимума и минимума в некоторых точках этого отрезка

Рассмотрим множество $\{f(x), x \in [a, b]\} =: \text{Im}(f)$. Очевидно, что оно не пусто. Согласно предыдущей теореме, оно ограничено. Тогда, согласно принципу полноты Вейерштрасса, это множество имеет супремум и инфинум

Покажем, что на отрезке $[a, b]$ есть такая точка x_0, для которой $f(x_0) = M := \sup_{f(x) \in [a,b]}\{f(x)\}$. (Для инфиниума доказательство аналогичное)

Итак, множество $\{f(x), x \in [a, b]\}$ ограничено и не пусто и имеет sup, inf. Тогда из определения супремума следует, что найдутся такие $f(x_n)$, что $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$ для какой-то последовательности (x_n) точек из $[a, b]$. Можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}). Мы можем положить, что эта подпоследовательность сходится к x_0, но тогда $f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_{n_k})$, но так как $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$, то по лемме о зажатой последовательности $f(x_0) = M$. Q.E.D

2.14 Докажите теорему Ферма (о функции, а не великую!)

Theorem. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ — точка экстремума, и $f'(x_0)$ существует. Тогда $f'(x_0) = 0$

Proof. Пусть $f\left(x_0\right) \leqslant f(x)$ для всех $x \in[a, b]$ (аналогично для максимума) Рассмотрим пределы

$$A:=\lim _{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}_{>} > x_0}} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}, \quad B:=\lim _{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}_{<x_0}}} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

Так как существует производная $f'\left(x_0\right):=\lim _{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$, то предел по любому подмножеству $U \subseteq \mathbb{R}$ (для которого $x_0 \in \bar{U}$) должен совпадать, а значит, $A=B$. А так как

$$\begin{aligned}
& \forall x \in[a, b]: f\left(x_0\right) \leqslant f(x) \Longrightarrow f(x)-f\left(x_0\right) \geqslant 0 \\
& A \geqslant 0 \Longleftarrow\left\{\begin{array}{l}
f(x)-f\left(x_0\right) \geqslant 0 \\
x-x_0 \geqslant 0
\end{array}\right. \\
& B \leqslant 0 \Longleftarrow\left\{\begin{array}{l}
f(x)-f\left(x_0\right) \geqslant 0 \\
x-x_0 \leqslant 0
\end{array}\right. \\
& \Longrightarrow A=B=0=f'\left(x_0\right)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.15 Докажите теорему Ролля

Theorem. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причём $f(a)=f(b)$. Тогда существует такая точка $x_0 \in(a, b)$, что $f'\left(x_0\right)=0$

Proof. Согласно теореме Вейештрасса 2.13 $f(x)$ достигает максимума M и минимума m на этом отрезке

(1) Пусть $M=m$, тогда $f(x)=\text{const}$, так как $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in[a, b]$. Тогда в качестве x_0 можно взять любую точку из (a, b)

(2) Пусть $f(x) \neq \text{const}$, тогда найдётся точка $x_0 \in(a, b)$ такая, что $f\left(x_0\right) \neq f(a)=f(b)$. Положим $f(x)>f(a)$. Далее, согласно теореме Вейерштрасса, найдётся точка $x_1 \in[a, b]$, в которой $f\left(x_1\right)$ максимальна. Тогда $x_1 \neq a, b$ и по теореме Ферма мы получаем требуемое. Q.E.D.

2.16 Докажите теорему Лагранжа

Theorem. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда существует такая точка $x_0 \in(a, b)$, что

$$f'\left(x_0\right)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Proof. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) .$$

Эта функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $\varphi(a)=\varphi(b)=f(a)$, тогда по теореме Ролля существует $x_0 \in(a, b)$ такая, что $\varphi'\left(x_0\right)=0$, m.e.

$$\varphi'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

Q.E.D

Эту теорему часто записывают в виде $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$ и называют *формулой конечных приращений или теоремой о среднем значении*

2.17 Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема на каком-то открытом $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ или в фиксированной точке x, то она имеет в этой точке частные производные по всем переменным

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, дифференцируемая на каком-то открытом $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ или в фиксированной точке $\mathbf{x}$. Тогда её дифференциал $(\mathrm{d}f)_{\mathbf{x}}$ в точке $\mathbf{x}$ задаётся матрицей размера $n \times 1$, $(\mathrm{d}f)_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, где все a_i есть функции от $\mathbf{x}$. Наша цель - найти эти a_i. Пусть $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^\top \in \mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, тогда получаем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) &= (\mathrm{d}f)_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + o(\|\mathbf{h}\|) \\ &= a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + o(\|\mathbf{h}\|). \end{aligned}$$

Видно, что a_i не зависит от координат вектора $\mathbf{h}$ кроме h_i т.е. чтобы найти a_i, нам достаточно рассмотреть вектор $\mathbf{h}_i = h_i \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ - базисный вектор. В таком случае, $\|\mathbf{h}_i\| = |h_i|$, и тогда для каждого $1 \le i \le n$ мы получаем

$$f(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}) = a_i h_i + o(|h_i|),$$

таким образом,

$$a_i = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h_i},$$

такое выражение называется частной производной функции по переменной x_i и обозначается либо как $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, либо как f'_{x_i}, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h_i \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h_i},$$

если же мы хотим знать её значение в точке $\mathbf{x}_0$, то получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) := \lim_{h_i \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h_i \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{h_i}$$

2.18 Пусть функция f имеет конечные частные производные по всем координатам в окрестности точки a. Если они непрерывны в точке a, то f дифференцируема в этой точке

Пусть $\mathscr{U}$ - окрестность точки a, и пусть $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in \mathscr{U}$. Согласно формуле конечных приращений, мы имеем

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a} + \mathbf{v}_k) \cdot h_k$$

где $\mathbf{a} + \mathbf{v}_k \in \mathscr{U}, 1 \le k \le n$. По условию, все частные производные непрерывны и конечны, тогда для любого $\varepsilon > 0$ из $\|\mathbf{v}_k\| < \delta$ следует $\left|f'_{x_k}(\mathbf{a} + \mathbf{v}_k) - f'_{x_k}(\mathbf{a})\right| < \varepsilon$. Другими словами, можно сказать, что

$$f'_{x_k}(\mathbf{a}+\mathbf{v}_k) = f'_{x_k}(\mathbf{a}) + \varepsilon_k(\mathbf{h})$$

где $\varepsilon_k(\mathbf{h}) \to 0$ когда $\mathbf{h} \to 0$. Таким образом, получаем

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} \left(f'_{x_k}(\mathbf{a}) + \varepsilon_k(\mathbf{h})\right) h_k = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a}) h_k + \alpha(\mathbf{h}),$$

где $\alpha(\mathbf{h}) := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\mathbf{h}) h_k$. Ясно, что

$$\frac{\alpha(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\mathbf{h}) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}$$

Наконец по определению сходимости,

$$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \geq \max_{1\leq i\leq n} |h_i|,$$

тогда

$$\frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} < \frac{h_i}{\max_{1\leq i\leq n}|h_i|} \leq \frac{\max_{1\leq i\leq n}|h_i|}{\max_{1\leq i\leq n}|h_i|} = 1$$

т.е. все дроби $\frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}$ ограничены. Далее, так как $\varepsilon_k(\mathbf{h})$ бесконечно малые, мы получаем

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{a}) h_k + o(\|\mathbf{h}\|)$$

а это и означает, что f дифференцируема. Q.E.D.

2.19 Пусть $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - линейное отображение. Тогда следующие утверждения равносильны: (1) L - непрерывно (2) L - непрерывно в нуле (3) Существует такое $C > 0$, что $\|L(\mathbf{v})| \leq C| \mid \mathbf{v}\|$ для любого $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

(1) $\Longrightarrow$ (2). Это просто следует из того, что если L непрерывно, то оно непрерывно во всех точках $\mathbb{R}$, в частности и в нуле тоже

(2) $\Longrightarrow$ (3). Если L непрерывно в нуле, то это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно всегда найти такое $\delta > 0$, что из $\|\mathbf{h}\| < \delta$ будет следовать $\|L(\mathbf{h})\| < \varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1$, тогда мы всегда найдём такой $\delta > 0$, что если $\|\mathbf{h}\| < \delta$, то $\|L(\mathbf{h})\| < 1$. Зафиксируем такое δ. Возьмём теперь произвольный ненулевой вектор $^{\|}\mathbf{v}$, тогда имеем

$$\begin{aligned} \|L(\mathbf{v})\| &= \left\|\frac{2}{\delta}\right\| \mathbf{v} \left\| L\left(\frac{\delta \mathbf{v}}{2\|\mathbf{v}\|}\right)\right\| \\ &= \frac{2}{\delta}\|\mathbf{v}\| \cdot \left\| L\left(\frac{\delta \mathbf{v}}{2\|\mathbf{v}\|}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

потому что

$$\left\| \frac{\delta \mathbf{v}}{2\|\mathbf{v}\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

и так как δ фиксировано, мы получаем требуемое

(3) $\Longrightarrow$ (1). Имеем

$$\|L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{u})\| = \|L(\mathbf{v} - \mathbf{u})\| \leq K\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

тогда если $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| < \delta$, то $\|L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{u})\| < K\delta$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$, если мы положим, что $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{K}$, то мы и получаем непрерывность L. Q.E.D

2.20 Любое линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывно

Пусть L задаётся матрицей $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$, тогда

$$L(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = (u_1, \dots, u_m)^\top =: \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m,$$

тогда

$$\begin{aligned}
\|L(\mathbf{v})\| &= \|\mathbf{u}\| \\
&= \sqrt{(a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n)^2 + \dots + (a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n)^2} \\
&\leq \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} |a_{k1}v_1 + \dots + a_{kn}v_n| \\
&\leq \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} (|a_{k1}| \cdot |v_1| + \dots + |a_{kn}| \cdot |v_n|) \\
&\leq \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} (|a_{k1}| \cdot \|\mathbf{v}\| + \dots + |a_{kn}| \cdot \|\mathbf{v}\|) \\
&= \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} (|a_{k1}| + \dots + |a_{kn}|) \cdot \|\mathbf{v}\| \\
&= K\|\mathbf{v}\|,
\end{aligned}$$

где $K := \sqrt{m} \max_{1 \leq k \leq m} (|a_{k1}| + \dots + |a_{kn}|)$, тогда по предыдущем пункту оно непрерывно.