

# Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 9 октября 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману</b>	<b>2</b>
1.1	Брус. Мера бруса . . . . .	2
1.2	Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$ . . . . .	2
1.3	Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения . . . . .	2
1.4	Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману . . . . .	3
1.5	Пример константной функции . . . . .	3
1.6	Неинтегрируемая функция . . . . .	3
1.7	Вычисление многомерного интеграла . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера</b>	<b>5</b>
2.1	Свойства кратных интегралов . . . . .	5
2.2	Необходимое условие интегрирования. . . . .	6
2.3	Множество меры нуль по Лебегу . . . . .	6
2.4	Свойства множества меры нуль по Лебегу . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Топология в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>8</b>
3.1	Критерий замкнутости . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Компакты в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>10</b>
4.1	Замкнутый брус — компакт . . . . .	10
4.2	Критерий компактности . . . . .	10

# 1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

## 1.1 Брус. Мера бруса

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в  $\mathbb{R}^n$  — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq q_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Примечание.**  $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$ , где  $\{ \}$  может быть отрезком, интервалом и т.д.

**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

## 1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:**  $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$ , где  $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть  $I, I_1, \dots, I_k$  — брусы

Тогда, если  $\forall i, j, I_i, I_j$  не имеют общих внутренних точек, и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть  $I$  — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть  $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ , тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

## 1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

**Определение.**  $I$  — замкнутый, невырожденный брус и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , где  $I_i$  попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор  $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^k$  называется разбиением бруса  $I$

**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leq i \leq k} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

**Определение.** Масштаб разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  — число  $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k}$

**Определение.** Пусть  $\forall I_i$  выбрана точка  $\xi_i \in I_i$ . Тогда, набор  $\xi = \{\xi\}_{i=1}^k$  будем называть **отмеченными точками**

**Определение.** Размеченное разбиение — пара  $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть  $I$  — невырожденный, замкнутый брус, функция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  определена на  $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции  $f$  на  $(\mathbb{T}, \xi)$  — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

**Определение.** Функция  $f$  интегрируема (по Риману) на замкнутом бресе  $I$  ( $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение:  $f \in \mathcal{R}(I)$

## 1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция  $f = \text{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ = \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|$$

## 1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус  $I = [0, 1]^n$ , а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Доказательство.**  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \in \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время,  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

## 1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

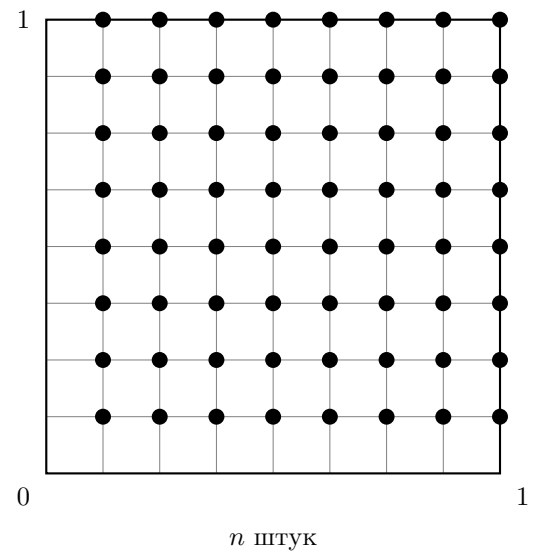
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны  $\frac{1}{n}$ , выбирая в качестве точек  $\xi_i$  верхние правые вершины ячеек

Имеется функция  $f = xy$ ,  $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \cdot j \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{n(n+1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\end{aligned}$$

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$



## 2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

### 2.1 Свойства кратных интегралов

#### 1. Линейность.

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

**Доказательство.**

(a)

$$f \in \mathcal{R}(I) : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I f dx| =: |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

(b) По определению:

$$g \in \mathcal{R}(I) : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \\ |\sigma(g, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I g dx| =: |\sigma_g - A_g| < \varepsilon$$

(c) Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда (a) и (b) верно для  $\delta \implies$

$$|\sigma_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}| = |\alpha \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$$

□

#### 2. Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); \quad f|_I \leq g|_I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

**Доказательство.**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для  $g \in \mathcal{R}(I)$ , тогда:

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies A_f \leq A_g$$

□

#### 3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

**Доказательство.** По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ Ограничена на } I \\ \implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f|$$

Тогда,

$$-\int_I \sup |f| dx \leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f| |I| \leq \int_I f dx \leq \sup_I |f| |I|$$

□

## 2.2 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть  $I$  — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

**Доказательство.** От противного.

1. Пусть  $f \in \mathcal{R}(I)$ , тогда

$$\exists \underbrace{A_f}_{\text{конечное}} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Значит, для  $\varepsilon = 1$  это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f - \text{ограничена}$$

2. Пусть  $f$  — неограничена на  $I$ , но  $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K \exists i_0 : f$  неограничена на  $I_{i_0}$ .  
Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |I_i| + f(\xi_{i_0}) |I_{i_0}|$$

Тогда,  $\sigma_f$  может принимать любые сколь угодно большие (малые) значения, в зависимости от  $I_{i_0}$   
 $\implies$  **противоречие**

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

## 2.3 Множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов  $\{I_i\}$  и выполняются:

1.  $M \subset \bigcup_i I_i$  и
2.  $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

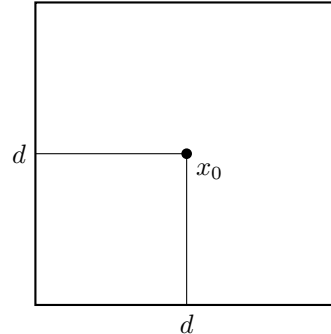
**Пример:**  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  — множество меры нуль по Лебегу в  $\mathbb{R}^n$

**Доказательство.** Пусть  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ . Покроем точку замкнутым брусом, причем

$$I = [x_{01} - d, x_{01} + d] \times \dots \times [x_{0n} - d, x_{0n} + d]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I : |I| = (2d)^n < \varepsilon \implies d < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}$$

Значит, точка является множеством меры нуль по Лебегу



## 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры 0 можно использовать *открытые* брусы

**Доказательство.** Пусть  $\{I_i\}$  — открытые брусы  $M \subset \bigcup_i I_i$ , то есть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — множество меры 0 по Лебегу

Пусть  $\{\bar{I}_i\}$  — замкнутые брусы  $I_i$ .

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Пусть  $\{I_i\}$  — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \dots \times [a_n^i, b_n^i], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Пусть

$$D_i = \left( \frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i) \right) \times \dots \times \left( \frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i) \right)$$

$$\Rightarrow V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon$$

□

2.  $M$  — множество меры нуль,  $L \subset M \Rightarrow L$  — множество меры нуль

**Доказательство.**  $L \subset M$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  не более чем счетное  $\{I_i\}$ :

$$L \subset M \subset \bigcup_i I_i \text{ и } \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

по транзитивности это верно и для  $L$

□

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль

**Доказательство.** Пусть  $\{M_k\}_{k=1}^\infty$  — счетное,<sup>1</sup> так как  $\forall i M_k$  — множество меры нуль, то  $\forall i, \forall \varepsilon_i \exists$  не более чем счетное  $\{I_i^k\}$ :

$$M_k \subset \bigcup_i I_i^k \text{ и } \sum_i |I_i^k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} \forall \varepsilon_k > 0$$

Рассмотрим  $M = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$ , тогда  $M \subset \bigcup_{i,k} I_i^k$  и

$$\sum_{i,k} \underbrace{|I_i^k|}_{>0} < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

□

• **Пример.** Пусть  $\{M_i\}_{i=1}^N$  — конечный набор

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1} \varepsilon < \varepsilon$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

<sup>1</sup>Для конечного доказательства тривиально

### 3 Топология в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Пусть имеется  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внутренней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внешней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

**Пример.**  $M = [0; 1)$ . тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *граничной* точкой  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

**Обозначение.**  $\partial M$  — множество всех граничных точек  $M$

**Пример.**  $M = [0; 1) \implies x = 0; 1$  — граничные

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *изолированной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

**Пример.**  $M = [0; 1] \cup \{3\} \implies x = 3$  — изолированная

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *предельной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *точкой прикосновения*  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Точки прикосновения = изолированные точки  $\oplus$  предельные точки

**Определение.** Множество всех точек прикосновения  $M$  называется *замыканием*  $M$  и обозначается как  $\overline{M}$

**Пример.**  $M = (0; 1) \cup (1; 2] \implies \overline{M} = [0; 2]$

**Пример.**  $M = \{x \in [0; 1] : x \in \mathbb{Q}\} \implies \overline{M} = [0; 1]$

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *открытым*, если все его точки внутренние

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *замкнутым*, если  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто

**Пример.**  $\begin{cases} (0; 1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

**Определение.** Множество  $K \in \mathbb{R}^n$  называется *компактом*, если из  $\forall$  его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

**Примечание.** Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то  $K$  — не компакт

**Пример.** Пусть  $M = (0, 1)$  покроем  $\{A_n = (0; 1 - \frac{1}{n})\}_{n=1}^\infty$

При  $n \rightarrow \infty$   $M \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ , но  $\forall$  фиксированного  $N$ :  $M \not\subset \bigcup_{n=1}^N A_n \implies$  не компакт

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$



### 3.1 Критерий замкнутости

**Теорема.**  $M$  — замкнуто  $\iff M$  содержит **все** свои предельные точки

**Доказательство.** Докажем необходимость и достаточность

1. (*Необходимость*) Докажем  $\implies$  от противного

- Пусть  $x_0$  — предельная для  $M$  и  $x_0 \notin M$ . Тогда,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$  и  $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию  $M$  — замкнуто, то есть  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто  $\implies$  все его точки внутренние и  $\exists r > 0$ :

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \implies \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию  $\implies M$  содержит все свои предельные точки □

2. (*Достаточность*) Докажем  $\impliedby$

Пусть  $y_0$  — не является предельной для  $M$ , то есть  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \implies \exists r > 0$ :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \implies B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\implies \mathbb{R}^n \setminus M$  — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными  $\implies M$  — замкнуто по определению □

## 4 Компакты в $\mathbb{R}^n$

### 4.1 Замкнутый брус — компакт

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус  $\implies I$  — компакт

**Доказательство.** Пойдем от противного

Пусть  $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что  $I$  — не компакт. Значит, существует его покрытие  $\{A_\alpha\}$  — открытые множества, такие что  $I \subset \{A_\alpha\}$ , не допускающее выделения конечного подпокрытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда,  $\exists I_1$ , такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе,  $I$  — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусков:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку  $a = (a_1, \dots, a_n)$

При этом,  $a \in I_i \forall i$  или  $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

4.  $a \in I \implies a \in \bigcup A_\alpha \implies \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

5. Мы знаем, что  $d(I_i) \mapsto 0$  при  $i \mapsto \infty$ . Тогда,

$$\exists N : \forall i > N \ I_i \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$

Получается, что  $\forall i > N \ I_i$  покрывается одним лишь  $A_{\alpha_0}$  из системы  $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое  $I_i$  не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что  $I_i \in A_{\alpha_0} \forall i > N$

**Примечание.** Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

### 4.2 Критерий компактности

**Теорема.**  $K \subset \mathbb{R}^n$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  замкнуто и ограничено

**Доказательство.** Докажем необходимость ( $\implies$ )

- *Ограниченность.*  $K$  — компакт, значит можно выбрать покрытие  $\{B_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  — открытые шары

Тогда,  $\exists m_0 : K \subset \bigcup_{m=1}^{m_0} B_m(0) \implies K \subset B_{m_0}(0) \implies$  по определению  $K$  — ограничено

- *Замкнутость.* Пойдем от противного.  $K$  — компакт, тогда возьмем  $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(x)\}_{x \in K}$  — покрытие открытыми шарами, где  $\delta(x) = \rho(x, x_0)$ .  $x_0$  — предельная точка, которая  $\notin K$  (или же  $\in \mathbb{R}^n \setminus K$ )

Так как  $K$  — компакт,  $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть  $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$ , тогда

$$\begin{aligned} B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \emptyset &\implies B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K \\ &\implies \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset \end{aligned}$$

Значит,  $x_0$  не является предельной точкой  $K$ , что противоречит нашему предположению

**Доказательство.** Докажем достаточность

$K$  — замкнуто и ограничено  $\implies r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$  — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n \supset K$$

Пусть  $A_\alpha$  — произвольное покрытие открытыми множествами для  $K$ . Тогда,  $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$ . Так как  $I$  — компакт, то  $\exists$  конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит,  $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$  — конечное и  $\{A_\alpha\}$  — произвольное, тогда  $K$  — компакт по определению  $\square$