Математический анализ. Коллоквиум—4

Психику-то я вам поломал на всю жизнь

Виктор Евгеньевич Лопаткин

Содержание

1 Определения

1.1 Что такое знакочередующийся ряд?

Знакочередующийся ряд — это ряд (a_n), элементы которого попеременно принимают значения противоположных знаков, т.е. если $a_n > 0$ (соотвественно, $a_n < 0$), то $a_{n+1} < 0$ (соответственно, $a_{n+1} > 0$). Элементы таких рядов можно записать либо как $a_n = (-1)^n |a_n|$, либо как $a_n = (-1)^{n+1}|a_n|$

1.2 Что такое абсолютно сходящийся ряд?

Ряд (x_n) называется **абсолютно сходящимся**, если ряд $(|x_n|)$ сходится. Если ряд (x_n) сходится, а ряд $(|x_n|)$ расходится, то говорят, что **ряд** (x_n) **сходится условно**

1.3 Что такое безусловно сходящийся ряд?

Говорят, что ряд сходится **безусловно**, если он сходится и любая перестановка его элементов не нарушает его сходимости

1.4 Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, что значит выражение $\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$?

Если f — дифференцируема в x_0, тогда верно, что $\exists\ (\mathrm{d}f)_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + (\mathrm{d}f)_{x_0}(h) + o(|h|),\ h \to 0$$

$(\mathrm{d}f)_{x_0}$ — дифференциал функции f в точке x_0. Имеем равенство

$$(\mathrm{d}f)_{x_0}(h) := f'(x_0) \cdot h$$

Рассмотрим функцию $y(x) = x$, тогда

$$(\mathrm{d}x)_{x_0}(h) = (x'(x_0)) \cdot h \iff (\mathrm{d}f)_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h = f'(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)_{x_0}(h)\ (\text{т.к. } x' = 1)$$
$$\iff \boxed{\mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x}$$

1.5 Почему градиент это не вектор, а ковектор (=функционал)?

Покажем, что градиент функции — элемент двойственного пространства, т.е. градиент — это ковектор (=функционал)

Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ с базисом $\mathbb{e} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, тогда любой вектор $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ записывается в виде $\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + \cdots + h_n\mathbf{e}_n$

Рассмотрим координатные функции

$$x_1, \ldots, x_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x_i(\mathbf{h}) := h_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Тогда, их дифференциалы $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ — это в точности базис двойственного пространства $(\mathbb{R}^n)^*$, так как

$$(\mathrm{d}x_i)(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тогда, если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция в точке $\mathbf{a}$, то её дифференциал (=градиент) можно записать так:

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{a}} f = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{d}x_1 + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{d}x_n}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathbf{a}} f)(\mathbf{h}) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{d}x_1(\mathbf{h}) + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{a}} \cdot \mathrm{d}x_n(\mathbf{h}) \\ &= \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{a}} \cdot h_1 + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\mathbf{a}} \cdot h_n,\end{aligned}$$

что и есть определение дифференциала фукнции.

1.6 Что такое линейная дифференциальная форма?

Выражение вида

$$f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n,$$

где $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функции, называется **линейной дифференциальной формой** или 1-формой

Обычно они обозначаются через ω, а пространство всех линейных дифференциальных форм на $\mathbb{R}^n$ обозначается как $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$

1.7 Что значит, что функция $F(x)$ это интеграл для функции $f(x)$ на каком-то промежутке?

Функция $F(x)$ в каком-то промежутке называется **интегралом** (=первообразной) для функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad \mathrm{d}F = f(x)\mathrm{d}x$$

Тоже определдение словами: $F(x)$ — **интеграл** для функции $f(x)$, если во всём промежутке $f(x)$ является производной для функции $F(x)$ или, что тоже, $f(x)\mathrm{d}x$ есть линейная дифференциальная форма, равная дифференциалу фукнции $F(x)$

1.8 Что такое неопределённый интеграл?

Неопределённый интеграл — выражение $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, представляющее собой **общий вид** функции, которая имеет производную $f(x)$, или её дифференциал есть 1-форма $f(x)\mathrm{d}x$

Обозначается символом

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

$f(x)$ — подынтегральная функция

1.9 Что такое рациональная функция от одной переменной?

Рациональная функция от одной переменной — это класс эквивалентности дробей вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ — полиномы, $Q(x) \neq 0$, и две такие дроби эквивалентны

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{A(x)}{B(x)} \iff P(x)B(x) = A(x)Q(x)$$

1.10 Что называют правильной и простой дробями в поле $\mathbb{R}(x)$?

Friendly reminder. $\mathbb{R}(x)$ — поле рациональных функций, то есть множество всех рациональных функций

Правильная дробь — дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, если $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$

Простыми дробями в поле $\mathbb{R}(x)$ называются выражения вида

1. $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$, где $A, \alpha \in \mathbb{R}$, и $k \geqslant 1$
2. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$, где $A, B, a, b \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ и предполагается, что x^2+ax+b не имеет вещественных корней

1.11 Что такое разбиение промежутка и что значит, что одно выражение тоньше другого? (тонкота!)

Разбиение промежутка — конечное множество $\lambda(I)$ промежутков содержащихся в промежутке I, при этом любой $x \in I$ принадлежит одному и только одному промежутку из λ

Пусть I — промежуток, и пусть $\lambda(I)$, $\lambda'(I)$ — два его разбиения. Говорят, что разбиение $\lambda'(I)$ **тоньше**, чем $\lambda(I)$, если для каждого $J' \in \lambda'(I)$ найдётся такой $J \in \lambda(I)$, что $J' \subseteq J$

1.12 Что такое ступенчатая функция? Как она выражается через характеристические функции?

Ступенчатая функция

Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$, и пусть дана функция $f : A \to \mathbb{R}$. Говорят, что f **постоянная функция**, если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \alpha$ для всех $x \in A$. Если $B \subseteq A$, то говорят, что f **постоянная на** B, если существует такое $\beta \in \mathbb{R}$, что $f(y) = \beta$ для всех $y \in B$

Пусть дан промежуток $I \subsetneq \mathbb{R}$, и пусть дана функция $f : I \to \mathbb{R}$, и пусть $\lambda(I)$ — какое-то разбиение промежутка I. Говорят, что функция f — **ступенчатая** на I относительно $\lambda(I)$, если для каждого $J \in \lambda(I)$, f является *постоянной* на J

Выражение ступенчатой функции через характеристические

Характеристическая функция множества $A \subseteq X$ — функция $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ такая что

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — ступенчатая функция на промежутке I и $\lambda(I)$ — соответствующее разбиение промежутка, тогда

$$\boxed{f = \sum_{A \in \lambda(I)} f(A) \cdot \chi_A}$$

1.13 Что такое интеграл от ступенчатой функции на промежутке?

Пусть $I \subsetneq \mathbb{R}$ — промежуток, $\lambda(I)$ — разбиение промежутка I и пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — ступенчатая функция относительно этого разбиения, т.е., $f = \sum\limits_{A \in \lambda(I)} f(A) \cdot \chi_A$

Интеграл на промежутке I **ступенчатой функции** $f : I \to \mathbb{R}$ относительно разбиения $\lambda(I)$ есть

$$\boxed{\int_{\lambda(I)} f := \sum_{A \in \lambda(I)} f(A) \cdot |A|}$$

1.14 Что такое верхний и нижний интегралы от ограниченной функции на промежутке?

Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция на промежутке $I \subsetneq \mathbb{R}$

Верхний интеграл функции f **на промежутке** I есть

$$\sup \int_I f := \inf \left\{ \int_I g,\, g \in M_{p.c}(f) \right\}$$

Нижний интеграл функции f **на промежутке** I есть

$$\inf \int_I f := \sup \left\{ \int_I g,\, g \in m_{p.c}(f) \right\}$$

1.15 Что такое интеграл Римана от ограниченной функции на промежутке?

Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция на ограниченном промежутке $I \subsetneq \mathbb{R}$, тогда если

$$\inf \int_I f = \sup \int_I f,$$

то **интеграл Римана от ограниченной функции на промежутке** определяется так

$$\boxed{\int_I f := \inf \int_I f = \sup \int_I f}$$

1.16 Что такое верхняя и нижняя сумма Римана для ограниченной функции на промежутке?

Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция на промежутке $I \subsetneq \mathbb{R}$ и $\lambda(I)$ — некоторое разбиение промежутка I, тогда верхняя и нижняя суммы Римана:

$$U(f, \lambda(I)) := \sum_{\substack{A \in \lambda(I) \\ A \neq \varnothing}} \sup_{x \in A} f(x) \cdot |A|$$

$$L(f, \lambda(I)) := \sum_{\substack{A \in \lambda(I) \\ A \neq \varnothing}} \inf_{x \in A} f(x) \cdot |A|$$

2 Теоремы

2.1 Докажите признак Лейбница для знакочередующихся рядов

Формулировка. Пусть (a_n) — знакочередующийся ряд, для которого выполняются следующие условия:

1. $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$ почти для всех n
2. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Тогда ряд (a_n) сходится

Доказательство. Воспользовавшись леммой о сходимости/расходимости почти похожих рядов, мы можем считать, что $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$ для всех n. Для удобства положим, что первый элемент ряда — это a_0, т.е. $n \geqslant 0$. Рассмотрим частичную сумму S_{2n+1}, имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_{2n+1} &= |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_{2n}| - |a_{2n+1}| \\ &= |a_0| - \big(|a_1| - |a_2|\big) - \big(|a_3| - |a_4|\big) - \cdots - \big(|a_{2n-1}| - |a_{2n}|\big) - |a_{2n+1}|,\end{aligned}$$

так как $|a_n| \geqslant |a_{n+1}|$, то каждая скобка положительна, это значит, что $\mathsf{S}_{2n+1} \leqslant |a_0|$, т.е. последовательность (S_{2n+1}) ограничена сверху

С другой стороны, мы можем записать

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_{2n+1} &= |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + \cdots + |a_{2n-2}| - |a_{2n-1}| + |a_{2n}| - |a_{2n+1}| \\ &= \big(|a_0| - |a_1|\big) + \big(|a_2| - |a_3|\big) + \cdots + \big(|a_{2n-2}| - |a_{2n-1}|\big) + \big(|a_{2n}| - |a_{2n+1}|\big) \\ &= \mathsf{S}_{2n-1} + \big(|a_{2n}| - |a_{2n+1}|\big),\end{aligned}$$

и так как $|a_{2n}| \geqslant |a_{2n+1}|$, то $\mathsf{S}_{2n+1} \geqslant \mathsf{S}_{2n-1}$, т.е. она не убывает

Итак, последовательность (S_{2n+1}) ограничена сверху и не убывает, тогда по теореме Вейерштрасса у неё есть предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{S}_{2n+1} = \mathsf{S} \leqslant |a_0|$

Наконец, мы также можем записать

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_{2n+1} &= |a_0| - |a_1| + |a_2| - |a_3| + |a_{2n}| - |a_{2n+1}| \\ &= \mathsf{S}_{2n} - |a_{2n+1}|,\end{aligned}$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{S}_{2n+1} = \mathsf{S}$ и по условию $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{2n+1}| = 0$, то по арифметике пределов

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{S}_{2n} = \lim_{n\to\infty} (\mathsf{S}_{2n+1} + |a_{2n+1}|) = \mathsf{S} + 0 = \mathsf{S}.$$

Итак, мы показали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{S}_n = \mathsf{S}$, что и означает сходимость ряда □

2.2 Пусть дан ряд (x_n). Если сходится ряд $(|x_n|)$, то ряд (x_n) тоже сходится

Пусть (S_n) — последовательность частичных сумм ряда (x_n), а (A_n) — последовательность частичных сумм для ряда $(|x_n|)$

Так как ряд $(|x_n|)$ сходится, то по критерию Коши для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что для всех $n \geqslant N$ и $p \geqslant 1$,

$$|\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n| = |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{S}_{n+p} - \mathsf{S}_n &= |x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}| \\ &\leqslant |x_{n+1}| + \cdots + |x_{n+p}| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

что согласно критерию Коши означает сходимость ряда (x_n) □

2.3 Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его элементов абсолютная сходимость полученного нового ряда не нарушается и более того, его сумма остаётся прежней

Конструкция 2.3.1

Пусть дан ряд (x_n), положим

$$x_n^+ := \begin{cases} x_n, & \text{если } x_n \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x_n < 0, \end{cases} \quad x_n^- := \begin{cases} -x_n, & \text{если } x_n \leqslant 0 \\ 0, & \text{если } x_n > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Предложение 2.3.2

Пусть ряд (x_n) сходится абсолютно, тогда ряды $(x_n^+), (x_n^-)$ сходятся и более того, если $\mathsf{S}, \mathsf{S}^+, \mathsf{S}^-$ — суммы рядов $(x_n), (x_n^+), (x_n^-)$ соответственно, то

$$\mathsf{S} = \mathsf{S}^+ - \mathsf{S}^- \tag{2}$$

Доказательство Предложения 2.3.2

Во-первых, из леммы 2.2 следует корректность утверждения, ибо ряд (x_n) сходится, а тогда последовательность его частичных сумм (S_n) имеет предел S.

Во-вторых, так как $x_n^+ \leq |x_n|$ и $x_n^- \leq |x_n|$, то по признаку сравнения рядов ряды (x_n^+), (x_n^-) сходятся, а значит, сходятся последовательности их частичных сумм (S_n^+), (S_n^-) к S^+, S^- соответственно.

Далее, так как из конструкции 1 следует, что $x_n = x_n^+ - x_n^-$, но тогда для каждого n получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_n &= x_1 + \cdots + x_n \\ &= x_1^+ - x_1^- + \cdots + x_n^+ - x_n^- \\ &= \left(x_1^+ + \cdots + x_n^+\right) - \left(x_1^- + \cdots + x_n^-\right) \\ &= \mathsf{S}_n^+ - \mathsf{S}_n^-. \end{aligned}$$

Тогда по арифметике пределов,

$$\mathsf{S} = \lim_{n\to\infty} \mathsf{S}_n = \lim_{n\to\infty} (\mathsf{S}_n^+ - \mathsf{S}_n^-) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{S}_n^+ - \lim_{n\to\infty} \mathsf{S}_n^- = \mathsf{S}^+ - \mathsf{S}^-$$

□

Доказательство самой теоремы

Пусть ряд (x_n) сходится абсолютно, рассмотрим ряды (x_n^+), (x_n^-) (конструкция 1), очевидно, что $x_n = x_n^+ - x_n^-$ для всех n. Так как ряд (x_n) сходится абсолютно, то ввиду $x_n^+ \leq |x_n|$, $x_n^- \leq |x_n^-|$ и признака сравнения рядов ряды (x_n^+), (x_n^-) тоже сходятся.

Пусть ряд, полученный после перестановки исходного ряда, имеет вид (y_n), рассмотрим также ряды (y_n^+), (y_n^-) (конструкция 1), тогда $y_n = y_n^+ - y_n^-$, и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathsf{S} &= \mathsf{S}^+ - \mathsf{S}^- && \text{(по предложению 2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} y_n^- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (y_n^+ - y_n^-) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \end{aligned}$$

2.4 Если ряд (x_n) сходится условно, (т.е. ряд $(|x_n|)$ расходится), то оба ряда $(x_n^+), (x_n^-)$ расходятся, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^- = 0$

Пусть ряд (x_n) сходится, но не абсолютно, т.е. ряд $(|x_n|)$ расходится. Так как $|x_n| = x_n^+ + x_n^-$, то $\mathsf{A}_n = \mathsf{S}_n^+ + \mathsf{S}_n^-$, где A_n, S_n^+, S_n^- — частичные суммы рядов $(|x_n|)$, (x_n^+), (x_n^-), соответственно. Тогда из расходимости последовательности (A_n) вытекает, что хотя бы одна из последовательностей (S_n^+), (S_n^-) расходится. Если они обе расходится, то теорема доказана

Пусть расходится последовательность (S_n^+). Так как $x_n = x_n^+ - x_n^-$ (см. конструкцию 1), то $\mathsf{S}_n = \mathsf{S}_n^+ - \mathsf{S}_n^-$

Тогда

$$\mathsf{S}_n^- = \mathsf{S}_n^+ - \mathsf{S}_n,$$

но так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{S}_n = \mathsf{S}$, то последовательность (S_n) — ограничена, скажем, $L \leqslant \mathsf{S}_n \leqslant R$

С другой же стороны, так как (x_n^+) — положительный расходящийся ряд, то согласно критерию сходимости положительного ряда, последовательность (S_n^+) — неограниченна. Это значит, что для любого числа N можно найти такой номер n, что $\mathsf{S}_n^+ > N + R$, а тогда $\mathsf{S}_n^- > N + R - R = N$, т.е. для любого N мы нашли номер n такой, что $\mathsf{S}_n^- > N$, это означает, что последовательность (S_n^-) неограниченна, а тогда по критерию сходимости положительного ряда, ряд (x_n^-) — расходится

Аналогично рассматривается случай, когда расходится ряд (x_n^-)

Наконец, так как ряд (x_n) сходится, то по необходимому признаку[1], $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, а из того, что (x_n^+), (x_n^-) подпоследовательности в последовательности (x_n), то получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n^+ = \lim_{n\to\infty} x_n^- = 0$$

□

2.5 [*Для сына папы Алика.*] Пусть ряд (x_n) сходится условно, тогда для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$, а также если $\alpha = \pm\infty$ можно так переставить элементы этого ряда, что сумма полученного таким образом ряда будет равна α

Для ряда (x_n) мы рассмотрим ряды (x_n^+), (x_n^-). Согласно предложению 2.4, ряды (x_n^+), (x_n^-) расходятся. Это значит, что последовательности их частичных сумм неограничены, т.е. их значения могут быть больше любого числа

Пусть p_1 — наименьшее натуральное число (=номер последовательности (x_n^+)) такое, что

$$\alpha < x_1^+ + \cdots + x_{p_1}^+ = \sum_{i=1}^{p_1} x_i^+,$$

далее, пусть q_1 — наименьшее натуральное число (=номер последовательности (x_n^-)) такое, что

$$\alpha > \sum_{i=1}^{p_1} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_1} x_j^-.$$

Пусть теперь p_2 есть наименьшее натуральное число (=номер последовательности (x_n^+)), большее, чем p_1, такое, что

$$\begin{aligned}\alpha &< \sum_{i=1}^{p_1} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_1} x_j^- + \sum_{i=p_1+1}^{p_2} x_i^+ \\ &= \sum_{i=1}^{p_2} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_1} x_j^-.\end{aligned}$$

[1]Если ряд (x_n) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Потом мы выбираем такое наименьшее натуральное q_2 (=номер последовательности (x_n^-)) большее, чем q_1, чтобы было верно неравенство

$$\alpha > \sum_{i=1}^{p_2} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_1} x_j^- - \sum_{j=q_1+1}^{q_2} x_j^- = \sum_{i=1}^{p_2} x_i^+ - \sum_{j=q_1+1}^{q_2} x_j^-.$$

Продолжая таким образом, мы получаем последовательность номеров $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k, \ldots$, и новую последовательность

$$(x_n') = x_1^+, \ldots, x_{p_1}^+, x_1^-, \ldots, x_{q_1}^-, x_{p_1+1}^+, \ldots, x_{p_2}^+, x_{q_1+1}^-, \ldots, x_{q_2}^-, \ldots,$$

при этом, если числа $p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k$ выбраны, то мы имеем

$$\alpha > \sum_{i=1}^{p_k} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-$$

и тогда мы подбираем p_{k+1} как наименьшее натуральное число, большее, чем p_k так, чтобы

$$\alpha < \sum_{i=1}^{p_k} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^- + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} x_i^+ = \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-,$$

но тогда (в силу условия минимальности на выбор числа p_{k+1}) имеем

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^{p_k} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^- + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}-1} x_i^+ = \sum_{i=1}^{p_{k+1}-1} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-.$$

Итак, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{p_{k+1}-1} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^- \leq \alpha < \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-.$$

Из полученных неравенств вычтем сумму $\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-$, тогда получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}-1} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-\right) - \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-\right) \leq \alpha - \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-\right) < 0.$$

откуда получаем

$$-x_{p_k+1}^+ \leq \alpha - \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-\right) < 0,$$

или

$$0 < \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-\right) - \alpha \leq x_{p_k+1}^+.$$

Далее, согласно предложению 2.4 $\lim_{k\to\infty} x_{p_k+1}^+ = 0$, то по лемме о зажатой последовательности получаем, что

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-\right) = \alpha.} \tag{3}$$

С другой стороны, если числа $p_1, \ldots, p_k, q_k, p_{k+1}$ выбраны, то

$$\alpha < \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-,$$

и тогда q_{k+1} мы выбираем как наименьшее натуральное число такое, что

$$\alpha > \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^- - \sum_{j=q_{k+1}}^{q_{k+1}} x_j^- = \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-,$$

а тогда получаем

$$\alpha \leq \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}-1} x_j^-.$$

Мы получаем неравенства

$$\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^- < \alpha \leq \sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}-1} x_j^-,$$

вычитая сумму $\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-$ из каждого неравенства, мы получаем

$$0 < \alpha - \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}-1} x_j^-\right) - \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-\right),$$

откуда вытекает

$$0 < \alpha - \left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-\right) \leq x_{q_{k+1}}^-.$$

А тогда, согласно предложению 2.4, $\lim_{k\to\infty} x_{p_k+1}^+ = 0$, то по лемме о зажатой последовательности получаем, что

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-\right) = \alpha.} \tag{4}$$

Но по построению, все частичные суммы ряда

$$(x_n') = x_1^+, \dots, x_{p_1}^+, x_1^-, \dots, x_{q_1}^-, x_{p_1+1}^+, \dots, x_{p_2}^+, x_{q_1+1}^-, \dots, x_{q_2}^-, \dots,$$

имеют либо вид $\displaystyle\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_k} x_j^-$ либо $\displaystyle\sum_{i=1}^{p_{k+1}} x_i^+ - \sum_{j=1}^{q_{k+1}} x_j^-$, а тогда из уравнений (3 и 4) вытекает, что сумма ряда (x_n') есть α $\square$

2.6 Докажите, что $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Пусть $F(x)$, $G(x)$ — интегралы для фукнции $f(x)$ и $g(x)$, соответственно

(1) Прежде всего, докажем, что

$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Если $\alpha = 0$, то мы получаем тождество, поэтому пусть $\alpha \neq 0$. В силу линейности дифференциала, получаем

$$\begin{aligned}\int \alpha f(x)\mathrm{d}x &= \int \alpha \mathrm{d}F(x)\\ &= \int \mathrm{d}(\alpha F(x))\\ &= \alpha F(x) + C\\ &= \alpha\left(F(x) + \frac{C}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Так как C — произвольное число, то число $\dfrac{C}{\alpha}$ можно также рассматривать как произвольное, и тогда согласно определению 1.8, выражение в последней скобке — это $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$

Получаем

$$\begin{aligned}\int \alpha f(x)\mathrm{d}x &= \alpha\left(F(x) + \frac{C}{\alpha}\right)\\ &= \alpha\int f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) Пусть $\alpha, \beta \neq 0$, так как в противном случае, мы либо получаем тождество $0 \equiv 0$, либо что уже было доказано выше

Используя те же свойства и только что полученное, получаем

$$\begin{aligned}\int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\mathrm{d}x &= \int \Big(\alpha f(x)\mathrm{d}x + \beta g(x)\mathrm{d}x\Big)\\ &= \int \Big(\alpha \mathrm{d}F(x) + \beta \mathrm{d}G(x)\Big)\\ &= \int \Big(\mathrm{d}(\alpha F(x)) + \mathrm{d}(\beta G(x))\Big)\\ &= \int \mathrm{d}(\alpha F(x) + \beta G(x))\\ &= \alpha F(x) + \beta G(x) + C.\end{aligned}$$

Имеем $C = \dfrac{C}{2} + \dfrac{C}{2}$ и так как C — произвольное число, то и числа $\dfrac{C}{2\alpha}, \dfrac{C}{2\beta}$ тоже можно считать произвольными. Тогда согласно определению 1.8 и линейности дифференциала, получаем

$$\begin{aligned}\int \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\mathrm{d}x &= \alpha F(x) + \beta G(x) + C\\ &= \alpha\left(F(x) + \frac{C}{2\alpha}\right) + \left(G(x) + \frac{C}{2\beta}\right)\\ &= \alpha\int \mathrm{d}F(x) + \beta\int \mathrm{d}G(x)\\ &= \alpha\int f(x)\mathrm{d}x + \beta\int g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

□

2.7 Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ — две функции от x, имеющие непрерывные производные $u' = u'(x)$, $v' = v'(x)$. Тогда имеет место формула $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

Согласно определению 1.4, а также правилу Лейбница, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(uv) &= (uv)'\mathrm{d}x\\ &= u'v\mathrm{d}x + uv'\mathrm{d}x\\ &= v\big(u'\mathrm{d}x\big) + u\big(v'\mathrm{d}x\big)\\ &= v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Таким образом, $u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u$. Тогда, используя линейность интеграла (п.2.6), получаем

$$\begin{aligned}\int u\mathrm{d}v &= \int \Big(\mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u\Big)\\ &= \int \mathrm{d}(uv) - \int v\mathrm{d}u\\ &= uv - \int v\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

□

2.8 Каждая правильная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей

Рассмотрим дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, мы можем записать знаменатель в виде

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1}\cdots(x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_2)^{m_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q},$$

где $k_1+\cdots+k_p+2m_1+\cdots+2m_q = \deg(P(x))$ и все $k_i, m_j \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и более того, согласно теореме Безу, все a_i — это всё корни уравнения $Q(x)=0$

(1) Пусть хотя бы один k_i больше нуля, обозначим его просто через k, тогда можно записать $Q(x) = (x-a)^k\widetilde{Q}(x)$, где a — это соответствующее число из чисел a_i. Тогда a не является корнем уравнения $\widetilde{Q}(x)=0$

Допустим теперь, что существует такое число A и такой полином $\widetilde{P}(x)$, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\widetilde{P}(x)}{(x-a)^{k-1}\widetilde{Q}(x)}$$

Для доказательства этого равенства достаточно подобрать эти неизвестные $A, \widetilde{P}(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$P(x) - A\widetilde{Q}(x) = (x-a)\widetilde{P}(x).$$

Так как A это число, то оно не должно зависеть от x, поэтому положим в этом равенстве $x=a$, и тогда мы получаем, что

$$P(a) - A\widetilde{Q}(a) = 0$$

откуда $A = \dfrac{P(a)}{\widetilde{Q}(a)}$. Это выражение корректно, так как a был выбран так, чтобы a — корень уравнения $Q(x)=0$, но не корень уравнения $\widetilde{Q}(x)=0$

Далее, полином $\widetilde{P}(x)$ можно теперь определить так:

$$\widetilde{P}(x) := \frac{P(x) - A\widetilde{Q}(x)}{x-a}$$

(2) Пусть теперь $Q(x)$ содержит хотя бы один сомножитель вида $(x^2+bx+c)^m$, тогда запишем $Q(x) = (x^2+bx+c)^m\widehat{Q}(x)$, где уже $\widehat{Q}(x)$ не делится на x^2+bx+c. Тогда подберём числа B, C и полином $\widehat{P}(x)$ так, чтобы

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m} + \frac{\widehat{P}(x)}{(x^2+bx+c)^{m-1}\widehat{Q}(x)}$$

Это то же самое, что подобрать эти же неизвестные, чтобы выполнялось равенство

$$P(x) - (Bx+C)\widehat{Q}(x) = (x^2+bx+c)\widehat{P}(x)$$

Поступим следующим образом. Разделим полиномы $P(x)$, $\widehat{Q}(x)$ на x^2+bx+c с остатком;

$$P(x) = F(x)(x^2+bx+c) + \alpha x + \beta,$$
$$\widehat{Q}(x) = H(x)(x^2+bx+c) + \gamma x + \delta$$

Тогда, подставляя в предыдущее равенство, получаем

$$F(x)(x^2+bx+c) + \alpha x + \beta - (Bx+C)\big(H(x)(x^2+bx+c) + \gamma x + \delta\big) = (x^2+bx+c)\widehat{P}(x).$$

Потребуем теперь, чтобы полином

$$R(x) = \alpha x + \beta - (Bx+C)(\gamma x + \delta) = 0$$

делился на x^2+bx+c без остатка[1]

[1] Если можно будет найти такие числа, то значит, мы добьёмся того, что существуют такие B, C, что полином $P(x) - (Bx+C)\widehat{Q}(x)$ делится на x^2+bx+c без остатка. В таком случае, полином $\widehat{P}(x)$ находится как частное от деления полинома $P(x) - (Bx+C)\widehat{Q}(x)$ на x^2+bx+c

Итак, имеем

$$\begin{aligned} R(x) &= \alpha x + \beta - (Bx + C)(\gamma x + \delta) \\ &= -\gamma B x^2 + (\alpha - \delta B - \gamma C)x + (\beta - \delta C) \end{aligned}$$

Разделив теперь $R(x)$ на $x^2 + bx + c$ на $x^2 + bx + c$, мы получим в остатке следующее выражение:

$$\Big((b\gamma - \delta)B - \gamma C + \alpha\Big)x + c\gamma B - \delta C + \beta$$

Тогда мы получаем систему (относительно неизвестных B, C) линейных уравнений

$$\begin{cases} (b\gamma - \delta)B - \gamma C = -\alpha \\ c\gamma B - \delta C = -\beta. \end{cases}$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} b\gamma - \delta & \gamma \\ c\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - b\gamma\delta + c\gamma^2$$

Пусть $\gamma \neq 0$, тогда

$$\Delta = \gamma^2 \left(\left(-\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 + b\left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) + c \right),$$

но это есть значение полинома $x^2 + bx + c$ в точке $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ и, следовательно $\Delta \neq 0$, ибо мы предположили, что $x^2 + bx + c$ не имеет корней. Таким образом, система имеет решение, и числа с необходимым требованием существуют

Если же $\gamma = 0$, то $\Delta = \delta^2$, но так как $\widehat{Q}(x) = H(x)(x^2 + bx + c) + \gamma x + \delta$, то $\delta \neq 0$ ибо $\widehat{Q}(x)$ на $x^2 + bx + c$ не делится

Итак, в любом случае, решение системы существует, а значит, можно подобрать так B, C, чтобы полином $P(x) - (Bx + C)\widehat{Q}(x)$ делится на $x^2 + bx + c$ без остатка. В таком случае полином

$$\widehat{P}(x) := \frac{P(x) - (Bx + C)\widehat{Q}(x)}{x^2 + bx + c}.$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к повторному применению случаев (1) и (2), которые обеспечивают возможность последовательного выделения простых дробей из данной правильной дроби, вплоть до её исчерпывания □

2.9 Для каждого $n \geqslant 1$ рассмотрим форму $\omega_n := \dfrac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}$, тогда $\displaystyle\int \omega_{n+1} = \frac{1}{2n\alpha^2} \cdot \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + \frac{2n-1}{2n\alpha^2} \cdot \int \omega_n, \ \int \omega_1 = \frac{1}{\alpha} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C$

(1) Так как $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{y^2+1}$, то

$$\begin{aligned} \int \omega_1 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + \alpha^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2 \cdot \left(\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) + 1\right)} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{\alpha \cdot \mathrm{d}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) + 1} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + C. \end{aligned}$$

(2) Пусть теперь $n \geqslant 1$, будем интегрировать ω_n по частям, т.е. воспользуемся правилом

$$\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u.$$

Положили $u = \frac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}$, $v = x$, находим

$$\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{(x^2+\alpha^2)^n}\right)' \mathrm{d}x = -\frac{2nx}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int \omega_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^n} &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n \cdot \int \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n \cdot \int \frac{(x^2+\alpha^2)-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n \cdot \left(\int \frac{(x^2+\alpha^2)}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\mathrm{d}x - \alpha^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n \cdot \left(\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^{n}} - \alpha^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+\alpha^2)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n \cdot \int \omega_n - 2n\alpha^2 \int \omega_{n+1},\end{aligned}$$

т.е. мы получили рекуррентное соотношение

$$\int \omega_n = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^n} + 2n \cdot \int \omega_n - 2n\alpha^2 \int \omega_{n+1},$$

из которого следует требуемое $\square$

2.10 Интеграл от формы $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}dx$ выражается через рациональные функции и функции $\ln, \arctan$

Выделим в выражении x^2+ax+b полный квадрат

$$x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right),$$

так как по условию $x^2+ax+b=0$ не имеет корней, то $a^2-4b<0$, тогда положим

$$c^2 := b - \frac{a^2}{4}, \qquad c = +\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$$

тогда сделаем замену

$$y := x + \frac{a}{2},$$

находим

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \left(x+\frac{a}{2}\right)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x, \\ x^2+ax+b &= \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{a^2}{4}\right) = y^2+c^2, \\ Ax+B &= Ay + \left(B - \frac{Aa}{2}\right).\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая

(1) $n=1$, тогда получаем

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b}\mathrm{d}x = \int \frac{Ay+\left(B-\frac{Aa}{2}\right)}{y^2+c^2}\mathrm{d}y &= \frac{A}{2}\int \frac{2y\mathrm{d}y}{y^2+c^2} + \left(B-\frac{Aa}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+c^2} \\ &= \frac{A}{2}\ln(y^2+c^2) + \frac{1}{c}\cdot\left(B-\frac{Aa}{2}\right)\arctan\left(\frac{y}{c}\right) + C,\end{aligned}$$

или, возвращаясь к x и подставляя вместо c его значение:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+ax+b) + \frac{2B-Aa}{\sqrt{4b-a^2}}\arctan\left(\frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}}\right) + C.$$

(2) Пусть $n>1$, делая ту же замену, получаем

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+\left(B-\frac{Aa}{2}\right)}{(y^2+c^2)^n}\mathrm{d}y = \frac{A}{2}\int \frac{2y\mathrm{d}y}{(y^2+c^2)^n} + \left(B-\frac{Aa}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+c^2)^n}.$$

Видим, что второй интеграл это интеграл от формы ω который найден в теореме 2.9, первый же интеграл легко берётся с помощью замены $t := y^2+c^2$, тогда $\mathrm{d}t = (y^2+c^2)'\mathrm{d}y = 2y\mathrm{d}y$, следовательно $y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$, и мы получаем

$$\int \frac{2y\mathrm{d}y}{(y^2+c^2)^n} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C$$

□

2.11 Пусть $I \subsetneq \mathbb{R}$ — промежуток и $f : I \to \mathbb{R}$ — ступенчатая функция относительно разбиения $\lambda(I)$, тогда если имеем разбиение $\lambda'(I)$, которое тоньше, чем $\lambda(I)$, то $\displaystyle\int_{\lambda(I)} f = \int_{\lambda'(I)} f$

Пусть $\lambda(I) = \{A_1, \ldots, A_n\}$ и пусть

$$\lambda'(I) := \left\{A'_{11}, \ldots, A'_{1\ell_1}, \ldots, A'_{n1}, \ldots, A'_{n\ell_n}\right\},$$

где A_i содержит только $A'_{i1}, \ldots, A'_{i\ell_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Из определения 1.11 тогда следует, что

$$A_i = A'_{i1} \cup \cdots \cup A'_{i\ell_i} \text{ и } |A_i| = |A'_{i1}| + \cdots + |A'_{i\ell_i}|$$

Наконец, получаем, что

$$f(A'_{i1}) = \cdots = f(A'_{i\ell_i}) = f(A_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant \ell.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda'(I)} f &= \left(f(A'_{11}) \cdot |A'_{11}| + \cdots + f(A_{1\ell_1}) \cdot \left|A'_{1\ell_1}\right|\right) + \cdots + \left(f(A'_{n1})\,|A'_{n1}| + \cdots + f(A_{n\ell_n}) \cdot \left|A'_{n\ell_n}\right|\right) \\
&= f(A_1) \cdot \left(|A'_{11}| + \cdots + \left|A'_{1\ell_1}\right|\right) + \cdots + f(A_n) \cdot \left(|A'_{n1}| + \cdots + \left|A'_{n\ell_n}\right|\right) \\
&= f(A_1)|A_1| + \cdots + f(A_n) \cdot |A_n| \\
&= \int_{\lambda(I)} f
\end{aligned}$$

□

2.12 Пусть $I \subsetneq \mathbb{R}$ — промежуток и $f, g : I \to \mathbb{R}$ — две ступенчатые функции на нем

Замечание. Если $f = \chi_I$, и взяв разбиение $\lambda(I) = \{I\}$, мы получаем следующее

$$\int_{\lambda(I)} \chi_I = |I|.$$

И тогда мы можем записать, что если $f = \sum\limits_{A \in \lambda(I)} f(A) \cdot \chi_A$, то

$$\boxed{\int_{\lambda(I)} f = \sum_{A \in \lambda(I)} f(A) \cdot \int_{\lambda(I)} \chi_A}$$

Пусть $\lambda_f(I) = \bigcup\limits_{p=1}^{n} A_p$, $\lambda_g(I) = \bigcup\limits_{q=1}^{m} B_q$ — разбиения промежутка I относительно которых f, g — ступенчаты, соответственно

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} f(A_p) \cdot \chi_{A_p} \cdot \chi_{B_q} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} f(A_p) \cdot \chi_{A_p \cap B_q}, \\
g &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} g(B_q) \cdot \chi_{A_p} \cdot \chi_{B_q} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{m} g(B_q) \cdot \chi_{A_p \cap B_q}.
\end{aligned}$$

(a)

$$\int_I (f \pm g) = \int_I f \pm \int_I g,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Согласно следствию, $f \pm g = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m (f(A_p) \pm g(B_q)) \cdot \chi_{A_p \cap B_q}$, и тогда согласно замечанию

$$\begin{aligned}\int_I (f \pm g) &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m (f(A_p) \pm g(B_q)) \cdot \int_I \chi_{A_p \cap B_q} \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m f(A_p) \cdot \int_I \chi_{A_p \cap B_q} \pm \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m g(B_q) \cdot \int_I \chi_{A_p \cap B_q} \\ &= \int_I f \pm \int_I g\end{aligned}$$

□

(b) Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in I$, то

$$\int_I f \geq \int_I g$$

Доказательство. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in I$, то для любых p, q таких, что $A_p \cap B_q \neq \varnothing$, имеем $f(A_p) \geq g(B_q)$. Тогда, согласно замечанию,

$$\begin{aligned}\int_I f &:= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m f(A_p) \cdot \int_I \chi_{A_p \cap B_q} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m f(A_p) \cdot |A_p \cap B_q| \\ &\geqslant \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m g(A_p) \cdot |A_p \cap B_q| \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^m f(A_p) \cdot \int \chi_{A_p \cap B_q} \\ &=: \int_I g\end{aligned}$$

□

(c) Если $f(x) = \alpha$ для всех $x \in I$, то

$$\int_I f = \alpha \cdot |I|$$

Доказательство. Если $f(x) = \alpha$ для всех $x \in I$, то $f = \alpha \cdot \chi_I$, и согласно замечанию,

$$\int_I f = \alpha \cdot \int \chi_I = \alpha \cdot |I|$$

□

(d) Если $I \subseteq J$ и если $\varphi : J \to \mathbb{R}$ функция, определённая следующим образом

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x) & x \in I, \\ 0 & x \notin I, \end{cases}$$

тогда $\varphi(x)$ — ступенчатая на J и

$$\int_J \varphi = \int_I f$$

Доказательство. Пусть $\lambda(I)$ — разбиение промежутка I и $f = \sum\limits_{A\in\lambda(I)} f(A)\cdot\chi_A$, то определим разбиение $\lambda(J)$ промежутка J следующим образом

$$\lambda(J) := \lambda(I) \cup \{J \setminus I\}$$

положим, что $\varphi(J\setminus I) := 0$ мы получаем, что φ — ступенчата на J. Мы можем также записать

$$\varphi = \sum_{A\in\lambda(I)} f(A)\chi_A + \varphi(J\setminus I)\chi_{J\setminus I}$$

тогда согласно замечанию,

$$\begin{aligned}\int_J \varphi &= \sum_{A\in\lambda(I)} f(A)\int_J \chi_A + \varphi(J\setminus I)\int_J \chi_{J\setminus I} \\ &= \sum_{A\in\lambda(I)} f(A)\cdot|A| + 0\cdot|J\setminus I| \\ &= \int_I f\end{aligned}$$

□

(e) Пусть $\{A,B\}$ — разбиение промежутка I, тогда если функции $f|_A : A\to\mathbb{R}$, $f|_B : B\to\mathbb{R}$ ступенчаты на A и B соответственно, то

$$\int_I f = \int_A f|_A + \int_B f|_B$$

Доказательство. Пусть $\lambda(A) := \bigcup\limits_{p=1}^{n} A_p$, $\lambda(B) := \bigcup\limits_{q=1}^{m} B_q$ — разбиения промежутков A, B соответственно. Тогда $\lambda := \lambda(A)\cup\lambda(B)$ разбиение промежутка I

Имеем

$$f = \sum_{C\in\lambda(I)} f(C)\cdot\chi_C = \sum_{p=1}^{n} f(A_p)\cdot\chi_{A_p} + \sum_{q=1}^{m} f(B_q)\cdot\chi_{B_q} = f|_A + f|_B,$$

тогда согласно замечанию,

$$\begin{aligned}\int_I f &= \sum_{C\in\lambda(I)} f(C)\cdot\int_I \chi_C \\ &= \sum_{C\in\lambda(I)} f(C)\cdot|C| \\ &= \sum_{p=1}^{n} f(A_p)\cdot|A_p| + \sum_{q=1}^{m} f(B_q)\cdot|B_q| \\ &= \int_A f|_A + \int_B f|_B.\end{aligned}$$

□

2.13 Пусть $f : I\to\mathbb{R}$ — ограниченная функция на промежутке $I \subsetneq \mathbb{R}$, числами a, b, т.е., $a \leqslant f(x) \leqslant b$ для всех $x\in I$. Тогда $a\cdot|I| \leqslant \inf\int_I f \leqslant \sup\int_I f \leqslant b\cdot|I|$

Рассмотрим функции $a, b : I\to\mathbb{R}$, $a(x) := a$, $b(x) := b$, $x\in I$. Тогда $a\in m(f)$, $b\in M(f)$, тогда по определению $\sup, \inf$, получаем

$$\sup\int_I f \le \int_I b = b\cdot|I|, \qquad \inf\int_I f \ge \int_I a = a\cdot|I|.$$

Покажем, что $\inf\int_I f \leqslant \sup\int_I f$. Пусть $h \in m(f)$, $g \in M(f)$, тогда $h \leqslant g$ и по теореме 2.12 п.2, получаем $\int_I h \leqslant \int_I g$. Отсюда вытекает

$$\inf\int_I f := \sup\left\{\int_I h,\, h \leqslant g\right\} \leqslant \inf\left\{\int_I g, g \geqslant h\right\} =: \sup\int_I f$$

□

2.14 Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ — ступенчатая функция на ограниченном промежутке $I \subsetneq \mathbb{R}$, тогда она интегрируема по Риману, и более того, интеграл Римана от неё это то же самое, что и интеграл от ступенчатой функции

Так как f — ступенчата и $f(x) \leqslant f(x) \forall x \in I$, то $f \in M_{p.c}(f), f \in m_{p.c}(f)$, тогда

$$\sup\int_I f \leqslant \int_I f, \quad \inf\int_I f \geqslant \int_I f,$$

то есть

$$\sup\int_I f \leqslant \int_I f \leqslant \inf\int_I f$$

Тогда, согласно лемме 2.13

$$\begin{aligned}\inf\int_I f &\leqslant \sup\int_I f\\ \inf\int_I f &= \sup\int_I f\end{aligned}$$

□

2.15 Пусть $I \subsetneq \mathbb{R}$ — промежуток и пусть $f, g : I \to \mathbb{R}$ — две ограниченные функции на нем и при этом они интегрируемы на нем по Риману

Пусть $\overline{f}$ (соотв. $\underline{f}$) — функция из $M_{p.c}(f)$ (соотв. из $m_{p.c}(f)$). Тогда ясно, что $\overline{f}+\overline{g} \in M_{p.c}(f+g)$ и $\underline{f}+\underline{g} \in m_{p.c}(f+g)$

Если f — интегрируемая функция по Риману на I, тогда согласно определению 1.15

$$\int_I f = \sup\int_I f = \inf\int_I f$$

Тогда по определению inf, sup для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\overline{f} \in M_{p.c}(f)$, $\underline{f} \in m_{p.c}$, что

$$\int_I f + \varepsilon = \sup\int_I f + \varepsilon > \int_I \overline{f}, \quad \int_I f - \varepsilon = \inf\int_I f + \varepsilon < \int_I \underline{f} \tag{5}$$

1. Функция $f+g$ интегрируема на I и более того,

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$

Доказательство. Покажем, что $f+g$ интегрируема по Риману. Воспользуемся определением 1.15 и теоремой 2.12 и полученными выше неравенствами

$$\begin{aligned}\sup\int_I (f+g) &\leqslant \int_I (\overline{f}+\overline{g})\\ &= \int_I \overline{f} + \int_I \overline{g}\\ &< \int_I f + \varepsilon + \int_I g + \varepsilon\\ &= \int_I f + \int_I g + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что
$$\inf\int_I (f+g) > \int_I f + \int_I g - 2\varepsilon$$
Тогда, по теореме 2.13 получим
$$\int_I f + \int_I g - 2\varepsilon < \inf\int_I (f+g) \leqslant \sup\int_I (f+g) < \int_I f + \int_I g + 2\varepsilon$$
в частности имеем, что
$$-2\varepsilon < \inf\int_I (f+g) - \left(\int_I f + \int_I g\right) < 2\varepsilon$$
$$-2\varepsilon < \sup\int_I (f+g) - \left(\int_I f + \int_I g\right) < 2\varepsilon$$
для любого $\varepsilon > 0$, это значит, что
$$\inf\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g, \quad \sup\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$
то есть
$$\inf\int_I (f+g) = \sup\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$$
□

2. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, функция αf — интегрируема на I и
$$\int_I \alpha \cdot f = \alpha \int_I f$$

Доказательство. Покажем, что αf интегрируема по Риману. Рассмотрим случаи, в зависимости от α

Пусть $\alpha = 0$. Тогда $\alpha f = 0$ — постоянная функция и по лемме 2.14, интеграл Римана от αf тоже самое, что интеграл от ступенчатой функции $\alpha \cdot f$, который равен $\alpha = 0$

Пусть $\alpha > 0$. Тогда $\alpha\overline{f} \in M_{p.c}(\alpha f)$, $\alpha\underline{f} \in m_{p.c}(f)$. Тогда по определению inf, sup, теореме 2.12 и полученным неравенствам, имеем
$$\begin{aligned}\sup\int_I \alpha f &\leqslant \int_I \alpha\overline{f}\\ &= \alpha\int_I \overline{f} < \alpha\left(\int_I f + \varepsilon\right),\\ \inf\int_I \alpha f &\geqslant \int_I \alpha\underline{f}\\ &= \alpha\int_I \underline{f} > \alpha\left(\int_I f - \varepsilon\right)\end{aligned}$$
пользуясь теоремой 2.13, имеем
$$\alpha\int_I f - \alpha\varepsilon < \inf\int_I \alpha f \leqslant \sup\int_I \alpha f < \alpha\int_I f + \alpha\varepsilon$$
В частности,
$$\alpha\int_I f - \alpha\varepsilon < \inf\int_I \alpha f < \alpha\int_I f + \alpha\varepsilon, \quad \alpha\int_I f - \alpha\varepsilon < \sup\int_I \alpha f < \alpha\int_I f + \alpha\varepsilon$$
для любого $\varepsilon > 0$. Это значит, что
$$\inf\int_I \alpha f = \alpha\int_I f \quad \sup\int_I \alpha f = \alpha\int_I f$$

то есть,

$$\int_I \alpha f = \alpha \int_I f$$

Пусть $\alpha < 0$. Тогда можно написать, что $\alpha = -|\alpha|$ и тогда, если $|\alpha|\overline{f} \in M_{p.c}(|\alpha| f)$, то $\alpha f = -|\alpha| f \in m_{p.c}(-|\alpha| f)$. Аналогично, если $|\alpha|\overline{f} \in m_{p.c}(|\alpha| f)$, то $\alpha f = -|\alpha| f \in M_{p.c}(-|\alpha| f)$. Тогда имеем

$$\sup \int_I \alpha f = \sup \int_I -|\alpha| f \leqslant \int_I \alpha \underline{f} < -|\alpha| \int_I f + \varepsilon,$$
$$\inf \int_I \alpha f = \inf \int_I -|\alpha| f \geqslant \int_I \alpha \overline{f} < -|\alpha| \int_I \overline{f} - \varepsilon$$

Тогда по лемме 2.13

$$\alpha \int_I f - \varepsilon < \inf \int_I \alpha f \leqslant \sup \int_I \alpha f < \alpha \int_I f + \varepsilon$$

□

3. Функция $f - g$ интегрируема на I и

$$\int_I (f+g) = \int_I f - \int_I g$$

Доказательство. Применим пункты 1 и 2 к $f + (-g)$ и получим требуемое □

4. Если $f(x) \geqslant 0 \forall x \in I$, то

$$\int_I f \geqslant 0$$

Доказательство. Так как $f(x) \geqslant 0 \forall x \in I$, то нулевая функция $0 : I \to \mathbb{R}, x \longmapsto 0, x \in I$ принадлежит множеству $m_{p.c}(f)$, но тогда

$$\inf \int_I f \geqslant \int_I 0 = 0,$$

а так как f интегрируема по Риману, то

$$\int_I f = \inf \int_I f \geqslant 0$$

□

5. Если $f(x) \geqslant g(x)$ для всех $x \in I$, то

$$\int_I f \geqslant \int_I g$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h = f - g$, тогда следовательно пунктам 3 и 4, получим требуемое □

6. Если $f(x) = \alpha$ для всех $x \in I$, то

$$\int_I f = \alpha \cdot |I|$$

Доказательство. Функция $f(x) = \alpha$ — ступенчаиая на I, тогда по лемме 2.14 она интегрируема по Риману, и более того, согласно лемме 2.12 п.3 имеем

$$\int_I f = \alpha \cdot |I|$$

□

7. Пусть $J \subsetneq \mathbb{R}$ — ограниченный промежуток, и $I \subseteq J$ и пусть $\varphi : J \to \mathbb{R}$ — функция, определенная так

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(x), & x \in I, \\ 0, & x \notin I \end{cases}$$

Тогда φ — интегрируема на J и более того

$$\int_J \varphi = \int_I f$$

Доказательство. Для данных $\overline{f} \in M_{p.c}(f), \underline{f} \in m_{p.c}(f)$ определим $\overline{F}, \underline{F} : J \to \mathbb{R}$ следующим образом

$$\overline{F}(x) := \begin{cases} \overline{f}(x), & x \in I, \\ 0, & x \notin I, \end{cases} \quad \underline{F}(x) := \begin{cases} \underline{f}(x), & x \in I, \\ 0, & x \notin I, \end{cases}$$

тогда $\overline{F} \in M_{p.c}(F)$ и $\underline{F} \in m_{p.c}(F)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ (см. неравенства 5), пользуясь теоремой 2.12 п.4 получаем

$$\sup \int_J F \leqslant \int_J \overline{F} = \int_I \overline{F} = \int_I \overline{f} < \int_I f + \varepsilon$$

$$\inf \int_J F \geqslant \int_J \underline{F} = \int_I \underline{F} = \int_I \underline{f} > \int_I f - \varepsilon$$

Отсюда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_I f - \varepsilon < \inf \int_J F \leqslant \sup \int_J F < \int_I f + \varepsilon$$

Откуда следует, что

$$\int_J F = \int_I f$$

□