

Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 17 сентября 2024 г.

Содержание

1	Кратные интегралы. Брус. Интегрируемые функции по Риману	2
1.1	Брус. Мера бруса	2
1.2	Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n	2
1.3	Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения	2
1.4	Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману	3
1.5	Пример константной функции	3
1.6	Неинтегрируемая функция	3
1.7	Вычисление многомерного интеграла	3
1.8	Свойства кратных интегралов	4
1.9	Необходимое условие интегрирования.	5
2	Лебегова мера	5
2.1	Множество меры 0 по Лебегу	5
2.2	Свойства мн-ва меры 0 по Лебегу	6

1 Кратные интегралы. Брусья. Интегрируемые функции по Риму

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в \mathbb{R}^n — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq q_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Примечание. $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{ \}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$, где $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть I, I_1, \dots, I_k — брусы

Тогда, если $\forall i, j, I_i, I_j$ не имеют общих внутренних точек, и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^k$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leq i \leq k} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k}$

Определение. Пусть $\forall I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi\}_{i=1}^k$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара (\mathbb{T}, ξ)

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на (\mathbb{T}, ξ) — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брус I ($f : I \rightarrow \mathbb{R}$), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция $f = \text{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ = \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|$$

1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

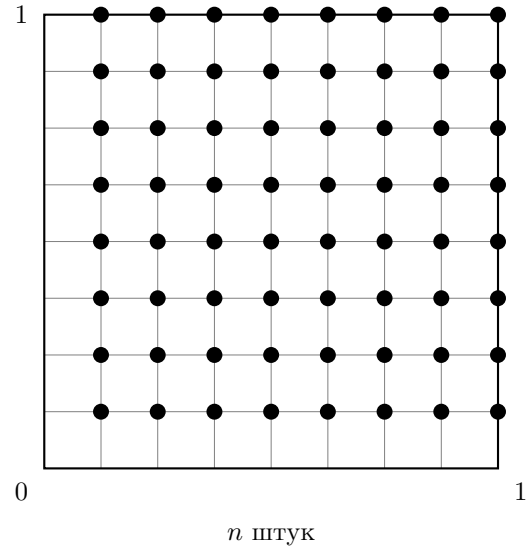
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i верхние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy$, $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \cdot j \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{n(n+1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$



1.8 Свойства кратных интегралов

1. Линейность.

$$f, g \in R(I) \implies \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha f + \beta g) \in R(I)$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

Доказательство.

(a)

$$\begin{aligned}f \in R(I) : \quad &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I f dx| =: |\sigma_f - A_f| &< \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}\end{aligned}$$

(b) По определению:

$$\begin{aligned}g \in R(I) : \quad &\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \\ |\sigma(g, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I g dx| =: |\sigma_g - A_g| &< \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}\end{aligned}$$

(c) Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (a) и (b) верно для $\delta \implies$

$$\begin{aligned}|\sigma_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}| &= |\alpha \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leq \\ |\alpha| |\sigma_f - A_f| + |\beta| |\sigma_g - A_g| &< (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1} < \varepsilon\end{aligned}$$

Q.E.D.

2. Монотонность

$$f, g \in R(I); f|_I \leq g|_I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

Доказательство.

$$f \in R(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для $g \in R(I)$, тогда:

$$\begin{aligned}A_f - \varepsilon < \sigma_f &\leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies \\ A_f &< A_g + 2\varepsilon\end{aligned}$$

Что верно для $\forall \varepsilon > 0$, даже при $\varepsilon \rightarrow 0 \implies A_f \leq A_g$

Q.E.D.

3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in R(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$f \in R(I) \implies f \text{ Ограничена на } I \implies$$

$$\begin{aligned} -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f| &\implies \\ -\int_I \sup |f| dx \leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx = \sup_I |f| |I| &\implies \\ -\sup_I |f| |I| \leq A_f \leq \sup_I |f| |I| &\end{aligned}$$

Q.E.D.

1.9 Необходимое условие интегрирования.

Пусть I - замкнутый брус.

$$f \in R(I) \implies f \text{ Ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1.

$$\begin{aligned} f \in R(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \\ |\sigma_f - A_f| < \varepsilon &\implies \end{aligned}$$

Для $\varepsilon = 1$ это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f - \text{ограничена}$$

2. Пусть f - неограничена на I , но $f \in R(I) \implies \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_i = 1^K \exists i_0 : f$ неограничена на I_{i_0} .
Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |I_i| + f(\xi_{i_0}) |I_{i_0}| \implies$$

можно выбирать ξ_{i_0} на I_{i_0} так, что σ_f будет сколь угодно велика/мала \implies **противоречие**, поэтому:

$$f \in R(I) \implies f \text{ Ограничена на } I$$

Q.E.D.

2 Лебегова мера

2.1 Множество меры 0 по Лебегу

Определение. Мн-во $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть мн-вом меры 0 по Лебегу, если \exists не более чем счетный набор замкнутых брусков $\{I_i\}$:

1. $M \subset \bigcup_i I_i$ и
2. $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Пример: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ - мн-во меры нуль по Лебегу в \mathbb{R}^n

Доказательство. $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ Покроем точку замкнутым брусом (тут Дания должен вставить кру-
тую картинку как квадрат накладывается на точку) $I = [x_{01} - d, x_{01} + d] \times \dots \times [x_{0n} - d, x_{0n} + d] \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I : |I| = (2d)^n < \varepsilon \implies d < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2} \implies$$

Точка является мн-вом меры нуль по Лебегу

2.2 Свойства мн-ва меры 0 по Лебегу

1. Если брусы в определении сделать открытыми, то определение остается верным.

Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ - открытые брусы $M \subset \bigcup_i I_i$.

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ - замкнутые брусы I_i .

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

2. Пусть $\{I_i\}$ - замкнутые брусы

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \dots \times [a_n^i, b_n^i] \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Пусть

$$D_i = \left(\frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i) \right) \times \dots \times \left(\frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i) \right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon$$

Q.E.D.