Алгоритмы и структуры данных. Коллоквиум

Основано на лекциях и тренировках
по алгоритмам Михаила Густокашина

Содержание

1 Способы задания графов

1.1 Матрица смежности

Матрица смежности — матрица графа $G = (V, E)$ размера $V \times V$, такая что на пересечении $i-$ой строки и $j-$ого столбца стоит 1, если есть ребро между вершинами i и j, и 0 — если иначе

Сложность построения — $O(V^2)$

1.2 Список смежности

Список смежности — массив, в котором каждой вершине графа соответствует список, состоящий из соседей этой вершины

Изначально создается V динамически расширяемых пустых векторов

При считывании ребра $A_i - B_i$ в вектор с номером A_i добавляется ребро B_i (если граф неориентированый, то еще в вектор с номером B_i добавляется ребро A_i)

Сложность построения — $O(E)$

Сложность нахождения всех соседей каждой вершины — $O(V+E)$, так как мы проходим по всем вершинам за V и просматриваем каждое ребро за E

1.3 Список ребер

Список ребер — структура данных, представляющая собой набор из пар $A_i - B_i$, где A_i, B_i — вершины графа

Порядок в списке ребер не важен **только в случае неориентированных** графов

Сложность нахождения всех соседей каждой вершины

Если граф неориентирован, то оптимально будет сделать его ориентированным (помимо ребра $A_i - B_i$ добавить ребро $B_i - A_i$)

Сортировка ребер — $O(E \log E)$; поиск первого соседа в списке ребер для одной вершины — $O(\log E)$, для двух — $O(V \log E)$

Так как обычно в графах $E \geqslant V$, то для поиска всех соседей всех вершин потребуется $O(E \log E)$

2 Обход в глубину

2.1 Обход в глубину

Описание алгоритма

Обход начинается с любой вершины графа. Из этой вершины мы переходим в одного из непосещенных соседей. Если все соседи посещены, то мы возвращаемся вдоль всего пройденного пути, пока не наткнемся на вершину, у которой есть непосещенный сосед. Алгоритм завершает работу, когда мы возвращаемся в исходную вершину и все ее соседи посещены

Применение алгоритма

1. Поиск случайного пути в лабиринте
2. Решение задач, связанных с построением маршрута: в сети, на карте, в сервисах покупки билетов и так далее
3. Поиск циклов, сортировки

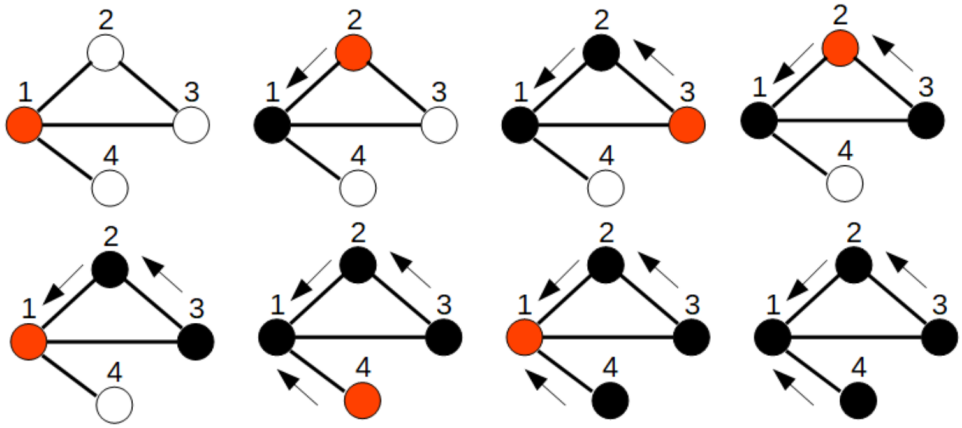
Асимптотика

Сложность зависит от представления графа: матрица смежности, список ребер или список смежности

Рассмотрим каждый вариант:

1. Список смежности — $O(V + E)$
   - Вершины посещаются (проверяются на посещенность) только один раз, что составляет $O(V)$
   - Каждое ребро проверяется ровно один раз, что составляет $O(E)$
2. Матрица смежности — $O(V^2)$
   - Вся матрица имеет размер $V \times V$

Пример



Псевдокод

```
void dfs(int v){
    used[v] = 1;
    for (auto to : gr[v]){
        if (!used[to]){
            dfs(to);
        }
    }
}
```

2.2 Связность

Связный граф — граф, в котором существует путь от любой вершины до любой другой вершины

Проверка графа на связность

1. Запуск DFS от каждой из вершин графа
   - Для каждого из обходов необходимо проверить, что посещены все вершины
   - Сложность составит $O(V \times E)$
2. Запуск DFS от любой вершины
   - Если от вершины 1 в неориентированном графе можно попасть в v и в u, то существует путь от v до u

- Так как есть путь из 1 в v, то в неориентированном графе существует и обратный путь из v в 1, а оттуда можно попасть в u
- Сложность такого подхода зависит от сложности DFS — 2.1

2.3 Поиск компонент связности в графе

Компонента связности графа — подмножество вершин и соединяющих их ребер, такое что есть путь путь из каждой вершины в каждую

Алгоритм поиска компоненты связности

Можно раскрасить граф в компоненты связности. Каждой вершине ставится в соответствие номер компоненты связности, к которой относится вершина

Реализация происходит через DFS
Может потребоваться несколько запусков поиска в глубину. Поэтому поиск проводим через цикл, перебирающий все вершины

- Заводим массив длинной V для хранения цвета каждой вершины
- При входе в DFS красим вершину в текущий цвет
- Если очередная вершина не покрашена, то счетчик количества компонент связности увеличивается и запускается DFS для этой вершины со значением цвета равным текущему значению счетчика

2.4 Поиск цикла в графе

Чтобы найти цикл в графе нужно раскрасить его в три цвета:

- **Белый** — вершина непосещенная
- **Серый** — DFS вошел в вершину, но не обработал всех соседей
- **Черный** — Все соседи вершины посещены и помечены черным

Если в графе есть обратные ребра, т.е. ребра ведущие в серую вершину, то в графе есть цикл

Алгоритм

- В каждый момент времени серым цветом будут помечены вершины, лежащие на пути **DFS** от стартовой вершины до текущей
- Если из текущей вершины u есть ребро в серую вершину v, то в графе есть цикл, т.к. существует путь от v до u (v лежит на пути от стартовой вершины до u) и путь от u до v, проходящий по одному ребру

Восстановление цикла

Допустим, для u нашелся серый сосед v, тогда запоминаем номер v и выходим из рекурсивной функции, запоминая номера вершин, пока не дойдем до вершины, в которой нашелся цикл

2.5 Проверка графа на двудольность

Примечание. Граф — двудольный тогда и только тогда, когда все циклы в графе имеют четную длину

Алгоритм

- Выбираем произвольную вершину и красим ее в цвет *color*
- Всех соседей этой вершины красим в цвет $3 - color$
- Соседей соседей — в цвет *color* и т.д.

- Если в какой-то момент сосед вершины уже покрашен в тот же цвет, что и вершина, то алгоритм завершает работу, так как граф не двудольный, потому что есть циклы нечетной длины

Если граф не является связным, то нужно запустить **DFS** из каждой вершины каждой компоненты связности (как в п. 2.3)

2.6 Диаметр и центр дерева

Диаметр дерева — максимальная длина (в рёбрах) кратчайшего пути в дереве между любыми двумя вершинами

Центр дерева — вершины (одна или две) максимально удаленные от других вершин дерева

Примечание. Центр можно понимать так: это вершина дерева, такая что при подвешивании дерева за нее глубина дерева минимальна

Алгоритм поиска диаметра дерева

Требуется использовать два **DFS**

- Берем любую вершину дерева (пусть это a) и ищем самую удаленную от нее вершину b с помощью **DFS**
- Из вершины b запускаем **DFS** и ищем самую удаленную от нее вершину (пусть это c)
- Путь из b в c — диаметр дерева

```
std::vector<node> find_diameter() {
    std::vector<node> ans, path;
    std::vector<int> used(gr_.size(), 0);

    std::function<void(node v)> dfs = [&] (node v) {
        used[v] = true;
        path.emplace_back(v);
        for (const auto& to : gr_[v]) {
            if (!used[to]) {
                dfs(to);
            }
        }
        if (ans.size() < path.size()) {
            ans = path;
        }
        path.pop_back();
    };
    dfs(0);
    used.assign(gr_.size(), 0);
    dfs(ans.back());
    return ans;
}
```

3 Задача построения дерева кратчайших расстояний

3.1 Обход в ширину

Наивный алгоритм

Создаем массив, заполняем его бесконечностью ($v + 1$, например). Для начальной вершины установим значение 0

Выполняем $v - 1$ шагов. Нужно перебрать все вершины и выбрать те, которые находятся на расстоянии равном номеру шага, а также пометить все соседние вершины числом на 1 большим, чем номер текущего шага

- На нулевом шаге выбираем начальную вершину и помечаем ее соседей 1
- Затем выбираем вершины, находящиеся на расстоянии 1 и их непомеченных соседей помечаем 2 и т.д.

Сложность — $O(V^2+E)$, так как мы сделаем V шагов, переберем V вершин, а также просмотрим все ребра

Реализация через очередь

В начале очереди находятся вершины текущего шага, а в конце — следующего

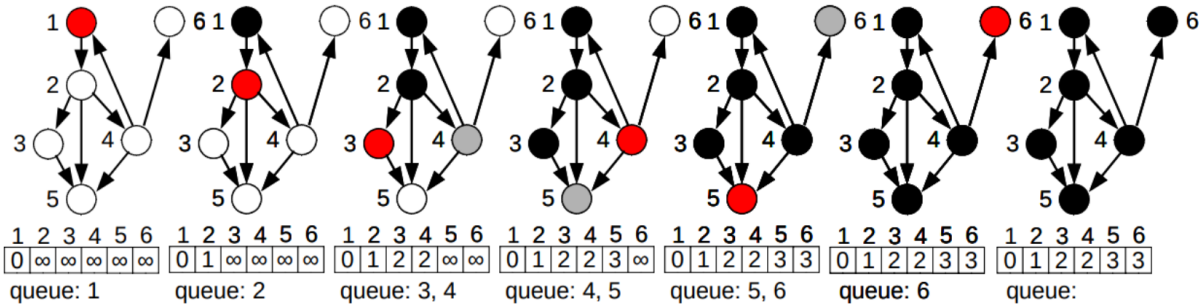
- Помещаем начальную вершину в очередь, а в масив расстояний ставим 0 для нее
- Берем первый (верхний) элемент из очереди и просматриваем соседей
- Если сосед не посещался, то добавляем его в очередь, помечаем вершину как посещенную
- Если сосед является пунктом назначения, алгоритм завершает работу

Время работы — $O(V+E)$

Применение алгоритма

1. Для поиска кратчайшего пути в неявно заданных и невзвешенных графах
2. Для обнаружения кратчайших путей и минимальных покрывающих деревьев

Белый — еще не посещенные вершины, *черный* — уже посещенный, *красный* — обрабатывающиеся в данный момент (в начале очереди), *серый* — вершины, находящиеся в очереди



3.2 Алгоритм Дейкстры

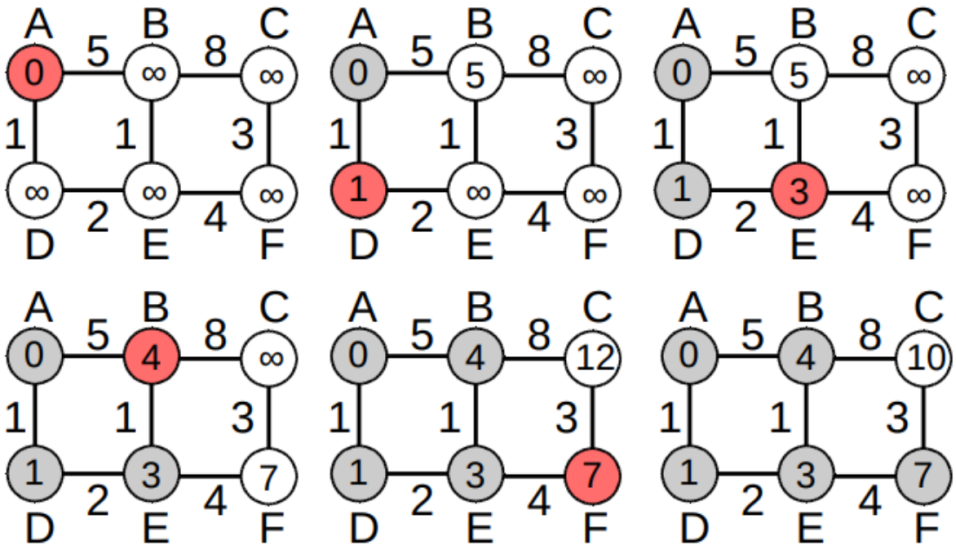
Случай для плотного графа

Создадим такие массивы

- `dist` — размером $v+1$. В нем для каждой вершины хранится текущая длина кратчайшего пути от начальной вершины s. (`d[s] = 0`, а все остальное — inf)
- `visited` — размером $v+1$. Хранит иформацию о том, обработана вершина или нет

Алгоритм состоит из $v-1$ шага. На каждом шаге делаем следующее

1. Выбираем необработанную вершину v с минимальным расстоянием от начальной вершины. Помечаем v как обработанную
2. Производим релаксацию: рассматриваем все вершины, соседние с v (вес ребра $(u,v)=w$) и для соседней вершины u пытаемся улучшить значение **dist[u]**, т.е. **dist[u]=min(dist[u], dist[v]+w)**



Красный — вершины, для которых будет произведена релаксация, *серый* — обработанные вершины

Сложность со списком смежности — $O(V^2 + E)$, так как мы на каждом из $v - 1$ шагов ищем минимум из V чисел для вершин и просматриваем каждое ребро один раз

Сложность с матрицей смежности — $O(V^2)$

Случай для разряженного графа

Reminder. Разряженным называется граф, у которого количество ребер значительно меньше, чем V^2

Алгоритм Дейкстры для разреженных графов работает следующим образом:

1. Инициализация:
   - Задаётся начальная вершина, от которой будут рассчитываться кратчайшие пути
   - Все расстояния до остальных вершин инициализируются как бесконечность, кроме начальной вершины, для которой расстояние равно нулю
   - Создаётся структура данных, например, `ordered set` или куча, для хранения и быстрого доступа к вершинам и их текущим кратчайшим расстояниям
2. Пока есть непосещённые вершины:
   - Выбирается вершина с минимальным текущим расстоянием (с использованием кучи или `ordered set`)
   - Эта вершина помечается как посещённая
   - Для каждой соседней вершины, смежной с текущей:
     - Рассчитывается новое потенциальное расстояние как сумма текущего расстояния до рассматриваемой вершины и веса ребра между текущей вершиной и соседней
     - Если новое расстояние меньше известного расстояния до соседней вершины:
       * Обновляется расстояние до соседней вершины
       * В `ordered set` или куче обновляется информация о расстоянии до этой вершины
3. Обновление структуры данных:
   - При обновлении расстояний до соседних вершин, в структуре данных (куче или `ordered set`) происходит операция удаления старого значения и добавления нового значения, что обеспечивает эффективность алгоритма
   - В случае использования кучи без изменения элементов (например, `priority queue`) просто добавляются новые значения, а устаревшие игнорируются

Процесс повторяется, пока не будут посещены все вершины или не будут определены кратчайшие пути до всех достижимых вершин

Сложность — $O(E \log V + V \log V)$. Узнаем минимум за $O(1)$ (удаление минимума тратит $O(\log V)$), изменяем элементы за $O(\log V)$. Для большинства графов сложность будет просто $O(E \log V)$, так как каждое из E ребер может привести к уменьшению пути и изменению значения в set

В итоге массив расстояний содержит кратчайшие пути от начальной вершины до всех остальных вершин

3.3 Алгоритм Форда-Беллмана

Создадим такой массив

- `dist` — размером $v + 1$. Массив кратчайших расстояний. (`d[s] = 0`, а все остальное — inf)

Алгоритм состоит из $v - 1$ шага. Пусть есть ребро (u, v) и его вес w. На каждом шаге перебираем все ребра и проводим релаксацию по этому ребру, то есть

```
if (dist[v] > dist[u] + w && dist[v] != inf){
    dist[v] = dist[u] + w
}
```

Применение алгоритма

Алгоритм хорош в поиске кратчайших путей от одной вершины до всех остальных на разряженных графах, если в графе есть отрицательные ребра

Сложность — $O(V \times E)$

3.4 Алгоритм Левита

Пусть d_i — текущая длина кратчайшего пути до вершины i. Изначально, все элементы d, кроме s-го равны бесконечности, `d[s] = 0`

Разделим вершины на три множества:

- M_0 — вершины, расстояние до которых уже вычислено (возможно, не окончательно),
- M_1 — вершины, расстояние до которых вычисляется. Это множество в свою очередь делится на две очереди:
  1. M_1' — основная очередь,
  2. M_1'' — срочная очередь;
- M_2 — вершины, расстояние до которых еще не вычислено.

Изначально все вершины, кроме s помещаются в множество M_2. Вершина s помещается в множество M_1 (в любую из очередей)

Работа алгоритма: выбирается вершина u из M_1. Если очередь M_1'' не пуста, то вершина берется из нее, иначе из M_1'. Для каждого ребра (u, v) и весом w возможны три случая:

- $v \in M_2$, то v переводится в конец очереди M_1'. И производится релаксация ребра (u, v): `d[v]= d[u] + w`,
- $v \in M_1$, то происходит релаксация ребра (u, v),
- $v \in M_0$. Если при этом `d[v] > d[u] + w`, то происходит релаксация ребра (u, v) и вершина v помещается в M_1''; иначе ничего не делаем

В конце шага помещаем вершину u в множество M_0

Алгоритм заканчивает работу, когда множество M_1 становится пустым

Сложность — $O(V^2E)$, так как при обработке каждой вершины приходится обрабатывать $n-1$ ребро

3.5 Алгоритм Флойда

Работаем с матрицей смежности, которую будем превращать в матрицу кратчайших расстояний

Алгоритм пройдет V шагов. Перед k-м шагом на позиции `dist[from][to]` стоит длина кратчайшего пути из from в to, проходящего только через промежуточные вершины с номерами, меньше k

На первом шаге матрица смежности равна матрице `dist`, а отсутствующие ребра помечены как inf

При переходе от $k-1$ шага к k нужно пересчитать матрицу расстояний, т.е. добавить в нее кратчайшие пути, проходящие через k. При пересчете пути из from в to возможны случаи:

1. Кратчайший путь из from в to не проходит через k, поэтому мы его не меняем
2. Кратчайший путь из from в to проходит через k: делим этот путь на две части — от from до k и от k до to. Тогда длина нового пути равна `dist[from][k] + dist[k][to]`

Применение алгоритма

Алгоритм прменяется в задаче поиска кратчайших путей от каждой вершины до каждой. Его использование проще в написании, чем алгоритм Дейкстры

Сложность — $O(V^3)$, т.е. перебор всевозможных from и to

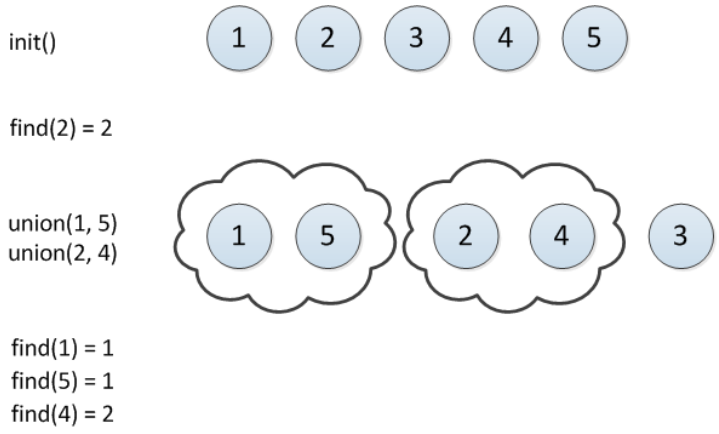
Требуется памяти — V^3, однако, если хранить две матрицы, тогда требуемая память сократиться до V^2

4 Задача union — find

4.1 Задача union — find

Пусть у нас есть N элементов, занумерованных от 1 до N. Изначально каждый элемент находится в своем отдельном множестве (также занумерованных от 1 до N). Нам необходимо поддерживать такие операции:

- `find(x)` — найти номер множетсва, в котором лежит x
- `union(x, y)` — объединить множества, содержащие x и y
- Можно добавить, но необязательно:
  - `make(x)` — создает новое множество, содержащее x



4.2 Наивная реализация

1. Создаем массив с индексами от 1 до N
   - Индекс означает номер элемента
   - Значение по индексу — номер множества, к которому относится элемент
2. Операция `find(x)`
   - Нужно вернуть содержимое ячейки с номером x
   - **Сложность** — $O(1)$
3. Операция `union(x, y)`
   - Узнаем номера множеств, содеражащих эти элементы (пусть это a и b соответственно)
   - Проходим по всему массиву и заменяем значения b на a
   - **Сложность одной операции** — $O(N)$
   - **Сложность объединения всех множеств** — $O(N^2)$

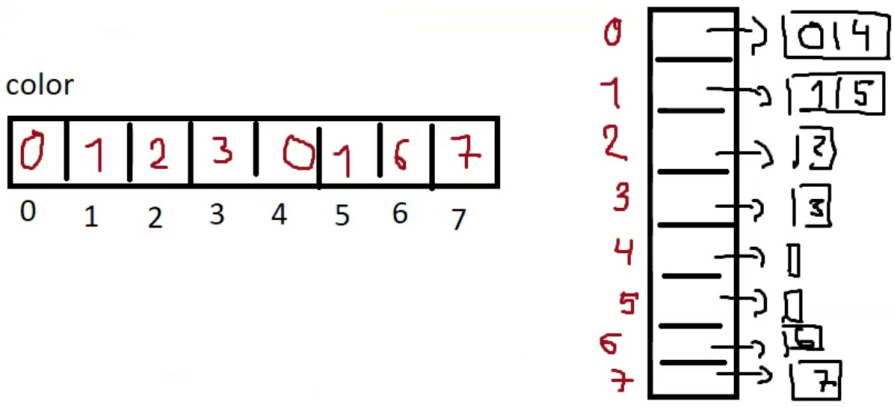
4.3 Реализация с использованием линейных списков

Идея этой реализации заключается в том, что мы заводим второй масиив, на индексах которого стоят номера множеств, а по индексу хранится список элементов соответствующего множества

Тогда при вызове `union(x, y)` мы делаем так: `max(x, y) += min(x, y)`

Сложность

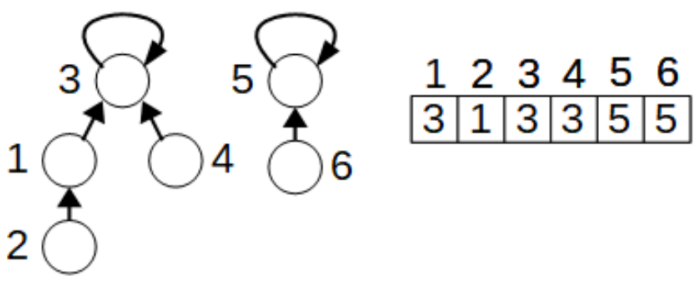
Так как мы храним второй масиив, то мы *теряем в памяти*, однако алгоритм будет работать *быстрее*, за $O(N \log N)$, так как делаем $O(\log N)$ шагов на кажом шаге $O(N)$ для объединения множеств



4.4 Система непересекающихся множеств

Идея заключается в хранении каждого множества в виде дерева

Мы имеем один единственный массив предков `p`. Индексы в нем — номера элементов, а по индексу хранится номер предка



В данном примере, петли означают, что это корень дерева, а в `p` на позицию с номером корня записывается значение самого корня

Вместо этого, в `p` на позицию корня можно поставить -1, суть не изменится

Тогда операции `find(x)` и `union(x, y)` можно реализовать так:

```
int find(x){
    while (p[v] != -1){
        v = p[v]
    }
    return v
}

void union(x, y){
    p[find(x)] = find(y)
}
```

Сложность — $O(N^2)$

4.4.1 Сжатие путей

Идея заключается в том, что когда мы найдём искомого предка p множества (с помощью `find(x)`), то запомним, что у вершины x и всех пройденных по пути вершин — именно этот предок p. Проще всего это сделать, перенаправив их parent[] на эту вершину p

Теперь в массиве предков для каждой вершины там может храниться не непосредственный предок, а предок предка, предок предка предка, и т.д

Сложность — $O(\log N)$

4.4.2 Объединение деревьев

Идея: нужно подвешивать дерево с большей глубиной к дереву с меньшей глубиной

Для каждого дерева храним его глубину в массиве

Сложность — $O(\log N)$

4.5 Алгоритм Краскала

- Отсортируем все ребра по возрастанию
- Каждая вершина находится в своем отдельном множестве
- В остовное дерево берем те ребра, которые соединяют разные множества вершин
- При добавлении ребра происходит объединение множеств

Алгоритм используется для построения минимального остовного дерева в графе

5 Дерево поиска

Бинарное дерево поиска — дерево, для которого выполняются следующие свойства:

- У каждой вершины не более двух детей
- Все вершины обладают *ключами*, на которых определена операция сравнения (например, целые числа или строки)
- У всех вершин *левого* поддерева вершины v ключи *не больше*, чем ключ v
- У всех вершин *правого* поддерева вершины v ключи *больше*, чем ключ v
- Оба поддерева — левое и правое — являются двоичными деревьями поиска

В *небинарных* (~~нетрадиционных~~) деревьях количество детей может быть больше двух, и при этом в «более левых» поддеревьях ключи должны быть меньше, чем «более правых»

Для работы с деревьями поиска нужно создать структуру

```
struct Node:
  T key                 // key of the node
  Node left             // pointer to the left child
  Node right            // pointer to the right child
  Node parent           // pointer to the parent
```

5.1 Поиск элемента

Нужна функция, прнимающая корень дерева и искомый ключ

- Для каждого узла сравниваем значение его ключа с искомым ключом
- Если ключи одинаковы, то функция возвращает текущий узел
- В противном случае функция вызывается рекурсивно для левого или правого поддерева

```
Node search(x : Node, k : T):
   if x == null or k == x.key
      return x
   if k < x.key
      return search(x.left, k)
   else
      return search(x.right, k)
```

Сложность в худшем случае — $O(h)$ (h — высота дерева), так как узлы, которые посещает функция образуют нисходящее дерево. Такое возможно, когда дерево является «бамбуком»

Сложность при оптимизации — $O(\log N)$. Если изменить способ хранения дерева, например сразу при проходе до какого-то ключа записать его как ключ ко всем вершинам в пути, то сложность снизится

5.2 Вставка элемента

Почти то же самое, что поиск элемента, но теперь при обнаружении у элемента отсутствия ребенка нужно подвесить на него вставляемый элемент

```
Node insert(x : Node, z : T):          // x - root of the subtree, z - key to be inserted
   if x == null
      return Node(z)                   // attach a Node with key = z
   else if z < x.key
      x.left = insert(x.left, z)
   else if z > x.key
      x.right = insert(x.right, z)
   return x
```

5.3 Удаление элемента

Рассмотрим три случая при рекурсивной реализации

1. Удаляемый элемент находится в *левом* поддереве текущего поддерева
   - тогда нужно рекурсивно удалить элемент из нужного поддерева
2. Удаляемый элемент находится в *правом* поддереве
   - тогда нужно рекурсивно удалить элемент из нужного поддерева
3. Удаляемый элемент находится в *корне*, то два случая:

- имеет два дочерних узла
  - нужно заменить его минимальным элементом из правого поддерева и рекурсивно удалить этот минимальный элемент из правого поддерева
- имеет один дочерний узел
  - нужно заменить удаляемый элемент потомком

```
Node delete(root : Node, z : T): // root of subtree, key to delete
  if root == null
    return root
  if z < root.key
    root.left = delete(root.left, z)
  else if z > root.key
    root.right = delete(root.right, z)
  else if root.left != null and root.right != null
    root.key = minimum(root.right).key
    root.right = delete(root.right, root.key)
  else
    if root.left != null
      root = root.left
    else if root.right != null
      root = root.right
    else
      root = null
  return root
```

6 Дерево отрезков

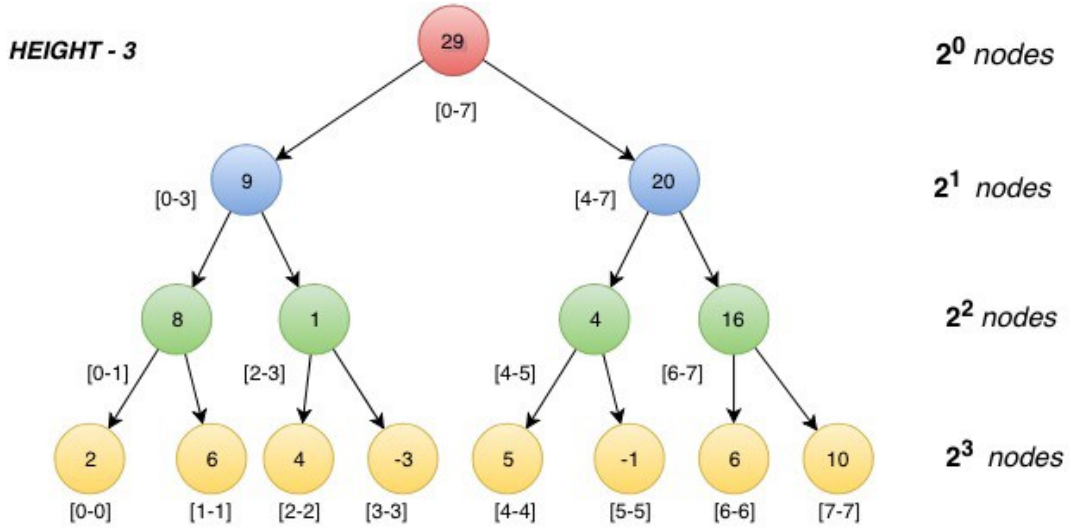
6.1 Дерево отрезков

Дан массив a из n целых чисел, и требуется отвечать на запросы двух типов:

1. Изменить значение в ячейке (т. е. реагировать на присвоение `a[k] = x`)
2. Вывести сумму элементов a_i на отрезке с l по r

Несколько изменим массив

- Посчитаем сумму всего массива и где-нибудь запишем
- Разделим его пополам, посчитаем сумму на половинах и тоже где-нибудь запишем
- Каждую половину разделим пополам ещё раз, и т.д., пока не придём к отрезкам длины 1



Корень этого дерева соответствует отрезку $[0, n)$, а каждая вершина (не считая листьев) имеет ровно двух сыновей, которые тоже соответствуют каким-то отрезкам

6.2 Операции на отрезке

Здесь представлены операции на отрезке, реализованные с помощью указателей. Эта реализация не самая эффективная, но самая простая, решающая большинство задач. Подробнее о других реализациях тут и тут

6.2.1 Построение

Строить дерево отрезков можно рекурсивным конструктором, который создает детей, пока не доходит до листьев

Если изначально массив не нулевой, то можно параллельно с проведением ссылок насчитывать суммы

Сложность — $O(n)$

```
Segtree(int lb, int rb) : lb(lb), rb(rb) {
    if (lb + 1 == rb)
        s = a[lb];
    else {
        int t = (lb + rb) / 2;
        l = new Segtree(lb, t);
        r = new Segtree(t, rb);
        s = l->s + r->s;
    }
}
```

6.2.2 Изменение

Для запроса прибавления будем рекурсивно спускаться вниз, пока не дойдем до листа, соответствующего элементу k, и на всех промежуточных вершинах прибавим x:

```
void add(int k, int x) {
    s += x;
    if (l){
        if (k < l->rb)
            l->add(k, x);
        else
            r->add(k, x);
    }
}
```

Сложность — $O(\log n)$

6.2.3 Сумма

Нужно делать разбор случаев, как отрезок запроса пересекается с отрезком вершины:

1. Если лежит полностью в отрезке запроса, вывести сумму
2. Если не пересекается с отрезком запроса, вывести ноль
3. else: рекурсивно запускаемся от детей

```
int sum(int lq, int rq) {
    if (lb >= lq && rb <= rq)
        return s;
    if (max(lb, lq) >= min(rb, rq))
        return 0;
    return l->sum(lq, rq) + r->sum(lq, rq);
}
```

Сложность — $O(\log n)$. На каждом уровне дерева отрезков, наша рекурсивная функция могла посетить максимум четыре отрезка; тогда, учитывая оценку $O(\log n)$ для высоты дерева, мы получаем асимптотику времени работы алгоритма

6.3 Применение дерева отрезков

Дерево отрезков может применяться в таких задачах, как

- поиск суммы на подотрезке
- поиск минимума/максимума на отрезкее
- массовые изменения массивов (например, добавление элемента ко всем элементам сразу)

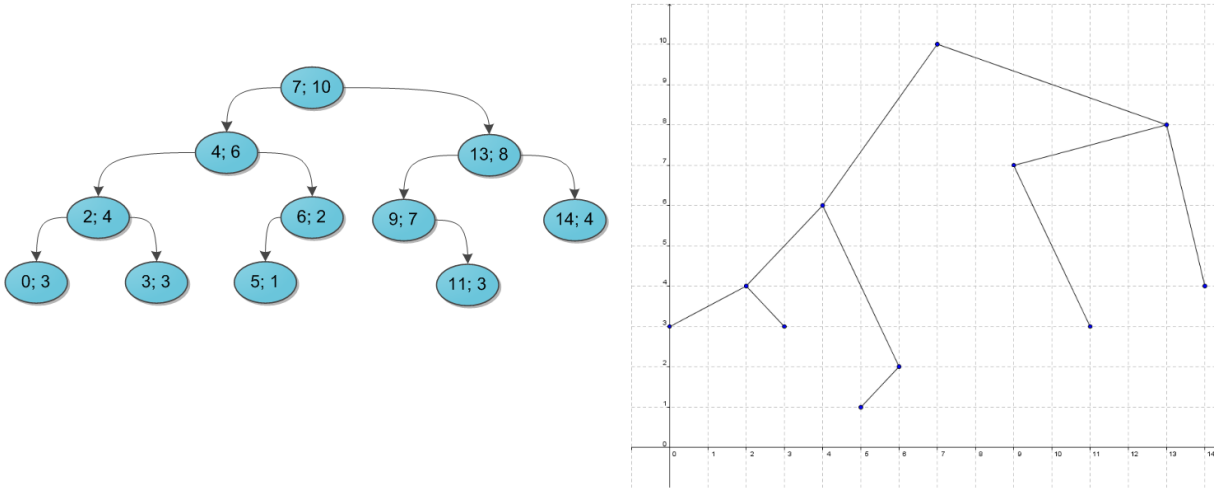
7 Декартово дерево

7.1 По явному ключу

Имеется бинарное деревео. Каждые его узел (обозначим как ключ x) дополняем случайным числом y. По ключам x образуется бинарное дерево поиска, а структура, полученная по y, обладает свойством двоичной кучи максимумов

Еще способ:

- Нанесём на плоскость набор из n точек. Их x назовем *ключом*, а y *приоритетом*
- Выберем самую верхнюю точку (с наибольшим y, а если таких несколько — любую) и назовём её *корнем*
- От всех вершин, лежащих слева (с меньшим x) от корня, рекурсивно запустим этот же процесс. Если слева была хоть одна вершина, то присоединим корень левой части в качестве левого сына текущего корня
- Аналогично, запустимся от правой части и добавим корню правого сына



Одно и то же дерево в обычном представлении и в виде декартового дерева

При добавлении второго ключа y представление дерева становится однозначным

Например, правым сыном корня будет самая верхняя вершина, находящаяся справа от корня, а левым — самая верхняя вершина слева от корня

Сложность — $O(\log N)$, так как координаты y выбираются случайно, то дерево получается сбалансированным и его высота равна $O(\log N)$

7.2 По неявному ключу

Работа с ДД по неявному пригодится в случае, если есть такие операции:

1. выводить сумму на произвольном отрезке
2. «переворачивать» произвольный отрезок, то есть переставлять элементы с l по r в обратном порядке, не меняя остальные

Так как во второй операции невозможно быстро поддерживать ключи актуальными, то делаем следующее:

- Убираем ключи
- Вместе с каждой вершиной храним размер ее поддерева
- Ключ (позицию элемента) восстанавливаем как число элементов слева от него
- Размер деревьев поддерживаем с помощью вспомогателной функции, вызываемой после каждого изменения дерева:

```
int size(Node *v) { return v ? v->size : 0; }

void upd(Node *v) { v->size = 1 + size(v->l) + size(v->r); }
```

Сложность — $O(\log N)$

7.3 Операции

Создадим структуру `Node`, в которой будем хранить ключ, приоритет и указатели на левого и правого сына

Сначала описывается реализация по явному ключу, после — по неявному

7.3.1 Merge

Принимает два дерева (два корня, L и R), про которые известно, что в левом все вершины имеют меньший ключ, чем все в правом. Их нужно объединить в одно дерево так, чтобы по ключам это было всё ещё дерево, а по приоритетам — куча

Сначала выберем, какая вершина будет корнем. Возьмем ту, у которой приоритет больше

Пусть это будет левый корень. Тогда левый сын корня итогового дерева должен быть левым сыном L. С правым сыном сложнее: возможно, его нужно смерджить с R. Поэтому рекурсивно сделаем `merge(l->r, r)` и запишем результат в качестве правого сына

```
Node* merge (Node *l, Node *r) {
    if (!l) return r;
    if (!r) return l;
    if (l->prior > r->prior) {
        l->r = merge(l->r, r);
        return l;
    }
    else {
        r->l = merge(l, r->l);
        return r;
    }
}
```

По неявному ключу операция не изменится, так как нигде не использует ключи

7.3.2 Split

Принимает дерево и ключ x, по которому его нужно разделить на два: L должно иметь все ключи не больше x, а R должно иметь все ключи больше x

В этой функции мы сначала решим, в каком из деревьев должен быть корень, а потом рекурсивно разделим его правую или левую половину и присоединим, куда надо:

```
typedef pair<Node*, Node*> Pair;

Pair split (Node *p, int x) {
    if (!p) return {0, 0};
    if (p->key <= x) {
        Pair q = split(p->r, x);
        p->r = q.first;
        return {p, q.second};
    }
    else {
        Pair q = split(p->l, x);
        p->l = q.second;
        return {q.first, p};
    }
}
```

По неявному ключу операция немного изменяется. Теперь нужно использовать позицию корня вместо ключа. `Split` теперь выполняет такую команду, как «вырежи первые k элементов»

```
pair<Node*, Node*> split(Node *p, int k) {
    if (!p) return {0, 0};
    if (size(p->l) + 1 <= k) {
        auto [l, r] = split(p->r, k - size(p->l) - 1);
        p->r = l;
        upd(p);
        return {p, r};
    }
    else {
        auto [l, r] = split(p->l, k);
        p->l = r;
        upd(p);
        return {l, p};
    }
}
```

7.4 Применение декартового дерева

Операции `Merge` и `Split` позволяют реализовать следующие операции

7.4.1 Вставка

Например, чтобы добавить число x в дерево, мы можем разрезать его по x через `split`, создать новую вершину с одним числом x, и склеить через `merge` три получившихся дерева

7.4.2 Сумма на отрезке

- При `merge` и `split` надо будет поддерживать эту сумму актуальной
- Можно написать вспомогательную функцию `upd`, которую будем вызывать при обновлении детей вершины
- В `merge` и `split` теперь можно просто вызывать `upd` перед тем, как вернуть вершину
- При запросе суммы нужно вырезать нужный отрезок и запросить эту сумму

7.4.3 Переворот

Добавим флаг `rev` в каждую вершину, означающий, что подотрезок был перевернут

Когда мы встретим такую вершину, мы поменяем местами ссылки на её детей, а им самим передадим эту метку

Тогда функция `reverse` будет такой: вырезаем нужный отрезок, меняем флаг