№4

Дано: ξ — абсолютная непрерывная величина, $\eta = 2\xi + 7$

Найти: $F_\eta(y), f_\eta(y)$

1. Найдем $F_\eta(y)$

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= \mathbb{P}\left(\{\eta \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{2\xi + 7 \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\xi \leqslant \frac{y-7}{2}\right\}\right) \\ &= F_\xi(y) \end{aligned}$$

2. Теперь продифференцируем функцию распределения и найдем функцию плотности

$$\begin{aligned} f_\eta(y) &= \frac{d}{dy} F_\eta(y) \\ &= \frac{d}{dy} F_\xi\left(\frac{y-7}{2}\right) \\ &= f_\xi\left(\frac{y-7}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

№5

Дано: ξ — абсолютная непрерывная величина, $\eta = 8 - 9\xi$

Найти: $F_\eta(y), f_\eta(y)$

Примечание. Так как ξ — абсолютная непрерывная величина, то $\mathbb{P}\left(\{\xi\}\right) \in B = \int\limits_B f_\xi(t)dt$. Тогда, можно записать, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{\xi = a\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{\xi \in [a;a]\}\right) \\ &= \int_a^a f_\xi(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Найдем $F_\eta(y)$:

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= \mathbb{P}\left(\{\eta \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{8 - 9\xi \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\xi \geqslant \frac{8-y}{9}\right\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\xi < \frac{8-y}{9}\right\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\xi \leqslant \frac{8-y}{9}\right\}\right) \\ &= 1 - F_\xi\left(\frac{8-y}{9}\right) \end{aligned}$$

Тогда, $f_\eta(y) = f_\xi\left(\frac{8-y}{9}\right) \cdot \frac{1}{9}$

Определение. Говорят, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, $\xi \sim U(a;b)$, если ξ имеет плотность вида $f_\xi(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leqslant t \leqslant b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left[\xi\right] = \frac{a+b}{2},\ \mathbb{D}\left[\xi\right] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

№6

Дано: $\xi \sim U(0;1)$, $\eta = 1 - 2\xi$

a)

В данной ситуации, $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

Тогда,

$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= \mathbb{P}\left(\{\eta \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{1 - 2\xi \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left\{\xi \geqslant \frac{1-y}{2}\right\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\xi < \frac{1-y}{2}\right\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\xi \leqslant \frac{1-y}{2}\right\}\right) \\ &= 1 - F_\eta\left(\frac{1-y}{2}\right) \\ &= 1 - \begin{cases} 0, & \frac{1-y}{2} < 0 \\ \frac{1-y}{2}, & 0 \leqslant \frac{1-y}{2} \leqslant 1 \\ 1, & \frac{1-y}{2} > 1 \end{cases} \\ &= 1 - \begin{cases} 0, & y > 1 \\ \frac{1-y}{2}, & y \in [-1;1] \\ 1, & y < -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & y > 1 \\ \frac{1+y}{2}, & y \in [-1;1] \\ 0, & y < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

b)

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy}F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ \frac{1}{2}, & y \in [-1;1] \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

Получается, что $\eta \sim U(0;1)$

Вывод: если какая-то случайная величина ξ имеет равномерное распределение, а величина η зависит от ξ, то η также имеет равномерное распределение

c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\{\eta \in [-0.5; 0.5]\}\right) &= \int_{-0.5}^{0.5} f_\eta(y)dy \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{2}dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

d)

трубется найти медиану M

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{M} f_\xi(y)dy = 0.5 \\ \int\limits_{-1}^{M} \frac{1}{2}dy = 0.5 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2}(M+1) = 0.5 \Longrightarrow M = 0$$

№7

$f_\xi = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ \frac{3}{x^4}, & x \geqslant 1 \end{cases}, \ \eta = \ln \xi$

Пусть $x < 1$, тогда $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt \Longrightarrow F_\xi(x) = 0$

Пусть $x \geqslant 1$, тогда

$$\begin{aligned}F_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{1} f_\xi(t)dt + \int_{1}^{x} f_\xi(t)dt \\ &= 3 \cdot \frac{t^{-3}}{-3}\Big|_{t=1}^{t=x} \\ &= 1 - \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

Тогда, $F_\xi = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^3}, & x \geqslant 1 \end{cases}$

a) Найти $F_\xi(y)$

$$\begin{aligned}F_\eta(y) &= \mathbb{P}\left(\{\eta \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{\ln \xi \leqslant y\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\{\xi \leqslant e^y\}\right) \\ &= F_\xi(e^y) \\ &= \begin{cases} 0, & e^y > 1 \\ 1 - e^{-3y}, & e^y \geqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-3y}, & y \geqslant 0 \end{cases}\end{aligned}$$

b)

Дано $f_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 3e^{-3y}, & y \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \eta \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 3)$

№8

Имеется случайная величина $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geqslant 0 \end{cases}, F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Пример. Пусть $\eta = \lceil \xi \rceil$ — наименьшее целое число, большее, чем ξ

Найдем $\mathbb{E}[\eta]$. Так как ξ — абсолютная непрерывная величина, то $\mathbb{P}(\{\eta = 0\}) = \mathbb{P}(\{\xi = 0\}) = 0$

Пусть имеется $k = 1, 2, 3, \ldots$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\eta = k\}) &= \mathbb{P}(\{\xi \in [k-1; k]\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\xi \leqslant k\} \setminus \{\xi \leqslant k-1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\xi \leqslant k\}) - \mathbb{P}(\{\xi \leqslant k-1\}) \\ &= F_\xi(k) - F_\xi(k-1) \\ &= \left[1 - e^{-k}\right] - \left[1 - e^{-(k-1)}\right] \\ &= e^{-(k-1)} - e^{-k} \\ &= e^{-(k-1)} \cdot \underbrace{(1 - e^{e^{-1}})}_{p, q = 1 - p = e^{-1}} \\ &= q^{k-1} p \end{aligned}$$

Значит, $\eta \sim \mathrm{Geom}(p = 1 - e^{-1}) \Longrightarrow \mathbb{E}[\eta] = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{1 - e^{-1}}$