Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 7 октября 2024 г.

Содержание

1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i \in \{1, n\}\} \\ &= [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$
2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\, I_i, I_j$ не имею общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

   $$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

   $$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \leq i \leq k}$

Определение. Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi\}_{i=1}^{k}$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I ($f : I \to \mathbb{R}$), если

$$\begin{aligned}\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta :\\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon\end{aligned}$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \underset{I}{\int \ldots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.5 Пример константной функции

Пуусть у нас есть функция $f = \text{const}$

$$\begin{aligned}\forall (\mathbb{T}, \xi) :\ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^{k} \text{const} \cdot |I_i|\\ = \text{const} \cdot |I| \Longrightarrow \int_I f(x) \mathrm{d}x = \text{const} \cdot |I|\end{aligned}$$

1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \ldots, n}\ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall\, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \overline{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall\, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot |I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

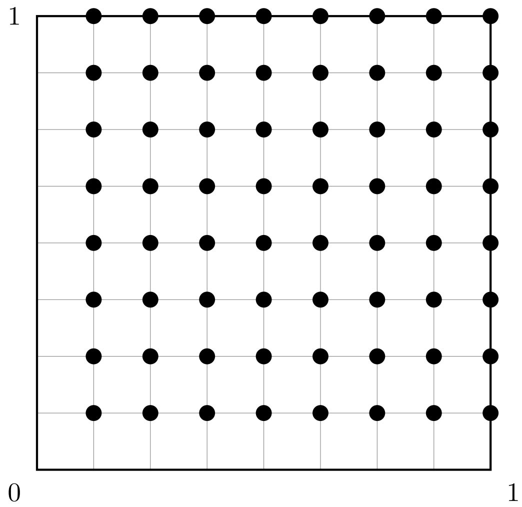
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i верхние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy,\ |I| = \dfrac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}\sigma(f,\mathbb{T},\xi) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\cdot j\\ &= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j\\ &= \frac{n(n+1)}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$



n штук

2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

2.1 Свойства кратных интегралов

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x = \alpha\int_I f\mathrm{d}x + \beta\int_I g\mathrm{d}x$$

Доказательство.

(a)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I):\quad &\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_1 > 0\ \forall(\mathbb{T},\Xi)\colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1\\ &|\sigma(f,\mathbb{T},\Xi) - \int_I f\mathrm{d}x| =: |\sigma_f - A_f| < \varepsilon\end{aligned}$$

(b) По определению:

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{R}(I):\quad &\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta_2 > 0\ \forall(\mathbb{T},\Xi)\colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2\\ &|\sigma(g,\mathbb{T},\Xi) - \int_I g\mathrm{d}x| =: |\sigma_g - A_g| < \varepsilon\end{aligned}$$

(c) Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (a) и (b) верно для $\delta \implies$

$$|\sigma_{\alpha f+\beta g} - A_{\alpha f+\beta g}| = |\alpha\sigma_f + \beta\sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leqslant |\alpha|\cdot|\sigma_f - A_f| + |\beta|\cdot|\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|)\,\varepsilon$$

□

2. **Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\ f|_I \leqslant g|_I \implies \int_I f\mathrm{d}x \leqslant \int_I g\mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon\,(\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\delta : \forall(\mathbb{T},\Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\,\varepsilon\ \ \forall\,\varepsilon > 0 \implies A_f \leqslant A_g$$

□

3. **Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f||I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_I f \mathrm{d}x &\quad \leqslant \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f||I| \leqslant \int_I f \mathrm{d}x &\qquad \leqslant \sup_I |f||I| \end{aligned}$$

□

2.2 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$, тогда

$$\exists \underbrace{A_f}_{\text{конечное}} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \colon |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Значит, для $\varepsilon = 1$ это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f - \text{ ограничена}$$

2. Пусть f — неограничена на I, но $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \, \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K \; \exists i_0 : f$ неограничена на I_{i_0}.
Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i)|I_i| + f(\xi_{i_0})|I_{i_0}|$$

Тогда, σ_f может принимать любые сколь угодно большие (малые) значения, в зависимости от I_{i_o} $\implies$ **противоречие**

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

2.3 Множество меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \, \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

1. $M \subset \bigcup\limits_i I_i$ и
2. $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon \;\; \forall \, \varepsilon < 0$

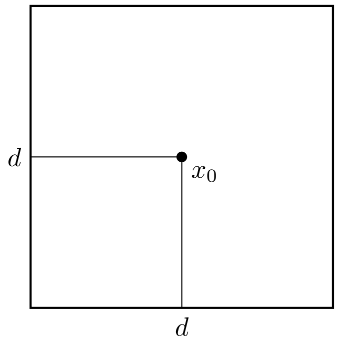
Пример: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — множество меры нуль по Лебегу в $\mathbb{R}^n$

Доказательство. Пусть $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$. Покроем точку замкнутым брусом, причем

$$I = [x_{01} - d, x_{01} + d] \times \ldots \times [x_{0n} - d, x_{0n} + d]$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists I : |I| = (2d)^n < \varepsilon \implies d < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}$$

Значит, точка является множеством меры нуль по Лебегу



2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры 0 можно использовать *открытые* брусы

   Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы $M \subset \bigcup\limits_i I_i$, то есть $M \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры 0 по Лебегу

   Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — замкнутые брусы I_i.

   $$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i,\; |I_i| = |\bar{I}_i|$$

   Если

   $$\forall\, \varepsilon \; \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

   то

   $$\forall\, \varepsilon \; \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

   Докажем в обратную сторону. Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

   $$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times [a_n^i, b_n^i], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

   Пусть

   $$D_i = \left(\frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i)\right)$$

   $$\implies V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon$$

   □

2. M — множество меры нуль, $L \subset M \implies L$ — множество меры нуль

   Доказательство. $L \subset M$ и $\forall\, \varepsilon > 0 \exists$ не более чем счетное $\{I_i\}$:

   $$L \subset M \subset \bigcup_i I_i \text{ и } \sum |I + i| < \varepsilon$$

   по транзитивности это верно и для L □

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль

   Доказательство. Пусть $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное,[1] так как $\forall i$ M_k — множество меры нуль, то $\forall i, \forall\, \varepsilon_i$ $\exists$ не более чем счетное $\{I_i^k\}$:

   $$M_k \subset I_i^k \text{ и } \sum |I_i^k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} \forall\, \varepsilon_k > 0$$

   Рассмотрим $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, тогда $M \subset \bigcup_{i,k} I_i^k$ и

   $$\sum_{i,k} \underbrace{|I_i^k|}_{>0} < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

   □

[1] Для конечного доказательство тривиально

- **Пример.** Пусть $\{M_i\}_{i=1}^N$ — конечный набор

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1}\varepsilon < \varepsilon$$
$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

3 Топология в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внешней* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

Пример. $M = [0;1)$. тогда
$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 :\ (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \varnothing \land B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \varnothing$$

Обозначение. ∂M — множетсво всех граничных точек M

Пример. $M = [0;1) \Longrightarrow x = 0;1$ — граничные

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *изолированной* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \varnothing$$

Пример. $M = [0;1] \cup \{3\} \Longrightarrow x = 3$ — изолированная

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 :\ B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Точки прикосновения = изолированные точки $\oplus$ предельные точки

Определение. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием* M и обозначается как $\overline{M}$

Пример. $M = (0;1) \cup (1;2] \Longrightarrow \overline{M} = [0;2]$

Пример. $M = \{x \in [0;1] : x \in \mathbb{Q}\} \Longrightarrow \overline{M} = [0;1]$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

Определение. Множество $M \subset R^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

Пример. $\begin{cases} (0;1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty;0) \cup (1;+\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

Определение. Множество $K \in \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из $\forall$ его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

Примечание. Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то K — не компакт

Пример. Пусть $M = (0,1)$ покроем $\left\{A_n = \left(0; 1 - \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

При $n \to \infty$ $M \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, но $\forall$ фиксированного N: $M \not\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow$ не компакт

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

3.1 Критерий замкнутости

Теорема. M — замкнуто $\Longleftrightarrow$ M содержит **все** свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

1. *(Необходимость)* Докажем $\Longrightarrow$ от противного

   - Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
   - По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто $\Longrightarrow$ все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

   $$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \overset{\circ}{B_r(x_0)} \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r (x_0) \cap M = \varnothing$$

   Пришли к противоречию $\Longrightarrow$ M содержит все свои предельные точки $\square$

2. *(Достаточность)* Докажем $\Longleftarrow$

   Пусть y_0 — не является предельной для M, то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \exists r > 0$:

   $$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r (x_0) \cap M = \varnothing \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Longrightarrow B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

   $\Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Longrightarrow$ M — замкнуто по определению $\square$