Рекомендованная литература

Б.А.Севастьянов. Курс ТВиМС

Д.А.Борзых. Элементраное введение в функан (гл.1)

Программа

Сем1: множества

Сем2: алгебра, σ-алгебры множеств

Сем3: вероятностная мера

Сем4: условная вероятность, формула умножения вер-ти, Байес, полная вер-ть

№1

$A = \{\heartsuit, \diamond\}, B = \{\{\heartsuit\}, \{\diamond\}\}, C = \{\heartsuit, \diamond, \{\heartsuit\}, \{\diamond\}\}, D = \{\heartsuit, r\{\heartsuit\}, \{\diamond\}, \{\heartsuit, \diamond\}\}$

$|A| = 2$

$|B| = 2$

$|C| = 4$

$|D| = 5$

№2

$A = \{\heartsuit, \diamond\}, B = \{\{\heartsuit\}, \{\diamond\}\}, C = \{\heartsuit, \diamond, \{\heartsuit\}, \{\diamond\}\}, D = \{\heartsuit, r\{\heartsuit\}, \{\diamond\}, \{\heartsuit, \diamond\}\}$

Верно ли, что:

$a)$ $A \subseteq B$ — нет, так как $\heartsuit \in A, \heartsuit \notin B$

$b)$ $\{\heartsuit\} \in A$ — нет

$c)$ $\{\heartsuit\} \subseteq A$ — да

$d)$ $\heartsuit \in A$ — да, более того, пункт c равносилен пункту d

$e)$ $\heartsuit \subseteq A$ — нет, так как $\heartsuit$ не является множеством

$f)$ $\{\heartsuit\} \in B$ — да

$g)$ $\{\heartsuit\} \subseteq B$ — нет, так как $\{\heartsuit\}$ - мешочек, а в B нет мешочка с $\heartsuit$

$h)$ $\heartsuit \in B$ — нет

$i)$ $\{\heartsuit\} \in C$ — да

$j)$ $\{\heartsuit\} \subseteq C$ — да

$k)$ $\heartsuit \in C$ — да

$l)$ $A \in C$ — нет, так как в C нет мешка равного A

$m)$ $A \subseteq C$ — да

$n)$ $A \in D$ — да

$o)$ $A \subseteq D$ — да

p) $B \in D$ — нет

q) $B \subseteq D$ — да

№3

a) $|\varnothing| = 0$

b) $|\{\varnothing\}| = 1$

c) $|\{\varnothing, \varnothing\}| = 1$

d) $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$

e) $|\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}\}| = 3$

№4. Формулы де Моргана

- $\underbrace{A \cup B}_{LHS} = \underbrace{(A^c \cap B^c)^c}_{RHS}$
  $A^c = \Omega \setminus A$

  $$\omega \in LHS \iff (\omega \in A \text{ or } \omega \in B) \iff (w \notin A^c \text{ or } w \notin B^c) \iff$$
  $$\iff (\omega \notin A^c \cap B^c) \iff (\omega \in (A^c \cap B^c)^c)$$

- $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$

  $$\omega \in LHS \iff (\omega \in A \text{ and } \omega \in B) \iff (\omega \notin A^c \text{ and } \omega \notin B^c) \iff$$
  $$\iff (\omega \notin A^c \cap B^c) \iff (\omega \in (A^c \cup B^c)^c)$$

- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i^c\right)^c$, где I — произвольное множество индексов
  Заметим, что
  $$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \exists i \in I : \omega \in A_i\}$$
  $$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\omega \in \Omega : \forall i \in I : \omega \in A_i\}$$

  $$\omega \in LHS \iff (\exists i \in I : \omega \in A_i) \iff (\exists i \in I : \omega \notin A^c) \iff \left(\omega \notin \bigcap_{i \in A} A_i^c\right) \Longleftarrow \omega \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i^c\right)^c$$

№5

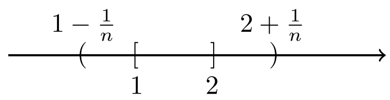
Доказать, что $\underbrace{A \triangle B}_{LHS} \subseteq \underbrace{\overbrace{(A \triangle B))}^{(A \setminus C) \cup (C \setminus A)} \quad \cup \quad \overbrace{(C \triangle B)}^{(C \setminus B) \cup (B \setminus C)}}_{RHS}$

$$\omega \in A \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega \in A \setminus B \\ \omega \in B \setminus A \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \omega \in A \cap B^c \\ \omega \in B \cap A^c \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \omega \in A \cap B^c \cap C \Longrightarrow \omega \in RHS \\ \omega \in A \cap B^c \cap C^c \Longrightarrow \omega \in RHS \\ \omega \in B \cap A^c \cap C \Longrightarrow \omega \in RHS \\ \omega \in B \cap A^c \cap C^c \Longrightarrow \omega \in RHS \end{array}\right. \end{array}\right.$$

№6

a) $[1;2] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}; 2 + \dfrac{1}{n}\right)$

Очевидно, что $[1;2] \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}; 2 + \dfrac{1}{n}\right)$, визуально:



$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}; 2 + \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \ 1 - \frac{1}{n} < x < 2 + \frac{1}{n}$$
$$\Longrightarrow 1 = \lim_{n \mapsto \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant x \leqslant \lim_{n \mapsto \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

Таким образом, $x \in [1;2]$

b) $(1;2) = \bigcap\limits_{n=2}^{\infty} \left[1 + \dfrac{1}{n}; 2 - \dfrac{1}{n}\right]$

Включение справо налево очевидно

Предположим, что $x \in LHS \Longrightarrow 1 < x < 2$

Пусть $\varepsilon := \min(x-1; 2-x) > 0$

Заметим, что

$$\lim_{n \mapsto \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$
$$\lim_{n \mapsto \infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$$

Также заметим, что $\exists N \in \mathbb{N}:$

$$-\varepsilon < 1 + \frac{1}{n} - 1 < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < 2 - \frac{1}{n} - 2 < \varepsilon$$

Из первого следует, что $1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon \leqslant 1 + (x-1) = x$

Из второго получим, что $2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon \geqslant 2 - (2-x) = x$

Отсюда, получаем, что $x \in \left[1 + \frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}\right] \subseteq RHS$

№9

Хотим доказать, что $(0;1)$ — не является счетным

Предположим противное, пусть $(0;1)$ — счетный. Значит, можно пронумеровать каждое число в этом множестве можно пронумеровать

Воспользуемся теоремой про объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств: Обдединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно

Пусть есть семейство счётных множеств $A_0, A_1, A_2, \ldots$, не более чем счётное. Расположим элементы каждого множества семейства в последовательность и объединим эти последовательности в дважды бесконечную таблицу:

$$\begin{array}{lccccc} A_0: & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots \\ A_1: & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ A_2: & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ A_3: & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \end{array}$$

В первой строке мы последовательно выписали элементы A_0, во второй — элементы A_1 и так далее. Если какое-то A_i конечно, то часть позиций в строке остаётся незаполненной. Аналогично, часть строк в таблице может быть незаполненной, если семейство конечно

Теперь соединяем эти последовательности в одну, двигаясь по диагоналям

$$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30}, \dots$$

и пропуская незаполненные клетки. В полученной последовательности присутствуют все элементы объединения. В силу свойств счетных множеств получаем конечное или счётное множество. $\square$

Интересная визуализация и объяснение этого подхода на канале Veritasium (на английском) и Vert Dider (на русском)