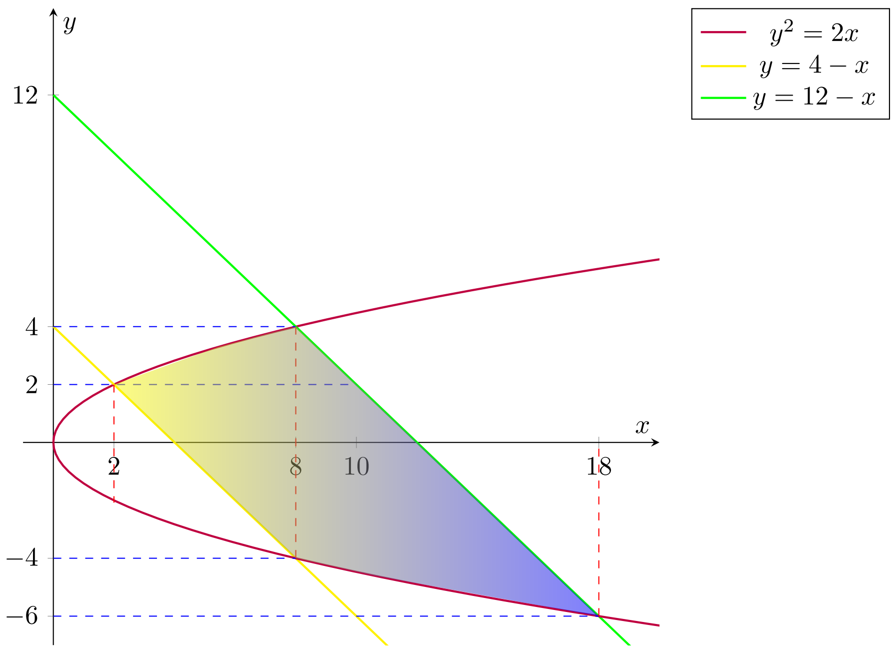
Задание №3

Имеется компакт D, край которого задан уравнениями

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = 4 - x \\ y = 12 - x \end{cases}$$

Требуется вычислить $\displaystyle\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Есть два варианта изобразить график на плоскости: с помощью линий уровня или плотностью точек. Воспользуемся вторым



Здесь и далее градиент от желтого к синему означает увеличение плотности точек в области

Чтобы вычислить интеграл, нам нужно «нарезать» график по осям Ox и Oy. Синие пунктирные линии показывают *горизонтальную* нарезку, а красные — *вертикальную*

Рассмотрим горизональную нарезку

Горизонтальная нарезка означает, что мы меняем x при каких-то фиксированных y. Ясно, что у нас имеется всего **три** области, в которых мы будем менять переменную: $[-6;-4]$, $[-4;2]$, $[2;4]$, тогда искомый интеграл представим в виде:

$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underbrace{\int_{-6}^{-4}\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{I_1} + \underbrace{\int_{-4}^{2}\int_{4-y}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{I_2} + \underbrace{\int_{2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{I_3}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-6}^{-4} \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=12-y} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-6}^{-4} \left(\left(\frac{(12-y)^2}{2} + (12-y)y\right) - \left(\frac{y^4}{8} + \frac{y^3}{2}\right)\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-6}^{-4} \left(72 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \left(72y - \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8}\right)\Bigg|_{-6}^{-4} \\
&= \frac{1198}{15}
\end{aligned}
$$

Аналогичные вычисления производятся с интегралами I_2, I_3, после чего складываем и получаем результат

Рассмотрим вертикальную нарезку

$$
\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_2^8 \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_8^{16} \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x
$$

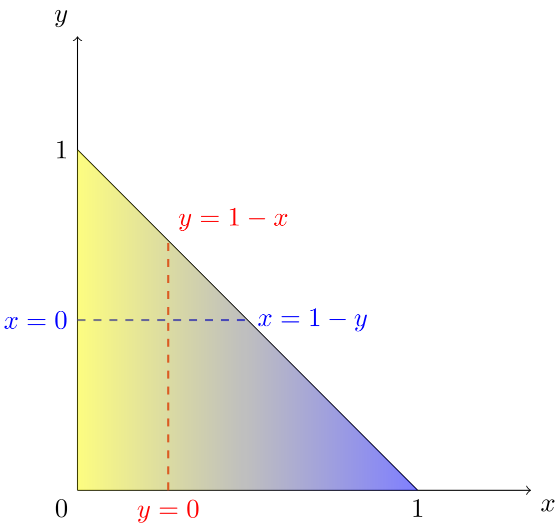
Заметим, что теперь во внутреннем интеграле стоит интегрирование по y, потому что мы делаем вертикальную нарезку

Задание №4а

Напомним, что $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ называется *неберущимся*

Дан интеграл $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

Пусть $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1}\mathrm{d}x - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1}\mathrm{d}y = I$, тогда



$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}x\ e^{-x^2+2x+1}\Big|_{y=0}^{1-x} \\
&= \int_0^1 e^{-x^2+2x+1}(1-x)\mathrm{d}x - 0 \\
&= \int_0^1 -e^{-(x-1)^2+2}(1-x)\mathrm{d}(x-1)
\end{aligned}
$$

пусть $x - 1 = t$, тогда $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(x-1)$

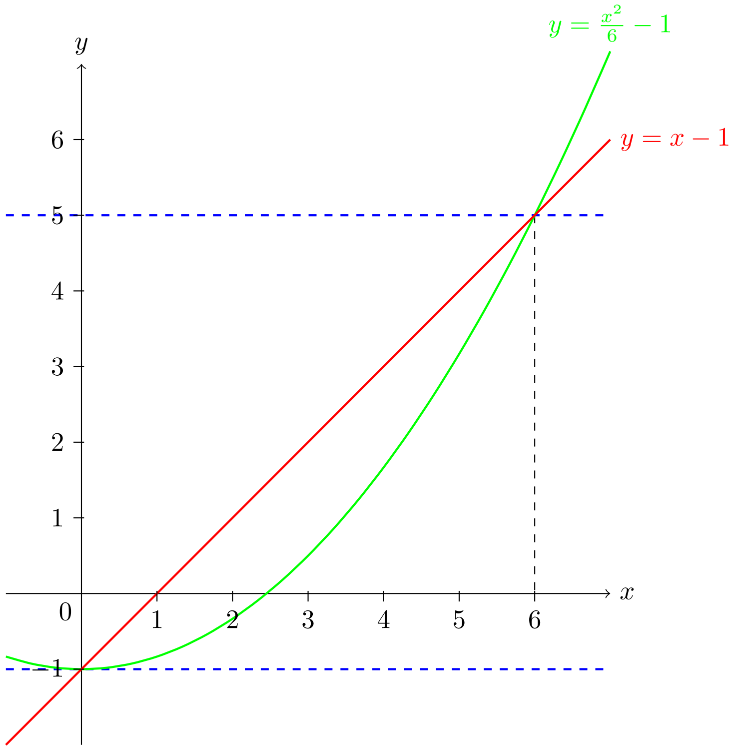
$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^0 -e^{-t^2+2}t\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^0 e^{-t^2}e^2(-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^0 -2te^{-t^2} \cdot \frac{1}{2}e^2\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}e^2(e^{-t^2})\Big|_{t=-1}^{t=0} \\
&= \frac{1}{2}e(e-1)
\end{aligned}
$$

Задание №2a

Дан двойной интеграл: $\int_0^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y$

Чтобы изменить порядок интегрирования взглянем на левый интеграл. Видим, что мы меняем x, а границы образованы точками пересечения графиков. Значит, чтобы изменить интегрирование на y возьмем ординаты точек пересечения

В правом интеграле нужно просто выразить x через y



Таким образом, получим, что $\int_0^6 \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^5 \mathrm{d}y \int_{y+1}^{\sqrt{6y+6}} f(x,y)\mathrm{d}x$

Задание №4b

Заметим, что x является константой относительно y в правом интеграле, поэтому можем внести x в интеграл по $\mathrm{d}y$, тогда получим:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\mathrm{d}x \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y &= \int_0^\pi x \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \int_x^\pi x\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \int_0^y x\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin y \cdot y}{2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$