# Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 9 октября 2024 г.

## Содержание

# 1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

## 1.1 Брус. Мера бруса

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i \in \{1, n\}\}$$
$$= [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

**Примечание.** $I = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

## 1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$
2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\ I_i, I_j$ не имею общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

   $$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть $I$ — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

   $$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

## 1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

**Определение.** $I$ — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где $I_i$ попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса $I$

**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$
$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

**Определение.** Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \leq i \leq k}$

**Определение.** Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi\}_{i=1}^{k}$ будем называть **отмеченными точками**

**Определение.** Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть $I$ — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции $f$ на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

**Определение.** Функция $f$ интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе $I$ ($f : I \to \mathbb{R}$), если

$$\begin{aligned} \exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon \end{aligned}$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \underset{I}{\int \dots \int} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

## 1.5 Пример константной функции

Пуусть у нас есть функция $f = \mathrm{const}$

$$\begin{aligned} \forall (\mathbb{T}, \xi) : \ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{const} \cdot |I_i| \\ &= \mathrm{const} \cdot |I| \Longrightarrow \int_I f(x) \mathrm{d}x = \mathrm{const} \cdot |I| \end{aligned}$$

## 1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Доказательство.** $\forall \, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \overline{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall \, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot |I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

## 1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

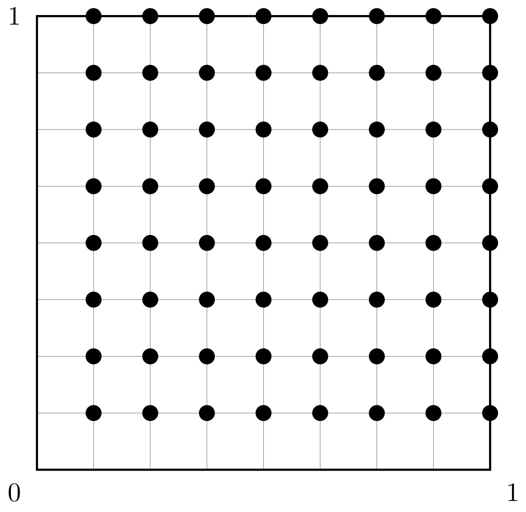
$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек $\xi_i$ верхние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy,\ |I| = \dfrac{1}{n^2}$




$n$ штук

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\cdot j \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{n(n+1)}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$

# 2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

## 2.1 Свойства кратных интегралов

1. **Линейность.**
$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
И верно, что:
$$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$
**Доказательство.**
   (a)
$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I): \quad &\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_1 > 0 \ \forall (\mathbb{T}, \Xi)\colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \\ &|\sigma(f, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I f \mathrm{d}x| =: |\sigma_f - A_f| < \varepsilon \end{aligned}$$
   (b) По определению:
$$\begin{aligned} g \in \mathcal{R}(I): \quad &\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_2 > 0 \ \forall (\mathbb{T}, \Xi)\colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \\ &|\sigma(g, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I g \mathrm{d}x| =: |\sigma_g - A_g| < \varepsilon \end{aligned}$$
   (c) Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (a) и (b) верно для $\delta \implies$
$$|\sigma_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}| = |\alpha \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \, \varepsilon$$
□

2. **Монотонность**
$$f, g \in \mathcal{R}(I); \ f|_I \leqslant g|_I \implies \int_I f \mathrm{d}x \leqslant \int_I g \mathrm{d}x$$
**Доказательство.**
$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon \, (\forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$
Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:
$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\,\varepsilon \ \ \forall \, \varepsilon > 0 \implies A_f \leqslant A_g$$
□

3. **Оценка интеграла (сверху)**
$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f| |I|$$
**Доказательство.** По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)
$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) &\implies f \text{ Ограничена на } I \\ &\implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$
Тогда,
$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \quad &\leqslant \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f| |I| \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \quad &\leqslant \sup_I |f| |I| \end{aligned}$$
□

### 2.2 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть $I$ — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

**Доказательство.** От противного.

1. Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$, тогда

$$\exists \underbrace{A_f}_{\text{конечное}} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \colon |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

   Значит, для $\varepsilon = 1$ это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f - \text{ ограничена}$$

2. Пусть $f$ — неограничена на $I$, но $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{K}\ \exists i_0 : f$ неограничена на $I_{i_0}$.
   Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i)|I_i| + f(\xi_{i_0})|I_{i_0}|$$

   Тогда, $\sigma_f$ может принимать любые сколь угодно большие (малые) значения, в зависимости от $I_{i_o}$ $\implies$ **противоречие**

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

### 2.3 Множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

1. $M \subset \bigcup\limits_i I_i$ и
2. $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon\ \ \forall \varepsilon < 0$

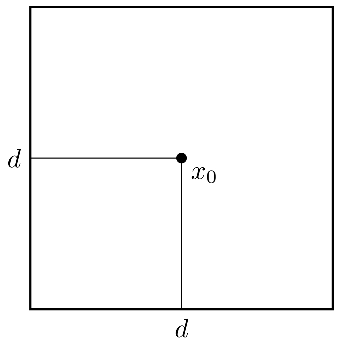
**Пример:** $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — множество меры нуль по Лебегу в $\mathbb{R}^n$

**Доказательство.** Пусть $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$. Покроем точку замкнутым брусом, причем

$$I = [x_{01} - d, x_{01} + d] \times \ldots \times [x_{0n} - d, x_{0n} + d]$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I : |I| = (2d)^n < \varepsilon \implies d < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}$$

Значит, точка является множеством меры нуль по Лебегу




### 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры 0 можно использовать *открытые* брусы

   **Доказательство.** Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы $M \subset \bigcup\limits_i I_i$, то есть $M \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры 0 по Лебегу

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — замкнутые брусы $I_i$.

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i,\ |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если
$$\forall \varepsilon\ \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$
то
$$\forall \varepsilon\ \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times [a_n^i, b_n^i], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Пусть

$$D_i = \left(\frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon$$ □

2. $M$ — множество меры нуль, $L \subset M \implies L$ — множество меры нуль

   **Доказательство.** $L \subset M$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists$ не более чем счетное $\{I_i\}$:

   $$L \subset M \subset \bigcup_i I_i \text{ и } \sum |I + i| < \varepsilon$$

   по транзитивности это верно и для $L$ □

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль

   **Доказательство.** Пусть $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное,[1] так как $\forall i\ M_k$ — множество меры нуль, то $\forall i, \forall \varepsilon_i\ \exists$ не более чем счетное $\{I_i^k\}$:

   $$M_k \subset I_i^k \text{ и } \sum |I_i^k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} \forall \varepsilon_k > 0$$

   Рассмотрим $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, тогда $M \subset \bigcup_{i,k} I_i^k$ и

   $$\sum_{i,k} \underbrace{|I_i^k|}_{>0} < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

   □

   - **Пример.** Пусть $\{M_i\}_{i=1}^{N}$ — конечный набор

     $$\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1}\varepsilon < \varepsilon$$
     $$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

[1] Для конечного доказательство тривиально

# 3 Топология в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

**Определение.** Точку $x_0 \in M$ будем называть *внешней* точкой $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

**Пример.** $M = [0; 1)$. тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

**Определение.** Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой $M$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \ (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \varnothing \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \varnothing$$

**Обозначение.** $\partial M$ — множетсво всех граничных точек $M$

**Пример.** $M = [0; 1) \Longrightarrow x = 0; 1$ — граничные

**Определение.** Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *изолированной* точкой $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B_\varepsilon} (x_0) \cap M = \varnothing$$

**Пример.** $M = [0; 1] \cup \{3\} \Longrightarrow x = 3$ — изолированная

**Определение.** Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B_\varepsilon} (x_0) \cap M \neq \varnothing$$

**Примечание.** Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

**Определение.** Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* $M$, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

**Примечание.** Точки прикосновения = изолированные точки $\oplus$ предельные точки

**Определение.** Множество всех точек прикосновения $M$ называется *замыканием* $M$ и обозначается как $\overline{M}$

**Пример.** $M = (0; 1) \cup (1; 2] \Longrightarrow \overline{M} = [0; 2]$

**Пример.** $M = \{x \in [0; 1] \colon x \in \mathbb{Q}\} \Longrightarrow \overline{M} = [0; 1]$

**Определение.** Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

**Определение.** Множество $M \subset R^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

**Пример.** $\begin{cases} (0; 1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

**Определение.** Множество $K \in \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из $\forall$ его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

**Примечание.** Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то $K$ — не компакт

**Пример.** Пусть $M = (0, 1)$ покроем $\left\{A_n = \left(0; 1 - \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

При $n \to \infty$ $M \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, но $\forall$ фиксированного $N$: $M \not\subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow$ не компакт

**Определение.** Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

## 3.1 Критерий замкнутости

**Теорема.** $M$ — замкнуто $\iff$ $M$ содержит **все** свои предельные точки

**Доказательство.** Докажем необходимость и достаточность

1. *(Необходимость)* Докажем $\Longrightarrow$ от противного

   - Пусть $x_0$ — предельная для $M$ и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\overset{\circ}{B_\varepsilon}(x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
   - По условию $M$ — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто $\Longrightarrow$ все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

   $$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \overset{\circ}{B_r}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B_r}(x_0) \cap M = \varnothing$$

   Пришли к противоречию $\Longrightarrow$ $M$ содержит все свои предельные точки $\square$

2. *(Достаточность)* Докажем $\Longleftarrow$

   Пусть $y_0$ — не является предельной для $M$, то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \exists r > 0$:

   $$\begin{cases} \overset{\circ}{B_r}(y_0) \cap M = \varnothing \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Longrightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

   $\Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Longrightarrow$ $M$ — замкнуто по определению $\square$

# 4 Компакты в $\mathbb{R}^n$

## 4.1 Замкнутый брус — компакт

**Теорема.** Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Longrightarrow I$ — компакт

**Доказательство.** Пойдем от противного

Пусть $I = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что $I$ — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подкпорытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, $I$ — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусов:
$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$
То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \ldots, a_n)$

   При этом, $a \in I_i \ \forall i$ или $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$
4. $a \in I \Longrightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$
5. Мы знаем, что $d(I_i) \mapsto 0$ при $i \mapsto \infty$. Тогда,
$$\exists N : \forall i > N \ I_i \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$
Получается, что $\forall i > N \ I_i$ покрывается одним лишь $A_{\alpha_0}$ из системы $\{A_\alpha\}$

   Получаем противоречие тому, что любое $I_i$ не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_i \in A_{\alpha_0} \forall i > N$

**Примечание.** Любое ограниченное мноджество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

## 4.2 Критерий компактности

**Теорема.** $K \subset \mathbb{R}^n$. $K$ — компакт $\Longleftrightarrow K$ замкнуто и ограниченного

**Доказательство.** Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

- *Ограниченность.* $K$ — компакт, значит монжо выбрать покрытие $\{B_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ — открытые шары

  Тогда, $\exists m_0 : K \subset \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} B_m(0) \Longrightarrow K \subset B_{m_0}(0) \Longrightarrow$ по определению $K$ — ограничено
- *Замкнутость.* Пойдем от противного. $K$ — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x \in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x, x_0)$. $x_0$ — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

  Так как $K$ — компакт, $\exists x_1, \ldots, x_s : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

  Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \delta(x_i)$, тогда
$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \varnothing \Longrightarrow B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$
$$\Longrightarrow \mathring{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \varnothing$$
Значит, $x_0$ *не является предельной точкой* $K$, что противоречит нашему противоречию

**Доказательство.** Докажем достаточность

$K$ — замкнуто и ограничено $\Longrightarrow r > 0 : B_r(0) \supset K \Longrightarrow \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n \supset K$$

Пусть $A_\alpha$ — произвольное покрытие открытыми множествами для $K$. Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как $I$ — компакт, то $\exists$ конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда $K$ — компакт по определению $\square$