Consultation for Exam—2 by Alena $\mathbb{Z}$arodnyuk

2020/2021. Вариант 1. Задача 5. Про ортогональный линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ известно, что $\varphi((1,-1,1)) = (-1,1,-1), \varphi((2,0,1)) = (-2,1,0)$ и φ не самосопряжен. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу

Пусть $v = (1,-1,1)$, тогда $\varphi(v) = \lambda v$, где $\lambda = -1$. Это означает, что v — собственный вектор φ

Тогда, канонический вид матрицы оператора φ:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть $e_3 = v$. Тогда, нужно найти вектора $e_1, e_2 \in (e_3)^\perp$

Решим ОСЛУ:

$$(1,-1,1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3 = e_3 \oplus (e_3)^\perp$, тогда любой вектор $w \in \mathbb{R}^3$ может быть представлен в виде $w = c_1 + y$, где $c_1 = \mathrm{pr}_{e_3} w$

Рассмотрим $w = (2,0,1)$, тогда $\mathrm{pr}_{e_3} w = \dfrac{(w, e_3)}{(e_3, e_3)} e_3 = \dfrac{3}{3} \cdot e_3 = e_3$

Тогда, вектор $w = e_3 + y$

Мы знаем как как оператор действует на w и e_3, тогда пусть $y = e_1$, $y = w - e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда мы сможем определить $(\varphi(e_1), e_1) = \cos\alpha, (\varphi(e_1), e_2) = \sin\alpha$. В таком случае, остается найти вектор e_2, ортогональный к y, e_3

$\varphi(e_1) = \varphi(w - e_3) = \varphi(w) - \varphi(e_3) = (-1,0,1)^T$

Найдем e_2, как ФСР такой системы[1]:

$$\begin{matrix} e_2 \perp e_1 \\ e_2 \perp e_3 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\widetilde{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{e_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{e_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\varphi(\widetilde{e_1}) = \varphi\left(\frac{e_1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = (\varphi(\widetilde{e_1}), \widetilde{e_1}) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\alpha = (\varphi(\widetilde{e_1}), \widetilde{e_2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом, канонический вид матрицы оператора φ:

$$\boxed{\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

А также, $\mathbb{e} = (\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3})$ — искомый базис

[1] Вектор e_1 записывается в нижнюю строку матрицы, а вектор e_3 — в верхнюю

2020/2021. Вариант 1. Задача 6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:

1. одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{50}$
2. ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Если существует, то предъявите такую матрицу

$$B = u_1\sigma_1 v_1^T$$

Найдем сингулярное значение матрицы B, если оно окажется меньше $\sqrt{50}$, то требуемой матрицы A не существует[2]

$BB^T = \begin{pmatrix} 54 & 18 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(BB^T - \lambda E) = \begin{vmatrix} 54-\lambda & 18 \\ 18 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 60\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 60 \Longrightarrow \sigma_1 = \sqrt{60} > \sqrt{50}$

Значит, матрица A представима в виде $A = u_1\sigma_1 v_1^T + u_2\sigma_2 v_2^T = B + u_2\sigma_2 v_2^T$

Найдем SVD матрицы $B = U\Sigma V^T$

$\boxed{\text{Для } \lambda = 60:}$ $\begin{pmatrix} -6 & 18 \\ 18 & -54 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$

Найдем $v_1 = \frac{1}{\sqrt{60}} B^T \cdot u_1 = \frac{1}{10\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Выберем $u_2 \perp u_1$. Пусть это будет $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$[3]

Выберем $v_2 \perp v_1$. Пусть это будет $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Тогда,

$$\begin{aligned} A &= B + u_2\sigma_2 v_2^T \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{50} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{2} + 3 & -6 & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{3\sqrt{10}}{2} + 1 & -2 & -\frac{3\sqrt{10}}{2} + 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

[2] Если окажется равной $\sqrt{50}$, то можно восстановить A

[3] Так как u_1 ортогонален к вектору $(1, -3)^T$, то в качестве вектора, ортогонального к u_1, можно взять $(1, -3)^T$

2020/2021. Вариант 1. Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$$2y^2 - 3z^2 + 4xz - 12y + a = 0$$
определеяет однополосный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. Для каждого найденного значения a укажите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которых данное уравнение принимает канонический вид

Приведем к главным осям[4] квадратичную форму $2y^2 - 3z^2 + 4xz$. Составим ее матрицу
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
Ищем собственные значения
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$$
Так как у симметричной матрицы разные собственные значения, то собственные векторы ортогональны
$$\boxed{\text{Для } \lambda = 2:} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{\text{Для } \lambda = -4:} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\boxed{\text{Для } \lambda = 1:} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$
Мы определили собственные вектора (v_3, v_1, v_2), соответствующие собственным значениям $(1, 2, -4)$

Тогда форма Q будет такой:
$$Q = (x')^2 + 2(y')^2 - 4(z')^2$$
Матрица перехода
$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$
Добавим к форме линейную часть исходного уравнения и получим[5]:
$$(x')^2 + 2(y')^2 - 4(z')^2 - 12y' + a = 0$$
Теперь про параллельный перенос:
$$(x')^2 + 2\left((y')^2 - 6y' + 9\right) - 18 - 4(z')^2 + a = 0$$
$$(x')^2 + 2(y'-3)^2 - 4(z')^2 = 18 - a$$
Сделаем замену
$$\begin{cases} x' = x'' \\ (y'-3) = y'' \\ z' = z'' \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' + 3 \\ z' = z'' \end{cases}$$
Получаем
$$(x'')^2 + 2(y'')^2 - 4(z'')^2 = 18 - a \tag{1}$$
Рассмотрим случаи:

[4] Квадратичная форма в главных осях выглядит так: $Q = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, где $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ — собственные значения. Для приведения к главным осям находим собственные значения и векторы

[5] y' появился при умножении матрицы перехода на $(x', y', z')^T$

1. Если $18 - a > 0$, то это точно однополосный гиперболоид, т.к. можно поделить уравнение 1 на $18 - a$ и получить каноническое уравнение гиперболоида
2. Если $18 - a = 0$, то мы получим конус
3. Если $18 - a < 0$, то получим двуполостный гиперболоид

Таким образом, выражение старых координат через новые:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\
&= C \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2021/2022. Вариант 1. Задача 4. Приведите пример двух недиагонализуемых линейных операторов φ, ψ в $\mathbb{R}^2$, для которых оператор $5\varphi - 2\psi$ диагонализуем и отличен от нуля

Оператор недиагонализуем, если его матрица недиагональна, а характеристический многочлен

$$(k-\lambda)^2 + b > 0, \tag{2}$$

то есть не имеет корней

Пусть есть матрицы операторов

$$5\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad -2\psi = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Чтобы получить выражение 2 для матрицы 5φ расположим на главной диагонали одинаковые числа, например 1. Тогда мы получим часть $(k-\lambda)^2$

На побочной диагонали разместим числа с противоположными знаками

В матрице -2ψ на главной диагонали расположим 0, а на побочной — числа, противоположные соответствующим числам в матрице 5φ

$$5\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad -2\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что по отдельности каждая матрица не диагональна, а в сумме они дают диагональную матрицу

Чтобы получить сами операторы φ, ψ просто разделим матрицы на 5 и -2 соответственно

2021/2022. Вариант 1. Задача 8. Линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ имеет в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдите базис пространства $\mathbb{R}^4$, в котором матрица оператора φ имеет жорданову форму, и укажите эту жорданову форму

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1-\lambda & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda = 3$$

$\boxed{\text{Для } \lambda = 3:}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rk}\ A = 2$

$d_1 = 2$ — количество жордановых клеток, а также размерность соответствующего ядра

$B = A - 3E$

$d_2 = 4 - \mathrm{rk}\ (B^2) = 4$

$d_2 - d_1 = 2 \Longrightarrow$ количество жордановых клеток размером $\geqslant 2$ равно двум

Это означает, что жордановы клетки имеют размер 2×2

Жорданова нормальная форма матрицы:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & & 3 \end{array}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Применим эту матрицу к базисным векторам

$$\underbrace{e_1}_{f_2} \xrightarrow{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{e_2}_{f_4} \xrightarrow{B} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}_{f_3} \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим линейную независимость

$\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \\ f_3 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ не выражаются друг через друга $\Longrightarrow$ линейно независимы

Значит, (f_1, f_2, f_3, f_4) — жорданов базис

2021/2022. Вариант 1. Задача 1. Определите все значения, которые может принимать размерность суммы ядра и образа линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в образе не содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$

$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = 4$

$\dim(\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi) = 4 - \dim(\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi)$

Пусть $\dim(\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi) = k$, тогда $k \leqslant 2$

Проверим: если $k \geqslant 3$, тогда

$$\begin{cases} \dim\ker\varphi \geqslant 3 \\ \dim\operatorname{Im}\varphi \geqslant 3 \end{cases} \Longrightarrow \dim(\ker\varphi + \operatorname{Im}\varphi) \geqslant 6, \text{ чего не может быть}$$

Значит, возможные значения $k = 0, 1, 2$

Распределим базисные векторы и v так, чтобы $\dim(\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi) = 0$

Так как $v \notin \operatorname{Im}\varphi$, то $v \in \ker\varphi$ и

$$v : (1, 0, -1, 2) \longrightarrow (0, 0, 0, 0)$$

Дополним v векторами e_1, e_2, e_3 до базиса всего пространства

Сами вектора переведем в самих себя

$$\begin{aligned} e_1 &: (1, 0, 0, 0) \longrightarrow (1, 0, 0, 0) \\ e_2 &: (0, 1, 0, 0) \longrightarrow (0, 1, 0, 0) \\ e_3 &: (0, 0, 1, 0) \longrightarrow (0, 0, 1, 0) \\ v &: (1, 0, -1, 2) \longrightarrow (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Тогда, $\dim(\ker\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi) = 0$, так как e_1, e_2, e_3 линейно независимы

Последующие случаи рассматриваются аналогично

Ссылки

1. Видео—разбор
2. Экзамен 2020/2021
3. Экзамен 2021/2022