Consultation for Exam—2 by Roman Avdeev

2022/2023. Вариант 1. Задача 1. Определите все значения, которые может принимать размерность ядра линейного оператора $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ при условии, что в пересечении ядра и образа содержится вектор $v = (1, 0, -1, 2)$.

Пусть вектор $v = e_1$

Очевидно, что

$$\dim \ker \varphi \geqslant 1$$
$$\dim \mathrm{Im}\ \varphi \geqslant 1$$
$$\dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Im}\ \varphi = 4$$

$\dim \ker \varphi = 3$

Дополним e_1 до базиса

$$e_2 = (0, 1, 0, 0)$$
$$e_3 = (0, 0, 1, 0)$$
$$e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

Теперь в базисе $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ построим матрицу линейного отображения

Рассмотрим несколько случаев

1. $\dim \ker \varphi = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\ \varphi = 3$
$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $\dim \ker \varphi = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\ \varphi = 2$
$$A(\varphi, \mathbb{e}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. $\dim \ker \varphi = 3 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\ \varphi = 1$
$$A(\varphi, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2022/2023. Вариант 1. Задача 2. Приведите пример неопределённой квадратичной формы $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, принимающей отрицательные значения на всех ненулевых векторах подпространства $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\right\}$. Ответ представьте в стандартном виде многочлена 2-й степени от координат x, y, z

Положим, что $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$

Возьмем базис $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$, такой что

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, -1, 0) \\ e_2 &= (2, 0, 1) \\ e_3 &= (1, 0, 0) \end{aligned}$$

В этом базисе квадратичная форма имеет матрицу

$$B(Q, \mathbb{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Она будет неопределелнной, так как в матрице присутствуют -1 и 1

Ограничим Q на данное подпространство U

$$Q|_U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть C — матрица перехода от стандартного базиса к базису $\mathbb{e}$, тогда C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, B' — матрица формы Q в стандартном базисе, причем

$$B' = (C^{-1})^T B C^{-1},$$

из этой матрицы мы получим требуемый многочлен

Пример.

$$\begin{aligned} &Q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + (x + 2 - 2z)^2 \\ &Q(0, 0, 1) = 3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

2022/2023. Вариант 1. Задача 3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением даны векторы

$$u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, 1, -1), u_3 = (1, 0, -1)$$

Обозначим через v_1, v_2, v_3 ортогональные проекции вектора $v = (5, 3, -1)$ на подпространства $u_1^\perp, u_2^\perp, u_3^\perp$ соответственно. Найдите объём параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3

$$\mathrm{pr}_{u_i^\perp} v = v - \mathrm{ort}_{u_i^\perp} v = v - \mathrm{pr}_{\langle u_i \rangle} v = v - \frac{(v, u_i)}{(u_i, u_i)} u_i$$

Применяя эту формулу получим три вектора

Далее считаем объем трехмерного параллелепипеда по формуле (например, как определитель матрицы 3×3)[1]

[1] Рома не дорешал :)

2022/2023. Вариант 1. Задача 4. Приведите пример недиагонализуемого линейного оператора φ в $\mathbb{R}^2$, для которого оператор $\varphi^2 + 3\varphi$ диагонализуем.

Возьмем жорданову клетку

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + 3A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda & 3 \\ 0 & 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 3\lambda & 2\lambda + 3 \\ 0 & \lambda^2 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

При $2\lambda + 3 = 0$ получаем диагонализуемый линейный оператор, то есть $\lambda = -\dfrac{3}{2}$

2022/2023. Вариант 1. Задача 5. Вставьте вместо звёздочки, ромбика и кружочка подходящие числа таким образом, чтобы линейный оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, имеющий в стандартном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} \star & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & \diamond \\ 2/3 & 2/3 & \circ \end{pmatrix}$$

был ортогональным. Найдите ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ имеет канонический вид, и выпишите эту матрицу. Укажите ось и угол поворота, определяемого оператором φ.

Столбцы (строки) этой матрицы должны образовывать ортонормированный базис

$2/3 \cdot \star \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{9} = 0 \Longrightarrow \star = -\dfrac{1}{3}$

$\diamond = -\dfrac{2}{3}$

$\circ = -\dfrac{1}{3}$

2022/2023. Вариант 1. Задача 6. Существует ли матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ранга 2 со следующими свойствами:
1) одно из сингулярных значений матрицы A равно $\sqrt{10}$;
2) ближайшая к A по норме Фробениуса матрица ранга 1 есть $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$?
Если существует, то предъявите такую матрицу.

Представим матрицу B в виде произведения столбца на строку и нормируем

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \sqrt{30} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \sqrt{30} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Значит, существует требуемая матрица A, так как $\sqrt{10} < \sqrt{30}$

$$\begin{aligned} A = u_1\sigma_1 v_1^T & \quad + u_2\sigma_2 v_2^T \\ = B & \quad + u_2\sigma_2 v_2^T \end{aligned}$$

Тогда пусть $\sigma_2 = \sqrt{10}$

Выберем u_2 и v_2 так

$$\begin{aligned} u_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ v_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Остается только перемножить и сложить по формуле

2022/2023. Вариант 1. Задача 7. Найдите прямоугольную декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$ (выражение старых координат через новые), в которой уравнение поверхности

$$3x^2 + 2y^2 - 4xz - 4y + 7 = 0$$

имеет канонический вид. Укажите этот вид, определите тип поверхности и нарисуйте её эскиз.

Выделяем квадратичную форму

$$(x, y, z) : \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ограничиваем ее

$$(x, z) : \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

А дальше ничего никто не сказал :)