

# Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 5 ноября 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману</b>	<b>2</b>
1.1	Брус. Мера бруса	2
1.2	Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$	2
1.3	Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения	2
1.4	Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману	3
1.5	Пример константной функции	3
1.6	Неинтегрируемая функция	3
1.7	Вычисление многомерного интеграла	3
<b>2</b>	<b>Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера</b>	<b>5</b>
2.1	Свойства кратных интегралов	5
2.2	Необходимое условие интегрирования.	6
2.3	Множество меры нуль по Лебегу	6
2.4	Свойства множества меры нуль по Лебегу	6
<b>3</b>	<b>Топология в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>8</b>
3.1	Критерий замкнутости	9
<b>4</b>	<b>Компакты в <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>10</b>
4.1	Замкнутый брус — компакт	10
4.2	Критерий компактности	10
<b>5</b>	<b>Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте. Колебания функции</b>	<b>12</b>
5.1	Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте	12
5.2	Расстояние между двумя множествами	12
5.3	Расстояние между непересекающимися компактами	12
5.4	Колебание функции на множестве	13
5.5	Колебание функции в точке	13
5.6	Колебание функции, непрерывной в точке	13
5.7	Пересечение разбиений бруса	13
5.8	Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману	14
5.9	Измельчение разбиения	15
<b>6</b>	<b>Суммы Дарбу</b>	<b>16</b>
6.1	Нижняя и верхняя суммы Дарбу	16
6.2	Нижняя сумма Дарбу не больше верхней	16
6.3	Монотонность сумм относительно измельчений разбиения	16
6.4	Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же бресе	16
6.5	Верхние и нижние интегралы Дарбу	16
6.6	Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу	17
<b>7</b>	<b>Критерий Дарбу. Теорема Фубини</b>	<b>18</b>
7.1	Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману	18
7.2	Интегрирование по допустимым множествам	18
7.3	Теорема Фубини	19

# 1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

## 1.1 Брус. Мера бруса

**Определение.** Замкнутый брус (координатный промежуток) в  $\mathbb{R}^n$  — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq q_i, i \in \{1, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

**Примечание.**  $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$ , где  $\{ \}$  может быть отрезком, интервалом и т.д.

**Определение.** Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

## 1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:**  $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$ , где  $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть  $I, I_1, \dots, I_k$  — брусы

Тогда, если  $\forall i, j, I_i, I_j$  не имеют общих внутренних точек, и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть  $I$  — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть  $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$ , тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

## 1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

**Определение.**  $I$  — замкнутый, невырожденный брус и  $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$ , где  $I_i$  попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  называется разбиением бруса  $I$

**Определение.** Диаметр произвольного ограниченного множества  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leq i \leq k} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

**Определение.** Масштаб разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$  — число  $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k}$

**Определение.** Пусть  $\forall I_i$  выбрана точка  $\xi_i \in I_i$ . Тогда, набор  $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$  будем называть **отмеченными точками**

**Определение.** Размеченное разбиение — пара  $(\mathbb{T}, \xi)$

## 1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть  $I$  — невырожденный, замкнутый брус, функция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  определена на  $I$

**Определение.** Интегральная сумма Римана функции  $f$  на  $(\mathbb{T}, \xi)$  — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

**Определение.** Функция  $f$  интегрируема (по Риману) на замкнутом брус  $I$  ( $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда

$$A = \int_I f(x) dx = \int_I \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение:  $f \in \mathcal{R}(I)$

## 1.5 Пример константной функции

Пусть у нас есть функция  $f = \text{const}$

$$\forall (\mathbb{T}, \xi) : \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i=1}^k \text{const} \cdot |I_i| \\ = \text{const} \cdot |I| \implies \int_I f(x) dx = \text{const} \cdot |I|$$

## 1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус  $I = [0, 1]^n$ , а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n} \ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

**Доказательство.**  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \in \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \bar{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \bar{\xi}) = \sum_{i=1}^k 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время,  $\forall \mathbb{T}$  можно выбрать  $\xi_i \notin \mathbb{Q}$ , тогда для такой пары  $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$ :

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot |I_i| = 0 \implies f \notin \mathcal{R}(I)$$

## 1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

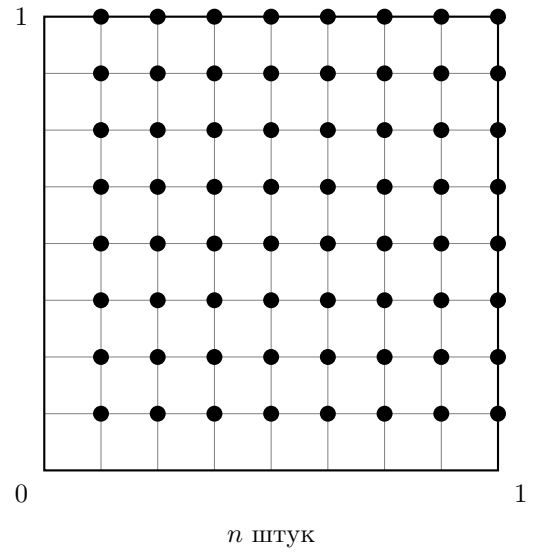
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны  $\frac{1}{n}$ , выбирая в качестве точек  $\xi_i$  верхние правые вершины ячеек

Имеется функция  $f = xy$ ,  $|I| = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \cdot j \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j \\ &= \frac{n(n+1)}{n^4} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\end{aligned}$$

Заметим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$



## 2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

### 2.1 Свойства кратных интегралов

#### 1. Линейность.

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

**Доказательство.**

(a)

$$f \in \mathcal{R}(I) : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I f dx| =: |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

(b) По определению:

$$g \in \mathcal{R}(I) : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \quad \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \\ |\sigma(g, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I g dx| =: |\sigma_g - A_g| < \varepsilon$$

(c) Пусть  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда (a) и (b) верно для  $\delta \implies$

$$|\sigma_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}| = |\alpha \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$$

□

#### 2. Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); \quad f|_I \leq g|_I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

**Доказательство.**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для  $g \in \mathcal{R}(I)$ , тогда:

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies A_f \leq A_g$$

□

#### 3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

**Доказательство.** По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ Ограничена на } I \\ \implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f|$$

Тогда,

$$-\int_I \sup |f| dx \leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f| |I| \leq \int_I f dx \leq \sup_I |f| |I|$$

□

## 2.2 Необходимое условие интегрирования.

**Теорема.** Пусть  $I$  — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

**Доказательство.** От противного.

1. Пусть  $f \in \mathcal{R}(I)$ , тогда

$$\exists \underbrace{A_f}_{\text{конечное}} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Значит, для  $\varepsilon = 1$  это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f - \text{ограничена}$$

2. Пусть  $f$  — неограничена на  $I$ , но  $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K \exists i_0 : f$  неограничена на  $I_{i_0}$ .  
Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |I_i| + f(\xi_{i_0}) |I_{i_0}|$$

Тогда,  $\sigma_f$  может принимать любые сколь угодно большие (малые) значения, в зависимости от  $I_{i_0} \implies$  **противоречие**

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

## 2.3 Множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусков  $\{I_i\}$  и выполняются:

1.  $M \subset \bigcup_i I_i$  и
2.  $\sum_i |I_i| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

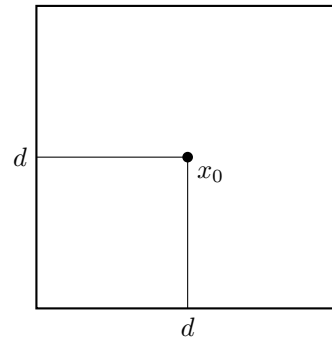
**Пример:**  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  — множество меры нуль по Лебегу в  $\mathbb{R}^n$

**Доказательство.** Пусть  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ . Покроем точку замкнутым бруском, причем

$$I = [x_{01} - d, x_{01} + d] \times \dots \times [x_{0n} - d, x_{0n} + d]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists I : |I| = (2d)^n < \varepsilon \implies d < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}$$

Значит, точка является множеством меры нуль по Лебегу



## 2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры 0 можно использовать *открытые* брусы

**Доказательство.** Пусть  $\{I_i\}$  — открытые брусы  $M \subset \bigcup_i I_i$ , то есть  $M \subset \mathbb{R}^n$  — множество меры 0 по Лебегу

Пусть  $\{\bar{I}_i\}$  — замкнутые брусы  $I_i$ .

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

**Докажем в обратную сторону.** Пусть  $\{I_i\}$  — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \dots \times [a_n^i, b_n^i], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Пусть

$$D_i = \left( \frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i) \right) \times \dots \times \left( \frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i) \right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon \quad \square$$

2.  $M$  — множество меры нуль,  $L \subset M \implies L$  — множество меры нуль

**Доказательство.**  $L \subset M$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  не более чем счетное  $\{I_i\}$ :

$$L \subset M \subset \bigcup_i I_i \text{ и } \sum |I_i| < \varepsilon$$

по транзитивности это верно и для  $L$  □

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль

**Доказательство.** Пусть  $\{M_k\}_{k=1}^\infty$  — счетное,<sup>1</sup> так как  $\forall i M_k$  — множество меры нуль, то  $\forall i, \forall \varepsilon_i \exists$  не более чем счетное  $\{I_i^k\}$ :

$$M_k \subset I_i^k \text{ и } \sum |I_i^k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} \forall \varepsilon_k > 0$$

Рассмотрим  $M = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$ , тогда  $M \subset \bigcup_{i,k} I_i^k$  и

$$\sum_{i,k} \underbrace{|I_i^k|}_{>0} < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \varepsilon \quad \square$$

• **Пример.** Пусть  $\{M_i\}_{i=1}^N$  — конечный набор

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1} \varepsilon < \varepsilon$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

---

<sup>1</sup>Для конечного доказательства тривиально

### 3 Топология в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Пусть имеется  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внутренней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in M$  будем называть *внешней* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

**Пример.**  $M = [0; 1)$ . тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *граничной* точкой  $M$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

**Обозначение.**  $\partial M$  — множество всех граничных точек  $M$

**Пример.**  $M = [0; 1) \implies x = 0; 1$  — граничные

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *изолированной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

**Пример.**  $M = [0; 1] \cup \{3\} \implies x = 3$  — изолированная

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *предельной* точкой  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

**Определение.** Точку  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  будем называть *точкой прикосновения*  $M$ , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

**Примечание.** Точки прикосновения = изолированные точки  $\oplus$  предельные точки

**Определение.** Множество всех точек прикосновения  $M$  называется *замыканием*  $M$  и обозначается как  $\overline{M}$

**Пример.**  $M = (0; 1) \cup (1; 2] \implies \overline{M} = [0; 2]$

**Пример.**  $M = \{x \in [0; 1] : x \in \mathbb{Q}\} \implies \overline{M} = [0; 1]$

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *открытым*, если все его точки внутренние

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  называется *замкнутым*, если  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто

**Пример.**  $\begin{cases} (0; 1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0; 1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

**Определение.** Множество  $K \in \mathbb{R}^n$  называется *компактом*, если из  $\forall$  его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

**Примечание.** Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то  $K$  — не компакт

**Пример.** Пусть  $M = (0, 1)$  покроем  $\{A_n = (0; 1 - \frac{1}{n})\}_{n=1}^\infty$

При  $n \rightarrow \infty$   $M \subset \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ , но  $\forall$  фиксированного  $N$ :  $M \not\subset \bigcup_{n=1}^N A_n \implies$  не компакт

**Определение.** Множество  $M \subset \mathbb{R}^n$  — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$



### 3.1 Критерий замкнутости

**Теорема.**  $M$  — замкнуто  $\iff M$  содержит **все** свои предельные точки

**Доказательство.** Докажем необходимость и достаточность

1. (Необходимость) Докажем  $\implies$  от противного

- Пусть  $x_0$  — предельная для  $M$  и  $x_0 \notin M$ . Тогда,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$  и  $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию  $M$  — замкнуто, то есть  $\mathbb{R}^n \setminus M$  — открыто  $\implies$  все его точки внутренние и  $\exists r > 0$ :

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \implies \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию  $\implies M$  содержит все свои предельные точки □

2. (Достаточность) Докажем  $\impliedby$

Пусть  $y_0$  — не является предельной для  $M$ , то есть  $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \implies \exists r > 0$ :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \implies B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\implies \mathbb{R}^n \setminus M$  — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными  $\implies M$  — замкнуто по определению □

## 4 Компакты в $\mathbb{R}^n$

### 4.1 Замкнутый брус — компакт

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус  $\implies I$  — компакт

**Доказательство.** Пойдем от противного

Пусть  $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что  $I$  — не компакт. Значит, существует его покрытие  $\{A_\alpha\}$  — открытые множества, такие что  $I \subset \{A_\alpha\}$ , не допускающее выделения конечного подпокрытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда,  $\exists I_1$ , такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе,  $I$  — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусков:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку  $a = (a_1, \dots, a_n)$

При этом,  $a \in I_i \forall i$  или  $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

4.  $a \in I \implies a \in \bigcup A_\alpha \implies \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

5. Мы знаем, что  $d(I_i) \mapsto 0$  при  $i \mapsto \infty$ . Тогда,

$$\exists N : \forall i > N \ I_i \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$

Получается, что  $\forall i > N \ I_i$  покрывается одним лишь  $A_{\alpha_0}$  из системы  $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое  $I_i$  не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что  $I_i \in A_{\alpha_0} \forall i > N$

**Примечание.** Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

### 4.2 Критерий компактности

**Теорема.**  $K \subset \mathbb{R}^n$ .  $K$  — компакт  $\iff K$  замкнуто и ограничено

**Доказательство.** Докажем необходимость ( $\implies$ )

- *Ограниченность.*  $K$  — компакт, значит можно выбрать покрытие  $\{B_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$  — открытые шары

Тогда,  $\exists m_0 : K \subset \bigcup_{m=1}^{m_0} B_m(0) \implies K \subset B_{m_0}(0) \implies$  по определению  $K$  — ограничено

- *Замкнутость.* Пойдем от противного.  $K$  — компакт, тогда возьмем  $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x \in K}$  — покрытие открытыми шарами, где  $\delta(x) = \rho(x, x_0)$ .  $x_0$  — предельная точка, которая  $\notin K$  (или же  $\in \mathbb{R}^n \setminus K$ )

Так как  $K$  — компакт,  $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть  $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$ , тогда

$$\begin{aligned} B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) &= \emptyset \implies B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K \\ &\implies \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset \end{aligned}$$

Значит,  $x_0$  не является предельной точкой  $K$ , что противоречит нашему предположению

**Доказательство.** Докажем достаточность

$K$  — замкнуто и ограничено  $\implies r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$  — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n \supset K$$

Пусть  $A_\alpha$  — произвольное покрытие открытыми множествами для  $K$ . Тогда,  $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$ . Так как  $I$  — компакт, то  $\exists$  конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит,  $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$  — конечное и  $\{A_\alpha\}$  — произвольное, тогда  $K$  — компакт по определению □

## 5 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте. Колебания функции

### 5.1 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

**Теорема.** Пусть  $K \in \mathbb{R}^n$  — компакт и функция  $f : K \mapsto \mathbb{R}$  — непрерывная. Тогда  $f$  на  $K$  достигает наибольшее и наименьшее значения.

**Доказательство.**

- *Ограниченность.* От противного: пусть существует последовательность  $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$ . Из ограниченности  $K$  следует ограниченность последовательности  $\{x^k\}$ , и как следствие ограничены последовательности отдельных координат:

$$|x_i^k| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k|^2} = \|x^k\| \leq C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у  $\{x_1^k\}$  существует сходящаяся подпоследовательность  $x_1^{k_{j_1}} \rightarrow a_1, j_1 \rightarrow \infty$ . Для последовательности  $\{x_2^{k_{j_1}}\}$  существует сходящаяся последовательность  $x_2^{k_{j_2}} \rightarrow a_2, j_2 \rightarrow \infty$ . И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, \dots, x_n^{k_j}) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Точка  $a$  — предельная для  $K$ . В силу замкнутости  $K$  т.  $a \in K$ . А из непрерывности функции  $f$  получаем  $f(x^{k_j}) \rightarrow f(a)$ . А с другой стороны,  $f(x^{k_j}) \rightarrow \infty$  из выбора исходной последовательности. **противоречие**

- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что  $f$  — ограничена на  $K$ . Выберем последовательность  $\{x^k\}$ :

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности  $f$ :

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем  $f(a) = \sup_K f$ , т.е. максимальное значение достигается в точке  $x = a$ . Для  $\inf_K f$  доказательство аналогично  $\square$

### 5.2 Расстояние между двумя множествами

**Определение.** Расстоянием между двумя множествами  $X$  и  $Y$ , где  $X, Y \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число  $\rho(X, Y)$ :

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \|x - y\|$$

**Примеры:**

1.  $X \cap Y \neq \emptyset \implies \rho(X, Y) = 0$
2.  $\rho(X, Y) = 0 \implies X \cap Y \neq \emptyset$ ? — нет, пример:  $X = (0, 1); (Y = (1; 2)$  — не компакты

### 5.3 Расстояние между непересекающимися компактами

**Теорема.** Если  $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$  — компакты и  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ , то  $\rho(K_1, K_2) > 0$

**Доказательство.** Функция  $f(x, y) = \|x - y\|$  определена на  $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ , причем  $f$  — непрерывная функция.

По теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего максимального и минимального значений. Т.е. существуют  $x_0 \in K_1, y_0 \in K_2 : f(x_0, y_0) = \rho(K_1, K_2)$ . А  $f(x_0, y_0) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x_0 = y_0$ .  $\square$

## 5.4 Колебание функции на множестве

**Определение.** Колебанием функции  $f$  на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число  $\omega(f, M)$ :

$$\omega(f, M) = \sup_{x, y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} - \inf_{y \in M} f(y)$$

## 5.5 Колебание функции в точке

**Определение.** Колебанием функции  $f$  в точке  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$  будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \rightarrow 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \quad \text{где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

**Напоминание:** По определению, функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0 \in M$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in M \quad |x - x_0| < \delta \iff x \in B_\delta(x_0) \cap M$  верно  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

## 5.6 Колебание функции, непрерывной в точке

**Теорема.** Пусть  $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ ;  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  — непрерывна в точке  $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

**Доказательство.**

- *Необходимость*

$f$  — непрерывна в т.  $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$   
Рассмотрим  $\omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$ :

$$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x, y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

При  $\varepsilon \rightarrow 0 \implies \delta \rightarrow 0$  и  $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \rightarrow 0$ , т.е.  $\omega(f, x_0) = 0$

- *Достаточность*

Пусть  $0 = \omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \quad \sup_{x, y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

□

**Определение.** Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

**Пример:**  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$  — непрерывна почти всюду на  $\mathbb{R}$

## 5.7 Пересечение разбиений бруса

**Определение.** Пусть  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$  и  $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$  — два разбиения бруса  $I \subset \mathbb{R}^n$ .

Пересечением разбиений  $(\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)$  будем называть мн-во всех брусов  $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij} \begin{cases} 1) \exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\} \\ 2) \exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\} \\ 3) \{I_{ij}\} \text{ — разбиение бруса } I \end{cases}$

## 5.8 Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману

**Теорема. Критерий Лебега.** Если  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый невырожденный брус,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , то  $f \in R(I) \iff f$  ограничена и непрерывна почти всюду на  $I$

**Доказательство.**

- *Необходимость*

Если  $f$  интегрируема, то она ограничена по необходимому условию интегрируемости. Осталось показать, что множества разрыва меры нуль. От противного: пусть это не так.

Обозначим множество всех точек разрыва ф-ии  $f$  на  $I$  за  $T$  и заметим, что  $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ , где

$T_k = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$ . Если  $T$  не меры нуль, то существует  $T_{k_0}$  не меры нуль (если они все меры нуль, то по свойству множеств меры нуль счетное объединение таких множеств тоже было бы меры нуль).

Для произвольного разбиения  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^m$  бруска  $I$  разобьем эти бруски на две кучи: первая  $A = \{I_i \mid I_i \cap T_{k_0} \neq \emptyset, \omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}\}$  и вторая  $B = \mathbb{T} \setminus A$ . Покажем что  $A$  является покрытием множества  $T_{k_0}$ , т.е.  $T_{k_0} \subset \bigcup_{i: I_i \in A} I_i$  любая точка  $x \in T_{k_0}$  является либо

- а) внутренней для некоторого бруска  $I_i$ . В этом случае  $\omega(f, I_i) \geq \omega(f, x) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0}$ , т.е.  $I_i \in A$ , либо
- б) точка  $x$  лежит на границе некоторого количества брусков (не более чем  $2^n$  штук). Тогда хотя бы на одном из них колебание  $\omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}$  (т.е.  $I_i \in A$ ): если бы такого не нашлось, то в любой малой окрестности  $B_\varepsilon(x)$  выполняется следующее:

$$\omega(f, x) \leq \sup_{x', x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x)| + \sup_{x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(x'')| < \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0} = \frac{1}{k_0}$$

т.е.  $x \notin T_{k_0}$  — **противоречие**.

Таким образом, каждая точка  $x \in T_{k_0}$  покрывается некоторым бруском  $I_i \in A$ , т.е.  $A$  — покрытие  $T_{k_0}$ . Тогда существует  $c : \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq c > 0$  для всех разбиений  $\mathbb{T}$  (если бы меняя разбиения мы могли получить сумму объемов этих брусков сколь угодно маленькую, то получилось бы, что  $T_{k_0}$  меры нуль)

Возьмем два набора отмеченных точек  $\xi^1$  и  $\xi^2$ . На брусках из кучки  $B$  будем их брать одинаковыми, т.е. для  $I_i \in B$   $\xi_i^1 = \xi_i^2$ . А на брусках из кучки  $A$  будем брать такие, чтобы

$$f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2) \geq \frac{1}{3k_0} \text{ (у нас там колебания } \geq 1/2k_0, \text{ так что такие найдутся)}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi^2)| &= \left| \sum_i (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| + \sum_{i: I_i \in B} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\ &= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \geq \frac{1}{3k_0} \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq \frac{c}{3k_0} > 0 \end{aligned}$$

т.е. интегральные суммы не могут стремиться к одному и тому же числу, значит  $f$  не интегрируема — **противоречие**.

- *Достаточность*

Для любого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим  $T_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ . Покажем, что это множество — компакт. Ограниченность очевидна (подмножества бруска), а замкнутость проверим от противного. Пусть  $a$  — предельная точка  $T_\varepsilon$ :  $a \notin T_\varepsilon$ . Т.к. она предельная, то существует  $\{x^k\} : x^k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$ . Т.к.  $B_{\frac{1}{k}}$  — открытые шары, то наши точки лежат в них с окрестностями, т.е. существуют  $\delta_k : B_{\delta_k}(x_k) \subset B_{\frac{1}{k}}(a)$ . Тогда

$$\omega(f, B_{\frac{1}{k}}(a)) \geq \omega(f, B_{\delta_k}(x_k)) \geq \omega(f, x_k) \geq \varepsilon$$

Переходя к пределу  $k \rightarrow \infty : \omega(f, a) \geq \varepsilon$ , т.е.  $a \in T_\varepsilon$  - противоречие. Значит  $T_\varepsilon$  - замкнуто, и, следовательно, компактно.

Множество  $T_\varepsilon$  - множество меры нуль (как подмножество множества меры нуль). Значит, его можно покрыть не более чем счетным объединением открытых брусков  $I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$ . Т.к. это

открытое покрытие, а  $T_\varepsilon$  - компакт, то существует конечное подпокрытие:  $T_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$ , при этом

$$\sum_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon.$$

Обозначим три множества:  $C_1 = \bigcup_{i=1}^m I_i$ ,  $C_2 = \bigcup_{i=1}^m I'_i$ ,  $C_3 = \bigcup_{i=1}^m I''_i$ , где  $I'_i, I''_i$  - бруски, полученные гомотетией с центром в центре  $I_i$  с коэффициентом 2 и 3 соответственно.

Заметим, что

- а)  $|C_3| \leq \sum_{i=1}^m |I''_i| = 3^n \sum_{i=1}^m |I_i| < 3^n \varepsilon$
- б) расстояние  $\rho(\partial C_2, \partial C_3) = \delta_1 > 0$  (теорема про расстояние между компактами)
- в) Множество  $K = I \setminus (C_2 \setminus \partial C_2)$  - компакт. Кстати, любое множество с диаметром меньше  $\delta_1$  либо полностью лежит в  $C_3$ , либо полностью в  $K$ .
- г)  $T_\varepsilon \cap K = \emptyset$ , т.к.  $T_\varepsilon \subset C_1 \subset C_2$ . Следовательно,  $\forall x \in K \omega(f, x) < \varepsilon$ . Тогда по теореме Кантора-Гейне  $\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in K \omega(f, B_{\delta_2}(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Выберем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда для любых разбиений  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ ,  $\mathbb{T}_2 = \{I_i^2\} : \lambda \mathbb{T}_1 < \delta, \lambda(\mathbb{T}_2) < \delta$

Рассмотрим пересечение этих разбиений  $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ , т.е. такое разбиение  $\mathbb{T} = \{I_{ik}\}$ , что  $I_k^1 = I_{i_1 k} \sqcup \dots \sqcup I_{i_m k}$  и  $I_i^2 = I_{i k_1} \sqcup \dots \sqcup I_{i k_l}$ . Очевидно  $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$ .

Для произвольных наборов отмеченных точек:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2)| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

Рассмотрим отдельное слагаемое:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left| \sum_{i,j} (f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})) |I_{ij}| \right| \leq \sum_{I_{ij} \in C_3} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| + \sum_{I_{ij} \in K} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| \leq 2M \cdot$$

т.к.  $f$  ограничена некоторой константой  $M$  и см пункты а), д), то

Т.к. для  $(\mathbb{T}_2, \xi^2)$  все выкладки аналогичные, то получаем:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq \epsilon(2M \cdot 3^n + 2|I|)$$

Следовательно, существует предел  $\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$  (Критерий Коши для функций)

□

## 5.9 Измельчение разбиения

**Определение.** Разбиение  $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$  будем называть измельчением разбиения  $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ , если  $\forall k \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$  является измельчением  $\mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$

## 6 Суммы Дарбу

### 6.1 Нижняя и верхняя суммы Дарбу

**Определение.** Пусть  $I$  - замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$  - разбиение бруса  $I$ ,  $m_i = \inf_{I_i}(f)$ , и  $M_i = \sup_{I_i}(f)$ . Тогда числа  $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K m_i |I_i|$  и  $\bar{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K M_i |I_i|$  будем называть **нижней и верхней суммой Дарбу** соответственно

### 6.2 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

**Теорема.**

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}) &= \sum_{i=1}^K m_i |I_i| = \sum_i \inf_{\xi_i} (f(\xi_i)) |I_i| = \inf_{\xi} \sum_i f(\xi_i) |I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \\ \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_i (f(\xi_i)) |I_i| = \sum_i M_i |I_i| = \bar{S}(f, \mathbb{T}) \end{aligned}$$

### 6.3 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

**Теорема.** Пусть  $\tilde{\mathbb{T}}$  - измельчение разбиения  $\mathbb{T}$ , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

**Доказательство.** Если  $L \subset M$ , то  $\inf L \geq \inf M$  и  $\sup L \leq \sup M$ , тогда:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по 6.2}}{\leq} \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

### 6.4 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брус

**Теорема.**  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

**Доказательство.**  $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$  рассм  $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ , тогда по 6.3:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

### 6.5 Верхние и нижние интегралы Дарбу

**Определение.** Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа

$$\bar{I} := \inf_{\mathbb{T}} \bar{S}(f, \mathbb{T}) \quad \underline{I} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

соответственно



## 6.6 Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу

**Теорема.** Пусть  $I \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус, а  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  — ограничена. Тогда:

$$\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \overline{\mathcal{S}}(f, T) \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, T)$$

**Доказательство.** Докажем, что  $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, T) \quad (= \sup_T \underline{\mathcal{S}}(f, T))$

1.  $f$ -ограничена на  $I$ , то  $\exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| < C$
2. т.к. по определению  $\underline{\mathcal{I}} = \sup_T \underline{\mathcal{S}}(f, T)$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists T_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} : \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathcal{S}}(f, T_1) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть  $G = \bigcup_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$  - объединение границ брусков (без повторов). Тогда  $G$  множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)
4. Пусть  $T_2$  - произвольное разбиение  $I : T_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$   
Рассмотрим две кучки брусков:

$$A = \{I_i^2 \in T_2 : I_i^2 \cap G \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad B = T_2 \setminus A \implies \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T_2 : \Delta_{T_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

по определению множества меры нуль, а также т.к.  $A$  - покрытие замкнутыми брусками, а  $G$  - мн-во меры нуль.

5. С другой стороны  $\forall I_i^2 \in B$  верно, что  $I_i^2 \in T_1 \cap T_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)| = |I - \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) + \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)| \leq \underbrace{|I - \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2)|}_* + \underbrace{|\underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)|}_{**} \\ < \varepsilon + 2M\varepsilon = \varepsilon(1 + 2M)$$

\* из п.2:  $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathcal{S}}(f, T_1) \leq \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2)| < \varepsilon$

\*\*

$$\begin{aligned} |\underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)| &= \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i^2 \in T_2 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ &\leq \left| \sum_{I_i^2 \in T_2 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ &\leq 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ &< 2M \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| \\ &\leq 2M\varepsilon \end{aligned}$$

□

## 7 Критерий Дарбу. Теорема Фубини

### 7.1 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману

$I \in \mathbb{R}^n$  — замкнутый брус,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$  — ограничена на  $I$  и  $\underline{I} = \bar{I}$

**Доказательство.** Необходимость

- $f \in \mathcal{R}(I) \implies$  по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом бресе,  $f$  — ограничена на  $I$
- Покажем, что  $\underline{I} = I, \bar{I} = I \implies \underline{I} = \bar{I}$

$$1. f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \hookrightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - I| < \varepsilon$$

$$2. \underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T}) \implies |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$$

$$3. \underline{S}(\mathbb{T}, \xi) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$$

$$\forall \mathbb{T}, \forall \varepsilon > 0 \exists \xi : |\underline{S} - \sigma| < \varepsilon$$

$$|I - \underline{I}| \leq |I - \underline{I} - \sigma + \sigma + \underline{S} - \underline{S}| \leq |I - \sigma| + |\underline{I} - \underline{S}| + |\sigma - \underline{S}| < 3\varepsilon \quad \square$$

**Доказательство.** Достаточность

$f$  — ограничена и  $\underline{I} = \bar{I}$ . Имеем

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Тогда, при  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \underline{S} = \underline{I}$ ,  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{S} = \bar{I}$  получаем  $\underline{I} = \bar{I}$  □

### 7.2 Интегрирование по допустимым множествам

**Определение.** Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называется *допустимым*, если

- $D$  — ограничено
- $\partial D$  — множество меры нуль по Лебегу

**Определение.** Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда, интегралом Римана  $f$  по  $D$  называется число  $\mathcal{I}$ :

$$\mathcal{I} = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\bar{x}) d\bar{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, \bar{x} \in D \\ 0, \bar{x} \in D \end{cases}$$

**Корректность определения.**  $I_1 \supset D, I_2 \supset D$ , тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще

Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$  по критерию Лебега  $f \cdot \chi_D$  ограничена на  $I_1 \implies f \cdot \chi_D$  ограничена на  $D \implies f$  ограничена на  $D \implies f \cdot \chi_D$  ограничена на  $I_2$
- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$  по критерию Лебега  $f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $I_1 \implies f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $D \implies$  в худшем случае для  $f \cdot \chi_D$  на  $I_2$  добавятся разрывы на  $\partial D \implies f \cdot \chi_D$  непрерывна почти всюду на  $I_2$

- Тогда,  $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \iff f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть  $\mathbb{T}_i$  — разбиение на  $I_i : \mathbb{T}_1$  и  $\mathbb{T}_2$  совпадают на общей части  $I_1 \cap I_2$
- Пусть  $\xi^i$  — отмеченные точки  $I_i$  : совпадают на общей части
- $\sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum_j f\chi_D(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^2)|I_j^2| = \sum_j f\chi_D(\xi_j^2)|I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

**Примечание.** Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

### 7.3 Теорема Фубини

Пусть имеются  $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^n, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$  — замкнутые бруссы,  $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$  и  $\forall$  фиксированной  $x \in I_x : f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left( \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что  $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y), f \in \mathcal{R}(I_y)$ , а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$  — разбиение на  $I_x, \mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$  — разбиение на  $I_y, \mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$  — разбиение на  $I_x \times I_y$

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y) |I_{ij}| \leq \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left( \inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \right) |I_i^x| |I_j^y| = \sum_i \inf_{I_i^x} \left( \underbrace{\sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y) |I_j^y|}_{\underline{S}(f(y), \mathbb{T}_y)} \right) |I_i^x| \\ &\leq \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left( \int_{I_y} f(x,y) dy \right)}_{g(x)} |I_i^x| = \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \\ &\leq \bar{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \end{aligned}$$

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \leq \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \implies \exists \bar{I} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) = I$$