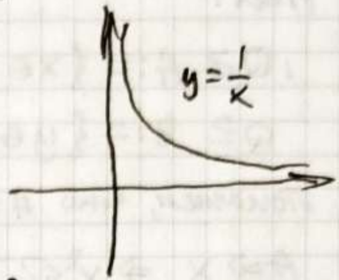
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

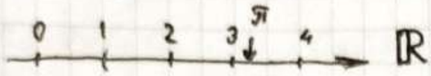
$O_{У} = 0{,}2_{кр} + 0{,}3_{экз} + 2 \times 0{,}15_{кл} + 0{,}12_{дз} + 0{,}08_{ДР}$

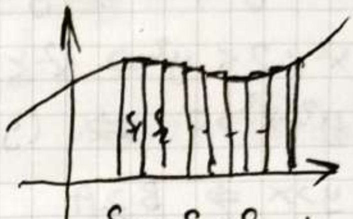


ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

$\mathbb{N}$ – натуральные числа

$\mathbb{Z}$ – целые числа $\quad \mathbb{Q} := \{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \}$ $\quad (n,m) = НОД(n,m)$





н н н н (дедекиндово)

"они скучные, и мы говорить о них не будем"

$S_n = S_1 + S_2 + \ldots \Rightarrow \int$

$A \subset \{a\} \quad B := \{b\} \quad A \times B := \{(a,b), a \in A, b \in B\}$

$A = B = \mathbb{R}^1$

Аксиомы

I – аксиомы поля: $(x,y) \mapsto x+y \quad (x,y) \mapsto xy \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\exists$ – exists
$\forall$ – for all

I.1 $x + (y+z) = (x+y) + z$ ассоциативность
I.2 $x + y = y + x$
I.3 $\exists 0 \in \mathbb{R}: x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$
I.4 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}: x + (-x) = 0$
I.5 $x(yz) = (xy)z$
I.6 $xy = yx$
I.7 $\exists 1 \neq 0: 1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbb{R}$
I.8 $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1}: x x^{-1} = 1$
I.9 $x(y+z) + xy + xz$

II – упорядоченное поле $\forall x, y: x \le y$

II.1 $x \le y, y \le z \Rightarrow x \le z$
II.2 $x \le y \ \& \ y \le x \Rightarrow x = y$
II.3 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ либо $x \le y$, либо $y < x$
II.4 $x \le y \Rightarrow x + z \le y + z$
II.5 $0 \le x, 0 \le y \Rightarrow 0 \le xy$

полноты

III Аксиома плотности (= непрерывности) "в $\mathbb{R}$ нет дыр"

$A, B \subseteq \mathbb{R}, \ A, B \neq \varnothing$ мы пишем $A \le B \Leftrightarrow a \le b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$

$\forall$ таких подмножеств $\exists C \in \mathbb{R}: A \le C \le B$

$\Leftrightarrow a \le c \le b \quad \forall a \in A, \forall c \in B$

$\nexists$ $\mathbb{Q}$ содержит дыры ($\Leftrightarrow$ А.П. не выполнена в $\mathbb{Q}$)

Proof:

$\mathbb{Q} \supseteq A := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\} \ni 1, \; A \neq \emptyset$

$\mathbb{Q} \supseteq B := \{y \in \mathbb{Q} : y > 0, y^2 > 2\} \ni 10, \; B \neq \emptyset$

Покажем, что $A \leq B$

$\left.\begin{array}{l} A \ni x \Rightarrow x^2 < 2 \\ B \ni y \Rightarrow y^2 > 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) > 0 \; /(y+x)$

$\Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow B \geqslant A$

$x^2 < 2 < y^2 \Rightarrow x^2 < y^2$

$y^2 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) > 0 \quad y, x > 0 \Rightarrow y + x > 0$

$y > x \Rightarrow B \geqslant A$

① $c^2 = 2$ ② $c^2 < 2$ ③ $c^2 > 2$

① Пусть $c \in \mathbb{Q} \Rightarrow c = \frac{p}{q} \quad (p, q) = 1$

$c^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow$

p – чётное $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~p~~ q – чётное $\Rightarrow (p, q) \,\vdots\, 2$ – противоречие

② Пусть $c^2 < 2$

Если мы найдём $\underset{h>0}{h \in \mathbb{Q}}$ such that $(c+h)^2 < 2 \Rightarrow$
это будет означать а) $c + h \in A$
б) $c < c + h < y, \; y \in B$

$(c+h)^2 < 2$
$c^2 + 2ch + h^2 < 2 \Leftrightarrow 2ch + h^2 < 2 - c^2$
$h(2c + h) < 2 - c^2$

А давайте положим $h < 1$

$h(2c + h) < h(2c + 1)$, если $h(2c+1) < 2 - c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h(2c + h) < 2 - c^2$

$a < b \;\; b < c \Rightarrow a < c$

$h = \frac{2 - c^2}{2c + 1} \cdot \frac{1}{10^N}$

③ Аналогично, но вычитаем 2

<u>Следствие</u> $\exists \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

∞ десятичные дроби := модель для $\mathbb{R}$

a – б/д, $a = a_0, a_1, a_2 \dots$, где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2 \dots \in \{0, 1, \dots 9\}$

мы запрещаем такое, $a \neq a_0, a_1 \dots a_n 999 \dots$

$x = 0{,}999 \dots$
$10x = 9{,}99 \dots = 9 + x$

$10x = 9 + x \Rightarrow x = 1 \quad 9{,}99\dots9 = 1$

$A = \{a_0, a_1, \dots a_n \dots\} \qquad a_0, a_1 a_2 \dots < b_0, b_1 b_2 \dots$
$B = \{b_0, b_1, \dots b_m \dots\} \qquad A < B$, построим C

$c = c_0 c_1 c_2 \dots \qquad c_0 := \min\{b_0 \mid b_0, b_1, b_2 \dots \in B\}$
$b_0 := \{c_0, b_1, b_2 \dots b_n \dots\}$

11.09.23 ЛЕКЦИЯ-2

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Если каждому $n \in \mathbb{N}$ $n \to a_n$ поставлено в соответствие некоторое число $a_n \in \mathbb{R}$ то говорят, что задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Пример ① $\{1, 1, 1, 1 \dots 1, \dots\}$ $\{a_n\}$, где $a_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

② $\{+1, -1, +1, -1, \dots\} = \{a_n\}$ $a_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

③ $\{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ $\{a_n\}$, $a_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

④ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots\}$ $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

⑤ $\{a_n\}$ $a_n = \frac{2n}{n+3}$;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a_n	0,5	0,8	1	1,14	1,25	1,33	1,4	1,45	1,5	1,53	1,57	1,6	1,62	1,647

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу x, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти ($\exists$) такое натуральное N (= номер элемента последовательности) что для любого $n > N$, $|x_n - x| < \varepsilon$. И пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ $(x_n \to x,\ n \to \infty)$

расстояние

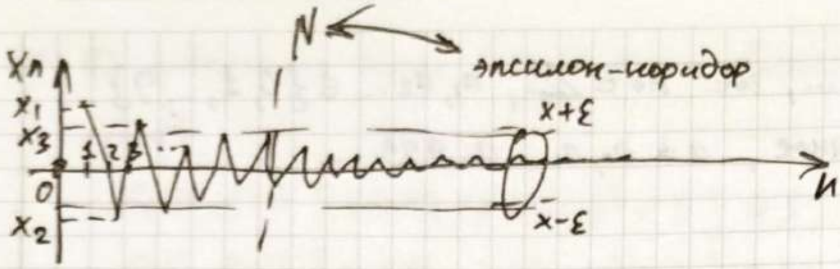
в кванторах: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N,\ |x_n - x| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \quad \varepsilon = 0{,}1$. $N - ?$ $\quad n > N$, $|-\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \frac{1}{n}$, Покажем, что $\left(\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow\right.$ нужно найти для любого эпсилона какой-то номер N, такой, что $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$, $\forall n > N$ $\quad |\frac{1}{n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow N := [\frac{1}{\varepsilon}]$ (= целая часть)

Пусть $\varepsilon = 0.1$, $N = 10 \Rightarrow$ если $n > 10 \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < 0.1$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	~~0,5~~	~~0,8~~	~~1~~	~~1,14~~	~~1,25~~							
x_n	1	0,5	0,33	0,25	0,2	0,166	1,42	0,125	0,111	0,1	0,09	0,83



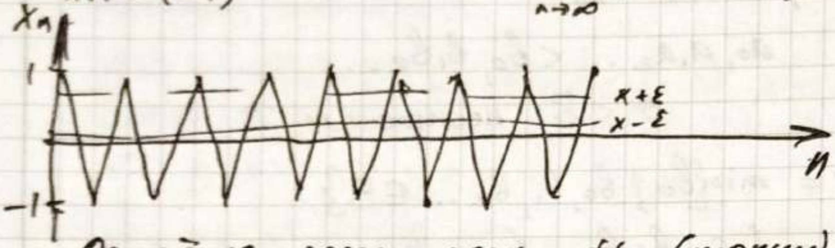
Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$|x_n - x| < \varepsilon$

$x-\varepsilon < x_n < x+\varepsilon$

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

$x_n = (-1)^n$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ $-1 < x < 1$



$x+\varepsilon < 1$ нет много

$x-\varepsilon > 1$ нет много

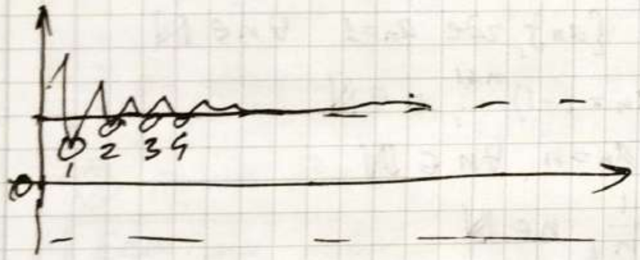
Остаётся рассмотреть ± 1 (точки), и там половины точек нет :D

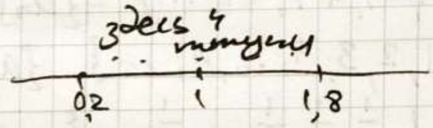
Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: \left|\frac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon\ \forall n > N$

т.к. $n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n} < 1$ $1 - \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \boxed{n < \frac{1}{1-\varepsilon}} \Rightarrow$ число таких n $\boxed{\text{конечно}}$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow \frac{1}{1-0,8} = 5 \Rightarrow n < 5 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 1\right| < 0,8$

$\Downarrow$ Выполнено $\forall n$ $n > N$ но мы поняли, что их конечное число





Последовательность x_n называется б/м, если $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x) = 0$ Пусть $x_n' = x_n - x$

Proof $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: |\underbrace{x_n - x}_{x_n'}| < \varepsilon\ \forall n > N$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: |x_n' - 0| < \varepsilon\ \forall n > N$, где $x_n' := x_n - x$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n' = 0$ Q.E.D.

Покажем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - 2) = 0$

$a_n' := a_n - 2 = \frac{2n}{n+3} - 2 = -\frac{6}{n+3}$;

Нужно $\forall \varepsilon > 0$ найти такой N, чтобы $|a_n' - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|-\frac{6}{n+3}\right| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \left[\frac{6}{\varepsilon} - 3\right] = N$

Пример: $\varepsilon = 0,1 \Rightarrow N = 57 \Rightarrow a_{58}', a_{59}', a_{60}' \ldots \in (-0,1;\ 0,1)$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: |x_n - x| < \varepsilon$, где $n = N+1, N+2 \Leftrightarrow \forall n > N$

$\Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_{N+1}, x_{N+2} \ldots \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

n	55	56	57	58	59	60
a_n'	0.103	0.101	0.1	0.09	0.096	0.093

Теорема Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$ он единственный

Proof Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, b$ и $a \neq b$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N$

$\lim\limits_{m\to\infty} a_m = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M: |a_m - b| < \varepsilon \quad \forall m > M$

Пусть $K := \max(N, M) \Rightarrow k > K \quad |a-b| = |(a-a_k) + (a_k - b)| \leq$

$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}$ $\quad \leq |a - a_k| + |a_k - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|a-b| < 2\varepsilon \text{ — верно для } \underline{\text{любого}}\ \varepsilon > 0}$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{3}|a-b| = |a-b| < \frac{2}{3}|a-b| \Rightarrow$ противоречие

ЛЕКЦИЯ-3 18.09.23

АРИФМЕТИКА ПРЕДЕЛА

Теорема Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ & $\lim b_n = b$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n, \ \forall c \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
4. если $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

$\{x_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N: |x_n - x| < \varepsilon$ $\forall n > N \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$

$x-\varepsilon \quad x \quad x+\varepsilon \quad \mathbb{R}$

Доказательства:

① а) если $c = 0 \Rightarrow a_n = 0, \forall n$

$\{ca_n\} = \{0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$

б) если $c \neq 0$, обозначим $a_n' := ca_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N,$

$|a_n - a| < \varepsilon, \ \underline{\forall n > N} \quad |\cdot|c|$

$|c||a_n - a| < \varepsilon \cdot |c| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |ca_n - ca| < |c| \cdot \varepsilon \Leftrightarrow |a_n' - ca| < |c| \cdot \varepsilon \quad \forall n > N \Rightarrow$

поэтому, если положить, что $\varepsilon' := |c|\varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon' : \exists N : |a_n' - ca| < \varepsilon'$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n' = c \cdot a = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

возьмём $\varepsilon > 0 \quad \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$

② $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N: |a_n - a| < \varepsilon'$

$\lim b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M: |b_m - b| < \varepsilon'$

$K := \max\{N, M\} \Rightarrow \forall k > K: \quad \begin{matrix} |a_k - a| < \varepsilon' \\ |b_k - b| < \varepsilon' \end{matrix}$

$|a_k + b_k - (a+b)| = |(a_k - a) + (b_k - b)| \leq |a_k - a| + |b_k - b| < \varepsilon' + \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Вывод: мы для любого $\varepsilon>0$ нашли K такое, что $\forall k > K: |(a_k+b_k)-(a+b)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

③ Заметим, что $a_n b_n - ab = (a_n-a)(b_n-b) + a(b_n-b) + b(a_n-a)$

Мы хотим: $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n - ab) = \lim\limits_{n\to\infty}\left((a_n-a)(b_n-b)+a(b_n-b)+b(a_n-a)\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)(b_n-b) + a\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-b) + b\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)(b_n-b)+0+0$

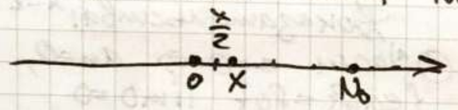
$\boxed{\text{Наша цель – показать, что } \lim(a_n-a)(b_n-b)=0} \Rightarrow |(a_n-a)(b_n-b)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N: |a_n-a|<\varepsilon' \ \forall n>N$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon, \exists M \ |b_m-b|<\varepsilon \ \forall m>M$

Пусть $\varepsilon' := \varepsilon^2$, $K := \max\{N, M\}$

$|(a_k-a)(b_k-b)| = |a_k-a|\cdot|b_k-b| < \varepsilon^2 = \varepsilon' \Rightarrow$ $\boxed{\text{Вывод: } \forall\varepsilon'>0 \text{ нашли } K: \forall k>K \Rightarrow |(a_k-a)(b_k-b)|<\varepsilon}$

$\boxed{\text{Лемма об отделимости}}$ Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x>0 \Rightarrow$ найдётся такой номер N_0, что при $n>N_0$, $x_n > \frac{x}{2} > 0$.



Док-во $\lim x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists N: |x_n-x|<\varepsilon \ \forall n>N$

Пусть $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \exists N': |x_n-x| < \frac{x}{2} \ \forall n>N'$

$\frac{x}{2} < x_n < \frac{3}{2}x$, q.e.d.

④ It's enough to prove: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$: будем считать, что $b>0 \Rightarrow$ $\quad \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$

по теореме об отделимости: $\exists N_0, \forall n>N_0 \ \boxed{b_n > \frac{b}{2} > 0}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N: n>N: |b_n-b|<\varepsilon$

Пусть $M := \max\{N_0, N\} \Rightarrow \forall m>M: \left|\frac{1}{b_m}-\frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_m-b}{b_m b}\right| =$

$= \frac{|b_m-b|}{b_m b} < \frac{\varepsilon}{b_m b} = \frac{\varepsilon}{b}\cdot\frac{1}{b_m} < \frac{\varepsilon}{b}\cdot\frac{2}{b} = \frac{2\varepsilon}{b^2} = \varepsilon'$

Вывод: $\forall\varepsilon'>0 \left(=\frac{2\varepsilon}{b^2}\right)$, мы нашли M такое, что $\left|\frac{1}{b_m}-\frac{1}{b}\right| < \varepsilon' \ \forall m>M \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Мы знаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim \frac{1}{n^{p-1}} \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\lim \frac{1}{n^{p-1}}}_{} \cdot \overbrace{\lim \frac{1}{n}}^{=0} = 0$

$$\lim \frac{2n^2+1}{3n^2+n+1} = \lim \frac{n^2(2+\frac{1}{n^2})}{n^2(3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{\lim 2 + (\lim \frac{1}{n})^2}{\lim 3 + \lim \frac{1}{n} + (\lim \frac{1}{n})^2} = \frac{2}{3}$$

Лемма о зажатой последовательности

Пусть даны последовательности: $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ такие, что $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Док-во т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N: |a_n - a| < \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M: |c_m - a| < \varepsilon,\ \forall m > M$

Пусть $k := \max\{N, M\}$;

$\begin{cases} a-\varepsilon < a_k < a+\varepsilon \\ a-\varepsilon < c_k < a+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow$ так как $a_k \leq c_k \Leftrightarrow a-\varepsilon < a_k \leq b_k \leq c_k < a+\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow a-\varepsilon < b_k < a+\varepsilon \Rightarrow |b_k - a| < \varepsilon$ $\forall k > K \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Лемма (переход предела в неравенство)

$\{a_n\}, \{b_n\}$ такие, что $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ & $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow a \leq b$

Док-во: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ |a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n > N$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M\ |b_m - b| < \varepsilon,\ \forall m > M$

$k = \max\{N, M\} := \forall k > k: |a_k - a| < \varepsilon$ & $|b_k - b| < \varepsilon \Rightarrow$

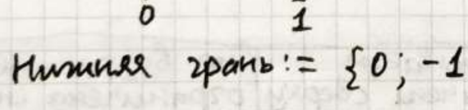
$\Rightarrow a-\varepsilon < a_k \leq b_k < b+\varepsilon \Rightarrow a-\varepsilon < b+\varepsilon \Rightarrow a < b+2\varepsilon \Rightarrow a < b$

ЛЕКЦИЯ-4 22.09.23

ВОЗРАСТАЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение $\mathbb{R} \supseteq A \neq \varnothing$ Число $a \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью если $x \leq a$, $\forall x \in A$

число b называется нижней гранью, если $\forall x \in A$, $x \geq b$



$A = (0; 1]$ Верхняя грань $:= \{1, 10^6, 2, 3, 13786, \sqrt{2}, \dots\} = A^{\bullet}$

Нижняя грань $:= \{0; -1, -10, \dots\} = A_{\bullet}$ $A = (-7; -3) \cup (0; 1]$

$A^{\bullet} = \{1, \dots\} = (0, 1]^{\bullet}$,

$A_{\bullet} = \{-9, -8\}$

Определение Наименьшее среди всех верхних граней A называется (точная верхняя грань) или супремум $\sup A$

Наибольшее среди всех нижних называется инфимум $\inf A$ (точная нижняя грань)

$\mathbb{Q} \supset A$, $A = \{x > 0,\ x^2 < 2\}$ $\quad \sup(A) \notin \mathbb{Q}$

Теорема (принцип полноты Вейерштрасса)

Если $A \subseteq \mathbb{R}$ не пустое и ограничено [сверху | снизу], то [$\sup(A)$ | $\inf(A)$] существует.

① $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ ② $A \leq B \Leftrightarrow (\forall a \in A, \forall b \in B,\ a \leq b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \quad A \leq c \leq B$

Proof. Докажем в случае, когда A ограничена сверху. Пусть B – множество всех верхних граней A.
$B \neq 0$, потому что A ограничено сверху (= т.е. есть хотя бы одна верхняя грань)

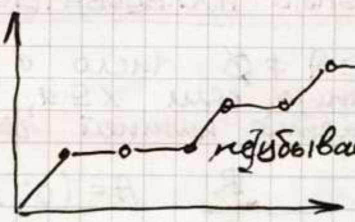
По конструкции B, $A \leq B \Rightarrow$ по принципу полноты $\exists c \in \mathbb{R}$, $a \leq c \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

$A \leq B \Leftrightarrow a \leq b$, если $b \in B \Rightarrow b$ – верхняя грань $\Rightarrow a \leq b$, $\forall a \in A$

С одной стороны, $c \in B$, но с другой стороны c – наименьшее среди всех $b \in B \Rightarrow c = \sup(A)$

Определение Последовательность называется ограниченной [сверху | снизу], если $\exists C$: $a_n \leq C$ (соотв. $a_n \geq C$)
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\{a_n\}$, где $\quad a_n = \frac{1}{n} \quad 0 \leq a_n \leq 1000$

Определение Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ [не убывает | не возрастает], если [$a_n \leq a_{n+1}$ | (соответственно $a_n \geq a_{n+1}$)] $\forall n$: последовательность, которая или [не убывает | или не возрастает] называется монотонной.



Теорема (Вейерштрасс)

Если последовательность, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$	не убывает, ограничена сверху, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$	не возрастает, ограничена снизу, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$

Proof Докажем только для неубывающих

• т.к. $\{a_n\}$ ограничена сверху, то по принципу полноты Вейерштрасса $\exists \sup\{a_n\}$

Обозначим $\sup\{a_n\} = a. \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ a-\varepsilon \neq \sup\{a_n\} \Rightarrow \exists N:$
$a_N > a - \varepsilon$

• $\{a_n\}$ не убывающая $\Rightarrow a_N, a_{N+1} \ldots > a-\varepsilon,$
т.к. $a = \sup\{a_n\} \Rightarrow \forall a_n \le a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, мы нашли N:
$a - \varepsilon < a_n \le a \le a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim a_n = a$

Пример $a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

① Нужно показать $\{a_n\}$ ограничена, $a_n > 0$?
② Нужно показать $\{a_n\}$ не возрастает, $a_n \ge a_{n+1}$

$\lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \qquad a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \qquad a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$

ЧИСЛО ЭЙЛЕРА $\quad (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$, где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\boxed{e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n^3} + \ldots = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}1\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\times\ldots\times\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}_{>0} \qquad \boxed{1 > \frac{m}{n} > 0} \Rightarrow e_n > 0 \quad \forall 1 \le m \le n-1$$

$$e_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{m}{n} < 1 - \frac{m}{n+1} \Leftrightarrow -\frac{m}{n} < -\frac{m}{n+1} \Leftrightarrow \frac{m}{n} > \frac{m}{n+1} \Leftrightarrow n+1 > n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{e_n \le e_{n+1}} \qquad e_n = 2 + \sum_{k=2}^{n-1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{<1}\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{<1}\ldots\underbrace{\left(1 - \frac{k}{n}\right)}_{<1}\frac{1}{n!} < \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k!}\right) + 2 \le$$

$$2^{k-1} \le k! \Leftrightarrow \frac{1}{k!} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \Rightarrow \ldots \le 2 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \le 2 + 1 = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow e_n \le e_{n+1}$ & $e_n \le 3 \Rightarrow$ по Вейерштрассу $\exists \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ и этот предел называется числом Эйлера $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} e_n = e \approx 2.71828182845}$

$a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \quad \lim a_n = \frac{\pi^2}{6} \quad \Big| \quad a_n = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n}$

ЛЕКЦИЯ-5 25.09.23

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

"ПОЧТИ ВСЕ" = "ВСЕ ЗА ИСКЛЮЧЕНИЕМ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА"

Определение Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной (последовательностью Коши), если: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$, такой, что $\forall n, m \geq N \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Пример. ① $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ она фундаментальна?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: n, m \geq N \ |a_n - a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n} + \frac{-1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{-1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

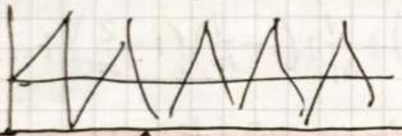
Давайте посмотрим $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon$ $N - ?$ $n, m \geq N$

Пусть $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$, $n, m \geq \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \varepsilon \Rightarrow$

$n, m \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ – фундаментальна

② $a_n = (-1)^n$, $-1, 1, -1, 1 \ldots$ Пусть $\varepsilon = 1$ для всякого N, $|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}|$

$$\begin{cases} 1 - (-1) = 2, & n - \text{чётно} \\ -1 - (1) = -2 & n - \text{нечётно} \end{cases} \Rightarrow |a_n - a_{n+1}| = 2 \Rightarrow \text{она не фундаментальна}$$



Лемма о вложенных отрезках

Для любой последовательности $\{I_n\}$ бесконечного числа вложенных друг в друга отрезков на числовой прямой, т.е. $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] = I_n \subseteq \mathbb{R}$, длины которых $\to 0$,

$\boxed{\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \neq \varnothing}$ ← их бесконечное количество и есть пересечение

Proof $a_1 \leq a_2$ $\{a_n\}$ $b_2 \leq b_1$ $\{b_n\}$ $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$

I_3 I_2 I_1

- $\{a_n\}$ не убывает, ограничена сверху b_1, по теореме Вейерштрасса $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a$
- $\{b_n\}$ не возрастает, ограничена снизу $a_1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\} = b$

$b_n = a_n + (b_n - a_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = [I_n] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a_n + 0$, т.к. по условию $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} = a$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n\}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\Rightarrow a_n \leq a \leq b_n \ \forall n$ example: $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$

$\Downarrow$ $a \in I_n, \forall n$

$\Downarrow$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supseteq \{a\} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$

Теорема **Критерий Коши**

Последовательность $\{a_n\}$ сходится если и только если она фундаментальна.

Proof ① Пусть $\{a_n\}$ - сходится $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $n, m > N$, $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| =$
$= |(a_n - a) + (a - a_m)| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Вывод: мы $\forall \varepsilon > 0$ предъявили N такой, что $\forall n, m > N$, $|a_n - a_m| < \varepsilon \Leftrightarrow \{a_n\}$ - фундаментальна.

② Пусть $\{a_n\}$ - фундаментальна.
Берём произвольную бесконечно малую $\{\varepsilon_k\}$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_k = 0$ с условием $\varepsilon_k > 0, \forall k$.

Т.к. $\{a_n\}$ фундаментальна, то $\forall \varepsilon_k > 0$ $\exists N_k$ т.ч. $\forall n, m \geq N_k$ $|a_n - a_m| < \varepsilon_k$. В частности $|a_n - a_{N_k}| < \varepsilon_k \Leftrightarrow a_n \in [a_{N_k} - \varepsilon_k, a_{N_k} + \varepsilon_k]$ $\underset{''}{J_k}$

$|J_k| = 2\varepsilon_k \to 0$, пусть $I_1 := J_1 = (a_{N_1} - \varepsilon_1, a_{N_1} + \varepsilon_1)$ $\quad J_2 = J_1 \cap J_2$,

$J_3 = J_1 \cap J_2 \cap J_3 \ldots \quad J_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} J_i$,

т.е. мы получили бесконечную последовательность $\{J_k\}$, вложенных друг в друга отрезков, длины которых $\to 0 \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} J_k \neq \varnothing$. Пусть $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \Leftrightarrow$

$a \in (a_{N_k} - \varepsilon_k, a_{N_k} + \varepsilon_k)\ \forall k \Rightarrow \forall \varepsilon_k > 0$ мы знаем N_k такой, что $n > N_k$, $|a_n - a| < \varepsilon_k \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

ЛЕКЦИЯ-6 02.10.23

Предложение. $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geq 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}}$

Proof ① Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$:

$1 - \varepsilon < a_n < 1 + \varepsilon \quad \forall n > N \quad 1 + \varepsilon < \sqrt{1-\varepsilon} < \sqrt{a_n} < \sqrt{1+\varepsilon} < 1 + \varepsilon$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$

$\Downarrow$

$1 - \varepsilon < \sqrt{1-\varepsilon}$ $\quad \varepsilon^2 - \varepsilon < 0$ $\quad 1 - \varepsilon < \sqrt{1-\varepsilon} < \sqrt{a_n} < \sqrt{1+\varepsilon} < 1 + \varepsilon$

$\Updownarrow \quad\quad \Downarrow \quad\quad \Downarrow$

$(1-\varepsilon)^2 < 1 - \varepsilon$ $\quad \varepsilon < 1$ $\quad 1 - \varepsilon < \sqrt{a_n} < 1 + \varepsilon$

$1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 < 1 - \varepsilon$

Пусть $\varepsilon \geq 1 \Rightarrow$ $1 - \varepsilon < 0 \leq a_n < 1 + \varepsilon$

$0 \leq a_n < 1 + \varepsilon$

$\Updownarrow$

$0 = \sqrt{0} \leq \sqrt{a_n} < \sqrt{1+\varepsilon}$

$\Updownarrow$

$0 \leq \sqrt{a_n} < \sqrt{1+\varepsilon} < 1 + \varepsilon$

$\Updownarrow$

$1 - \varepsilon \leq 0 \leq \sqrt{a_n} < 1 + \varepsilon$

$\forall n > N$, $1 - \varepsilon \leq \sqrt{a_n} < 1 + \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = 1$

② Пусть $a \neq 1, 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a} = 1 \Rightarrow \lim\sqrt{\frac{a_n}{a}} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{a}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{a_n}{a}} = \sqrt{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a}\sqrt{\frac{a_n}{a}} = \sqrt{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

③ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N: -\varepsilon<a_n<\varepsilon, \forall n>N$

$-\varepsilon < 0 \le \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon} < \varepsilon, \ \varepsilon \geq 1$

$-\varepsilon<\sqrt{a_n}<\varepsilon$

ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

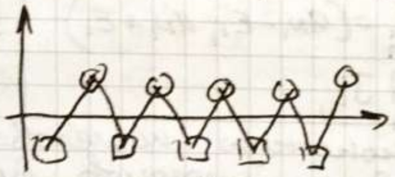
Определение Пусть дана последовательность $\{a_n\}$, и пусть выбраны её бесконечное количество номеров $n_1, n_2, n_3 \ldots$ такие, что $n_1<n_2<n_3<\ldots$ тогда $\{a_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

Примеры

① $\underset{1}{1},\underset{2}{2},\underset{3}{3},\underset{4}{1},\underset{5}{2},\underset{6}{3},\underset{7}{1},\underset{8}{2},\underset{9}{3}\ldots$ $n_1 = 2 < n_2 = 5 < n_3 = 7$

② $\{a_n\} = \{\overset{1}{1},\overset{2}{1},\overset{3}{1},\overset{4}{5},\overset{5}{5},\overset{6}{5}\ldots\}$ $\{5,5,1,\ldots\}$ — не подпослед.

$a_n = (-1)^n$

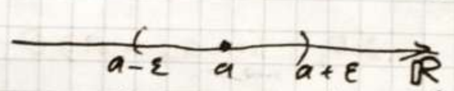


Её подпоследовательности
$\{a_{2n}\}=\{1\}$
$\{a_{2n-1}\}=\{-1\}$ $\{a_n\}=\{a_{2n}\}\sqcup\{a_{2n-1}\}$

Лемма Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, тогда $n_k \ge k$, $k\ge1$.

Proof Т.к. $n_k\in\mathbb{N} \Rightarrow n_k\ge1$ в частности $n_1\ge1$ (БАЗА)
Пусть $n_k\ge k$, $n_{k+1}>n_k\ge k \Rightarrow n_{k+1}>k \Leftrightarrow n_{k+1}\ge k+1$
q.e.d

Теорема Пусть $\{a_n\}$ — последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда для любой её подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$



$a_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon), \forall n>N$

Proof $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N: |a_n-a|<\varepsilon, \forall n>N \Rightarrow$
выберем $k>N \Rightarrow$ по лемме (*) $n_k\ge k>N \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_{n_k}-a|<\varepsilon$ $\forall n_k>N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса) Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то в ней есть сходящаяся подпоследовательность.

Proof ① т.к. $\{a_n\}$ ограничена $\Leftrightarrow \exists a,b: a\le a_n\le b, \ \forall n\ge1$
пусть $I_1=[a,b]\subset\mathbb{R}$

② Разделим I_1 на две равные части и выберем ту половину, где бесконечное число элементов нашей последовательности и обозначим эту половину через I_2

③ Ту же процедуру проделываем для I_2

В результате, $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\ldots$, $\lim|I_n|=0\Rightarrow$
по лемме о вложенных отрезках $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \ni c$ (пересечение не пустое) $\Rightarrow \exists c\in I_1$

④ Выберем в каждом I_k элемент нашей последовательности с номером n_k, при этом требуя чтобы номер n_{k+1} элемента, который выбирается в I_{k+1} удовлетворяет $n_k < n_{k+1}$

$I_k \ni a_{n_k}$
$\cup$
$I_{k+1} \ni a_{n_{k+1}} \Rightarrow$

a_{n_k}, $a_{n_{k+1}}$, I_{k+1} $\quad n_{k+1} > n_k$

Мы построили подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$

$|a_{n_k} - c| < |I_k| = \frac{|I_1|}{2^{k-1}}$, $\forall k \geq 1 \iff \lim\limits_{n_k \to +\infty} a_{n_k} = c$, q.e.d.

Определение Частичный предел последовательности $\{a_n\}$ – предел какой-то ее подпоследовательности.

$a_n = (-1)^n$ $\quad \{1, -1\}$ – множество всех частичных пределов

Теорема Пусть $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность, тогда:

① $M_k := \sup\limits_{k > n}\{a_n\}$ ② $m_k := \inf\limits_{k > n}\{a_k\}$

$M_1 := \sup\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$ $\quad m_1 := \inf\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$M_2 := \sup\{a_3, a_4, \dots\}$ $\quad m_2 := \inf\{a_3, a_4, \dots\}$

$M_3 := \sup\{a_4, \dots\}$ $\quad m_3 := \inf\{a_4, \dots\}$

$\{M_k\}$ не возрастает и имеет название **верхний предел пос-ти** $\limsup a_n = M$ $\quad \overline{\lim}\, a$

$\{m_k\}$ не убывает и имеет предел m, который называется **нижний предел** $\liminf a_n = m$ $\quad \underline{\lim}\, a$

③ $\forall$ подпоследовательности $\{a_{n_t}\}$, у которой есть предел, $\boxed{m \leq \lim a_{n_t} \leq M}$

Пример. $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3 \dots\}$

$\limsup a_n = 3$ $\quad \liminf a_n = 1$ $\quad$ Множество всех частичных пределов: $\{1, 2, 3\}$ $\quad 1 \leq 2 \leq 3$

ЛЕКЦИЯ-7 06.10.2023

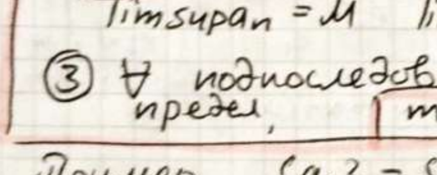
Теорема $\{a_n\}$ – ограниченная последовательность — // —

Proof ①. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ – ограниченное подмножество $A \subseteq B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$, $\inf(A) \geq \inf(B)$ (Доказать, $-A = \{-a \mid a \in A\}$ $\inf(A) = -\sup(A)$)

$\forall A \subseteq B \Rightarrow \{M_k\}$ не возрастает $\boxed{\sup(A) \leq \sup(B)}$

$\forall A \subseteq B \Rightarrow \{m_k\}$ – не убывает $\boxed{\inf(A) \geq \inf(B)}$

т.к. $\{a_n\}$ ограничена $\Rightarrow \{M_k\}\ \{m_k\}$ – ограничены $\Rightarrow$ по Вейерштрассу существуют пределы $\Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} M_k = M$ $\quad \lim\limits_{k \to +\infty} m_k = m$



т.к. $M_1 = \sup\{a_2, a_3 \dots\}$, то $\exists a_{n_1} \in \{a_2, a_3, \dots\}$ такой, что ①
$M_1 - 1 < a_{n_1} \leq M_1$

$M_{n_1} = \sup\{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}$ ②
$\exists a_{n_2} \in \{a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, \dots\}$ такой, что:
$M_{n_1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq M_{n_1} \Rightarrow n_2 > n_1$

Таким образом, на k-ом шаге a_{n_k}:

$M_{n_{k-1}} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \le M_{n_{k-1}}$, при этом $n_1 < n_2 < \dots < n_k \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_{n_k}\}$ – подпоследовательность в $\{a_n\}$, $\forall k \geq 2$;

$M_{n_{k-1}} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \le M_{n_{k-1}} \Rightarrow$ по лемме о зажатой последовательности:

$\lim\limits_{k\to\infty}(M_{k-1} - \frac{1}{k}) = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} M_{n_k}$, ч.т.д.

X, Y – множества $\quad X \times Y = \{(x,y)\ x \in X, y \in Y\}$ $\quad R \subseteq X \times Y$ отношение эквивалентности

График $\Gamma(R) := \{(x,y) : (x,y) \in R\}$

Определение Говорят, что R – функциональное отношение если $\forall x \in X$, существует не более одного $y \in Y$ т.к., что $(x,y) \in R$

$F, f,\ y = F(x)$. $\quad F: X \to Y$ отображение

$Im(F) = F(X) := \{y \in Y : \exists x \in X : \exists F(x) = y\}$

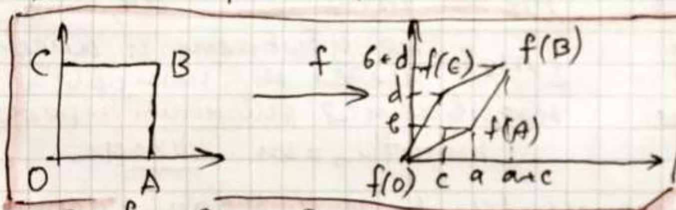
$F^{-1}(Y) := \{x \in X : \exists y \in Y : F(x) = y\}$

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, – множество упорядоченных $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$

$x = (x_1, \dots x_n)$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot x + \beta \cdot y := (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots \alpha x_n + \beta y_n)$

$y = (y_1, \dots y_n)$

$\mathbb{R}$ – векторное пространство



$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$e = \{e_1 \dots e_n\}$ $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ – плоскость $\qquad f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$F \leftrightarrow f$, $F \in Mat_{n \times p}$

$G \leftrightarrow g$, $G \in Mat_{p \times n}$

$g \circ f \leftrightarrow (G \cdot F)\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение Множество E с функцией $d: E \times E \to \mathbb{R} \geq 0$ такой, что:

① $d(x,y) = 0$ iff $x = y$ ② $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in E$

③ $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ $\quad \forall x, y, z$ (неравенство треугольника)

Примеры ① E – произвольная $\quad d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ – дискретная метрика

② $E = \mathbb{R}^1$, $d(x,y) = |x - y|$

③ $E = \mathbb{R}^2$, $d_1(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ $\quad d_3(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

$d_2(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

Расширенная прямая

метрическое пространство

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ $\quad E \xrightarrow{f} E'$, f-биекция

$d'(x,y) := d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ $\quad \bar{f}(x) = f(x),\ x \in (-1,1)$ $\quad \bar{f}(-1) = -\infty$, $\bar{f}(1) = +\infty$

ЛЕКЦИЯ-8 12.10.2023.

Изометрия

E, E' – метрические пространства, d, d' – расстояния в E, E'.

Биективное отображение называется **изометрией**, если

①

② $\boxed{d'(f(x), f(y)) = d(x,y)}$

для любой пары элементов пространства E обратное отображение f^{-1} является изометрией пространства E на E'.

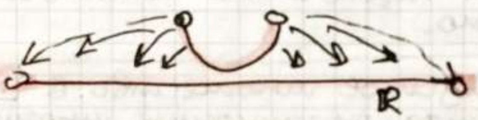
Расстояние d' может быть **перенесено** с E на E' отображением f.

$\bar{\mathbb{R}}$ и как измерять расстояние до бесконечности?

$f, \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $\quad f: \mathbb{R} \to (-1,1)$, $\quad f^{-1} = \frac{x}{1-|x|}$, при $|x| < 1$

$$\begin{tikzcd}
(-1,1) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
{[-1,-1]} \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}
\qquad \bar{\mathbb{R}} \xrightarrow{\bar{f}} [-1;1]$$

$\bar{\mathbb{R}}$ – множество из $\mathbb{R}$ и двух элементов $-\infty$, $+\infty$ (бесконечные точки)



$\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ – инъекция. Продолжим f до биекции с помощью $\bar{f}: \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = +\infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \bar{f}^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \in (0,1) \\ +\infty, & x = 1 \\ -\infty, & x = -1 \end{cases}$$

Теперь вводим расстояние на $\bar{\mathbb{R}}$, $\bar{d}(x,y) := |\bar{f}(x) - \bar{f}(y)|$, $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$:

$$\bar{d}(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|, \ x, y \in \mathbb{R}$$

$$d(x, +\infty) = \frac{1}{1+|x|},\ x \geq 0 \qquad d(-\infty, x) = \frac{1}{1+|x|}$$

Введём на $\bar{\mathbb{R}}$ отношение порядка, где $x \leq y \equiv f(x) \leq f(y)$ при $x, y \in \mathbb{R}$ ~~это~~ отношение – обычное отношение порядка на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ $-\infty < x < +\infty$

Действительные числа – конечные элементы $\bar{\mathbb{R}}$

ШАРЫ И СФЕРЫ

– элементы метрического пространства — точки.

Определение **Открытое множество** в метрическом пространстве E с расстоянием d – подмножество $A \subseteq E$, обладающее свойством, что $\forall x \in A$ $\exists\, r > 0$ что $B(x,r) \subseteq A$. Пустое множество открыто, всё пространство E открыто.

Лемма Любой открытый шар в пространстве E с расстоянием d является открытым множеством.

Определение E – метрическое пространство с расстоянием d. **Открытым шаром** называется множество $B(a,r) := \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$ с центром в точке $a \in E$ и радиусом $r \in \mathbb{R}^+$. Соответственно, $\bar{B}(a,r) := \{x \in E \mid d(a,x) \le r\}$ – **замкнутый шар**, $S(a,r) := \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$ – **сфера**.

Пример: на $\mathbb{R}$ с $d(x,y) := |x-y|$:

① $B(a,r) = (a-r, a+r)$ $\quad \bar{B}(a,r) = [a-r, a+r]$, $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$

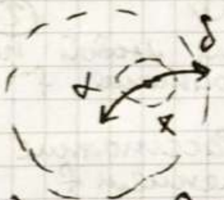
② на $\bar{\mathbb{R}}$: $\quad B(\infty, r) = \left(\frac{1-r}{r}, +\infty\right]$, $r < 1$

Proof леммы на пред. стр.

$B(a,r)$ – открытый шар,

$x \in B(a,r)$, $x \ne a \Rightarrow d(x,a) < r$

Рассмотрим открытый шар $B(x,\delta)$, где $0 < \delta < r - d(a,x)$



Нужно показать, что $B(x,\delta) \subseteq B(a,r)$:

Возьмём $y \in B(a,r)$, что $d(x,y) < \delta < r - d(a,x) \Rightarrow$ по $\triangle$

$d(a,y) \le d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r - d(a,x) = r \Rightarrow$

$y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,\delta) \subseteq B(a,r)$ и точка x была произвольной $\Rightarrow$ для любой точки в шаре есть открытый шар в $B(a,r)$

Лемма Объединение любого семейства открытых множеств открыто и пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Определение A – непустое множество в E с расстоянием d. **Открытая окрестность** множества A – любое открытое множество $\mathcal{U}(A) \supset A$. Если $A = \{x\}$, мы говорим об окрестности $\mathcal{U}(x)$ точки x.

$\mathcal{U}(x)$ можно отождествить с $B(x,r)$, поэтому разницы нет.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ E, E' – метрические пр-ва, d, d' – расстоян.

Определение $f: E \to E'$ **непрерывно** в точке $x_0 \in E$, если для каждой окрестности $\mathcal{U}'$ точки $f(x_0) \in E'$ $\exists\, \mathcal{U}(x_0)$ в E, что $f(\mathcal{U}(x_0)) \subseteq \mathcal{U}'(f(x_0))$. Отображение называется **непрерывным в E** (или просто **непрерывным**), если оно **непрерывно** в каждой точке пространства E.

Чтобы отображение $f: E \to E'$ было непрерывно в точке $x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовал такой $\delta > 0$, что из $d(x_0, x) < \delta$ следует $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

$f: E \to E'$ непрерывно $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{U}')$ – открыт в E $\forall\, \mathcal{U}'$ открытого в E'

Теорема Отображение $f: E \to E'$ между метрическими пространствами **непрерывно** тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого в E' открыт в E.

Лекция-9

Proof ① Пусть $f: E \to E'$ непрерывно. Возьмём открытое $\mathcal{U}' \subseteq E'$ и покажем, что $\mathcal{U} := f^{-1}(\mathcal{U}')$ открыто в E. $x \in \mathcal{U} \Rightarrow f(x) = x' \in \mathcal{U}'$, т.к. $\mathcal{U}'$ открыто в E', то $\exists$ шар $B'(x', r') \subseteq \mathcal{U}'$. Т.к. $B'(x', r')$ – открытая окрестность точки x' и по предположению f непрерывна в $x \in E$, то $\exists\, B(x,r) \subseteq E$, что $f(B(x,r)) \subseteq B'(x', r')$

Таким образом, $f(B(x,r)) \subseteq B'(x',r') \subseteq \mathcal{U}'$. Если $A' \subseteq B' \subseteq E'$, то $f^{-1}(A^{-1}) \subseteq B'$ $\Rightarrow$ по определению прообраза

$\hookrightarrow f^{-1}(A') := \{x \in X \mid f(x) \in A \subseteq B\} \Rightarrow f^{-1}(A^{-1}) \subseteq f^{-1}(B') \Rightarrow$

$f(B(x,r)) \subseteq B'(x',r') \subseteq \mathcal{U}' \Rightarrow$

$\hookrightarrow f(B(x,r)) \subseteq \mathcal{U}' \Leftrightarrow \boxed{f^{-1}(f(B(x,r)))} \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}') \Leftrightarrow \boxed{B(x,r)} \subseteq \mathcal{U}$,

т.е. $\forall x \in \mathcal{U}\ \exists B(x,r)$, что находится $\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}$ - открыто

ЛЕКЦИЯ-9

② Пусть прообраз $\forall$ открытого есть открытое множество в E
$\mathcal{U}'$ в E'. Аксиома выбора: $x' \in \mathcal{U}' \Rightarrow \forall x'\ \exists B'(x',r')$, что $B'(x',r') \subseteq \mathcal{U}'$
Пусть $f(x)=x'$, т.е. $x \in f^{-1}(B'(x',r'))$. По предположению
$f^{-1}(B'(x',r'))$ открыто в $E \Rightarrow \forall y \in f^{-1}(B'(x',r'))\ \exists B(y,r)$, что $B(y,r) \subseteq f^{-1}(B'(x',r'))$. $\Rightarrow B(x,r) \subseteq f^{-1}(B'(x',r'))$
Если $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B) \Rightarrow$
$\hookrightarrow B(x,r) \subseteq f^{-1}(B'(x',r')) \Rightarrow f(B(x,r)) \subseteq f(f^{-1}(B'^{-1}(x,r'))) = B'(x',r') \Rightarrow$
$\forall B'(x',r')$, где $x'=f(x) \Rightarrow \exists B(x,r)$, что $f(B(x,r)) \subseteq B'(x',r') \Rightarrow$ мы нашли непрерывность

НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ

ЛЕКЦИЯ-9 16.10.2023

(E,d), $\mathcal{U} \subset E$ - открыто $\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}\ \exists B(x,r) \subseteq \mathcal{U}$

Утверждение ① Любое открытое = объединение открытых шаров

Proof Пусть $\mathcal{U}$ - открыто, $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} B(x,r_x)$, где r_x - подходящий радиус шара такой, что $B(x,r_x) \subseteq \mathcal{U}$.

Утверждение ② Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ - семейство открытых множеств $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ - открытое

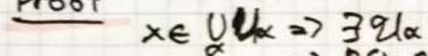
Proof
$x \in \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow \exists \mathcal{U}_\alpha : x \in \mathcal{U}_\alpha$ т.к. $\mathcal{U}_\alpha$ - открыто $\Rightarrow \exists B(x,r) \subset \mathcal{U}_\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow B(x,r) \subset \bigcup \mathcal{U}_\alpha$

Утверждение ③ $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\}$ - конечный набор открытых $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$ - открыто

Proof
$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ - открытые. Покажем, что $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ - открыто
$x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Rightarrow x \in \mathcal{U}_1, x \in \mathcal{U}_2$, т.к. $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ - открыты $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists B(x,r_1) \subseteq \mathcal{U}_1$ & $B(x,r_2) \subseteq \mathcal{U}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Пусть $r = \min(r_1,r_2) \Rightarrow B(x,r) \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \Rightarrow B(x,r) \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \Rightarrow$
$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ - открыто

Определение Замкнутое множество в метрическом пространстве (E,d) это множество вида $E \setminus \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ - открыто.

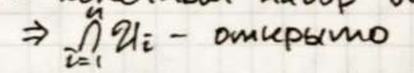
$E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$



$\mathbb{R} \setminus ((-\infty,a) \cup (b,+\infty)) = [a,b]$
$(-\infty,a) \cup (b,+\infty)$, $a<b$

Определение $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, a - точка замыкания (точка прикосновения) множества A, если $\forall B(a,r) \cap A \neq \varnothing$

$E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ $\quad A = [0,1)$ $\quad \bar{A} = [0,1]$



Множество всех точек замыкания - замыкание-множество ($\bar{A}$).

Определение E-метрическое пространство, d-расстояние
$A \subseteq E$, $A \neq \varnothing$ $a \in \bar{A}$ a-точка замыкания
Пусть $a \notin A$ и пусть $f: E \to E'$, где E'-метрическое пространство

① Мы будем говорить, что $f(x)$ имеет предел $a' \in E'$ при $x \in A$, стремящимся к A, если отображение $\bar{f}: A \cup \{a\} \to E'$:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ a', & x = a \end{cases}$$ непрерывно в a и тогда:

$$\boxed{\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = a'}$$

② Если $a \in A$, $\bar{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in A$

Пример. ① $E = \mathbb{R}$, $E' = \mathbb{R}_{>0}$ $d(x,y) = |x-y|$ $A = (0,1)$
$0, 1$ - точки замыкания $\bar{A} = [0,1]$

$f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 1, x \in (0,1) = A'} f(x)$ $\boxed{\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}}$

② $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $\bar{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывно в 1

$f: E \to E'$, $\forall r > 0$, $\exists \delta > 0$; $d(x, x) < \delta$, $d(f(x), f(y)) < r$

$f: E \to E'$, $\forall B(f(x), r)$, $\exists B(x, \delta)$, $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), r)$

$\underline{x=0}$ $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < r$

$|x^2 \sin\frac{1}{x} - f(0)| < r$ $|x^2 \sin\frac{1}{x}| < r$ $|x^2 \sin\frac{1}{x}| \leq |x^2| = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $x^2 < r$, $-\sqrt{r} < x < \sqrt{r} \Rightarrow |f(x) - f(0)| < r$