05.05.23 ЛЕКЦИЯ-1

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

i

вики-страница
Д/З max 10 + защита 0,299
коллоквиум max 10 + доп. задачи 0,299 | 1-2 модули
экзамен max 10 0,402

$0{,}2\,(\text{оц }1\text{-}2) + 0{,}2\cdot Д3 + 0{,}2\cdot \text{кол} + 0{,}4\cdot \text{экз}$ | 3-4 модули

осмысленные высказывания

истина — И — 1

ложь — Л — 0

"если я заболею, то я не приду на лекцию" = Л (И, Л)

Логические связки: и ($\wedge$, &) — конъюнкция, или ($\vee$, |) — дизъюнкция, следует ($\rightarrow$) — импликация

таблица истинности

A	B	A ∧ B	A ∨ B	A → B	A ≡ B	$\overline{A}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

ПРИОРИТЕТ ОПЕРАЦИЙ:
1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$, $\equiv$, etc

равносильность ($\equiv$, $\leftrightarrow$), отрицание ($\neg$) $\neg A = \overline{A}$

Тавтология — высказывание, истинное при всех значениях переменных (в таблице истинности всюду 1)

$\dfrac{A \quad A\rightarrow B}{B}$ modus ponens $\boxed{A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B}$ пример тавтологии

Разбор случаев: $A \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge B \equiv B \wedge A$
перестановочный, коммутативность

$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
ассоциативность

$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

($\rightarrow$) $A = 1$
$B \vee C = 1$
если $A = B = 1$, то $A \wedge B = 1$

($\leftarrow$) если $A \wedge C = 1$, то
$A = 1$, $C = 1$
$B \vee C = 1$, $A \wedge (B \vee C) = 1$

Противоречие: $A \wedge \neg A = 0$ всегда

$(A \wedge \overline{A}) \rightarrow B = 1$ всегда

"если я на ФКН и я не на ФКН, то вы папа Римский"

Закон контрапозиции

$(A \to B) \equiv (\overline{B} \to \overline{A})$

$A \to B \equiv \overline{A} \vee B \equiv \overline{\overline{B}} \vee \overline{A} \equiv B \vee \overline{A}$

$(\overline{A} \vee B) \equiv \overline{A} \vee B$

NB: $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ – тавтология

Если $\underbrace{a_1 + \ldots + a_n > n}_{A}$, то $\underbrace{\text{какое-то из } a_1, \ldots a_n \text{ больше } 1}_{B}$.

$\neg B$ = все $a_1, \ldots, a_n$ не больше 1 $\quad a_1 \le 1, \ldots, a_n \le 1$

$a_1 + \ldots + a_n \le \underbrace{1 + \ldots 1}_{n} = n$

МНОЖЕСТВА

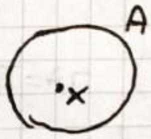
Множество – совокупность объектов одной природы.
2 множества равны, если в них одни и те же элементы.

$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} \overset{?}{=} \{1, 1, 1, 1, 2, 3, 3\} = A$

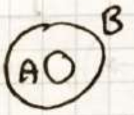
$A = B \Rightarrow \forall x \;\; x \in A \equiv x \in B \qquad 1 \in A \qquad \Delta \notin A$

$\boxed{A \subseteq B}$: A – **подмножество** B $\quad \forall x \;\; x \in A \to x \in B$

$x \in A$



$A \subseteq B$



$1 \notin \{\{1\}\} \qquad \{\{1\}\} \notin \{\{1\}\}$

$\{1\} \in \{\{1\}\} \qquad \{\{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$

$\{1\} \not\subseteq \{\{1\}\}$

Пустое множество $\varnothing$. Все пустые множества равны.

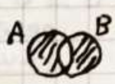
$x \in A \cap B \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$

$x \in A \cup B \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$

$x \in A \setminus B \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B)$

круги Эйлера

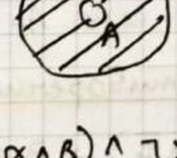
$x \in A \Delta B \equiv ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))$



$(x \notin A \cap B) \wedge (x \in A \cup B)$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$x \in \overline{A} \equiv (x \notin A)$



$\overline{\varnothing}$ только при использовании универсума (U) $\qquad \overline{A} = U \setminus A$

$(A \cap B) \setminus C \overset{?}{\equiv} (A \setminus C) \cap B \qquad (\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\gamma \equiv$

$\equiv (\alpha \wedge \neg\gamma) \wedge \beta$

$\forall x: x \in (A \cap B) \setminus C \equiv x \in (A \setminus C) \cap B \Rightarrow$

$x \in A \cap B \;\wedge\; x \notin C \equiv x \in A \setminus C \;\wedge\; x \in B$

$(\underbrace{x \in A}_{\alpha} \wedge \underbrace{x \in B}_{\beta}) \wedge \underbrace{x \notin C}_{\neg\gamma} \equiv (\underbrace{x \in A}_{\alpha} \wedge \underbrace{x \notin C}_{\neg\gamma}) \wedge x \in B$

12.09.23 ЛЕКЦИЯ-2

Множество **конечно**, если его элементы можно пересчитать.

$A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\forall a_i \in A$ и $\exists a_i!$, n – размерность множества $n=|A|$

Количество элементов в последовательности – её длина.

Будем называть целые неотрицательные числа **натуральными**. $0, 1, 2, \dots$ $\mathbb{N}$

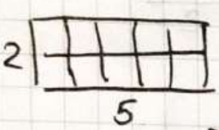
Последовательности равны, если их длины равны и все соответственные элементы равны:

$(1) \neq (1,1)$ $\qquad$ $(2,1) = (1,2)$

$\{1\} = \{1,1\}$ $\qquad$ $\{2,1\} = \{1,2\}$

(Перечислительная) **комбинаторика** – раздел, где мы подсчитываем элементы в конечных множествах.

Правило суммы | Для конечных непересекающихся множеств A, B $(A \cap B = \varnothing)$ выполняется равенство $|A \cup B| = |A| + |B|$



Декартово произведение множеств $A \times B$

$\forall (a,b)$ – упорядоченные пары, где $A \ni a$, $B \ni b$.

Пример $\varnothing \times \mathbb{N} = \varnothing$

Правило произведения | Для конечных множеств A, B выполняется равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Для нескольких множеств:

$(1, (1,2)) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, но $\notin (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$

последовательность

Больше тавтологий!

Транзитивность импликации:

$$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$$

Доказательство от противного:

$$((\neg A \to (B \wedge \neg B)) \to A \equiv \neg\neg A \to A \equiv A \to A$$

$\boxed{\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B}$ $\qquad$ $\boxed{\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B}$

законы де Моргана

"для всех x", $\forall x A(x)$ – квантор всеобщности

"существует x, что..." $\exists x A(x)$ – квантор существования

$\forall x \in A \; B(x)$ $\qquad$ $\exists x \in A \; B(x)$

$\forall x (x \in A \to B(x))$ $\qquad$ $\exists x (x \in A \wedge B(x)$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Принцип математической индукции. Пусть для последовательности утверждений $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ занумерованных натуральными числами, верны утверждения.

База индукции: A_0 истинно

Шаг индукции: $A_n \to A_{n+1}$ истинно для любого n.
Посылку импликации A_n называют индуктивным предположением.

$\Rightarrow A_n$ истинно для любого n

$$\boxed{(A(0) \land \forall n (A(n) \to A(n+1)) \to \forall n A(n)}$$

$A_0 = 1$
$A_0 \to A_1 = 1$
$A_1 \to A_2 = 1$
$\vdots$
$A_n \to A_{n+1} = 1$

- есть начало
- до любого числа можно дойти

Пример: $\forall n \geq 1: \ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

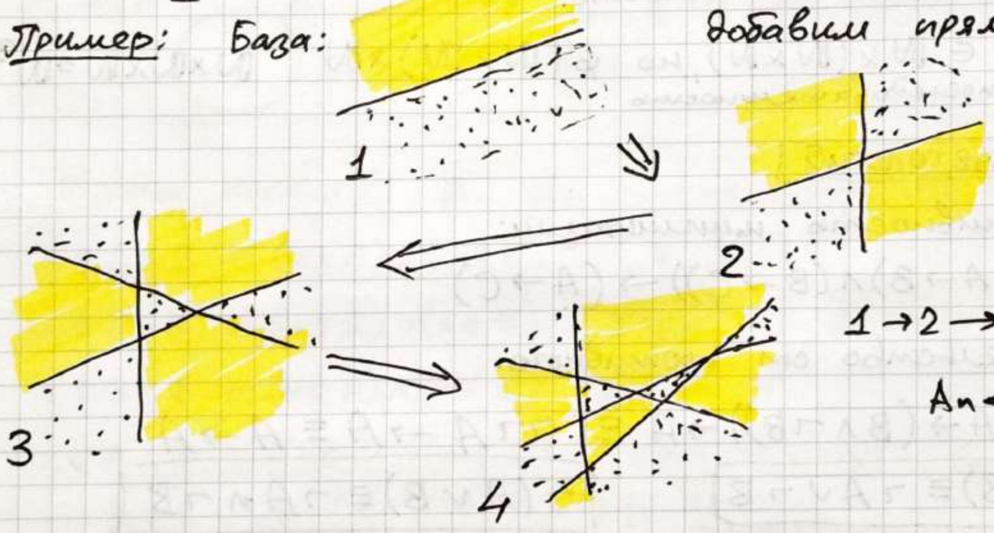
База: $A_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

Предположим что A_n верно $\Rightarrow$

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = A_{n+1} \Rightarrow A_n$ верно $\forall n$

Пример: База: добавим прямую:



перекрашиваем одну сторону в противоположные цвета

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \ldots$

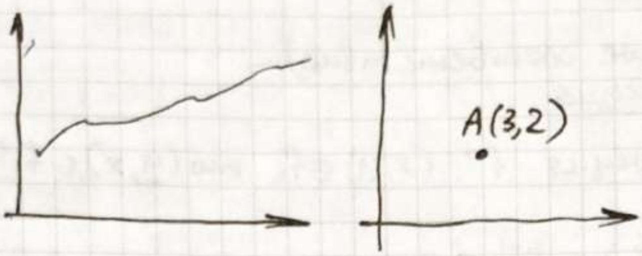
$A_n \leftrightarrow A_{n+1}$

Принцип полной математической индукции:

Для последовательности утверждений $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, где $n \in \mathbb{N}$ из $A_i \Rightarrow \forall i < n \Rightarrow A_n = 1 \Rightarrow A_n = 1 \ \forall n$

$$\boxed{\forall n ((\forall k < n: A(k)) \to A(n)) \to \forall n A(n)}$$

Функция $A \to B$



$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c,\ b=d$

$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$

$a=b \quad (a,a) = \{\{a\}\}$

(c,d) - тоже 1-но-элементное множество $= \{\{c\}\} \Rightarrow a=c$

$a \neq b \Rightarrow (c,d)$ - тоже 2-х элементное множество

$\{a\} = \{c\}\ (\neq \{c,d\}) \quad \{a,b\} = \{c,d\}\ b=d$

$a=c$

R на множестве A: $R \subseteq A \times A$

Бинарное отношение — $xRy \quad (x,y) \in R$

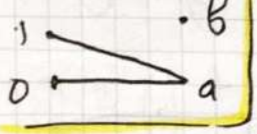
$\mathbb{N}^2$ отношение "<": $x<y \quad 2<3 \quad (2,3) \in \mathbb{N}^2$

Функция $f: A \to B$ - это бинарное отношение на $A \times B$ ($f \subseteq A \times B$), $\therefore (x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

A - аргументы, B - значения $\quad A = \{0,1,2\} \quad B = \{a, b\}$

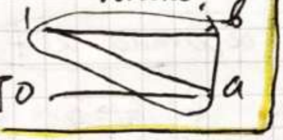
$\{(0,a), (1,a)\}$

2.



функция!

однозначность



не функция!

$(x,y) \in f$
$f(x) = y$
$x \xrightarrow{f} y$

Dom (domain) $f = \{x \in A: \exists y \in B \quad (x,y) \in f\}$

Dom$f \subseteq A$ $\quad$ Dom$f = A$ - f- тотальная, всюду определённая

Dom$f \neq A$ - f- частичная

x	0	1	2
f(x)	a	a	

Начальный отрезок натурального ряда:
$[n] = \{x \in \mathbb{N}: x<n\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ - n чисел

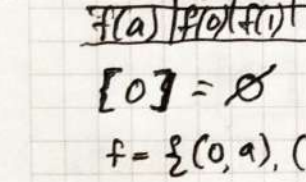
Конечная последовательность (слово) длины n в алфавите A

x	0	1	...	n-1
f(a)	f(0)	f(1)		f(n-1)

Бесконечная последовательность в алфавите A: тотальная функция $f: \mathbb{N} \to A$

$[0] = \varnothing$ $\quad$ **Множество значений**: Range$f = \{y \in B: \exists x \in A, (x,y) \in f\}$

$f = \{(0,a), (1,a)\}$ $\quad$ Range$f = \{a\}$ $\quad \{0,1,2\} \to \{a,b\}$ Range$f \subseteq B$

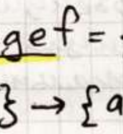


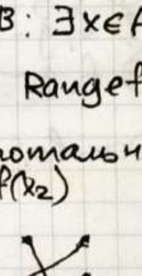
Инъективная функция (инъекция) — тотальная функция $f: A \to B \therefore x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x) = x^3$ на $\mathbb{N}$

плохо!

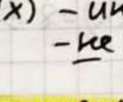


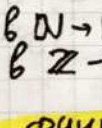


$f(x)^2$ - инъекция в $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- не инъекция в $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

не инъекция

Сюръективная функция (сюръекция) — тотальная функция $f: A \to B \therefore$ Range$f = B \quad \forall y \in B\ \exists x \in A\ (x,y) \in f$





плохо!

$f(x) = x^3\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad$ нет такого $\boxed{f(x) = 2}$

$f(x) = x^3\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - сюръекция

$f(x)=x^2$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\overset{\nexists x}{f(x)=-1}$

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ сюръекция

Биекция (взаимно-однозначное соответствие) —
— и сюръекция, и инъекция

f-биекция. Обратная функция f^{-1}: $(x,y)\in f$, то $(y,x)\in f^{-1}$

$f: A\to B$ $\quad f^{-1}: B\to A$

f^{-1} - функция: $(y,x_1),(y,\cancel{y}x_2)\in f^{-1} \Rightarrow x_1=x_2$

$(x_1,y),(x_2,y)\in f \Rightarrow x_1=x_2$ f-инъекция

f^{-1} - тотальна: $\forall y\in B\ \exists x\in A\ (y,x)\in f^{-1}$

$\forall y\in B\ \exists x\in A\ (x,y)\in f$ f-сюръекция

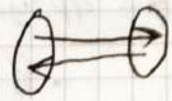
f^{-1}-инъекция: $(y_1,x),(y_2,x)\in f^{-1}\Rightarrow y_1=y_2$

$(x,y_1),(x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$ f-функция

f^{-1}-сюръекция: $\forall x\in A\ \exists y\in B\ (y,x)\in f^{-1}$

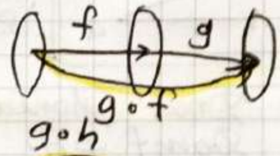
$\forall x\in A\ \exists y\in B\ (x,y)\in f$ f- тотальна

Пример $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=2x+1=y$ $\quad x=\frac{y-1}{2}=g(y)$



f обратна к g, то g обратна к f

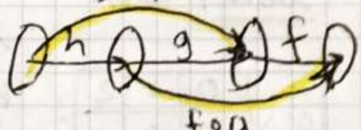
Композиция функций: $f: A\to B$ $\quad g: B\to C$



$g(f(x)) = (g\circ f)(x)$ $\quad \exists y\in B\ (x,y)\in f\ (y,z)\in g$

$f\circ g$ — это не поняли что

Ассоциативность: $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$



Композиции сохраняют классы функций!
(инъективность, сюръективность, биективность).

Лемма $f: A\to B$, $g: B\to C$

1. f, g - инъекции ⇒ $g\circ f$ - тоже инъекция
2. f, g - сюръекции ⇒ $g\circ f$ - сюръекция
3. f, g - биекция ⇒ $g\circ f$ - биекция
4. f, g - тотальны ⇒ $g\circ f$ - тотальная

Док-во: 1 $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$g(f(x_2)) = g(f(x_1))$

g- инъекция ⇒ $f(x_1)=f(x_2)$

f- инъекция ⇒ $x_1=x_2$

2 $\forall z\in C: \exists y\in B : g(y)=z$ $\quad$ f-сюръекция ⇒ для y $\exists x\in A$
$: f(x)=y$ по опр. композиции $(g\circ f)(x)=g(f(x))=z \Rightarrow$
$g\circ f$ - сюръекция

23.09.23 ЛЕКЦИЯ-4

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ (принцип Кроликов) Если $k>n$ и k кроликов рассажены по n клеткам то хотя бы в одной клетке сидит хотя бы 2 кролика.

Теорема Если $k>n$, $r_1, \dots, r_n$ - натуральные числа и $r_1+\dots+r_n=k$, то $\exists i,\ r_i>1$.

Proof. От противного: пусть $\forall r_i\ r_i \leq 1$
Сложим все неравенства, $r_1+\dots+r_n \leq n$
т.к $r_1+\dots+r_n=k$, то $k\leq n \Rightarrow$ противоречие, q.e.d.

КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА Множество называется конечным, если для некоторого $n\in\mathbb{N}$ $\exists$ биекция $f:[n]\to A$, где n - мощность множества. $|A|=n$

Теорема (корректность определения мощности конечного множества). Пусть $f:[n]\to A$ и $g:[m]\to A$ - две биекции $\Rightarrow$ $n=m$

Proof. От противного, Suppose $n\neq m$. let $n>m \Rightarrow$
$\exists g^{-1}: A\mapsto[m]$ and $g^{-1}\circ f:[n]\to[m]$ - биекция
$[n]$ - кролики, а $[m]$ - клетки. $n>m \Rightarrow$ в какой-то клетке сидят два кролика $\Rightarrow \exists i,j\in[n] \therefore g^{-1}\circ f(i)=g^{-1}\circ f(j)$
$\Rightarrow$ противоречие, q.e.d.

ОБРАЗ Пусть $X\subseteq A$ - подмножество A. f сопоставляет ему образ $f[X]\subseteq B \subseteq X$. По определению $f[X]$ состоит ~~и~~ из тех элементов множества B, которые являются значениями элементов из X:

$$\boxed{f[X]=\{b\in B \mid \exists x\in X:\ b=f(x)\}}$$

если $X=A \Rightarrow$
$f[A]=\mathrm{Range}(f)$

Пример. f из $A=\{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	2	..

Если $X=\{1,2\} \Rightarrow f[X]=\{1,2\}$ $\quad X=\{3,4\}\Rightarrow f[X]=\{2\}$

ПРООБРАЗ $Y\subseteq B$. Полный прообраз $f^{-1}[Y]$ состоит в точности из тех элементов A, которые лежат в Y:

$$\boxed{f^{-1}[Y]=\{a\in A \mid f(a)\in Y\}}$$

$f^{-1}[B]=\mathrm{Dom}(f)$

Пример. $Y=\{2\}$ $f^{-1}[Y]=\{2,3\}$ $\quad Y=\{3,4\}\Rightarrow f^{-1}[Y]=\varnothing$

$f: A\to B$ ~~если~~ f - тотальна, если $f^{-1}[B]=A$.
если $f[A]=B$, то f - сюръективна

$$|f^{-1}[Y]|=\sum_{b\in Y}|f^{-1}[\{b\}]|$$

СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Лемма Для тотальных функций из конечного множества в конечное выполняются такие свойства:

1. если $f: A\to B$ инъекция $\Rightarrow |A|\leq|B|$;
2. если $f: A\to B$ сюръекция $\Rightarrow |A|\geq|B|$;
3. если $f: A\to B$ биекция $\Rightarrow |A|=|B|$.

Proof. a_i, $i \in B$ – количество элементов $a \in A$: $f(a) = i$
f – инъекция $\Rightarrow a_i \le 1 \ \forall i \in B \Rightarrow$ Аналогично для f-сюръекции

$|A| = \sum_{i\in B} a_i \le \sum_{i \in B} 1 = |B|$ $\qquad$ $|A| = \sum_{i \in B} a_i \ge \sum_{i\in B} 1 = |B|$

Лемма Для тотальных функций из конечного множества в себя выполнены свойства:

1. если $f: A \to A$ инъекция, то f – сюръекция;
2. если $f: A \to A$ сюръекция, то f – инъекция.

Proof f – инъекция $\Rightarrow |f[A]| = |A| = n \Rightarrow f$ – сюръекция
Let f – сюръекция. $|f^{-1}[A]| =$
$|f^{-1}[A]| = \sum_{b \in A} |f^{-1}[\{b\}]|$. Since f-сюръекция $\Rightarrow |f^{-1}[\{b\}]| \ge 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f^{-1}[\{b\}]| = 1 \Rightarrow f$ – инъекция

ПОДСЧЁТЫ СЛОВ И ФУНКЦИЙ

Правило суммы для нескольких попарно непересекающихся множеств:

если $A_i \cap A_j \ne \varnothing$ для всех $1 \le i < j \le n$, то $\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|}$

Правило произведения для нескольких множеств:

$\boxed{|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|}$

Размещения

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$

количество инъекций из k-элементного множества в n-элементное.

Перестановка множества A – любая биекция $f: A \to A$. их количество: P_n

$\boxed{P_n = n!}$ (частный случай A_n^n)

Сочетание (неупорядоченные выборки) – из n по k – подмножество n-элементного множества, где k элементов. C_n^k $\binom{n}{k}$

$C_n^k \cdot k! = A_n^k$ $\qquad$ $\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

03.10.23 ЛЕКЦИЯ-5.

X – множество n элементов
$P(X)$ – множество его подмножеств

биекция $A \subseteq X \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$

$A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \varnothing \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$ $\qquad$ $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ тотальные $\qquad$ 2^n

Сколько существует слов из 0 и 1 длины n с ровно k единицами? C_n^k

k-элементные подмножества n-элементного множества

Теорема $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$$\boxed{C_n^k = \binom{n}{k}}$$ Proof

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}y^{n-1}x + \ldots + \binom{n}{n-1}yx^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$

$xyyx\ldots$ 2^n слагаемых

$x^k y^{n-k}$ слово в алфавите $\{x, y\}$ длины n с k x? C_n^k, ч.т.д.

$x = y = 1$ $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$

$0 \leq k \leq n$

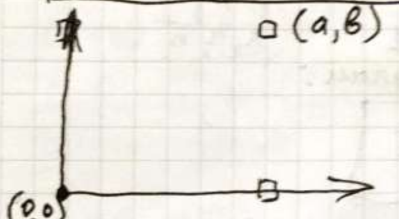
если $k > n$ или $k < 0$, то $C_n^k = 0$

если $k > n$ или $k < 0$, то $C_n^k = 0$

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1

МОНОТОННЫЕ ПУТИ В КВАДРАТЕ



Путь — последовательность целочисленных точек $(x, y) \to (x+1, y)$, $(x, y) \to (x, y+1)$

$T(a, b)$ — количество путей из $(0,0)$ в (a, b).

2 группы путей: $\uparrow$ или $\rightarrow$ $\quad T(a,b) = T(a, b-1) + T(a-1, b)$

$T(a,b) = ?$ $\quad T(a, b-1)$ $\quad T(a-1, b)$ $\quad T(0,a) = 1$ $\quad T(0,b) = 1$

Теорема $\boxed{T(a,b) = \binom{a+b}{a}}$ $\quad (0,0) \to (a,b)$ $a+b$ ходов

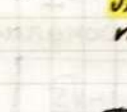
$\rightarrow a$ ходов $\uparrow b$ ходов

Протокол движения: $\rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \ldots$ слово из $a+b$ символов в алфавите $\{\rightarrow, \uparrow\}$ с a штуками $\rightarrow$

Свойство $\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}$

$C_n^k = T(k, n-k) = T(k-1, n-k) + T(k, n-k-1) = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$



n элементов

$x \in A$ $k-1$ элементов из $n-1$ C_{n-1}^{k-1}

$x \notin A$ k элементов из $n-1$ C_{n-1}^k

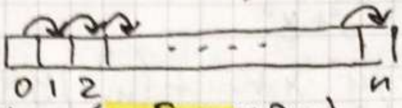
Свойство Строки треугольника Паскаля симметричны относительно середины.

$C_n^k = C_n^{n-k}$ $\quad \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$

Число k-элементных подмножеств n-элементного множества равно числу его $(n-k)$-элементных подмножеств

$\underset{k}{A \subseteq X} \longmapsto \underset{n-k}{X \setminus A}$ "быть выбранным значит "не быть не выбранным""

$(x+y)^n = (y+x)^n$ $\quad x^k y^{n-k}$ $\longrightarrow$

Путь по прямой:  => путь монотонный

Разрешены ~~каждые~~ ~~все~~ (любые ходы) $T(n)$ - ?

$0 \dots in \quad i = 0, \dots, n-1 \quad T(n) = T(0) + T(1) + \dots + T(n-1)$

$T(0) = 1$

$T(1) = 1 \quad T(2) = 2 \quad T(3) = 4 \quad T(4) = 8 \,..\, T(n) = 2^{n-1} \quad n \geq 1$

Теорема $\boxed{T(n) = 2^{n-1},\ n \geq 1}$

Proof база: $n=1 \quad T(1) = 1 = 2^{1-1}$

шаг: $T(n+1) = T(0) + T(1) \dots + T(n-1) + T(n) = 2T(n) = 2^n = 2^{n+1-1}$ (по предположению индукции), q.e.q.

2^{n-1}, количество слов длины $n-1$ в алфавите $\{0, 1\}$

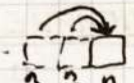
✓	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	✓

0 $\quad$ $n-1$ $\quad$ n

слово $\longleftrightarrow$ маршрут (мы заходим в клетки, где написана 1)

Разрешим ходы на 1 или на 2 клетки:

$H(n)$ - число маршрутов =>



$H(n) = H(n-1) + H(n-2)$ $\quad H(0) = 1 \quad H(1) = 1$

— рекуррентная формула для чисел Фибоначчи:

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$
$F_0 = 0 \quad F_1 = 1$

$H_n = F_{n+1} \quad \Psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Формула Бине $\quad F_n = \frac{\Psi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}$

База $n=0$: $F_0 = \frac{\Psi^0 - \varphi^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$

$n=1$: $F_1 = \frac{\Psi^1 - \varphi^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$

Шаг $\quad A(0) \wedge A(1) \wedge \forall n (A(n) \wedge A(n+1) \rightarrow A(n+2)) \rightarrow \forall n A(n)$

$A(0) \wedge A(1) \rightarrow A(2)$

$A(1) \wedge A(2) \rightarrow A(3)$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\Psi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\Psi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Psi^n(\Psi+1) - \varphi^n(\varphi+1)}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{\Psi^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}$

10.10.2023 ЛЕКЦИЯ-6

Теорема Сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n.

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n}$$

Теорема В первой половине строки треугольника Паскаля числа возрастают, а во второй убывают.

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} > \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{k} > \frac{1}{n-k+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n-k+1 > k \Leftrightarrow n+1 > 2k$ (k лежит в первой половине)

Теорема $\boxed{\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}}$! $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n}$

самый большой в строке

тут $2n+1$ слагаемых $\Rightarrow$

самое большое $\geq \frac{2^{2n}}{2n+1}$

Теорема ($n>0$) A — n-элементное множество. Тогда подмножеств с чётным числом элементов столько же, сколько и с нечётным.

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots}$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \ldots + \binom{n}{n}y^n$ $\quad x=1$, $y=-1$

$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1) + \ldots + \binom{n}{n}(-1)^n$

$|A|=n$ $\quad |B|=k$ $\quad$ тотальных функций $A \mapsto B$? $\leftarrow k^n$ $\quad B^A$

$A=B=\varnothing$ $\quad 0^0=1$, т.к. 1 функция)

$S \in A$ $\quad X \subseteq A$ $\quad S \notin X$ $\quad X \longleftrightarrow X \cup \{S\}$

подмножества A разбились на пары

если в X чётное число элементов, то в $X \cup \{S\}$ нечётное & vice versa

$(x_1 + \ldots + x_k)^n$ слагаемые: $x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{a_k}$ $\quad a_1, \ldots a_k \in \mathbb{N}$

набор $(a_1, \ldots, a_k)$ однозначно определяет моном $x_1^{a_1} \ldots x^{a_n}$ $\quad a_1 + \ldots + a_k = n$

$x_1^{a_1} \ldots x_k^{a_k} = \boxed{x^\alpha \text{ (обозн.)}}$

$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum\limits_{\substack{\alpha=(a_1,\ldots a_k) \\ a_1+\ldots+a_k=n}} \binom{n}{\alpha} x^\alpha$ $\quad k=2$: $\binom{n}{\alpha}$ — биномиальный коэффициент

$\binom{n}{\alpha}$ — мультиномиальный коэффициент

Чему они равны?

Теорема $\boxed{\binom{n}{a_1 \ldots a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}}$

Док-во 1 $\underbrace{x_1 x_2 x_3 x_1 \ldots}_{n \text{ множителей}}$ — каждое слагаемое $\quad \binom{n}{\alpha}$ — коэффициент перед x^α

a_1 переменных x_1

$\vdots$

a_k переменных x_k

$\Rightarrow \binom{n}{\alpha} =$ количество слов из n букв, в которых a_1 букв $x_1, \ldots$; a_k букв x_k

если все буквы разные, то всего $n!$ букв

$a_i!$ перестановок x_i

$a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!$ раз посчитано каждое слово $\quad \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}$

Док-во-2 $\underbrace{\_\,\_\,\_\,\ldots\,\_}_{n \text{ мест}}$ Сколько способов выбрать a_1 мест для x_1?

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!}\cdot\frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{a_k!}{a_k!\,0!} =$$

$$= \frac{n!}{a_1!\cdot\ldots\cdot a_k!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{k,\ n-k}$$

Пример 3 человека дежурят 6 дней => каждый дежурит 2 дня. А, Б, В – люди

$$\underline{А,В,А,Б,Б,В} = \binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 90$$

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad n+1 \text{ слагаемых}$$

$$(x_1+\ldots+x_n)^k = \sum_\alpha \binom{n}{\alpha} x^\alpha \quad \text{Сколько слагаемых?}$$

$n=3,\ k=3$

3 буквы одинаковые; 3 буквы разные $3+1+6=10$
2 буквы одинаковые, 1 разная

$x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}$ $(a_1,\ldots,a_n)$ $a_1+\ldots+a_n=k$. Сколько решений в натуральных числах?

$\boxed{\left(\!\binom{n}{k}\!\right) – \text{число сочетаний с повторениями}}$ $\binom{n}{k}$ – число k-элементных подмножеств n-элементного множества

n-элементное множество $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a_1-вида a_2 штук a_n

k-элементное мультимножество: порядок не важен, но кратность вхождения важна!

k монет раздать n людям
a_1 – первому, …; a_n – n-ому

таблетки
$$\boxed{O\ O\,|\,|\,O\ O\,|\,|\,O\,|\,O\ \ O}$$
$a_1=0\ \ a_2=2\ \ a_3=0\ \ a_4=2\ \ a_5=0\ \ a_6=1\ \ a_7=2$

$n=7,\ k=7$

k-таблеток
$n-1$ палочка
$n+k-1$ мест

k мест для шариков, $k-1$ мест для палочек

решения уравнения $a_1+\ldots+a_n=k \leftrightarrow$ расстановка k шариков и $n-1$ палочек

Теорема $\boxed{\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}}$

Задача Сколько монотонных путей ~~длины~~ из n шагов из 0 в k?

$b_1,\ldots b_n$ – шаги (целые, положительные) $b_1+\ldots b_n=k$ =>

$\underbrace{(b_1-1)}_{a_1}+\ldots+\underbrace{(b_n-1)}_{a_n}=k-n$ $\boxed{0\ k}$ выбрать $k-1$ число => $n\ \cancel{k}\!-1$ шагов

$$\Rightarrow \binom{k-1}{n-1} \quad \left(\!\binom{k-n}{n-1}\!\right) = \binom{k-n+n-1}{n-1}$$