ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

$O_{итог} = \min(0{,}4 O_{экз} + 0{,}22_{колл} + 0{,}16_{к/р} + 0{,}16_{д/з} + 0{,}08_{сам} + 0{,}08_{л} ; 10)$

МАТРИЦЫ

Матрица размера $m \times n$ — (или $m \times n$-матрица) - это прямоугольная таблица высоты m и ширины n.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m строк, n столбцов

a_{ij} – элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца

$\triangleq A = (a_{ij})$

Множество всех матриц с коэффициентами из $\mathbb{R}$:

$\boxed{Mat_{m\times n}(\mathbb{R})}$ или просто $\boxed{Mat(m\times n)}$

Матрицы $A \in Mat_{m\times n}$ и $B \in Mat_{k\times l}$ называются **равными**, если $m=k$, $n=l$ и ~~$\forall a_{ij} = \forall$~~ $\forall i,j \; a_i = a_j$.

Пусть $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

Сумма:

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$ **Умножение на скаляр**

Свойства матриц

$\forall A, B, C \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1. $A+B = B+A$ (**коммутативность**)
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (**ассоциативность**)
3. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$, где

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$$ - **нулевая** матрица

4. $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$, где $-A := (-a_{ij})$ - **противоположная**
5. $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A + \mu \cdot A$
6. $\lambda\cdot(A+B) = \lambda A + \lambda B$
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
8. $1\cdot A = A$

Упр. Доказать эти свойства.

$\Longrightarrow Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ – **векторное пространство**

$\boxed{\text{Пространство } \mathbb{R}^n}$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, n\}$$

Геометрическая реализация:

$\mathbb{R}^1$ – прямая, $\mathbb{R}^2$ – плоскость, $\mathbb{R}^3$ – пространство

Договоримся отождествлять элементы из $\mathbb{R}^n$ со столбцами высоты n, $\boxed{\text{вектор-столбцы}}$.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, n \right\} = Mat_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

$$x, y \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R};\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ \cdots \\ x_n = y_n \end{cases};\quad x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};\quad \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Выполнены свойства ① - ⑧ $\Rightarrow \mathbb{R}^n$ - векторное пространство

$\boxed{\text{Транспонирование}}$

отражение

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat_{m\times n} \rightsquigarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$B = A^T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

$\boxed{\text{Свойства:}}$
① $(A+B)^T = A^T + B^T$
② $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
③ $(A^T)^T = A$

Примеры:
① $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ② $(x_1, \ldots x_n)^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$A \in Mat_{n\times m}$

$A_i = (a_{i1} \ldots a_{in})$ – i-я строка в A

$A_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ – j-я строка в A

$\boxed{\text{Умножение матриц}}$

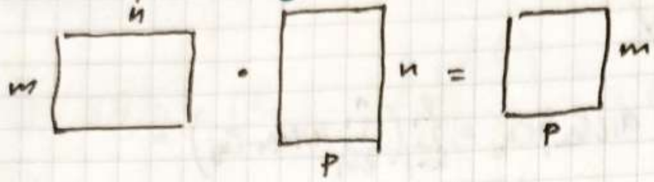
① Умножение строки на столбец одинаковой длины.

$$(x_1, \ldots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

② Общий случай

матрица A $m \times n$ — согласование элементов

матрица B $n \times p$ — $A \cdot B := C \in Mat_{m\times p}$



Примеры:

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+0\cdot 5+2(-1) \\ 0\cdot 2+4\cdot 0+3\cdot 1 & 0\cdot(-1)+4\cdot 5+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{n\times 1} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1\times n} = \begin{pmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & y_nx_2 & \cdots & y_nx_n \end{pmatrix}_{n\times n}$

ЛЕКЦИЯ-2 12.09.23

ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СУММИРОВАНИЯ

$S_p, S_{p+1}, \ldots, S_q$ — конечный набор чисел

$\sum\limits_{i=p}^{q} S_i := S_p + S_{p+1} + \ldots + S_q$ p, q — "пределы суммирования", i — "бегающий" индекс

Пример: $\sum\limits_{i=1}^{100} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$

Свойства

① $\sum\limits_{i=1}^{n}(\lambda s_i) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} s_i$ ② $\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i + t_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i + \sum\limits_{i=1}^{n} t_i$

③ $\cancel{\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i \cdot t_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} t_i}$ $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m} s_{ij}\right) = \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} s_{ij}\right)}_{\text{сумма всех элементов матрицы}}$

$A \in Mat_{m\times n}$, $B \in Mat_{n\times p}$, $C = AB \in Mat_{m\times p}$

$c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Свойства умножения матриц

$A(B+C) = AB + AC$ (левая дистрибутивность)

① $A(B+C) = X$, $AB + AC = Y$

$\forall i,j \quad x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = y_{ij}$

①' $(A+B)C = AC + BC$ (правая дистрибутивность) аналогично

② $\lambda(A+B) = (\lambda A)+(\lambda B)$ (дистрибутивность, скаляр)

③ $\underset{m\times n\ n\times p}{(AB)}\underset{p\times q}{C} = \underbrace{A(BC)}_{m\times q}$ (ассоциативность)

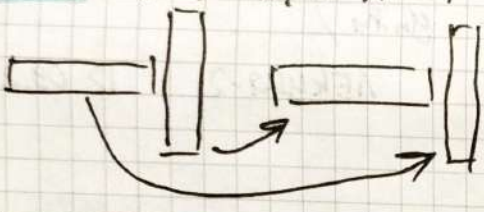
Proof $\underbrace{(AB)}_{U}C = X$; $A\underbrace{(BC)}_{V} = Y$

$\forall i,j \quad x_{ij} = \sum_{k=1}^{p} u_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\cdot c_{kj}\right) =$

$= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{il}\cdot b_{lk}\cdot c_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(a_{il}\underbrace{\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}}_{v_{lj}}\right) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}v_{lj} = y_{ij}$ ■

④ $\underset{m\times n\ n\times p}{(AB)^T} = \underset{p\times n}{B^T}\cdot\underset{n\times m}{A^T}$

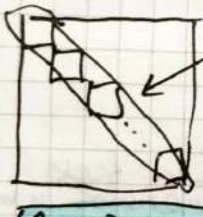
Proof $(AB)^T = X$, $B^T\cdot A^T = Y$ $\quad x_{ij} = (AB)_{ji} = A_{(j)}B^{(i)} = (B^T)_{(i)}(A^T)^{(j)} = y_{ij}$ ■



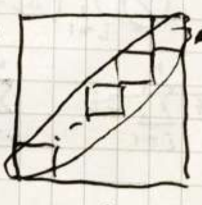
Замечание Умножение матриц **не обладает** свойством коммутативности:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определение Матрица размера $n\times n$ называется **квадратной** порядка n. $M_n := Mat_{n\times n}$



главная диагональ (= диагональ)



побочная диагональ

Определение Матрица $A\in M_n$ называется **диагональной**, если $a_{ij}=0$ $\forall i\neq j$ (~~если~~ т.е. все элементы главной диагонали равны 0)

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

Лемма Пусть $A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Тогда:

1) $\forall B\in Mat_{n\times p}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$ ← p символов $[a_1b_1, a_1b_2 \dots a_1b_p]$

(т.е.) i-я строка матрицы B умножается на a_i)

2) $\forall B \in Mat_{m\times n}$ $BA = (a_1 B^{(1)}\ a_2 B^{(2)} \dots a_n B^{(n)})$
(т.е. j-й столбец в B умножается на a_j)

Proof 1) $(AB)_{ij} = (0 \dots \underset{i}{a_i} \dots 0)\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$

2) $(BA)_{ij} = (b_{i1} b_{i2} \dots b_{in})\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_j b_{ij}$

Пример $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

Определение Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots 1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ называется **единичной матрицей** порядка n

Свойства (следствия из леммы):
1) $\forall A \in Mat_{m\times n}$ $AE = A$
2) $\forall A \in Mat_{n\times p}$ $EA = A$
3) $\forall A \in M_n$ $AE = EA = A$

Определение **След** квадратной матрицы $A \in M_n$ называется сумма всех элементов на её главной диагонали:
$\triangleq tr(A)$; $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Свойства
1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $tr(A^T) = tr(A)$
4. $tr(\underset{m\times n\ n\times m}{AB}) = tr(BA)$

Proof для 4: $AB = X$, $BA = Y$
$tr X = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ji} \cdot a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = tr(Y)$

Пример $A = (1\ 2\ 3)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $AB = (4+10+18) = (32)$ $tr(AB) = 32$

$tr(BA) = tr\begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix} = 4 + 10 + 18 = 32$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейное уравнение: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, где $a_1, a_2, \dots a_n$, $b \in \mathbb{R}$ – заданные числа; $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные.

Система линейных уравнений (СЛУ)

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

Решение линейного уравнения — набор значений неизвестных, при которых уравнение обращается в тождество.

Решение СЛУ — набор значений неизвестных, являющийся решением каждого уравнения системы.

Основная задача: **решить** данную СЛУ, то есть найти все её решения

Пример $n=m=1$: $ax=b$

① $a\neq0 \Rightarrow$ единственное решение $x=b/a$
② $a=0 \Rightarrow$ имеем $0\cdot x=b$
  ⓐ $b\neq0 \Rightarrow$ нет решений
  ⓑ $b=0 \Rightarrow$ x — любое $\Rightarrow$ бесконечно много решений

Матричная форма записи СЛУ

Вернёмся к СЛУ (*):

$$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — матрица коэффициентов}$$

$$b:=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m \text{ — столбец правых частей} \qquad x:=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n \text{ — столбец неизвестных}$$

$(*) \Leftrightarrow Ax=b \leftarrow$ матричная форма записи СЛУ (*)

$(A\,|\,b)$ — расширенная матрица СЛУ (*) содержит полную информацию о системе

Определение СЛУ называется **совместной**, если у неё есть хотя бы одно решение, и **несовместной** иначе (то есть когда у неё решений нет)

Определение Две СЛУ от одних и тех же неизвестных называются эквивалентными, если они имеют одинаковые множества решений.

Пример 1. Две СЛУ: $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x_1=1 \\ 2x_2=1 \end{cases}$

Множества решений: $\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ $\qquad \{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$

Пример 2. Если две СЛУ (от одних и тех же неизвестных) несовместны, то они автоматически эквивалентны, так как у обеих множество решений пусто.

Расширенные матрицы: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$

ЛЕКЦИЯ-3 19.09.23

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

m уравнений, n неизвестных

Расширенная матрица СЛУ (*):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (A|b) \qquad A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^m$$

Как решать СЛУ?

Идея: выполнять преобразования СЛУ сохраняющие множество решений и привести её к такому виду, в котором она легко решается.

Пример:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \vdots \\ x_m = b_m \end{cases}$$

Элементарные преобразования СЛУ

1-й тип	к i-му уравнению прибавить j-е, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$	$Э_1(i, j, \lambda)$
2-й тип	поменять местами i-е и j-е уравнения $(i \neq j)$	$Э_2(i, j)$
3-й тип	умножить i-е уравнение на $\lambda \neq 0$	$Э_3(i, \lambda)$

На уровне расширенной матрицы:

$Э_1, Э_2, Э_3$ — элементарные преобразования строк расширенной матрицы СЛУ

$Э_1(i, j, \lambda)$ — к i-й строке прибавить j-ую, умноженную на λ
$Э_2(i, j)$ — переставить i-ю и j-ю строки
$Э_3(i, \lambda)$ — умножить i-ю строку на $\lambda \neq 0$

Лемма Элементарные преобразования СЛУ сохраняют множество её решений.

Док-во. Достаточно доказать утверждения для любого из элементарных преобразований.

$СЛУ_* \xrightarrow{?} СЛУ_{**}$:

① $СЛУ_*$-решения будут решениями $СЛУ_{**}$
② есть обратная операция

$СЛУ(*) \rightsquigarrow СЛУ(**)$: $Э_1(i, j, \lambda)$, $Э_2(i, j)$, $Э_3(i, \lambda)$

$СЛУ(**) \rightsquigarrow СЛУ(*)$: $Э_1(i, j, -\lambda)$, $Э_2(i, j)$, $Э_3(i, 1/\lambda)$

$\Rightarrow$ всякое решение $СЛУ_{**}$ является решением $СЛУ_*$

Определение Ведущий элемент ненулевой строки — первый её ненулевой элемент $(0 \ldots 0, \underset{\neq 0}{x} \ldots)$

Определение Матрица называется ступенчатой (или имеет ступенчатый вид), если:

① номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают;

② все нулевые строки (если они есть) стоят в конце

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \blacklozenge & & & & & & * \\ 0 & \ldots & & 0 \ldots 0 & \blacklozenge & & & & & \\ 0 & \ldots & & & 0 \ldots 0 & \blacklozenge & & & & \\ \vdots & \ldots & & & & 0 \ldots 0 & & & & \\ 0 & \ldots & & & & & \ldots 0 & \blacklozenge & & \\ 0 & \ldots & & & & & & & & 0 \\ 0 & \ldots & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Определение Матрица имеет улучшенный ступенчатый вид если

① M является ступенчатой

② все ведущие элементы ненулевых строк равны 1

③ в одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули

$$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & & 0 \\ & & & 1 & * & 0 & * & 0 \\ \vdots & & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & * \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & & & \ldots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема ① Всякую матрицу при помощи элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду

② Всякую ступенчатую матрицу — // — к улучшенному ступенчатому виду

Следствие Всякую матрицу — // — к улучшенному ступенчатому виду

Док-во Пусть C — наша матрица

① $C=0 \Rightarrow$ уже ступенчатый вид. Далее считаем $C \neq 0$

Алгоритм **Шаг 1** Ищем первый слева непустой столбец; пусть j — его номер

Шаг 2 Переставляя строки, если нужно, добиваемся $c_{1j} \neq 0$;

Шаг 3 Выполняем:

$Э_1(2, 1, -c_{2j}/c_{1j}),\ Э_1(3, 1, -c_{3j}/c_{1j}), \ldots Э_1(m, 1, -c_{mj}/c_{1j})$ $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 \ldots 0 & \underset{\neq 0}{c_{1j}} & \\ \vdots & * & * \\ 0 \ldots 0 & & \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 \cdots 0 & c_{1j} & * \\ \hline \vdots & & \\ 0 \ldots 0 & 0 & C' \end{array}\right)$$

Осталось повторить всё для C'

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ \ldots \end{pmatrix} \xrightarrow{-2(1)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

② Пусть $c_{1j_1}, c_{2j_2}, \ldots, c_{rj_r}$ — ведущие элементы ненулевых строк в C

Алгоритм **Шаг 1** Выполняем $Э_3(1, 1/c_{1,j_1}), Э_3(2, 1/c_{2,j_2}), \ldots, Э_3(r, 1/c_{r,j_r})$ получаем, что все ведущие элементы $= 1$

Шаг 2 Выполняем $Э_1(r-1, r, -c_{r-1,j_r}),\ Э_1(r-2, r, -c_{r-2,j_r}) \ldots,$ $Э_1(1, r, -c_{1,j_r})$

В результате все элементы над c_{r,j_r} равны 0.

Делаем аналогично для $c_{r-1,j_{r-1}}, c_{r-2,j_{r-2}}, \ldots c_{2,j_2}$

Итог Матрица имеет улучшенный ступенчатый вид.

Метод Гаусса решения СЛУ (он же метод исключения неизвестных)

Дано: СЛУ $Ax=b$, $A\in Mat_{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$, $(A|b)$ – расширенная матрица

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ – столбец неизвестных

Помним, что элементарные преобразования строк сохраняют множество её решений.

Алгоритм: Выполняя элементарные преобразования строк с $(A|b)$ приведём A к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0\dots 0 & a_{1,j_1} & & & b_1' \\ 0 \dots & 0 & a_{2,j_2} \dots & & b_2' \\ & & & & b_3' \\ 0 \dots & & & a_{r,j_r} & \vdots \\ & & & & b_m' \end{array}\right)$$

Случай 1. $\exists i \geq r+1 : b_i' \neq 0 \Rightarrow$ i-ое уравнение имеет вид $0\cdot x_1+\ldots+0\cdot x_n=b_i' \Rightarrow$ СЛУ несовместна

Случай 2. Либо $r=m$, либо $b_i'=0\ \forall i\geq r+1$

Приводим матрицу A к улучшенному ступенчатому виду, выполняя —//— со всей $(A|b)$ (обратный ход метода Гаусса)

Неизвестные $x_{j_1}\ldots x_{j_r}$ называются главными, остальные называются свободными.

Подслучай 2.1 $r=n$, т.е. все неизвестные главные. $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & b_1'' \\ & 1 & & & b_2'' \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & b_n'' \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} b_1''=x_1 \\ b_2''=x_2 \\ \vdots \\ b_n''=x_n \end{cases} \Rightarrow$$ СЛУ имеет 1 решение

Подслучай 2.2 $r<n$ т.е. есть хотя бы 1-а свободная неизвестная

Вернёмся к СЛУ и во всех уравнениях перенесём слагаемые со свободными неизвестными в правую часть; получим выражения всех главных неизвестных через свободные; эти выражения называются общим решением исходной СЛУ.

Всякое решение получается подстановкой произвольных значений в свободные неизвестные и вычислением соответствующих значений главных неизвестных $\Rightarrow$ СЛУ имеет бесконечно много решений

Следствие: Всякая СЛУ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ имеет либо:
- нет решений;
- 1 решение;
- бесконечно много решений.

Пример: Улучшенный ступенчатый вид матрицы $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Главные: x_1, x_3
Свободные: x_2, x_4

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_4=1 \\ x_3-2x_4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1+x_2-3x_4 \\ x_3=4+2x_4 \end{cases}$$

общее решение

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - 3t_2 \\ x_3 = 4 + 2t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$$ $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ – параметры

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ЛЕКЦИЯ 4   26.09.23

ОДНОРОДНЫЕ СЛУ

Определение СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны нулю

Расширенная матрица
$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$
ОСЛУ всегда имеет решение $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$

Следствие (из метода Гаусса) Всякая ОСЛУ у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение.

Док-во свободная $\neq 0 \Rightarrow$ решение $\neq 0$

СВЯЗЬ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЙ СЛУ и ОСЛУ

Дана СЛУ $Ax = b$ $(*)$, где $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$

Если СЛУ$(*)$ совместна, то её частное решение — это какое-нибудь одно её решение.

Лемма Пусть СЛУ $(*)$ совместна $L \subseteq \mathbb{R}^n$ – её множество решений, $x_0 \in L$ – её частное решение. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - множество решений ОСЛУ $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(**)$

Тогда $\boxed{L = x_0 + S, \text{ где } x_0 + S := \{x_0 + v \mid v \in S\}}$

Пример $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ - частное решение; $t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ - общее решение ОСЛУ с расширенной матрицей

Док-во. Так как $x_0 \in L$, то имеем $Ax_0 = b$.

① $u \in L \Rightarrow Au = b$. Положим $v := u - x_0$, тогда $u = x_0 + v$ и

$Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v \in S \Rightarrow L \subseteq x_0 + S$

② $v \in S \Rightarrow Av = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 + v \in L \Rightarrow x_0 + S \subseteq L$.

Утверждение Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется при помощи умножения слева на подходящую элементарную матрицу

А именно:

$\to Э_1(i,j,\lambda): A \mapsto U_1(i,j,\lambda)A$, где:

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} i \\ \\ \\ \end{array} \qquad U_2(i,j) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \ddots & & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

$\to Э_2(i,j): A \mapsto U_2(i,j)\cdot A$, где:

$\to Э_3(i,\lambda): A \mapsto U_3(i,\lambda)\cdot A$, где $U_3(i,\lambda) = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda,1,\dots,1)$

Замечание Элементарные преобразования столбцов матрицы реализуются при помощи умножения <u>справа</u> на подходящие элементы матрицы:

эл. преобр. столбцов матрицы $A \longleftrightarrow$ эл. преобраз. строк в A^T $\longleftrightarrow A^T \mapsto UA^T \mapsto A \mapsto (UA^T)^T = AU^T$

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тип (I): $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times p}{X} = \underset{m\times p}{B}$ — Достаточно научиться решать тип (I)

Тип (II): $\underset{k\times m}{Y}\,\underset{m\times n}{A} = \underset{k\times n}{B}$ $\qquad$ (II) $\Leftrightarrow A^TY^T = B^T$ $\Rightarrow$

Решить (I) $\Leftrightarrow$ одновременно решить p СЛУ $AX^{(1)}=B^{(1)}$, $AX^{(2)}=B^{(2)}$, … $AX^{(p)}=B^{(p)}$

Выполняем одновременно метод Гаусса:

$(A|B) \underset{\text{эл. преобр. строк}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{улучш. ступ. вид}}{(A'|B')}$

Всё сводится к набору из p СЛУ $A'X^{(i)} = B'^{(i)}$, $i=1,\dots p$, для каждой из них остаётся выписать ответ.

$$\Big(\underset{A_1}{\begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{matrix}}\Big|\underset{B_1}{\begin{matrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{matrix}}\Big) \qquad X = \begin{pmatrix} 2+t_1 & 3+t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

$A \in M_n$

Определение Матрица $B \in M_n$ называется обратной к A, если $AB = BA = E$. $\triangleq A^{-1}$

Факты: ① если $A^{-1}\ \exists$ то $A^{-1}\ \exists!$ и однозначна
② если $AB = E$, то $BA = E$

Следствие Обратная матрица (если $\exists$) является решением уравнения $AX=E$.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение Перестановкой на множестве $\{1, 2, \dots n\}$ называется всякое биективное (= взаимно однозначное) отображение $\sigma: \{1,2,\dots n\} \to \{1,2,\dots n\}$

Запись: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n)\end{pmatrix}$, где $i_1, \dots i_n$ — числа $1\dots n$, записанные в произвольном порядке

образ

S_n — множество всех перестановок на $\{1, 2, \dots n\}$

$|S_n| = n!$

Пример $S_4 \ni \sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&3&1&2\\2&1&4&3\end{pmatrix}$

Пусть $\sigma \in S_n$; $i, j \in \{1, 2, \dots n\}$, $i \neq j$

Определение Неупорядоченная пара $\{i, j\}$ образует **инверсию** в перестановке σ, если числа $i-j$ и $\sigma(i)-\sigma(j)$ имеют разный знак (т.е. либо $i>j$, $\sigma(i)<\sigma(j)$, либо $i<j$, $\sigma(i)>\sigma(j)$)

Определение **Знак перестановки** – это число $sgn(\sigma) := (-1)^{\langle \text{inversion count in } \sigma \rangle}$
$sgn(\sigma) \in \{1, -1\}$

Определение Перестановка σ называется **чётной**, если $sgn(\sigma)=1$, и **нечётной**, если $sgn(\sigma)=-1$.

Примеры $n=2$ ... $n=3$

	$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
число инверсий	0	1	0	1	1	2	2	3
знак	1	−1	1	−1	−1	1	1	−1
чётность	да	нет	да	нет	нет	да	да	нет

В общем случае число инверсий в перестановке $\sigma \in S_n$ $\leq C_2^n = \binom{2}{n} = \frac{n(n-1)}{2}$, достигается при $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\n&n-1&\cdots&1\end{pmatrix}$

ЛЕКЦИЯ-5 03.10.2023

Определение **Произведение** (или **композиция**) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ – перестановка $\sigma \cdot \rho$ ($\sigma\rho$), действующая по правилу $(\sigma\rho)(x) = \sigma(\rho(x))$ для всех $x \in \{1, 2, \dots, n\}$

Пример. $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \Rightarrow$
$\sigma\rho = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$, $\rho\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ $\sigma\rho \neq \rho\sigma$

Замечание Умножение перестановок не обладает свойством **коммутативности**

СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВОК

Утверждение Умножение перестановок **ассоциативно**, то есть $(\sigma\rho)\pi = \sigma(\rho\pi)$ для всех $\sigma, \rho, \pi \in S_n$.

Proof. $\forall x \in \{1, 2, \dots, n\}$: $((\sigma\rho)\pi)(x) = (\sigma\rho)(\pi(x)) = \sigma(\rho(\pi(x)))$
$(\sigma(\rho\pi))(x) = \sigma((\rho\pi)(x)) = \sigma(\rho(\pi(x)))$

Перестановка **Определение** $id := \begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\1&2&3&\cdots&n\end{pmatrix} \in S_n$ называется **тождественной**

Свойства: ① $id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$ $\forall \sigma \in S_n$
② число инверсий в id равно $0 \Rightarrow sgn(id) = 1$

Определение Для всякой перестановки $\sigma \in S_n$ перестановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ называется **обратной** к σ.

Свойства: $\sigma^{-1} \cdot \sigma = \sigma \cdot \sigma^{-1} = id$

Наблюдение $\forall \rho \in S_n$: когда $\{i, j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в множестве $\{1, \dots, n\}$, пары $\{\rho(i), \rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, \dots n\}$.

Пример: $n=4$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\{i,j\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
$\{\rho(i), \rho(j)\}$	$\{3,1\}$	$\{3,4\}$	$\{3,2\}$	$\{1,4\}$	$\{1,2\}$	$\{4,2\}$
=	$\{1,3\}$	$\{3,4\}$	$\{2,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,2\}$	$\{2,4\}$

Теорема (о знаке произведения перестановок) $\forall \sigma, \rho \in S_n$, $sgn(\sigma\rho) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\rho)$

Proof $\forall$ пары $i<j$ положим

$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если пара } \{i,j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \rho & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \rho(1) & \rho(2) & \rho(3) & \cdots & \rho(n) \\ \sigma & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \sigma\rho(1) & \sigma\rho(2) & \sigma\rho(3) & \cdots & \sigma\rho(n) \end{array}$$

Тогда число инверсий в ρ равно $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}$, –//– $\sigma\rho$ $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \gamma_{ij}$

Чему равно число инверсий в σ? тоже $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \beta_{ij}$

α_{ij}	0	0	1	1
β_{ij}	0	1	0	1
γ_{ij}	0	1	1	0

XOR
sum mod 2

Вывод: $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \mod 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow sgn(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma_{ij}} = (-1)^{\sum \alpha_{ij} + \beta_{ij}} = (-1)^{\sum \alpha_{ij}} \cdot (-1)^{\sum \beta_{ij}} = sgn(\sigma\rho)$

Следствие $\forall \sigma \in S_n$ $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$

Proof $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id \Rightarrow sgn(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = sgn(id) \Rightarrow$
$\Rightarrow sgn(\sigma) sgn(\sigma^{-1}) = 1 \Rightarrow sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$.

Упр. число инверсий в σ равно числу инверсий в σ^{-1}

$i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \ne j$ define перестановку $\tau_{ij} \in S_n$ as:
$\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$, $\tau_{ij}(k) = k$ $\forall k \ne i, j$

Определение Перестановки вида τ_{ij} называются **транспозициями**.

Замечание $\tau \in S_n$ – транспозиция $\Rightarrow \tau^2 = id$ $\tau^{-1} = \tau$

Лемма $\tau \in S_n$ – транспозиция $\Rightarrow sgn(\tau) = -1$

Proof let $\tau = \tau_{ij}$, можно считать $i<j$. Посчитаем число инверсий в τ_{ij}.

$$\begin{pmatrix} 1 \dots i-1 & i & i+1 \dots j-1 & j & j+1 \dots n \\ 1 \dots i-1 & j & i+1 \dots j-1 & i & j+1 \dots n \end{pmatrix}$$

Инверсии в парах: $\{i,k\},\ i+1 \le k \le j$, всего $j-i$
$\{k,j\},\ i+1 \le k \le j-1$, всего $j-i-1$

Итого инверсий $2(j-i)-1$ – нечётное $\Rightarrow sgn\,\tau = -1$, q.e.d.

Следствие $\forall n \geq 2$ отображение $\sigma \mapsto \sigma \cdot \tau_{12}$ является биекцией между множеством всех чётных перестановок в S_n и множеством всех нечётных перестановок в S_n

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение Определителем матрицы $A \in Mat_n$ называется величина: $\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn(\sigma)) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

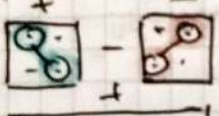
Пример. $n=2$

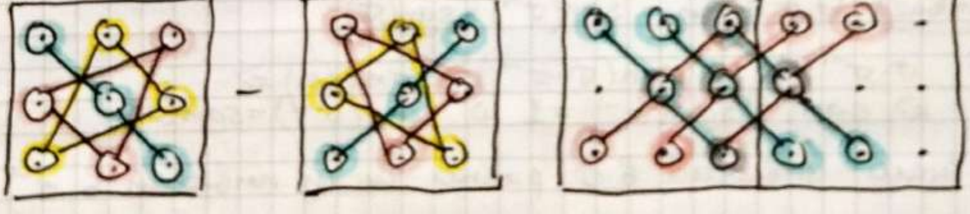
$$\begin{array}{lcc} \sigma & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ sgn\,\sigma & 1 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$:

$$\begin{array}{lcccccc} \sigma & \begin{pmatrix} 1 2 3 \\ 1 2 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 2 3 \\ 2 3 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 2 3 \\ 3 1 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 2 3 \\ 3 2 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 2 3 \\ 2 1 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 2 3 \\ 1 3 2 \end{pmatrix} \\ sgn\,\sigma & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$n=2$  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$n=3$ 

Замечание каждое произведение $a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ включает в себя ровно 1 элемент из каждой строки и ровно 1 элемент из каждого столбца.

ЛЕКЦИЯ-6. 10.10.2023

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

(T) $\det A^T = \det A$

Док-во: Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$

$\det B = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n,\sigma(n)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} \;(=)$

$a_{\sigma(i),i} = a_{\sigma(i)\sigma^{-1}(\sigma(i))} \Rightarrow a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$

$(=) \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)} =$

$= \sum\limits_{g \in S_n} (\operatorname{sgn} g) a_{1,g(1)} a_{2,g(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,g(n)} = \det A$, q.e.d.

(0) если в A есть строка (или столбец) из нулей, то $\det A = 0$

Док-во: Свойство T $\Rightarrow$ достаточно доказать только для строк
Пусть $A_{(i)} = (0, 0, \ldots 0)$ тогда $\forall \sigma \in S_n$, $a_{i,\sigma(i)} = 0 \Rightarrow$
каждое слагаемое в (*) будет равно 0 $\Rightarrow \det A = 0$

(1) если в A все элементы некоторой строки (или столбца) умножить на один и тот же скаляр λ, то $\det A$ умножится на λ.

Док-во: Свойство T $\Rightarrow$ достаточно доказать только для строк
$A_{(i)} \rightsquigarrow \lambda A_{(i)} \Rightarrow \forall \sigma \in S_n \quad a_{i\sigma(i)} \rightsquigarrow \lambda a_{i\sigma(i)} \Rightarrow$ каждое слагаемое в (*) умножится на $\lambda \Rightarrow \det A$ умножится на λ

(2) если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A_1^{(j)} + A_2^{(j)} \Rightarrow$
$\det A = \det(A^{(1)} \ldots A_1^{(j)} \ldots A^{(n)}) +$
$+ \det(A^{(1)} \ldots A_2^{(j)} \ldots A^{(n)})$

Пример.
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 & c_3+d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Док-во: Свойство T $\Rightarrow$ достаточно доказать для строк
Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots a'_{in})$; $A^2_{(i)} = (a''_{i1}, a''_{i2} \ldots a''_{in})$

$\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot (a'_{i,\sigma(i)} + a''_{i,\sigma(i)}) \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} =$

$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a'_{i,\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} + \sum\limits_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a''_{i,\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} =$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

(3) Если в A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$

Док-во: Свойство T $\Rightarrow$ достаточно док-ть для строк

Пусть $A_{(i)} = A_{(j)}$, можно считать $i<j$. Положим $\tau := \tau_{ij} \in S_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \sigma \in S_n$
1) $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = -\operatorname{sgn}\sigma \Rightarrow \sigma\tau \neq \sigma$
2) $(\sigma\tau)\tau = \sigma$

Множество S_n разбивается на непересекающиеся пары вида $\{\sigma, \sigma\tau\}$

Достаточно показать, что $\forall \sigma \in S_n$ слагаемые в (*), отвечающие σ и $\sigma\tau$, имеют разный знак (и => в сумме дают 0)

для σ: $(\operatorname{sgn}\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} = (\#)$

для $\sigma\tau$: $(\operatorname{sgn}(\sigma\tau)) \cdot a_{1,\sigma\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i,\sigma\tau(i)} \cdot a_{j,\sigma\tau(j)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma\tau(n)} =$

$= -(\operatorname{sgn}\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a_{i,\sigma(j)}}_{a_{j,\sigma(j)}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a_{j,\sigma(i)}}_{a_{i,\sigma(i)}} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} = -(\#)$ => $\det A = 0$

④ если к одной строке/столбцу прибавить другую (другой), умноженную на скаляр, то $\det A$ не изменится

Док-во: св-во T => дост. док-ть для строк

Пусть $A_{(i)} \to A_{(i)} + \lambda A_{(j)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det\begin{pmatrix} A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \end{pmatrix} \underset{②}{=} \det\begin{pmatrix} A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \lambda A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \end{pmatrix} \underset{①}{=} \det A + \lambda \det\begin{pmatrix} A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \end{pmatrix} \underset{③}{=} \det A + \lambda \cdot 0 = \det A$$

⑤ при перестановке любых 2 строк/столбцов det меняет знак

Док-во: св-во T => дост. док-ть для строк

$$\det\begin{pmatrix} \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \end{pmatrix}\begin{matrix} i \\ \\ j \end{matrix} \underset{④}{=} \det\begin{pmatrix} A_{(j)} + \ldots \\ \vdots \\ A_{(i)} + A_{(j)} \\ \vdots \end{pmatrix} \underset{④}{=} \det\begin{pmatrix} -A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(i)} + A_{(j)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \end{pmatrix} = -\det A$$

$\boxed{\text{Определение}}$ Матрица $A \in M_n$ называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$ (т.е. все элементы ниже главной диагонали равны 0)

Аналогично, нижнетреугольной при $a_{ij} = 0$ $\forall i < j$, выше.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

⑥ A - верхне- или нижне- треугольная матрица => $\Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

Док-во: св-во T => дост. док-ть для верхнетреугольной

Отыщем в (*) все слагаемые, которые могут быть не равны нулю.

$a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} \neq 0 \Rightarrow a_{i,\sigma(i)} \neq 0 \ \forall i = 1 \ldots n$

$a_{n,\sigma(n)} \Rightarrow \sigma(n) = n$

$a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(n-1) \in \{n-1, n\}$, но n уже занято => $\Rightarrow \sigma(n-1) = n-1$

и так далее...

Ик получаем $\sigma(i) = i$ $\forall i = n, n-1, n-2, \ldots 2, 1 \Rightarrow \sigma = id$

Вывод: в (*) отличным от нуля может быть только слагаемое, отвечающее $\sigma = id$, это $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$ со знаком + => $\det A = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$

Следствие ① $\det(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$
② $\det E = 1$

Замечание Всякая ступенчатая матрица верхнетреугольна

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБР.

$Э_1(i, j, \lambda)$: det не меняется
$Э_2(i, j)$: det меняет знак
$Э_3(i, \lambda)$: det умножается на λ

"АЛГОРИТМ"

- приводим матрицу при помощи элементарных преобразований к ступенч. виду
- контролируем det
- верхнетреуг ⇒ det сразу считается.