05.09.23 ЛЕКЦИЯ-1

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

(i)

вики-страница
Д/З max 10 + защита 0,299
коллоквиум max 10 + доп. задачи 0,299
экзамен max 10 0,402

1–2 модули

0,2 (оц 1-2) + 0,2 · ДЗ + 0,2 · кол + 0,4 · ЭКЗ

3–4 модули

осмысленные высказывания

истина
И
1

ложь
Л
0

"если я заболею, то я не приду на лекцию" = Л

И Л

Логические связки: и ($\wedge$, &) — конъюнкция, или ($\vee$, |) — дизъюнкция, следует ($\rightarrow$) — импликация

таблица истинности

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$	$\overline{A}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

ПРИОРИТЕТ ОПЕРАЦИЙ:

1. $\neg$
2. $\wedge$
3. $\vee$
4. $\rightarrow$, $\equiv$, etc

равносильность ($\equiv$, $\leftrightarrow$), **отрицание** ($\neg$) $\neg A = \overline{A}$

Тавтология — высказывание, истинное при всех значениях переменных (в таблице истинности всюду 1)

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$ **modus ponens** $\boxed{A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B}$ пример тавтологии

Разбор случаев: $A \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

$A \vee B \equiv B \vee A$
$A \wedge B \equiv B \wedge A$
перестановочный
коммутативность

$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
ассоциативность

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

($\rightarrow$) $A = 1$
$B \vee C = 1$
если $A = B = 1$, то $A \wedge B = 1$

($\leftarrow$) если $A \wedge C = 1$, то
$A = 1$, $C = 1$
$B \vee C = 1$, $A \wedge (B \vee C) = 1$

Противоречие: $A \wedge \neg A = 0$ всегда

$(A \wedge \overline{A}) \rightarrow B = 1$ всегда

"если я на ФКН и я не на ФКН, то вы папа Римский"

Закон контрапозиции

$$(A \to B) \equiv (\overline{B} \to \overline{A})$$
$$A \to B \equiv \overline{A} \vee B \equiv \overline{\overline{B}} \vee \overline{A} \equiv B \vee \overline{A}$$
$$(\overline{A} \vee B) \equiv \overline{A} \vee B$$

NB: $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$ – тавтология

Если $\underbrace{a_1 + \ldots + a_n > n}_{A}$, то $\underbrace{\text{какое-то из } a_1, \ldots a_n \text{ больше } 1}_{B}$.

$\neg B$ = все $a_1, \ldots, a_n$ не больше 1 $\quad a_1 \le 1, \ldots, a_n \le 1$

$$a_1 + \ldots + a_n \le \underbrace{1 + \ldots 1}_{n} = n$$

МНОЖЕСТВА

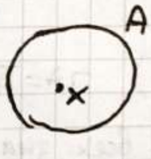
Множество – совокупность объектов одной природы.
2 множества равны, если в них одни и те же элементы.

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} \overset{?}{=} \{1, 1, 1, 1, 2, 3, 3\} = A$$

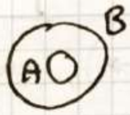
$A = B \Rightarrow \forall x \; x \in A \equiv x \in B \qquad 1 \in A \qquad \Delta \notin A$

$\boxed{A \subseteq B}$: A – **подмножество** B $\quad \forall x \; x \in A \to x \in B$

$x \in A$



$A \subseteq B$



$1 \notin \{\{1\}\}$ $\quad \{\{1\}\} \notin \{\{1\}\}$

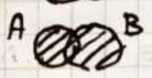
$\{1\} \in \{\{1\}\}$ $\quad \{\{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$

$\{1\} \not\subseteq \{\{1\}\}$

Пустое множество $\varnothing$. Все пустые множества равны.

$x \in A \cap B \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$

$x \in A \cup B \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$



$x \in A \setminus B \equiv (x \in A) \wedge (x \notin B)$

круги Эйлера

$x \in A \Delta B \equiv ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))$

$(x \notin A \cap B) \wedge (x \in A \cup B)$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$x \in \overline{A} \equiv (x \notin A)$

$\overline{\varnothing}$ только при использовании универсума (U) $\quad \overline{A} = U \setminus A$

$(A \cap B) \setminus C \equiv (A \setminus C) \cap B$

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg\gamma \equiv$
$\equiv (\alpha \wedge \neg\gamma) \wedge \beta$

$\forall x: x \in (A \cap B) \setminus C \equiv x \in (A \setminus C) \cap B \Rightarrow$

$x \in A \cap B \wedge x \notin C \equiv x \in A \setminus C \wedge x \in B$

$(\underbrace{x \in A}_{\alpha} \wedge \underbrace{x \in B}_{\beta}) \wedge \underbrace{x \notin C}_{\neg\gamma} \equiv (\underbrace{x \in A}_{\alpha} \wedge \underbrace{x \notin C}_{\neg\gamma}) \wedge x \in B$

12.09.23 Лекция-2

Множество **конечно**, если его элементы **можно пересчитать**.

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $\forall a_i \in A$ и $\exists a_i!$, n – размерность множества $n = |A|$

Количество элементов в последовательности – её длина.

Будем называть целые неотрицательные числа **натуральными**. $0, 1, 2, \ldots$ $\mathbb{N}$

Последовательности равны, если их длины равны и все соответственные элементы равны:

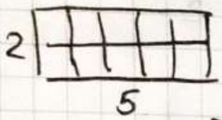
$(1) \neq (1,1)$ $\quad (2,1) = (1,2)$

$\{1\} = \{1,1\}$ $\quad \{2,1\} = \{1,2\}$

(Перечислительная) **комбинаторика** – раздел, где мы подсчитываем элементы в конечных множествах.

Правило суммы Для конечных непересекающихся множеств A, B $(A \cap B = \varnothing)$ выполняется равенство

$|A \cup B| = |A| + |B|$



Декартово произведение множеств $A \times B$

$\forall (a,b)$ – упорядоченные пары, где $A \ni a$, $B \ni b$.

Пример $\varnothing \times \mathbb{N} = \varnothing$

Правило произведения Для конечных множеств A, B выполняется равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Для нескольких множеств:

$(1, (1,2)) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, но $\notin (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$

↑последовательность

Больше тавтологий!

Транзитивность импликации:

$$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$$

Доказательство от противного:

$$((\neg A \to (B \wedge \neg B)) \to A \equiv \neg\neg A \to A \equiv A \to A$$

$\boxed{\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B}$ $\quad \boxed{\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B}$

законы де Моргана

"для всех x", $\forall x A(x)$ – квантор всеобщности

"существует x, что..." $\exists x A(x)$ – квантор существования

$\forall x \in A \; B(x)$ $\quad \exists x \in A \; B(x)$

$\forall x (x \in A \to B(x))$ $\quad \exists x (x \in A \wedge B(x)$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Принцип математической индукции. Пусть для последовательности утверждений $A_0, A_1, A_2, \dots A_n \dots$ занумерованных натуральными числами, верны утверждения.

База индукции: A_0 истинно

Шаг индукции: $A_n \to A_{n+1}$ истинно для любого n.
Посылку импликации A_n называют индуктивным предположением.

$\Rightarrow A_n$ истинно для любого n

$$\boxed{(A(0) \land \forall n(A(n) \to A(n+1))) \to \forall n A(n)}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_0 \to A_1 &= 1 \\ A_1 \to A_2 &= 1 \\ &\vdots \\ A_n \to A_{n+1} &= 1 \end{aligned}$$

- есть начало
- до любого числа можно дойти

Пример: $\forall n \geq 1: \ 1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

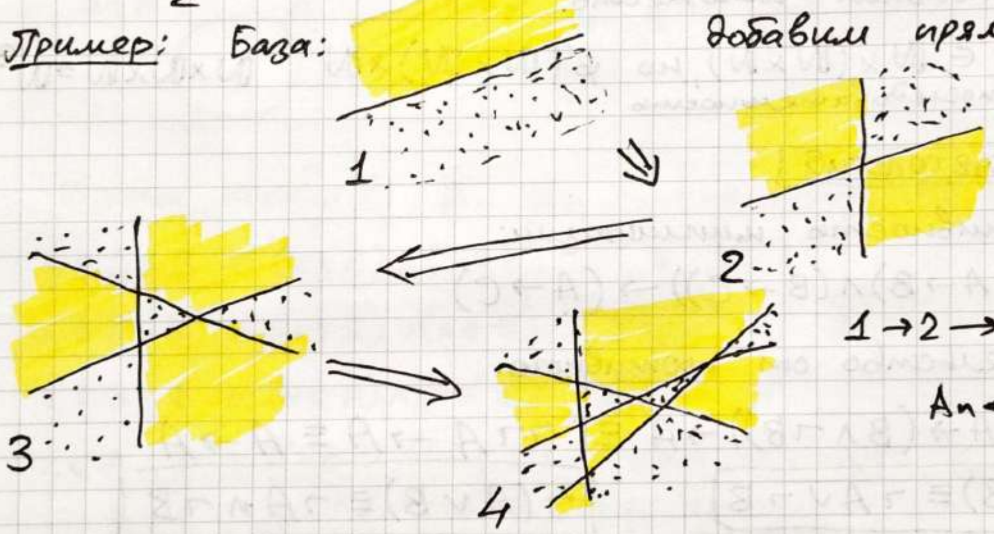
База: $A_1 = 1 = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$

Предположим что A_n верно $\Rightarrow$

$1+2+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+\dots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$= \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} = A_{n+1} \Rightarrow A_n$ верно $\forall n$

Пример: База: добавим прямую:



перекрашиваем одну сторону в противоположные цвета

$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \dots$

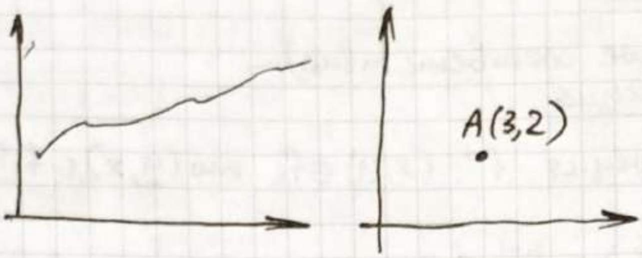
$A_n \leftrightarrow A_{n+1}$

Принцип полной математической индукции:

Для последовательности утверждений $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, где $n \in \mathbb{N}$ из $A_i \Rightarrow \forall i < n \Rightarrow A_n = 1 \Rightarrow A_n = 1 \ \forall n$

$$\boxed{\forall n((\forall k < n: A(k)) \to A(n)) \to \forall n A(n)}$$

Функция $A \to B$



$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c,\ b=d$

$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$

$a=b \quad (a,a) = \{\{a\}\}$

(c,d) – тоже 1-но-элементное множество $= \{\{c\}\} \Rightarrow a=c$

$a \neq b \Rightarrow (c,d)$ – тоже 2-х элементное множество

$\{a\} = \{c\} \quad (\neq \{c,d\}) \quad \{a,b\} = \{c,d\}\ b=d$

$a=c$

R на множестве A: $R \subseteq A \times A$

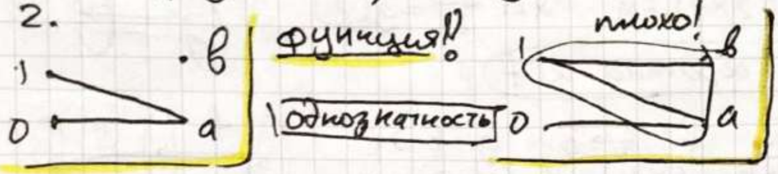
Бинарное отношение – $xRy \quad (x,y) \in R$

$\mathbb{N}^2$ отношение "<": $x<y \quad 2<3 \quad (2,3) \in \mathbb{N}^2$

Функция $f: A \to B$ – это бинарное отношение на $A \times B$ $(f \subseteq A \times B)$, $\therefore (x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

A – аргументы, B – значения $\quad A=\{0,1,2\} \quad B=\{a,b\}$

$\{(0,a), (1,a)\}$



$(x,y) \in f$

$f(x) = y$

$x \xrightarrow{f} y$

Dom (domain) $f = \{x \in A: \exists y \in B \quad (x,y) \in f\}$

$Dom f \subseteq A \qquad Dom f = A$ – f – тотальная, всюду определённая

$Dom f \neq A$ – f – частичная

x	0	1	2
f(x)	a	a	

Начальный отрезок натурального ряда:

$[n] = \{x \in \mathbb{N} : x<n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ – n чисел

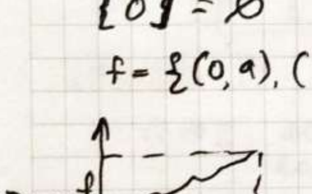
Конечная последовательность (слово) длины n в алфавите A

x	0	1	...	n−1
f(a)	f(0)	f(1)		f(n−1)

Бесконечная последовательность в алфавите A: тотальная функция $f: \mathbb{N} \to A$

$[0] = \varnothing \qquad$ **Множество значений**: $Range f = \{y \in B: \exists x \in A, (x,y) \in f\}$

$f = \{(0,a), (1,a)\} \quad Range f = \{a\} \qquad \{0,1,2\} \to \{a,b\} \quad Range f \subseteq B$

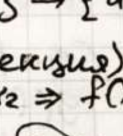


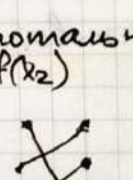
Инъективная функция (инъекция) – тотальная функция $f: A \to B \ \therefore\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x) = x^3$ на $\mathbb{N}$

плохо!



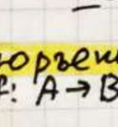


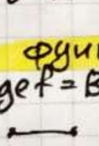
не инъекция

$f(x)^2$ – инъекция в $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

– не инъекция в $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Сюръективная функция (сюръекция) – тотальная функция $f: A \to B \ \therefore\ Range f = B \quad \forall y \in B\ \exists x \in A\ (x,y) \in f$





плохо!

нет такого

$f(x) = x^3 \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \boxed{f(x) = 2}$

$f(x) = x^3 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – сюръекция

$f(x)=x^2$ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\not\exists x$ $f(x)=-1$

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ сюръекция

Биекция (взаимно-однозначное соответствие) — и сюръекция, и инъекция

f-биекция. Обратная функция f^{-1}: $(x,y)\in f$, то $(y,x)\in f^{-1}$

$f: A\to B$ $f^{-1}: B\to A$

f^{-1} - функция: $(y,x_1),(y,x_2)\in f^{-1} \Rightarrow x_1=x_2$

$(x_1,y),(x_2,y)\in f \Rightarrow x_1=x_2$ f-инъекция

f^{-1} - тотальна: $\forall y\in B$ $\exists x\in A$ $(y,x)\in f^{-1}$

$\forall y\in B$ $\exists x\in A$ $(x,y)\in f$ f-сюръекция

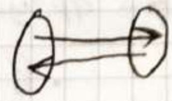
f^{-1} - инъекция: $(y_1,x),(y_2,x)\in f^{-1} \Rightarrow y_1=y_2$

$(x,y_1),(x,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$ f-функция

f^{-1} - сюръекция: $\forall x\in A$ $\exists y\in B$ $(y,x)\in f^{-1}$

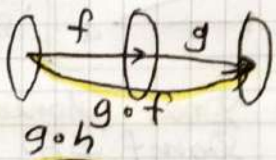
$\forall x\in A$ $\exists y\in B$ $(x,y)\in f$ f- тотальна

Пример $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=2x+1=y$ $x=\frac{y-1}{2}=g(y)$



f обратна к g, то g обратна к f

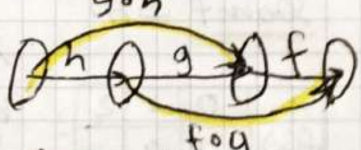
Композиция функций: $f: A\to B$ $g: B\to C$



$g(f(x)) = (g\circ f)(x)$ $\exists y\in B$ $(x,y)\in f$ $(y,z)\in g$

$f\circ g$ — это не поняли что

Ассоциативность: $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$



Композиции сохраняют классы функций! (инъективность, сюръективность, биективность).

Лемма $f: A\to B$, $g: B\to C$

1. f,g - инъекции $\Rightarrow$ $g\circ f$ - тоже инъекция
2. f,g - сюръекции $\Rightarrow$ $g\circ f$ - сюръекция
3. f,g - биекция $\Rightarrow$ $g\circ f$ - биекция
4. f,g - тотальны $\Rightarrow$ $g\circ f$ - тотальная

Док-во: 1. $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$g(f(x_2)) = g(f(x_1))$

g- инъекция $\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

f- инъекция $\Rightarrow x_1=x_2$

2. $\forall z\in C$: $\exists y\in B$ $g(y)=z$ f-сюръекция $\Rightarrow$ для y $\exists x\in A$: $f(x)=y$ по опр. композиции $(g\circ f)(x)=g(f(x))=z \Rightarrow$ $g\circ f$ - сюръекция

23.09.23 ЛЕКЦИЯ-4

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ (**принцип Кроликов**) Если $k>n$ и k кроликов рассажены по n клеткам то хотя бы в одной клетке сидит хотя бы 2 кролика.

Теорема Если $k>n$, $r_1, \dots, r_n$ - натуральные числа и $r_1 + \dots + r_n = k$, то $\exists i,\ r_i > 1$.

Proof. От противного: пусть $\forall r_i\ \ r_i \le 1$
Сложим все неравенства, $r_1 + \dots + r_n \le n$
т.к $r_1 + \dots + r_n = k$, то $k \le n \Rightarrow$ противоречие, q.e.d.

КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА Множество называется **конечным**, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ биекция $f: [n] \to A$, где n - **мощность** множества. $|A| = n$

Теорема (корректность определения мощности конечного множества). Пусть $f: [n] \to A$ и $g: [m] \to A$ - две биекции $\Rightarrow$ $n=m$

Proof. От противного, Suppose $n \ne m$. let $n>m \Rightarrow$
$\exists\ g^{-1}: A \mapsto [m]$ and $g^{-1} \circ f: [n] \to [m]$ - биекция
$[n]$ - кролики, а $[m]$ - клетки. $n>m \Rightarrow$ в какой-то клетке сидят два кролика $\Rightarrow \exists\ i,j \in [n] \therefore g^{-1} \circ f(i) = g^{-1} \circ f(j)$
$\Rightarrow$ противоречие, q.e.d.

ОБРАЗ Пусть $X \subseteq A$ – подмножество A. f сопоставляет ему **образ** $f[X] \subseteq B \subseteq X$. По определению $f[X]$ состоит из тех элементов множества B, которые являются значениями элементов из X:

$$\boxed{f[X] = \{b \in B \mid \exists x \in X: b = f(x)\}}$$

если $X = A \Rightarrow$ $f[A] = \mathrm{Range}(f)$

Пример. f из $A = \{1,2,3,4\}$

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	2	-

Если $X = \{1,2\} \Rightarrow f[X] = \{1,2\}$ $\qquad X = \{3,4\} \Rightarrow f[X] = \{2\}$

ПРООБРАЗ $Y \subseteq B$. Полный **прообраз** $f^{-1}[Y]$ состоит в точности из тех элементов A, которые лежат в Y:

$$\boxed{f^{-1}[Y] = \{a \in A,\ f(a) \in Y\}}$$

$f^{-1}[B] = \mathrm{Dom}(f)$

Пример. $Y = \{2\}$ $f^{-1}[Y] = \{2,3\}$ $\quad Y = \{3,4\} \Rightarrow f^{-1}[Y] = \varnothing$

$f: A \to B$ ~~если~~ f - тотальна, если $f^{-1}[B] = A$.
если $f[A] = B$, то f - сюръективна

$$|f^{-1}[Y]| = \sum_{b \in Y} |f^{-1}[\{b\}]|$$

СРАВНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Лемма Для тотальных функций из конечного множества в конечное выполняются такие свойства:

1. если $f: A \to B$ инъекция $\Rightarrow |A| \le |B|$;
2. если $f: A \to B$ сюрЪекция $\Rightarrow |A| \ge |B|$;
3. если $f: A \to B$ биекция $\Rightarrow |A| = |B|$.

Proof. a_i, $i \in B$ – количество элементов $a \in A$: $f(a) = i$
f – инъекция $\Rightarrow a_i \le 1 \ \forall i \in B \Rightarrow$ Аналогично для f-сюръекции

$|A| = \sum_{i \in B} a_i \le \sum_{i \in B} 1 = |B|$ $\qquad |A| = \sum_{i \in B} a_i \ge \sum_{i \in B} 1 = |B|$

Лемма Для тотальных функций из конечного множества в себя выполнены свойства:

① если $f: A \to A$ инъекция, то f – сюръекция;

② если $f: A \to A$ сюръекция, то f – инъекция.

Proof f – инъекция $\Rightarrow |f[A]| = |A| = n \Rightarrow f$ – сюръекция
Let f – сюръекция. $|f^{-1}[A]| =$ ~~$|A| = n$~~
$|f^{-1}[A]| = \sum_{b \in A} |f^{-1}[\{b\}]|$. Since f-сюръекция $\Rightarrow |f^{-1}[\{b\}]| \ge 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f^{-1}[\{b\}]| = 1 \Rightarrow f$ – инъекция

ПОДСЧЁТЫ СЛОВ И ФУНКЦИЙ

Правило суммы для нескольких попарно непересекающихся множеств:

если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для всех $1 \le i < j \le n$, то $\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|}$

Правило произведения для нескольких множеств:

$\boxed{|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|}$

Размещения

$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!}}$ – количество инъекций из k-элементного множества в n-элементное.

Перестановка множества A – любая биекция $f: A \to A$. их количество P_n

$\boxed{P_n = n!}$ (частный случай A_n^n)

Сочетание (неупорядоченные выборки) – из n по k – подмножество n-элементного множества, где k элементов. C_n^k $\binom{n}{k}$

$C_n^k \cdot k! = A_n^k$ $\qquad \boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

03.10.23 ЛЕКЦИЯ-5.

X – множество n элементов
$\mathcal{P}(X)$ – множество его подмножеств

биекция $A \subseteq X \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X \setminus A \end{cases}$

$A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow \chi_A(x) = \chi_B(x)$ $\qquad \chi_A : X \to \{0, 1\}$ тотальные $\qquad 2^n$

Сколько существует слов из 0 и 1 длины n с ровно k единицами? C_n^k

k-элементные подмножества n-элементного множества

Теорема $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$\boxed{C_n^k = \binom{n}{k}}$ Proof

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^n = \binom{n}{0}y^n + \binom{n}{1}y^{n-1}x + \ldots + \binom{n}{n-1}yx^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$

$xyyx\ldots$ 2^n слагаемых

$x^k y^{n-k}$ слово в алфавите $\{x, y\}$ длины n с k x? C_n^k, ч.т.д.

$x = y = 1$ $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$

$0 \le k \le n$

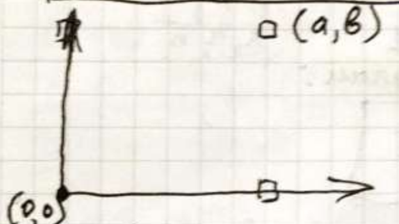
если $k>n$ или $k<0$, то $C_n^k = 0$

если $k>n$ или $k<0$, то $C_n^k = 0$

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1

МОНОТОННЫЕ ПУТИ В КВАДРАТЕ



Путь — последовательность целочисленных точек $(x, y) \nearrow (x+1, y)$, $\searrow (x, y+1)$

$T(a,b)$ — количество путей из $(0,0)$ в (a,b).

2 группы путей: $\uparrow$ или $\rightarrow$ $T(a,b) = T(a, b-1) + T(a-1, b)$

$T(a,b) = ?$ $T(a, b-1)$ $T(a-1, b)$ $T(0,a) = 1$ $T(0,b) = 1$

Теорема $\boxed{T(a,b) = \binom{a+b}{a}}$ $(0,0) \to (a,b)$ $a+b$ ходов

$\rightarrow a$ ходов $\uparrow b$ ходов

Протокол движения: $\rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \ldots$ слово из $a+b$ символов в алфавите $\{\rightarrow, \uparrow\}$ с a штуками $\rightarrow$

Свойство $\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}$

$C_n^k = T(k, n-k) = T(k-1, n-k) + T(k, n-k-1) = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

n элементов

$x \in A$ $k-1$ элементов из $n-1$ C_{n-1}^{k-1}

$x \notin A$ k элементов из $n-1$ C_{n-1}^k

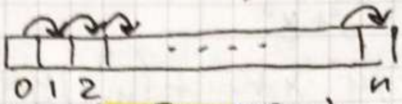
Свойство Строки треугольника Паскаля симметричны относительно середины.

$C_n^k = C_n^{n-k}$ $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$

Число k-элементных подмножеств n-элементного множества равно числу его $(n-k)$-элементных подмножеств

$\underset{k}{A \subseteq X} \longmapsto \underset{n-k}{X \setminus A}$ "быть выбранным значит 'не быть не выбранным'"

$(x+y)^n = (y+x)^n \qquad x^k y^{n-k} \longrightarrow$

Путь по прямой:  $\Rightarrow$ путь **монотонный**

Разрешены ~~...~~ (**любые** ходы) $\quad T(n)$ - ?

$0 \dots in \quad i = 0, \dots, n-1 \quad T(n) = T(0) + T(1) + \dots + T(n-1)$

$T(0) = 1$

$T(1) = 1 \quad T(2) = 2 \quad T(3) = 4 \quad T(4) = 8 \dots \quad T(n) = 2^{n-1} \quad n \geq 1$

Теорема $\boxed{T(n) = 2^{n-1}, \ n \geq 1}$

Proof база: $n = 1 \quad T(1) = 1 = 2^{1-1}$

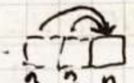
шаг: $T(n+1) = T(0) + T(1) \dots + T(n-1) + T(n) = 2T(n) = 2^n = 2^{n+1-1}$ (по предположению индукции), q.e.q.

2^{n-1}, количество слов длины $n-1$ в алфавите $\{0, 1\}$

✓	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	✓

$0 \qquad n-1 \qquad n$

слово $\longleftrightarrow$ маршрут (мы заходим в клетки, где написана 1)

Разрешим ходы на 1 или на 2 клетки: 

$H(n)$ - число маршрутов $\Rightarrow$

$H(n) = H(n-1) + H(n-2) \qquad H(0) = 1 \quad H(1) = 1$

— рекуррентная формула для **чисел Фибоначчи**:

$\boxed{F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad F_0 = 0 \quad F_1 = 1}$ $\boxed{H_n = F_{n+1} \quad \Psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

Формула Бине $\boxed{F_n = \frac{\Psi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}}$ **База** $n = 0$: $F_0 = \frac{\Psi^0 - \varphi^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$

$n = 1$: $F_1 = \frac{\Psi^1 - \varphi^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$

Шаг $A(0) \wedge A(1) \wedge \forall n (A(n) \wedge A(n+1) \to A(n+2)) \to \forall n A(n)$

$A(0) \wedge A(1) \to A(2)$

$A(1) \wedge A(2) \to A(3)$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\Psi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\Psi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}} = \frac{\Psi^n(\Psi+1) - \varphi^n(\varphi+1)}{\sqrt{5}} =$

$= \frac{\Psi^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}$

Теорема Сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n.

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n}$$

Теорема В первой половине строки треугольника Паскаля числа возрастают, а во второй убывают.

$$\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1} \Leftrightarrow \frac{n!}{k!(n-k)!} > \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{k} > \frac{1}{n-k+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n-k+1 > k \Leftrightarrow n+1 > 2k$ (k лежит в первой половине)

Теорема $\boxed{\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}}$ $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \ldots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n}$

самый большой в строке

тут $2n+1$ слагаемых $\Rightarrow$

самое большое $\geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$

$n>0$

Теорема A – n-элементное множество. Тогда подмножеств с чётным числом элементов столько же, сколько и с нечётным.

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots}$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n} y^n$ $\quad x=1$, $y=-1$

$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1}(-1) + \ldots + \binom{n}{n}(-1)^n$

$|A| = n$ $\quad |B| = k$ $\quad$ тотальных функций $A \mapsto B$? k^n $\quad B^A$

$A = B = \varnothing$ $\quad 0^0 = 1$, т.к. 1 функция)

$s \in A$ $\quad X \subseteq A$ $\quad s \notin X$ $\quad X \longleftrightarrow X \cup \{s\}$

подмножества A разбились на пары

если в X чётное число элементов, то в $X \cup \{s\}$ нечётное & vice versa

$(x_1 + \ldots + x_k)^n$ слагаемые: $x_1^{a_1} \ldots x_k^{a_k}$ $\quad a_1, \ldots a_k \in \mathbb{N}$

набор $(a_1, \ldots, a_k)$ однозначно определяет моном $x_1^{a_1} \ldots x^{a_n}$ $\quad a_1 + \ldots + a_k = n$

$x_1^{a_1} \ldots x_k^{a_k} = \boxed{x^\alpha \text{ (обозн.)}}$

$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum\limits_{\substack{\alpha = (a_1, \ldots a_n) \\ a_1 + \ldots + a_k = n}} \binom{n}{\alpha} x^\alpha$ $\quad k=2$: $\binom{n}{\alpha}$ – биномиальный коэффициент

$\binom{n}{\alpha}$ – мультиномиальный коэффициент

Чему они равны?

Теорема $\boxed{\binom{n}{a_1 \ldots a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}}$

Док-во 1 $\underbrace{x_1 x_2 x_3 x_1 \ldots}_{n \text{ множителей}}$ – каждое слагаемое $\quad \binom{n}{\alpha}$ – коэффициент перед x^α

a_1 переменных x_1

$\vdots$

a_k переменных x_k

$\Rightarrow \binom{n}{\alpha} =$ количество слов из n букв, в которых a_1 букв $x_1, \ldots$, a_k букв x_k

если все буквы разные, то всего $n!$ букв

$a_i!$ перестановок x_i

$a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!$ раз посчитано каждое слово $\quad \frac{n!}{a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!}$

<u>Док-во-2</u> $\underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{n \text{ мест}}$ Сколько способов выбрать a_1 мест для x_1?

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-a_1-\ldots a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!}\frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!}\cdots\left(\frac{a_k!}{a_k!\,0!}\right) =$$

$$= \frac{n!}{a_1!\cdot\ldots\cdot a_k!} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{k,\ n-k}$$

<u>Пример</u> 3 человека дежурят 6 дней => каждый дежурит 2 дня. А, Б, В - люди

$$\underline{А,В,А,Б,Б,В} = \binom{6}{2,2,2} = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot1}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 90$$

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad n+1 \text{ слагаемых}$$

$$(x_1+\ldots+x_n)^k = \sum_\alpha \binom{n}{\alpha} x^\alpha \quad \text{Сколько слагаемых?}$$

$n=3,\ k=3$

3 буквы одинаковые, 3 буквы разные. $3+1+6=10$
2 буквы одинаковые, 1 разная

$x_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{a_n}$ $(a_1,\ldots,a_n)$ $a_1+\ldots+a_n=k$. Сколько решений в натуральных числах?

$\boxed{\left(\binom{n}{k}\right) - \text{число сочетаний с повторениями}}$ $\binom{n}{k}$ - число k-элементных подмножеств n-элементного множества

n-элементное множество $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — a_1-вида a_2 штук a_n

$\boxed{k\text{-элементное мультимножество} \text{ порядок не важен, но кратность вхождения важна!}}$

k монет раздать n людям
a_1 - первому, ..., a_n - n-ому

таблетки → | O O || O O || O | O O | $n=7,\ k=7$

$a_1=0$ $a_2=2$ $a_3=0$ $a_4=2$ $a_5=0$ $a_6=1$ $a_7=2$

k-таблеток
$n-1$ палочка
$n+k-1$ мест

k мест для шариков, $k-1$ мест для палочек

решения уравнения $a_1+\ldots+a_n=k \leftrightarrow$ расстановка k шариков и $n-1$ палочек

$\boxed{\text{Теорема}}\ \boxed{\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}}$

<u>Задача</u> Сколько монотонных путей ~~длины~~ n из 0 в k? из n шагов

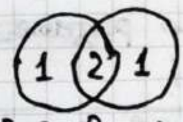
$b_1,\ldots b_n$ - шаги (целые, положительные) $b_1+\ldots b_n=k$ =>

$\underbrace{(b_1-1)}_{a_1}+\ldots+\underbrace{(b_n-1)}_{a_n}=k-n$ | 0 | ... | k | выбрать $k-1$ число => n ~~k~~-1 шагов

$$\Rightarrow \binom{k-1}{n-1} \quad \left(\binom{k-n}{n-1}\right) = \binom{k-n+n-1}{n-1}$$

Лекция-7 17.10.23

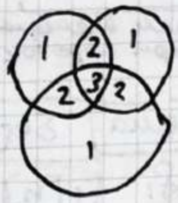
$A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$



$\boxed{\text{Теорема}}$ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
формула включений и исключений для 2 множеств

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



$\Downarrow$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| - \sum\limits_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$

$U \supseteq A$ $\quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in U \setminus A = \bar{A} \end{cases}$ $\quad \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = \chi_{A \cap B}(x)$ $\quad \chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

$A \cup B = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ $\qquad \chi_{A \cup B}(x) = \min(\chi_A(x) + \chi_B(x), 1)$

$\chi_{A \cup B}(x) = 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$

$\chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x) : 1 - (1 - \chi_{A_1}(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \chi_{A_n}(x)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(x) - \sum\limits_{1 \le i < j \le n} \chi_{A_i \cap A_j}(x) + \ldots + (-1)^{n+1} \chi_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}(x)$

$|A| = \sum\limits_{x \in U} \chi_A(x)$ просуммируем по всем $x \in U$ – будет формула включений-исключений

функций: $n \to k$ $\quad (k+1)^n$
тотальных функций: $n \to k$ $\quad k^n$
инъекций $n \to k$: $\quad k(k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) = \frac{k!}{n!}$
биекций: $n \to n$: $\quad n!$
сюръекций $n \to k$? $\Rightarrow$ Сколько не-сюръекций? ($\exists$ элемент в k-элементном множестве без прообраза)

$[n] \to [k] = \{0, 1, \ldots, k-1\}$
$A(i)$ – множество функций т.ч. прообраз $\{i\}$ пуст
$A(0) \cup A(1) \cup \ldots \cup A(k-1)$ – множество не-сюръекций

$|A(0)| = (k-1)^n$ $\quad |A(0) \cap A(1)| = (k-2)^n$ $\quad |A(i_1) \cap \ldots \cap A(i_p)| = (k-p)^n$
$n \to k-1$
$|A(0) \cup A(1) \cup \ldots \cup A(k-1)| = \sum\limits_{i=0}^{k-1} |A(i)| - \sum\limits_{0 \le i < j \le k-1} |A(i) \cap A(j)| + \ldots =$

$= k(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k}(k-k)^n$

$Surj(n,k) = 1 \cdot k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots = \sum\limits_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{k}{p}(k-p)^n$

n-элементное множество
k классов
$\overset{1}{\bigcirc} \overset{2}{\bigcirc} \ldots \overset{k}{\bigcirc}$ $\quad k^n$ коробки разные, можно пустые

Коробки одинаковые, пустые нельзя
ℓ_1 коробок с 1 элементом, ℓ_2 коробок с 2 элементами, $\quad \Phi(n,k)$
ℓ_n коробок с n элементами

$$\boxed{\begin{aligned} &\ell_1 + \ldots + \ell_n = k \\ &\ell_1 \cdot 1 + \ell_2 \cdot 2 + \ldots + \ell_n \cdot n = n \end{aligned}}$$

пусть коробки разные:
n элементов в классы: $\underbrace{1, \ldots, 1}_{\ell_1}, \underbrace{2 \ldots 2}_{\ell_2}, \ldots$ $\qquad \binom{n}{1, \ldots, 1, 2 \ldots 2, \ldots} = \frac{n!}{(1!)^{\ell_1}(2!)^{\ell_2} \cdot \ldots \cdot (n!)^{\ell_n}}$

Коробки-то ~~разные~~ одинаковые!

$$\underbrace{\frac{n!}{(1!)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot(n!)^{\ell_n}}}_{\text{меняем элементы внутри коробок}}\cdot\underbrace{\ell_1!\cdot\ldots\cdot\ell_n!}_{\text{меняем коробки}}$$

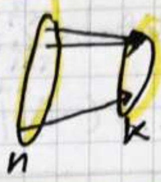
коробок

$$\Phi(n,k)=\sum_{\ell_1+\ldots+\ell_n=k}\frac{n!}{(1!)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot(n!)^{\ell_n}\,\ell_1!\cdot\ldots\cdot\ell_n!}$$

элементов $\ell_1\cdot 1+\ldots+\ell_n\cdot n=n$

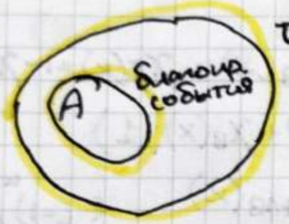
$\ell_1,\ldots,\ell_n\geq 0$

Теорема $\boxed{Surj(n,k)=k!\cdot\Phi(n,k)}$



Proof: $f: [n]\to[k]$ — сюръекция

i-ая коробка — прообраз i-го $\{i\}$



U — все события

$$\frac{|A|}{|U|}$$

Задача каждый взял случайную шляпу (n человек)

вероятность: каждый взял чужую шляпу?

$1, 2, \ldots, n$ $\quad n!$ — всего

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\quad i\neq a_i$ перест. без неподвижных точек

$B(i)$ — перестановка, что $i=a_i$ $\quad B(1)\cup\ldots\cup B(n)$ — все перестановки с неподвижными точками

$|B(1)|=(n-1)!$ $\quad |B(1)\cap B(2)|=(n-2)!$ $\quad |B(i_1)\cap\ldots\cap B(i_k)|=(n-k)!$

$$|B(1)\cup\ldots\cup B(n)|=\sum_{i=1}^{n}|B(i)|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|B(i)\cap B(j)|+\ldots=n(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+\ldots=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!(-1)^{k+1}$$

$$\text{вероятность}=\frac{n!+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!}{n!}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!}=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\approx\frac{1}{e}}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$