Cálculo numérico 2020.2: Resumo e Tarefa 2

João Paixão (jpaixao@dcc.ufrj.br)

1 Informações

- Bibliografia: Franco, Neide Bertoldi. Cálculo numérico. Pearson, 2006.
- Bibliografia: Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. Análise numérica. Cengage Learning, 2008.
- Monitor: João Sobral (joaosobral@dcc.ufrj.br)
- Monitoria: Marcar com o monitor.

2 Fundamentos

Ao longo deste artigo, usamos $I = [a, b]$ para denotar um intervalo fechado limitado. Seja f uma função contínua e (diferenciável) no intervalo (a, b).

Definição 2.1 (Crescente no Intervalo)**.** f é crescente no intervalo I se para todo $c, d \in I$, se $c \leq d$, então $f(c) \leq f(d)$.

Definição 2.2 (Estritamente Crescente no Intervalo)**.** f é estritamente crescente no intervalo I se para todo $c, d \in I$, se $c < d$, então $f(c) < f(d)$.

Teorema 2.1. Se f é crescente em I, então $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Prova. Cálculo I. Use a definição de derivada de cálculo I e a definição de função crescente. $\square$

Exercício 2.1. (Verdadeiro ou Falso? Ache uma prova ou dê um contra-exemplo). Se f é estritamente crescente em I, então para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$.

Axioma 2.1 (Axioma da Função Crescente)**.** Se para todo $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, então $f(x)$ é crescente em I.

Prova. Vamos assumir esse fato como axioma. $\square$

Teorema 2.2 (Teorema da Corrida)**.** Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq g'(x)$, então para todo $x \in I$, $f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)$.

Prova. (Aula 3) Para todo $x \in I$,

$$
\begin{aligned}
& f'(x) \leq g'(x) \\
\implies & \quad \{ \text{ Álgebra } \} \\
& 0 \leq g'(x) - f'(x) \\
\implies & \quad \{ \text{ Definição } h(x) := g(x) - f(x) \ \} \\
& 0 \leq h'(x) \\
\implies & \quad \{ \text{ Axioma da Função Crescente } \} \\
& h(x) \text{ é crescente} \\
\implies & \quad \{ \text{ Definição de Crescente e } a \leq x \ \} \\
& h(a) \leq h(x) \\
\implies & \quad \{ \text{ Definição de } h(x) \ \} \\
& g(a) - f(a) \leq g(x) - f(x) \\
\implies & \quad \{ \text{ Álgebra } \} \\
& f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a)
\end{aligned}
$$

□

A prova do Teorema anterior fornece um exemplo de como estruturar uma prova:

Teorema 2.3. Se para todo $x \in I$ temos essa **Hipótese**, então para todo $x \in I$ temos uma **Conclusão.**

Prova. Para todo $x \in I$:

$$
\begin{aligned}
& \text{Hipótese} \\
\implies & \quad \{ \text{ Justificativa } \} \\
& \text{Alguma coisa} \\
\implies & \quad \{ \text{ Justificativa } \} \\
& \text{Outra coisa} \\
\implies & \quad \{ \text{ Justificativa } \} \\
& \text{Conclusão}
\end{aligned}
$$

□

Exercício 2.2 (Teorema da Função Decrescente)**.** Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, então $f(x)$ é decrescente em I.

Exercício 2.3 (Teorema da Função Constante)**.** Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) = 0$, então $f(x)$ é constante em I.

Exercício 2.4 (Teorema da Função Estritamente Crescente)**.** Prove que: Se para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é estritamente crescente em I.

Teorema 2.4 (Desigualdade do Valor Médio - "Teorema de Taylor de Ordem 0")**.** Se para todo $x \in I$, $f'(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - f(a) \leq M(x-a)$.

Prova. Aula 3 $\square$

Teorema 2.5 (Desigualdade do Valor Médio)**.** Se para todo $x \in I$, $m \leq f'(x)$, então para todo $x \in I$, $m(x-a) \leq f(x) - f(a)$.

Prova. Aula 3 $\square$

Teorema 2.6 (Desigualdade do Valor Médio - Alternativa)**.** Se para todo $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$, então para todo $x \in I$,

$$m \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq M$$

Teorema 2.7 (Desigualdade do Valor Médio com módulo)**.** Se para todo $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, então para todo $x \in I$, $|f(x) - f(a)| \leq M(x-a)$.

Prova. Aula 3 $\square$

3 Taylor

Teorema 3.1 (Taylor de ordem 1)**.** Se para todo $x \in I$, $f''(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - (f(a) - f'(a)(x-a)) \leq M\frac{(x-a)^2}{2}$.

Prova. Aula 4 $\square$

Teorema 3.2 (Taylor de ordem 2)**.** Se para todo $x \in I$, $f^{(3)}(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}) \leq M\frac{(x-a)^3}{6}$.

Prova. Aula 4 $\square$

Teorema 3.3 (Taylor de ordem n)**.** Se para todo $x \in I$, $f^{(n+1)}(x) \leq M$, então para todo $x \in I$, $f(x) - T_n(x) \leq M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ aonde

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Prova. Aula 4. $\square$

Exemplo 3.1. (Aula 4) Aproxime $sen(0.01)$ com erro máximo menor que 10^{-6}.

Prova. Aula 4. $\square$

Exercício 3.1. Por que aproximação $sen(x) \approx x$ é muito boa para valores de x próximos de zero? Explique com um texto usando o Teorema de Taylor.

Exemplo 3.2. (Aula 4) Problema da profundidade do Rio

Exercício 3.2. Seja $f(x) = \ln(x)$. Aproxime $f(1.5)$ usando o polinômio de Taylor de terceira ordem com $a = 1$. Quantos dígitos corretos possui a aproximação? Quantos termos deve ter o polinômio para o erro de truncamento ser menor que 10^{-8}?

Exercício 3.3. Implemente em Julia o polinomial de Taylor para calcular $\ln(x)$ usando como exemplo esse link começando em 1:07:44. Na sua implementação, o usuário deve poder colocar um erro máximo como entrada (dica: exercício anterior).

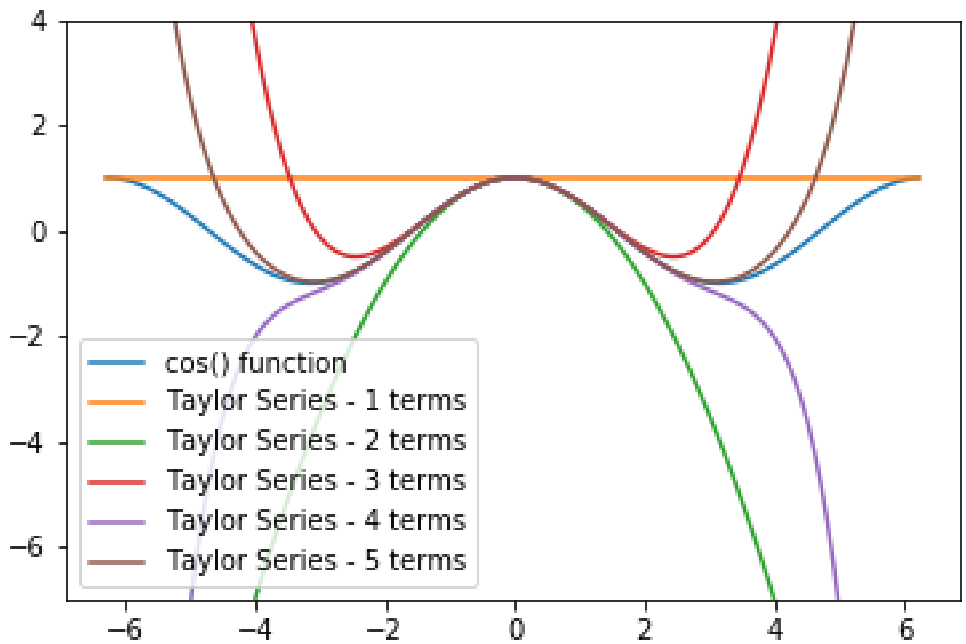
Exercício 3.4. Como o Teorema da Taylor em $\sin(x)$, pode te ajudar a calcular o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}?$$

3.1 Visão geométrica de Taylor

Teorema 3.4 (Polinômio de Taylor "parece" a função $f(x)$ no ponto $x = 0$)**.** Para todo $0 \leq k \leq n$, temos que $T_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

Prova. Aula 5 □



Teorema 3.5 (Polinômio de Taylor "parece" a função $f(x)$ no ponto $x = a$)**.** Para todo $0 \leq k \leq n$, temos que $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

Prova. Teorema anterior com $x = a$. $\square$

4 Aproximando derivadas - Diferenças Finitas

Teorema 4.1 ("Forward differences")**.** Se para todo $x \in I$, $f''(x_1) \leq M$, então para todo $x \in I$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_1) \leq M \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{2}$$

Prova. Aula 5 $\square$

Teorema 4.2 ("Forward differences" - alternativa)**.** Se para todo $x \in I$, $|f''(x)| \leq M$, então para todo $x \in I$,

$$|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)| \leq M \cdot \frac{h}{2}$$

Prova. Teorema anterior com $x = x_1$ e $x_2 = x_1 + h$ com módulo. $\square$

Desafio 4.1 (São pontos extras, não é necessário fazer)**.** Ache um teorema parecido com o anterior para limitar o erro da diferença centrada (que fizemos na aula 5). Dica:

Se para todo $x \in I$, $|f^{(3)}(x)| \leq M$, então para todo $x \in I$,

$$|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'(x)| \leq ??????$$

5 Resolvendo Equações

Teorema 5.1 (Teorema do Valor Intermediário)**.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. If $f(a) < d < f(b)$, então existe um c, $a < c < b$, tal que $f(c) = d$.

Prova. Cálculo I. $\square$

5.1 Método da Bisseção - "Busca Binária"

Pseudo-código: Aula 5

Exercício 5.1. Implemente em Julia o Método da Bisseção para calcular a solução da equação $x^2 - 10 = 0$ no intervalo [0,20]. Se precisar de ajuda use esse link começando em 11:00.

Exercício 5.2. Dado o intervalo $[a, b]$ e o número n de passos da bisseção, qual é o tamanho do intervalo $[a_n, b_n]$?

Desafio 5.1. Usando o exercício anterior, determine quantos passos você precisa executar no método da bisseção com intervalo $[a, b]$ se o usuário pedir um erro máximo de 10^{-8}. Deixe claro com você está definindo o erro.