Lista 1

Prof. João Paixão - 13/8/2021

Lista 1 - Métodos numéricos II - Prof. João Paixão

1. Temos que $A = BC$, aonde A é uma matrix $m \times n$, B é uma matrix $m \times p$ e C é uma matrix $p \times n$ tal que p é o menor valor possível (p é o posto). Em cada item, ache "no olho" (sem usar um algorimto) matrizes A,B e C que não foram dadas.

   (a) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 20 & -2 & 0 \\ 3 & 15 & 30 & -30 & 0 \\ 5 & 25 & 50 & -5 & 0 \\ 7 & 35 & 70 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5000 & 31 \\ 4 & 5 & 9 & 9000 & 54 \\ 3 & 5 & 8 & 8000 & 53 \end{bmatrix}$

2. **Filmes** Seja U a matriz com a preferência de 4 usuários por 5 filmes levando em consideração somente o nível de comédia:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 20 & 200 & -10 \\ -3 & -15 & -30 & -300 & 15 \\ 5 & 25 & 50 & 500 & -25 \\ 7 & 35 & 70 & 700 & -35 \end{bmatrix}$$

   Determine uma possível solução para quando cada usuário gosta (ou não gosta) de comédia e quanto cada filme é (ou não é) de comédia

3. Dadas duas tabelas (matrizes):

User-Feature Matrix	Romance	Action
User A	0.9	0.1
User B	0.8	0.2
User C	0.3	0.7
User D	0.6	0.4
User E	0	1

Movie-Feature Matrix	Romance	Action
Titanic	0.9	0.1
Rocky	0.1	0.9
The Hobbit	0.5	0.5
Fight Club	0	1
Jurassic Park	0.2	0.8

   (a) Calcule a tabela (matriz) de usuários por filmes.

(b) Usando a matriz do item (a), determine quais dois usuários são mais parecidos usando a distância Euclidiana.

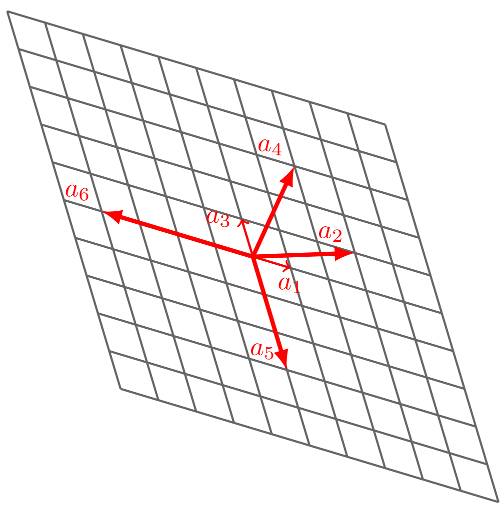
4. Seja V o espaço de todas as combinações lineares dos vetores

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\12\\13\\14\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}101\\102\\103\\104\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\21\\31\\41\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}13\\10\\7\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\2\\3\end{bmatrix},$$

Determine a dimensão de V e uma base para V. Depois determine uma outra base para V.

5. Prove que $posto(A^t) = posto(A)$ usando a definição de posto que vimos na primeira questão.

6. Use a figura abaixo e os vetores a_2 e a_4 como base (colunas da matriz B) para escrever a matriz C, os vetores a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 são as colunas da matriz A, na notação $A = BC$.



7. **Sintomas** Cada um dos P pacientes pode manifestar quaisquer dos n sintomas. Isso pode ser escrito como uma matriz $S_{P\times n}$ tal que:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, \text{o paciente } i \text{ manifestou o sintoma } j \\ 0, \text{o paciente } i \text{ não manifestou o sintoma } j \end{cases}$$

(a) O que significa se o produto interno entre dois pacientes é igual à 0?

(b) O que significa se o produto interno entre dois sintomas é igual à 0?

(c) O que significa se a distância entre dois pacientes é igual à 0?

(d) O que significa se a distância entre dois sintomas é igual à 0?

8. **Sorriso** Considere a seguinte imagem:

(a) Represente esta imagem em uma matriz $S_{5\times 5}$. Suponha que as sombras que você vê são apenas 0, 0.5 e 1 como fizemos na aula.

(b) Seja A uma matriz 3×5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine a imagem da matriz B tal que $S = BA$.

9. **Bandeira** Considere a bandeira da Grécia como uma imagem colorida. Crie a sua representação em uma matriz, sabendo que a imagem possui 15 por 9 pixels.

10. SVD - Geométrico

(a) Determine o SVD de uma projeção ortogonal $P_{2\times 2}$ sobre a reta $y = x$ e faça o desenho completo com as três transformações.

(b) (Desafio) Determine o SVD de uma projeção ortogonal $P_{3\times 3}$ sobre o plano gerado pelos vetores $[1, 1, 1]^t$ e $[1, 2, 3]^t$ (pode usar o QR do Julia para achar uma base orthonormal para o plano).

11. Como vimos em aula, podemos calcular a pseudoinversa de A, calculando o seu SVD. Qual é a pseudo-inversa de:

(a) um escalar?

(b) um vetor?

(c) uma matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. Use a sua resposta da questão anterior para achar a menor solução em norma euclidiana da solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.Qual é a interpretação geométrica em $\mathbb{R}^2$ do que está acontecendo?

13. O algoritmo Gram-Schmidt foi aplicado com sucesso nos vetores a_1, a_2, a_3 (em ordem) e produziu os vetores q_1, q_2, q_3 (em ordem).

    (a) Determine a distância do vetor a_3 para o plano gerado por a_1 e a_2.

    (b) Determine o tamanho de a_1.

    (c) Determine o tamanho da projeção de a_3 no plano gerado por a_1 e a_2.

    (d) Determine o determinante da matriz formado por a_1, a_2, a_3 na colunas.

    (e) Determine o tamanho da projeção de a_2 na reta gerada por a_1.

    (f) Determine o tamanho de a_3.

    (g) Sabendo o q_1, q_2 e q_3, qual seria a inversa da matriz formada por q_1, q_2 e q_3 nas colunas.

    (h) Faça um desenho completo com todos os vetores em $\mathbb{R}^3$

    Usando a informação que

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$