

Лабораторная работа 1

Построение и исследование аналитических и имитационных моделей СМО типа MG1

Теоретические сведения.

1. Основные понятия теории массового обслуживания (ТМО, теории очередей): транзакт, поток транзактов, обслуживание, обслуживающий аппарат, очередь, дисциплина обслуживания (выборки из очереди), система массового обслуживания (СМО), время ожидания начала обслуживания, время обслуживания, время пребывания в СМО, плотность распределения вероятностей (ПРВ) и функция распределения вероятностей (ФРВ) времен (ожидания, обслуживания, пребывания), состояние СМО, распределение вероятностей (РВ) состояний СМО, основные характеристики СМО (u, w, v).
2. При $G=M$, имеем т.н. «простейшую» СМО с пуассоновским входным потоком с параметром λ и временем обслуживания с экспоненциальным распределением $F(t)=1-\exp(-\mu t)$. Здесь λ – интенсивность входящего потока (среднее число транзактов, приходящих в СМО в единицу времени), μ – интенсивность обслуживания.
3. Более подробно см. [1, с.1-13], а также Приложение 1.
4. Основные формулы для расчета характеристик СМО типа MM1:
 - 4.1. $u = \lambda/\mu = b/a$ – загрузка (утилизация, вероятность занятости) обслуживающего аппарата (прибора),
 - 4.2. $w = ub/(1-u)$ – среднее время ожидания транзактом начала обслуживания,
 - 4.3. $v = w+b = b/(1-u)$ – среднее время пребывания транзакта в СМО,здесь:
 - 4.4. a – среднее время между транзактами в потоке, $a=1/\lambda=b/u$;
 - 4.5. b – среднее время обслуживания, $b=1/\mu$.
5. Основные формулы для расчета характеристик СМО типа MR1 и MD1 см. в [1, формулы 1.5 - 1.11].
6. Основные сведения о системе моделирования GPSS см. [1, глава 4], а также более подробно в [2, 3].
7. В Приложении 1 приведены формулы для используемых в данной работе распределений.

Задание.

1. Исследовать характеристики СМО типа MG1 для трех типов распределения времени обслуживания:
MM1, $G=M$ (время обслуживания имеет экспоненциальное распределение, $F(t)=1-\exp(-\mu t)$),
MR1, $G=R$ (равномерное распределение времени обслуживания),
MD1, $G=D$ (время обслуживания – постоянная величина)
методами аналитического(точного) и имитационного(стохастического=приближенного) моделирования.
2. Построить зависимости среднего времени ожидания $w(u)$ и среднего времени пребывания $v(u)$ от загрузки обслуживающего аппарата для аналитической и имитационной модели.
3. Сравнить результаты аналитического и имитационного моделирования, объяснить причину расхождений и зависимость ошибки (отклонение экспериментального значения от теоретического) от загрузки и типа распределения времени обслуживания.
4. Перед выполнением работы изучить материалы, размещенные в [1] на стр 1-13.

Порядок выполнения работы.

1. Получить у преподавателя файл с шаблоном модели MG1 и значения рабочих точек **u1, u2, u3, u4, u5**.
2. Дополнить модель комментариями и блоками, необходимыми для сбора статистики (ПРВ и ФРВ) времен ожидания, обслуживания и пребывания.
3. Отладить GPSS-модель.
4. Создать Таблицу 1 в виде **xlsx**-файла. В строки, отмеченные как «Теоретическое значение (тз)», заносятся результаты точного аналитического моделирования, для чего используются соответствующие формулы. Значение среднего времени обслуживания фиксировано **b=70**, изменяется только **a** – среднее значение интервалов времени между смежными транзактами во входящем потоке. .
5. Провести расчеты значений **V** и **W** с помощью **аналитической(точной) модели (т.н. теоретические значения(тз))** для заданных значений загрузки **u1, u2, u3, u4, u5**. Для этого необходимо вставить расчетные формулы в соответствующие ячейки Таблицы 1, находящиеся на пересечении столбцов «**W**» и «**V**» и строк «**Теоретическое значение (тз)**». Для MM1 это формулы 4.2, 4.3, и формула 4.4-для определения среднего времени между соседними транзактами во входящем потоке. Для случая MR1 и MD1 следует использовать формулу Полачека-Хинчина, см. ссылки в пп 9 и 10 (после Таблицы 1), вычислив для этих распределений времени обслуживания значения коэффициента вариации **C**.
6. Провести эксперименты на GPSS-моделях **MM1, MR1 и MD1** в заданных точках **u1, u2, u3, u4, u5** и ввести их результаты в Таблицу 1 (строки «**Экспериментальное значение**»).
7. Сравнить результаты моделирования с теоретическими расчетами.
 8. Результаты моделирования, для каждого типа распределения времени обслуживания MM1, MR1 и MD1, оформить в виде **xlsx**-таблицы:
 - 9.

Таблица 1

N	СМО типа MM1	b	a	u	w	v
1	Теоретическое значение (тз)	70	Ф.4.4.	u1	Ф. 4.2	Ф. 4.3
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					
2	Теоретическое значение (тз)	70	Ф.4.4.	u2	Ф. 4.2	Ф. 4.3
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					
3	Теоретическое значение (тз)	70	Ф.4.4.	u3	Ф. 4.2	Ф. 4.3
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					
4	Теоретическое значение (тз)	70	Ф.4.4.	u4	Ф. 4.2	Ф. 4.3
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					
5	Теоретическое значение (тз)	70	Ф.4.4.	u5	Ф. 4.2	Ф. 4.3
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					

N	СМО типа MR1	b	a	u	w	v
1	Теоретическое значение (тз)	70		u1		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
2	Теоретическое значение (тз)	70		u2		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
3	Теоретическое значение (тз)	70		u3		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
4	Теоретическое значение (тз)	70		u4		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
5	Теоретическое значение (тз)	70		u5		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					
N	СМО типа MD1	b	a	u	w	v
1	Теоретическое значение (тз)	70		u1		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
2	Теоретическое значение (тз)	70		u2		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
3	Теоретическое значение (тз)	70		u3		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
4	Теоретическое значение (тз)	70		u4		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)		Ф.4.4.			
5	Теоретическое значение (тз)	70		u5		
	Экспериментальное значение (эз)					
	Погрешность (100(тз-эз)/тз)					

9. СМО типа MR1

Формулы для **v** и **w** (см. в [1, формулы 1.7, 1.8 на стр.8]) вставить в Таблицу 1 в столбцы **v** и **w**, строк «Теоретическое значение (тз)» для каждого значения загрузки **u**, при этом **C(коэффициент вариации)** следует вычислить для случая равномерного распределения времени обслуживания в интервале [0,140]. .

10. СМО типа MD1

Формулы для **v** и **w** (см. в [1, формулы 1.7, 1.8 на стр.8]) необходимо вставить в Таблицу 1 в столбцы **v** и **w**, строк «Теоретическое значение (тз)» для каждого значения загрузки **u**, **C=0..** В этих формулах **T=v**(среднее значение времени пребывания), **X̄=b**(среднее значение времени ожидания), **p=u**(загрузка).

11. Построить графики «теоретических» зависимостей **W=w(u)**, **V=v(u)** и **dV(u)/du** от **u** (по формулам), и «экспериментальных» зависимостей **W=w(u)** и **V=v(u)** по данным, полученным с помощью имитационной модели для заданных 5 рабочих точек **u1,u2,u3,u4,u5**.

12. Объяснить причину расхождений.

13. Настроить в GPSS-модели таблицы для получения гистограмм ПРВ времен **w**, **b**. **v=w+b**.

14. Исследовать зависимость характеристик \mathbf{W} и \mathbf{V} от \mathbf{u} для СМО типа MM1, MR1 и MD1.
15. Исследовать характер ПРВ для СМО типа MD1, MR1 и сравнить их с аналогичными ПРВ для СМО типа MM1.
16. Оформить отчет.

Список литературы:

1. Томашевский В., Жданова Е. Имитационное моделирование в среде GPSS. – М.: Бестселлер, 2003. – 416 с. ISBN 5-98158-004-6 См. файл: Tomashevsky_Simul_GPSS_2003_New.pdf в папке Simulation_on_GPSS_Tomashevsky_Zhdanova
2. Краткое руководство по моделированию на языке GPSS (методическое пособие) См. файл: TOI-IM for IBM3 and IBM6 2 kurs/Metodichka GPSS 52pages.docx.
3. Руководство пользователя по GPSS world. – Казань: Изд-во «Мастер-Лайн», 2002.-384 с. См. файл: TOI-IM for IBM3 and IBM6 2 kurs/ User Guide GPSS WorldStudent.djvu

Приложение 1.

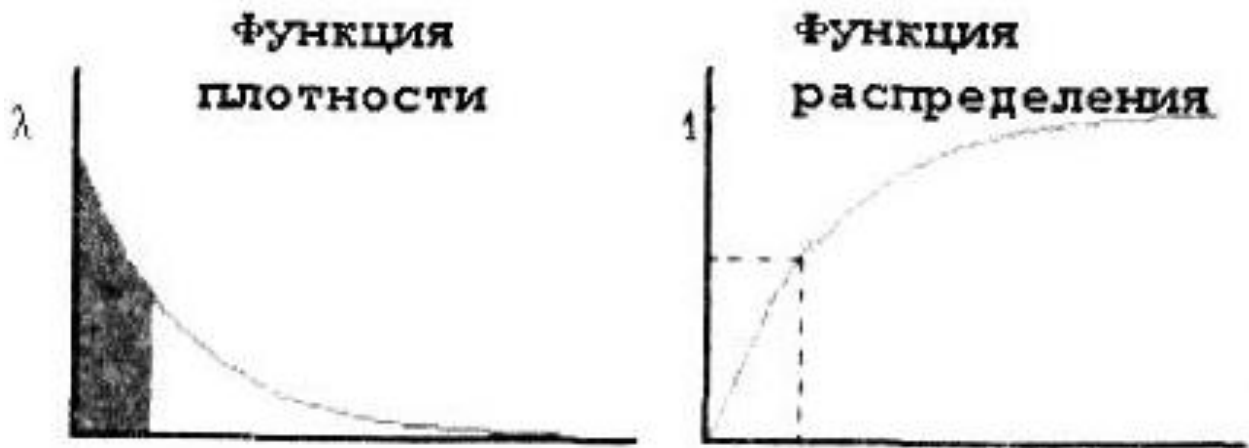
Экспоненциальное распределение

Плотность распределения вероятностей (ПРВ)

$$f(t)=\lambda(\exp(-\lambda t)), \lambda>0, t\geq 0.$$

Функция распределения вероятностей (ФРВ)

$$F(x)=1-\exp(-\lambda t), \lambda>0, t\geq 0$$



Среднее значение: $M[t] = 1/\lambda$.

Дисперсия: $D[t] = 1/\lambda^2$.

Среднеквадратичное отклонение $= 1/\lambda$.

Коэффициент вариации $C[t] = 1$.

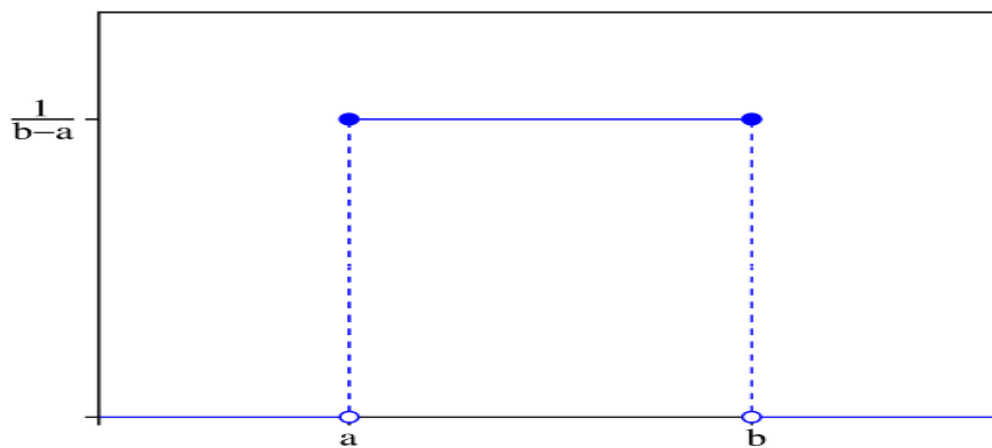
Непрерывное равномерное распределение

Одномерное непрерывное равномерное распределение - распределение случайной вещественной величины, принимающей значения, принадлежащие некоторому промежутку конечной длины, характеризующееся тем, что **плотность распределения вероятностей (ПРВ) на этом промежутке постоянна**.

Плотность распределения вероятностей (ПРВ)

Говорят, что случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке (a,b) , где $a, b \in \mathbb{R}$, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

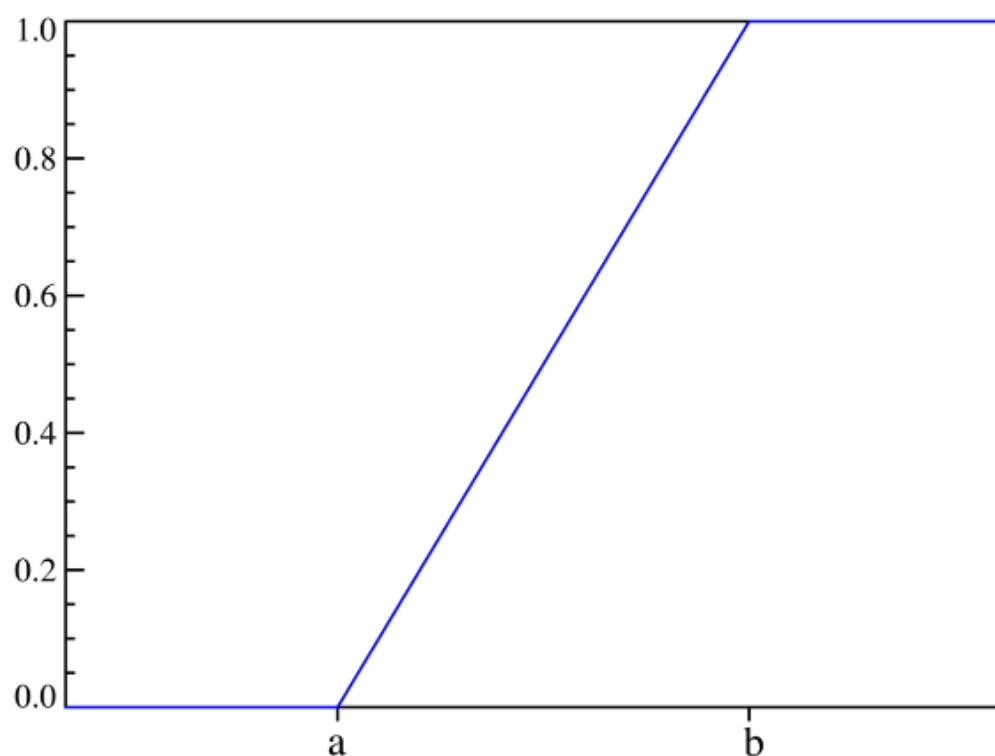


Общепринятые обозначения: $U(a,b)$, $Rav(a,b)$ или $R(a,b)$.

Функция распределения вероятностей (ФРВ)

Интегрируя определённую выше плотность, получаем:

$$F_X(x) \equiv \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}.$$



Функция распределения

Обозначение	$\mathcal{U}(a, b), \text{Rav}(a, b)$
Параметры	$a, b \in (-\infty, \infty), a$ — коэффициент сдвига, $b - a$ — коэффициент масштаба
Носитель	$a \leq x \leq b$
Плотность вероятности	$\frac{1}{b - a} \quad a \leq x \leq b$
Функция распределения	$0 \quad x < a, \quad x > b$ $0 \quad x < a$ $\frac{x - a}{b - a} \quad a \leq x < b$

Математическое ожидание	$\frac{a + b}{2}$
Медиана	$\frac{a + b}{2}$
Мода	любое число из отрезка $[a, b]$
Дисперсия	$\frac{(b - a)^2}{12}$
Коэффициент асимметрии	0
Коэффициент эксцесса	$-\frac{6}{5}$
Дифференциальная энтропия	$\ln(b - a)$
Производящая функция моментов	$\frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b - a)}$
Характеристическая функция	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b - a)}$

Так как плотность равномерного распределения разрывна в граничных точках отрезка $[a, b]$, то функция распределения в этих точках не является дифференцируемой. В остальных точках справедливо стандартное равенство:

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

Производящая функция моментов

Простым интегрированием получаем производящую функцию моментов:

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)},$$

откуда находим все интересующие моменты непрерывного равномерного распределения:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

$$D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вообще,

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}.$$

Среднее значение: $M[t] = (a+b)/2$.

Дисперсия: $D[t] = (b-a)^2 / 12$.

Квадрат коэффициент вариации $C^2[t] = D[t] / (M^2[t])$.

Распределение постоянной величины (константы)

Распределение $t=T=Constanta$ задается дельта-функцией.

Плотность распределения вероятностей (ПРВ)

$f(t) = \delta(t) = 0$, если $t < T$ и $t > T$

$f(t) = \delta(t) = \infty$, если $t = T$.

Функция распределения вероятностей (ФРВ)

$F(t) = 0$, если $t < T$,

$F(t) = 1$, если $t \geq T$,

Среднее значение: $M[t] = T$.

Дисперсия: $D[t] = 0$.

Квадрат коэффициент вариации $C^2[t] = 0$.

Приложение 2.

Шаблон модели

```

*      модель простейшей СМО MM1
TIME_W  TABLE      M1 0,5,350
TIME_V  TABLE      M1 0,5,350
*
      GENERATE (EXPONENTIAL(1,0,100))      ; a
      QUEUE    WAITSRV
      QUEUE    SYS
      SEIZE     SERVER
      DEPART    WAITSRV
      TABULATE TIME_W
*
      ADVANCE  (EXPONENTIAL(1,0,70))      ; B
*      ADVANCE  70,70                      ; B
*      ADVANCE  70                        ; B
      RELEASE  SERVER
      DEPART    SYS
      TABULATE TIME_V
      TERMINATE
*
      GENERATE 10000000
      TERMINATE                      1
*
      START      1

```