

METODY NUMERYCZNE – LABORATORIUM

Zadanie 2 – implementacja wybranej metody rozwiązywania układu równań liniowych

Opis rozwiązania

Naszym zadaniem była implementacja metody eliminacji Jordana (w literaturze nazywana również metodą Gaussa-Jordana) rozwiązywania układu N równań liniowych z N niewiadomymi. Zdecydowaliśmy się nie ograniczać z góry maksymalnej ilości równań, a ich wprowadzenie następuje poprzez załadowanie pliku ze współczynnikami w formacie CSV.

Algorytm realizowany przez nasz program wygląda następująco:

- 1) W pierwszym kroku następuje sprawdzenie warunków wyjątkowych. Jeśli wyznacznik macierzy współczynników A jest równy zero, oznacza to, że być może układ równań jest nierozwiązywalny lub ma nieskończenie wiele rozwiązań. W takim przypadku następuje sprawdzenie czy iloczyn macierzy A i wektora wyników x jest równy wektorowi b . Jeżeli nie to zostaje zwrócona informacja o nierozwiązywalności układu.
- 2) Następnie macierz A i wektor b są łączone w jedną rozszerzoną macierz.
- 3) Następuje właściwa realizacja metody Gaussa-Jordana – przekształcenie macierzy współczynników na macierz jednostkową:
 - dla każdej kolumny od 0 do $n-1$ następuje iteracja po każdym wierszu i sprawdzenie czy jego wartość bezwzględna jest większa od dotychczasowego potencjalnego elementu głównego (na początku algorytmu potencjalny element główny to po prostu pierwszy element),
 - następuje zamiana miejscami wiersza z nowym potencjalnym elementem głównym i dotychczasowym elementem głównym
 - następnie następuje sprawdzenie czy nasz potencjalny element główny (będący już na przekątnej macierzy) jest równy 0. Jeżeli tak to nie można kontynuować eliminacji, ponieważ dzielenie przez zero jest matematycznym błędem.
 - jeżeli element główny jest niezerowy, to przechodzimy do kolejnego kroku, czyli od (aktualnego wiersza + 1) do $(n-1)$ redukowane są kolejne wiersze poprzez odejmowanie od nich odpowiednio przeskalowanych wierszy wcześniejszych, aby uzyskać wartości zero pod przekątną.
- 4) Gdy w wyniku eliminacji mamy macierz trójkątną zachodzi substytucja wsteczna polegająca na obliczeniu macierzy rozwiązań x :
 - iteracja odbywa się od ostatniego do pierwszego wiersza włącznie (równania rozwiązujemy od dołu do góry).
 - wartość x_i jest obliczana jako iloraz odpowiedniego elementu przekształconej macierzy przez główny element diagonalny.
- 5) Po zakończeniu wszystkich iteracji program zwraca wektor x zawierający rozwiązania układu równań.

Wyniki

Przykład a):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
3	3	1	=	12		x	1	1
2	5	7	=	33		y	2	2
1	2	1	=	8		z	3	3

Przykład b):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
3	3	1	=	1		x	Układ nieoznaczony	Układ nieoznaczony
2	5	7	=	20		y		
-4	-10	-14	=	-40		z		

Przykład c):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
3	3	1	=	1		x	Układ sprzeczny	Układ sprzeczny
2	5	7	=	20		y		
-4	-10	-14	=	-40		z		

Przykład d):

x	y	z	w		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
0,5	-0,0625	0,1875	0,0625	=	1,5		x	2	2
-0,0625	0,5	0	0	=	-1,625		y	-3	-3
0,1875	0	0,375	0,125	=	1		z	1,5	1,5
0,0625	0	0,125	0,25	=	0,3475		w	0,5	0,5

Przykład e):

x	y	z	w		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
3	2	1	-1	=	0		x	Układ sprzeczny	Układ sprzeczny
5	-1	1	2	=	-4		y		
1	-1	1	2	=	4		z		
7	8	1	-7	=	6		w		

Przykład f):

x	y	z	w		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
3	-1	2	-1	=	-13		x	1	1
3	-1	1	1	=	1		y	3	3
1	2	-1	2	=	21		z	-4	-4
-1	1	-2	-3	=	-5		w	5	5

Przykład g):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki analityczne
0	0	1	=	3		x	7	7
1	0	0	=	7		y	5	5
0	1	0	=	5		z	3	3

Przykład h):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
10	-5	1	=	3		x	1	1
4	-7	2	=	-4		y	2	2
5	1	4	=	19		z	3	3

Przykład i):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
6	-4	2	=	4		x	Układ nieoznaczony	Układ nieoznaczony
-5	5	2	=	11		y		
0,9	0,9	3,6	=	13,5		z		

Przykład j):

x	y	z		b		Niewiadome	Wyniki programu	Wyniki teoretyczne
1	0,2	0,3	=	1,5		x	1	1
0,1	1	-0,3	=	0,8		y	1	1
-0,1	-0,2	1	=	0,7		z	1	1

Wnioski

- Program spełnia warunki założone w zadaniu:
 - jest uniwersalny, tzn. umożliwia rozwiązywanie dowolnej ilości równań w danym układzie,
 - użytkownika ma możliwość wyboru ilości rozwiązywanych równań poprzez dodanie do programu własnego pliku CSV,
 - program automatycznie wybiera element podstawowy.
- Rozwiązania oznaczonych układów równań przedstawiane przez program pokrywają się z teoretycznymi wartościami dla danego układu.
- W przypadku nierozwiązywalnych układów równań (sprzecznych bądź nieznaczonych) program automatycznie i prawidłowo wyświetla stosowną informację o niemożliwości rozwiązania danego układu, po czym przestaje szukać rozwiązań kończąc swoje działanie.