Politecnico di Milano

Appunti

Game Theory

Libè Jacopo

November 7, 2019

Contents

1 Introduction **3**
1.1 Players . . . 4
1.2 Preferences . . . 4
1.3 Beauty Contest con numeri . . . 4
1.4 Bi-Matrix Games . . . 4

2 Games in Extensive Form **5**
2.1 Perfect Information Games . . . 5
2.2 Parties Game . . . 5
2.3 Chance Game (Lancio della Moneta) . . . 5
2.4 Formal Definition . . . 6
2.5 Solving the Game . . . 6
2.6 Esempio Notevole (Centipe Game) . . . 7
2.7 Exercises 20 September . . . 7
2.7.1 Exam Bonus . . . 7
2.7.2 Cops and Robbers . . . 8
2.7.3 Rock, Paper, Scissors . . . 8
2.7.4 Take Away Game . . . 8
2.7.5 Taxi Ride . . . 8
2.7.6 Stock Holders . . . 9
2.7.7 Pollution Game . . . 9
2.7.8 Sharing Bandwidth . . . 9
2.7.9 Missing Lessons... . . . 9
2.7.10 Non Cooperative Games . . . 9
2.7.11 Esempio Caso n-dimensionale mixed-strategy . . . 11

3 Nash Equilibrium **12**
3.0.1 Definition . . . 12
3.0.2 Execise: Extensive Form to Bi-Matrix . . . 13
3.0.3 Multi-Function and AvgMax function definition . . . 13
3.0.4 Best-Reply Multifunction . . . 13
3.0.5 Nash Theorem . . . 14
3.0.6 Exercise: Finding Nash equilibria (Bi-Matrix) . . . 14
3.1 N-Player Games . . . 15
3.1.1 . . . 16
3.2 Congestion Games . . . 16
3.2.1 Braess Paradox . . . 16
3.2.2 El Ferol bar (3 people) . . . 17

3.2.3 Duopoly models . . . 17

4 Zero-sum Games 18

5 Repeated games/Correlated equilibria 19
5.1 Repeated Games . . . 19
5.2 Corellated Equilibria . . . 20
5.2.1 Car Crash . . . 21
5.2.2 Correlated Equilibria Existence Theorem . . . 21

6 Cooperative Games 22
6.1 Formal Definition . . . 22
6.2 Transferable Utility Game . . . 22
6.2.1 Sellers and Buyer . . . 23
6.2.2 Glove game . . . 23
6.2.3 Weighted Majority Game . . . 23
6.2.4 Peer Game . . . 23
6.3 The set of TU games . . . 24
6.3.1 Simple Games . . . 24
6.4 Solutions to cooperative games . . . 24
6.4.1 Imputation . . . 24
6.4.2 The Core . . . 25

7 Shapley Value and Power Indeces 26
7.1 Shapley Theorem . . . 26
7.1.1 Proof . . . 26
7.2 Simple Games . . . 27
7.3 Power Indeces . . . 28

Chapter 1

Introduction

Game theroy handles both deterministic and probabilistic games. I giochi non cooperative permettono di comunicare ma nessuno accordo tra player è garantito.

1.1 Players

I giocatori sono Selfish non nel senso letterale, ma nelle proprie intenzioni.

In termini matematici (accennando ai prossimi capitoli), definita una utility function $u(x)$ che indica la preferenza di Player 1. Le scelte di Player 1 sono sempre volte a massimizzare $u(x)$.

1.2 Preferences

X è il set dei risultati del gioco, dato un risultato x devo poterlo confrontare con altri risultati appartenenti a X. Devo quindi avere un operatore di preferenza "$\succeq$" tra elementi del set.

Per definire le preferenze su elementi del set X si può definire una Utility Function

$u : X \to \Re \;\; tc. \;\; u(x) \geq u(y) \implies x \succeq y$

Abbiamo bisogno di questa funzione soprattutto se alcune mosse del gioco dipendono dalla probabilità. In ogni caso è comunque più semplice lavorare con delle utility function perchè ovviamente lavoriamo in $\Re$

1.3 Beauty Contest con numeri

Se scelgo un numero devo sceglierlo sotto la media, quindi < 50. Ma se tutti scelgono sotto il 50 allora la media sarà 25, continuando il ragionamento l'unico numero possibile da scegliere razionalmente è il più piccolo dei numeri.

1.4 Bi-Matrix Games

Alcuni giochi possono essere rapresentati sotto forma di bimatrice, ovvero ogni cella è un vettore delle utility functions dell'i-esimo giocatore. Ad ogni player è permessa la scelta si una riga/colonna su un asse. Ogni player deve scegliere la sua scelta migliore per cui la utility è migliore.

Un gioco viene quindi rappresentato così, con x_{ij} la cella causata da:

- Player 1 sceglie i (strategie su Righe)
- Player 2 sceglie j (strategie su Colonne)

e $u_n(x_{ij})$ la utility function del Player n

$$\begin{bmatrix} (u_1(x_{11}), u_2(x_{11})) & (u_1(x_{12}), u_2(x_{12})) \\ (u_1(x_{21}), u_2(x_{21})) & (u_1(x_{22}), u_2(x_{22})) \end{bmatrix}$$

Chapter 2

Games in Extensive Form

2.1 Perfect Information Games

Un gioco è detto con **perfect information** quando ogni player conosce la storia degli eventi accaduti e sa in che stato si trova il gioco.

2.2 Parties Game

Questo gioco ha 4 possibili risultati (ordinati per utility):

4 voto no, ottengo aumento

3 voto si, ottengo aumento

2 voto no, non ottengo aumento

1 voto si, non ottengo aumento

Possiamo rappresentare tutte le scelte del gioco sapendo che ogni politico sa cosa hanno fatto gli altri. Creo così un albero con radice il primo politico e rami le scelte possibili (si, no). Ogni child rappresenta il politico (n+1)-esimo sapendo che quelli prima di lui hanno effettuato un certo numero di scelte (percorso effettuato). Le foglie dell'albero sono i vettori delle utility function per ogni politico in base al percorso scelto.

Ogni livello è un giocatore, più un giocatore si trova lontano dall'origine e più ha strategie disponibili. Disegnare un albero del genere però diventa molto velocemente difficile.

2.3 Chance Game (Lancio della Moneta)

Ho due giocatori che possono decidere se giocare o no insieme, se uno dei due decide di non giocare il gioco finisce. Se entrambi decidono di giocare lancio una moneta per decidere chi ha vinto.

3 possibili risultati (espressi come vettore utility):

(0,0) I player non decidono di giocare

(1,-1) Player 1 Vince, 2 Perde

(-1,1) Player 2 Vince, 1 Perde

I 2 player nell'albero possono scegliere (in ordine) se giocare o se mollare. Nell'albero devo introdurre un player fasullo, il "caso" le cui scelte hanno associato una probabilità. In questo caso 50:50.

Dal punto di vista matematico, il layer "R" può essere rimosso e sostituito con la risoluzione 0. Non importa se gioco o meno, il risultato è lasciato al caso non ho modo di dire quale risultato è assicurato.

Da questo esempio posso notare anche che una utility function potrà anche tenere conto del rischio associato ad una scelta e non solo del risultato possibile. (Ad esempio potrebbe interessarmi di più vincere 1M€ con 1 lancio invece che 2M€ con 2 lanci).

2.4 Formal Definition

La forma estesa di un gioco è un albero. (Le slide per rispasso definiscono le più generiche definizioni di grafo, grafo direzionato e grafo orientato)

Un albero è un grafo orientato dove esiste un nodo x_0 da cui esiste uno e un solo percorso tra x_0 e x_i con $x_0, x_i \in V$

Per la rappresentazione di un gioco dobbiamo però introdurre alcune condizioni addizionali. Slide 8-9 del set 2 per queste assunzioni.

Per "partition" P_i si intende un gruppo di vertici. In questo caso non hanno intersezione ($\forall i, j | i \neq j, P_i \cap P_j = \emptyset$), e una partizione P_i rappresenta una sezione orizzontale di vertici appartenenti al player i-esimo.

L'ultima partizione P_{n+1} è la partizione dei nodi affidati al caso, può non esistere.

NB: Quando $P_{n+1} \neq \emptyset$ allora ogni nodo ha bisogno di una utility function. Se invece è vero non è necessaria.

2.5 Solving the Game

Se utilizziamo le assunzioni sulla razionalità che abbiamo introdotto allora un gioco espresso in forma estesa avrà un solo risultato razionale. (Se non c'è casualità)

Utilizziamo la **backward-induction**, partendo dai nodi foglia.

Considerando il layer $i + 1$, so che sto considerando le scelte del Player i-esimo, quindi per ogni foglia scelgo la scelta che produce l'utility migliore per il player i per ogni set di scelte possibili.

Procedo al layer superiore fissando la scelta effettuata dal player i-esimo.

Continuo fino ad arrivare al Player 1.

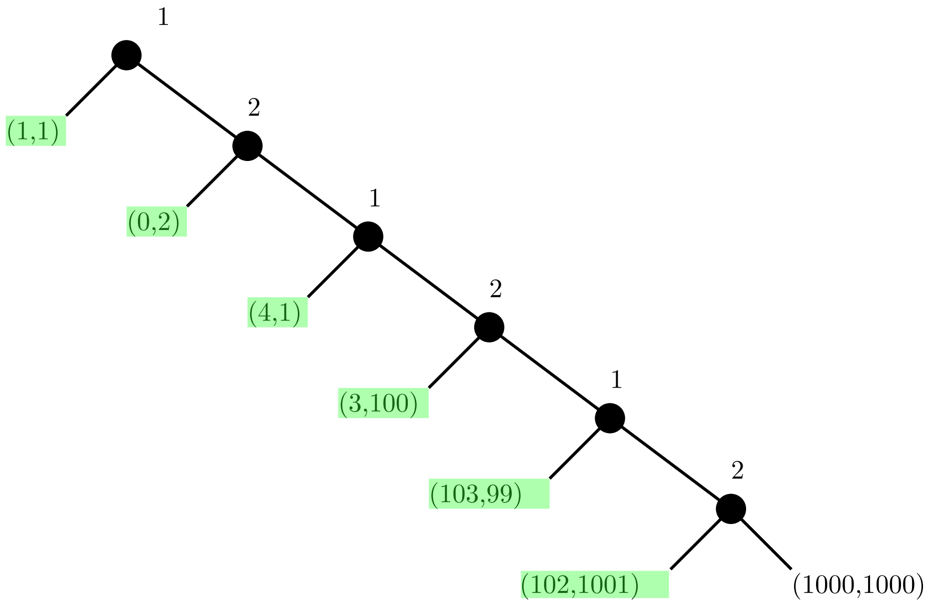
Scelto il percorso iniziato da Player 1, seguo le scelte migliori per ogni Player per ottenere le scelte del **percorso razionale**.

Abbiamo ancora un problema, le foglie possono essere lontanissime dall'origine e in molti giochi difficilmente trovabili.

Oss se un player ha la stessa utility tra due scelte, allora posso sostituire il player con un nodo affidato al caso con una probabilità uniforme di scegliere una delle sue scelte migliori.

Quindi la backward-induction non sempre ci offre una soluzione deterministica.

2.6 Esempio Notevole (Centipe Game)



2.7 Exercises 20 September

2.7.1 Exam Bonus

Give me 1 point or give my colleague 3 points. Both players need to chose without comunication.

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (0,4) \\ (0,4) & (3,3) \end{bmatrix}$$

The result is TOP,RIGHT

2.7.2 Cops and Robbers

	A	B	C	D	E	F
A	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	
B	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	
C	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	
D	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	
E	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	
F	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	

A e B non sono mai scelte dalla guardia

2.7.3 Rock, Paper, Scissors

		$1/3$	$1/3$	$1/3$
		R	P	S
$1/3$	R	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
$1/3$	P	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
$1/3$	S	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

NBB Se uno dei giocatori sa che l'altro ha una probabilità non uniforme può variare la proria mossa per sfruttarne il vantaggio. (Moltiplico la probabilità del player conosciuto per la mia utility)

2.7.4 Take Away Game

Posso determinare quali sono le posizioni di perdita certe:

1 Win

2 Win

3 Lose

4 Win

5 Win

6 Lose

- ....

La strategia è quella di portarmi ad un multiplo di 3.

2.7.5 Taxi Ride

Per modellizare questo problema devo procedere nello stesso modo di prima, trovare una situazione stabile in cui alcun player può rifiutare. Ovviamente la scelta migliore sarebbe andare tutti insieme per 20€ e dividere tra i 3. Se questa divisione rispetta i vincoli di andare da soli a tutti converrà andare insieme.

Pongo quindi come condizione $X_A + X_B + X_C = 20$

Dai vincoli del gioco conosco che

- $X_A \leq 10$

- $X_B \leq 10$
- $X_C \leq 14$
- $X_A + X_B \leq 12$
- $X_A + X_C \leq 18$
- $X_B + X_c \leq 18$

Risolvendo il vincolo trovo (4,4,12)

Chiedere al Kex per le funzioni

2.7.6 Stock Holders

L'obbiettivo è ottenere il 51% delle share. A è dominante (ha bisogno solo dell'1% e non è disposto a cedere quote).

Le condizioni di vittoria/perdita per A sono

- $v(A \cup B) = W$
- $v(A \cup C) = W$
- $v(A \cup B \cup C) = W$
- $v(A) = L$

Le condizioni di vittoria/perdita per B e C sono

- $v(B \cup A) = W$
- $v(B \cup C) = W$
- $v(B \cup A \cup C) = W$
- $v(B) = L$

Noto che però B/C hanno lo stesso potere. A è dominante.

2.7.7 Pollution Game

E' un semplice esempio che fa vedere quanto sia controproducente un gioco non cooperativo.

2.7.8 Sharing Bandwidth

Proposta: se scelgo un numero inferiore a $1/n$, e gli altri player sono razionali ho buttato $1/n - x_i$ di banda. Se scelgo un numero maggiore di $1/n$ e tutti gli altri player sono razionali allora nessuno ha banda e il canale di chiude. La scelta razionale è scegliere $1/n$.

2.7.9 Missing Lessons...

2.7.10 Non Cooperative Games

La rappresentazione Bi-Matriciale dei giochi non cooperativi va bene ma è limitata dal fatto che assume un numero definito di strategie per i player. Una definizione più formale e generale è quella presentata sulle slide.

$$X, Y, f : X \times Y \to \mathbb{R}, g : X \times Y \to \mathbb{R}$$

Dove X, Y sono i set delle decisioni per i player X e Y. E f, g sono le loro utility function.

Un player può avere delle "mixed strategies" ovvero, se le strategie di un player sono per esempio:

$$m \in \mathbb{N} x_1, x_2, \ldots, x_m$$

Possiamo definire un set di m probabilità che soddisfa certe proprietà detto **simplex**:

$$p_i \geq 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Esempio

Se abbiamo un problema definito come:

$X, Y : dim(X) = m, dim(X) = n \ f, g \ X, Y$finite

Possiamo costruire un nuovo gioco con le mixed strategies:

$\hat{X}, \hat{Y} \ \hat{f}, \hat{g} \ \hat{X}, \hat{Y}$finite

dove

$\hat{X}$ è un simplex m-dimensionale

$\hat{Y}$ è un simplex n-dimensionale

Ma cosa sono ora $\hat{f}, \hat{g}$? Sono le **expected-utility**.

Come le calcoliamo però? Dobbiamo pesare le utility esistenti.

Realizzazione Esempio

$X = T, BY = L, R$

La bimatrice è

$$\begin{array}{ccc} & L & R \\ T & (u^1_{LT}, u^2_{LT}) & (u^1_{RT}, u^2_{RT}) \\ B & (u^1_{LB}, u^2_{LB}) & (u^1_{RB}, u^2_{RB}) \end{array}$$

$\hat{X} = [0, 1], 0 \leq p \leq 1$

$\hat{Y} = [0, 1], 0 \leq q \leq 1$

Quindi per Y le probabilità pesate sono $Lq, R(1 - q)$

Possiamo calcolare le expected utility pesandole:

$\hat{f}(p, q) = pqu^1_{LT} + p(1 - q)u^1_{RT} + (1 - p)qu^1_{BL} + (1 - p)(1 - q)u^1_{BR}$

$\hat{g}(p, q) = pqu^2_{LT} + p(1 - q)u^2_{RT} + (1 - p)qu^2_{BL} + (1 - p)(1 - q)u^2_{BR}$

Conclusione

Possiamo quindi dedurre che dato un qualsiasi gioco con strategie pure possiamo costruirne uno con strategie miste.

2.7.11 Esempio Caso n-dimensionale mixed-strategy

$$X, Y, f : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$\dim(X) = m$$

$$\dim(Y) = n$$

Rappresentando i simplex e le expected-utility:

$\hat{X}, \hat{Y}$ $p \in \hat{X} p = \{p_1, \dots, p_m\}$ $p_i \geq 0$ $\sum p_i = 1$

$p \in \hat{X} p = \{p_1, \dots, p_m\}$ $p_i \geq 0$ $\sum p_i = 1$

$\sum_{j=1,ni=1,m} f(x_i, y_j) = \hat{f}(p, q)$

Rappresentando le bimatrici:

$B, A \in M \times N$ $A_{ij} = f(x_i, y_j)$ $B_{ij} = g(x_i, y_j)$

$p, q : p^T \underline{A} q = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$

$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{bmatrix}$

Chapter 3

Nash Equilibrium

3.0.1 Definition

E' una combinazione di due condizioni:

- P1 non può migliorare la sua scelta data una scelta da P2
- P2 non può migliorare la sua scelta data una scelta da P1

In altre parole è una combinazione di strategie **stabile** rispetto alle decisioni di un singolo player. Ogni player non ha motivo di scegliere altre opzioni.

Posso notare che è una versione più forte della definizione di **(weakly) dominant strategy** che ricordo essere:

$$f(\overline{x}, y) \geq f(x, y) \forall x, y$$

La definizione di **Nash-Equilibrium** è infatti:

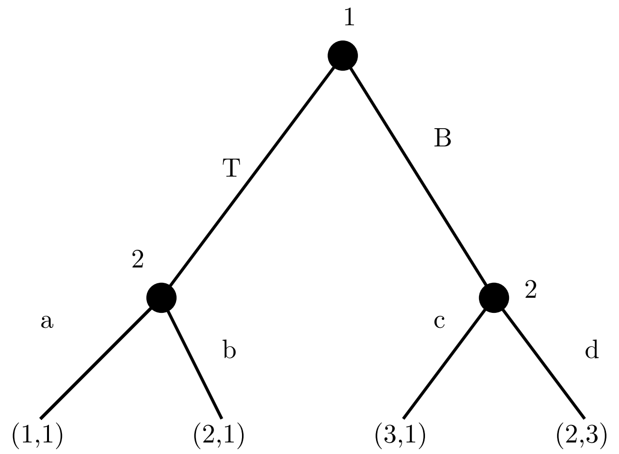
$$f(\overline{x}, \overline{y}) \geq f(x, \overline{y}) \forall x$$

Osservazione

Se $\overline{x}$ è una scelta dominante, allora se esiste un valore $\overline{y}$ che massimizza $g(\hat{x}, y)$ allora $(\overline{x}, \overline{y})$ è un equilibrio di Nash.

Questa definizione per quanto utile non può dirci niente nel caso non possa massimizzare la funzione o il player X non sia in posizione dominante.

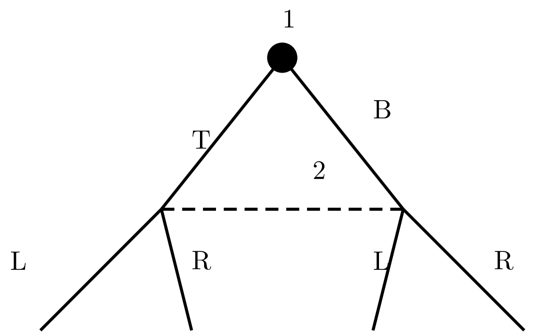
3.0.2 Execise: Extensive Form to Bi-Matrix



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} & ac & ad & hc & hd \\ T & (1,1) & (1,1) & & \\ B & & & & \end{bmatrix}$$

Al contrario:

$$\begin{bmatrix} & L & R \\ T & & \\ B & & \end{bmatrix} \Rightarrow$$



Noto che la rappresentazione bimatriciale perde informazioni rispetto all'albero esteso

3.0.3 Multi-Function and AvgMax function definition

Una multi-function come risultato ha un subset di valori del codominio.

$x \mapsto f(x) \subset Y$

AvgMax è una multi-funzione che restituisce tutti i massimi (assoluti??) della funzione.

3.0.4 Best-Reply Multifunction

La Best-Reply multifunction può essere definita così:

$\mathrm{BR}_1 : Y \to X : \mathrm{BR}_1(y) = \mathrm{ArgMax}\{f(\bullet, y)\}$

Ovvero, se player 2 sceglie y allora $\mathrm{BR}_1(y)$ mi da la migliore strategia data quella di player 2.

Ovviamente abbiamo una definizione simmetrica per player 1.

Nuova definizione di Equilibrio di Nash

$(\overline{x}, \overline{y})$ è un equilibrio sse $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{BR}(\overline{x}, \overline{y})$

3.0.5 Nash Theorem

Ipotesi:

- I set delle strategie devono essere **convessi**, questo implica che i giochi con decisioni finite non possono essere soggette a questo teorema.

  Il teorema di Nash non si applica a giochi con strategie pure
- Le utility function devono essere continue
- Le utility function devono mappare a set **quasi concavi**

Tesi: esiste almeno un equilibrio di Nash.

Dove un set **convesso** significa che prendendo due elementi e unendoli con una linea, la linea deve essere contenuta nell'insieme in tutti i suoi punti.

Una funzione **quasi-concava** è una funzione che data una linea tutto ciò che è sotto la linea è un set convesso.

Molto spesso abbiamo uno di questi casi:

- Troppi equilibri
- Equilibri troppo complicati da computare
- Nessun equilibrio

Corollary

Le mixed strategies hanno sempre almeno un equilibrio di Nash. (Il prof pensava di averlo già fatto e lo ha saltato velocemente)

3.0.6 Exercise: Finding Nash equilibria (Bi-Matrix)

$$\begin{array}{ccc} & L & R \\ T & (1,0) & (0,3) \\ B & (0,2) & (1,0) \end{array}$$

Per prima cosa calcola la "expected-utility", so che le probabilità per scelta sono:

Player 1: $\begin{array}{cc} T & B \\ (p, & 1-p) \end{array}$

Player 2: $\begin{array}{cc} L & R \\ (q, & 1-q) \end{array}$

Le utility sono quindi:

Considerando le utility di player 1 e le probabilità:

$$\begin{bmatrix} & L(q) & B(1-q) \\ T(p) & 1 & 0 \\ B(1-p) & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Otteniamo quindi:

$f(p,q) = pq + (1-p)(1-q) = p(2q-1) - q + 1$

Per P2:

$$\begin{bmatrix} & L(q) & B(1-q) \\ T(p) & 0 & 3 \\ B(1-p) & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$g(p,q) = 3p(1-q) + 2(1-p)q = q(2-5p) + 3p$

Ora calcolo le scelte migliori (dato q voglio massimizzare p):

BR Player 1

$p(2q-1)$ posso cambiarlo (posso scegliere p), la parte invece $-q+1$ non posso toccarla come Player 1 quindi la ignoro.

Studio quindi la prima parte:

$2q - 1 < 0, q < 1/2, p = 0$

$2q - 1 = 0, q = 1/2, p \in [0,1]$

$2q - 1 > 0, q > 1/2, p = 1$

Se P2 ha $0 \leq q < 1/2$ allora il valore della prima parte sarebbe negativo quindi per contrastare P1 deve imporre $p = 0$.

Se P2 ha $q = 1/2$ allora P1 può avere qualsisi valore di $p \in [0,1]$ e non cambierà nulla (la prima parte di azzera).

Se P2 ha $q > 1/2$ allora P1 è avantaggiato (prima parte positiva) e quindi per massimizzare il guadagno deve porre $p = 1$.

La stessa cosa si può fare per P2.

Plottando le due best strategy posso trovare un punto di equilibrio.

Osservazione

Se uno dei due giocatori sceglie di giocare una strategia di equilibrio, cosa sceglie l'altro giocatore non cambia la situazione.

Per questo motivo il teorema è anche detto il teorema dell'indifferenza.

3.1 N-Player Games

Ci sono n giocatori, ogni player ha il proprio set di strategie X_i e di "payoff" (utility) $f_i : X \to \mathbb{R}$ con $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$

3.1.1

Nash Equilibrium for n-players

La definizione vettoriale di un equilibrio di Nash è:

$\overline{x} \quad f_i(\overline{x}_i, \overline{x}_{-i}) \geq f_i(x, \overline{x}_{-i}) \quad \forall x \in X_i \quad \forall i$

Dove $\overline{x}$ è il vettore delle strategie e $\overline{x}_{-i}$ è il vettore della strategie meno quelle del player i.

3.2 Congestion Games

I giocatori vogliono muoversi da un punto ad un altro, devono seguire alcune regole e più persone ci sono nel gioco e più si va lenti.

L'obbiettivo è quello di distribuire i player sulle strade in modo da ottimizzare il traffico.

Abbiamo quindi

- N giocatori
- Il set delle risorse R (strade, etc.)
- Una collezione di sottoinsiemi di R (le strategie)
- Per ogni r risorsa abbiamo $d_r : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (la funzione costo di utilizzo di r)

Il costo di una risorsa dipende dal numero di giocatori che la usano.

3.2.1 Braess Paradox

La situazione senza paradosso è la seguente:

Si può vedere che vi sono 2 percorsi A e B. E Sono simmetrici, quindi ho moltissimi equilibri di Nash che però prevedono 2000 player su A e 2000 su B.

Quando sono in equilibrio allora il percorso su A e B è uguale per entrambi i percorsi a 20 minuti.

$A = 2000/400 + 15 = 20 \text{minuti}$

$B = 15 + 2000/400 = 20 \text{minuti}$

Abbiamo molti equilibri perchè ho tutte le permutazioni dei 2000 player su A e B.

Paradosso

Assumiamo di aprire una strada con costo 2 tra A e B (a metà).

Noto che non ho più lo stesso equilibrio, all'inizio sembrerebbe che facendo i segmenti $N/400$ infatti usando la condizione di prima:

$\frac{2000}{400} + 2 + \frac{2000}{400} = 12$ minuti.

Ma questa situazione non è di equilibrio, tutti vorranno andare su quella strada. Quindi l'equilibrio ora prevede che tutti 4000 passino per i segmenti $\frac{N}{400}$.

Il nuovo equilibrio quindi è $\frac{4000}{400} + 2 + \frac{4000}{400} = 22$ minuti.

Il paradosso è che aggiungendo una strada ottengo un tempo di percorrenza peggiore.

3.2.2 El Ferol bar (3 people)

La parte interessante sta nel calcolo della strategia mix-strategy di equilibrio. **Nei giochi di congestione solitamente l'equilibrio delle mixed-stratgy è una probabilità uguale per tutti**.

Calcolo quindi la mia expected utility assumendo che gli altri due player siano andati al bar con probabilità p.

La probabilità combinata dei due è quindi p^2 e la probabiltà che non sia soccesso è $1 - p^2$.

Osservazione

I giochi di congestione hanno **sempre** equilibri di Nash (puri) ed asimmetrici.

3.2.3 Duopoly models

Chapter 4

Zero-sum Games

Chapter 5

Repeated games/Correlated equilibria

Come abbiamo visto nel problema del prigioniero, l'unico equilibrio di Nash è il peggior risultato per tutti i player.

Lo scopo di questo capitolo è trovare un'alternativa migliore a questo equilibrio.

5.1 Repeated Games

Riportiamo di nuovo il Prisoner's Dilemma

$$\begin{array}{ccc} (3,3) & (0,10) & (-2,-2) \\ (10,0) & (1,1) & (-1,-1) \\ (-2,-2) & (-1,-1) & (-2,-2) \end{array}$$

L'equilibrio è (1,1). Ma esiste un equilibrio migliore?

Cosa succede se giochiamo il gioco per più giorni? Possiamo dimostrare che $\forall a > 0$ se il gioco è giocato abbastanza volte i giocatori ottengono almeno 3.

Se definiamo due numeri k e N, dove N numero di giorni e k è il giorno in cui i player cercano di prendere 10.

Allora possiamo definire una strategia per cui $N - k$ giorni i player scelgono la prima colonna e i restanti k giorni scelgono il loro 10.

Notiamo che se cambiano solo all'ultimo giorno la loro utility sarà:

$$\frac{(N-k)3+k1}{N}$$

Se un player cambia al k-esimo giorno diverso dall'ultimo avrà un guadagno medio di:

$$\frac{(N-k-1)3+10+k(-1)}{N}$$

Dove notiamo che un giorno otterrà 10, k giorni in seguito ad aver tradito player 2 verrà punito (e avrà utility -1).

Notiamo dunque che la strategia proposta sarà un equilibrio solo se il guadagno medio di cambiare l'ultimo giorno sarà maggiore di quello di tradire l'altro player.

$$\frac{(N-k)3+k1}{N} \geq \frac{(N-k-1)3+10+k(-1)}{N}$$

Che è vero s.s.e $k > 3$.

Essendo un equilibrio posso dimostrare che se i player giocano per un numero sufficientemente alto di giorni, il guadagno medio di ogni player sarà 3.

Osservazioni

- La collaborazione può essere razionalizzata in giochi su più giorni
- In questo caso abbiamo trovato un equlibrio di Nash, ma presumiamo che un player tradito sia disposto a punirsi per punire il proprio avversario (abbastanza improbabile).
- La ripetizione di un gioco **cambia** la definizione del gioco.

5.2 Corellated Equilibria

Questo equilibrio è invece un'idea diversa di equilibrio rispetto a quello di Nash.

Per mostrarne la definizione torniamo alla Battle of Sexes.

$$\begin{matrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{matrix}$$

Abbiamo 3 equilibri di Nash: $[(1,0)(1,0)][(0,1)(0,1)][(\frac{2}{3},\frac{1}{3})(\frac{1}{3},\frac{2}{3})]$

I primi due equilibri sono strategie pure. Il terzo è una mixed strategy ha come risultato $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ che però è pessima.

Perchè? Perchè in questo caso entrambe le scelte sono affidate al caso. E' molto semplice che capitino casi in cui i due vanno in posti diversi.

In questo caso è abbastanza semplice capire che sarebbe più conveniente giocare più volte il gioco oppure lanciare una moneta per decidere dove andare.

Cosa succede se correliamo le scelte? Supponiamo di legare la scelta dei due in base al lancio di una moneta. Se testa si va da una parte, se croce dall'altra.

Notiamo che in questo caso la probabilità sta nella sceltra da i due risultati $(2,1)$ e $(1,2)$, non ci sono casi in cui il risultato è $(0,0)$.

Nel caso del lancio di una moneta con probabilità $\frac{1}{2}$ abbiamo un guadagno previsto $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.

Questo tipo di strategia è detta **correlated strategy**. In pratica quindi attribuiamo una probabilità alla scelta di un outcome invece che dare una probabilità alle scelte individuali dei player.

5.2.1 Car Crash

In questo esempio la scelta è un pò più complicata. Non basta solo una correlated strategy ma anche un'entità che faccia la scelta ed informi i player privatamente.

Guardare l'esempio sulle slide.

5.2.2 Correlated Equilibria Existence Theorem

In soldoni, un equilibrio di Nash genera un Correlated Equilibrio. Un equilibrio di Nash **è** un correllated equilibria.

Osservazione

Un **correlated equilibria** è un'estensione della definizione di equilibrio di Nash.

Chapter 6

Cooperative Games

In questi giochi se i player decidono di cooperare devono cooperare. In questi giochi tutti conoscono tutto ciò che gli altri faranno.

Una volta che i player hanno un accordo sono legati a questo accordo.

Il problema è trovare le coalizioni. Una **coalition** è un gruppo di giocatori che giocano con un accordo tra loro.

Un altro problema è trovare le condizioni di ingresso in una coalizione per un player.

6.1 Formal Definition

$\mathbb{P}$ è il power-set. Essendo la combinazione di ogni player (l'insieme di tutte le coalizioni possibili) ha cardinalità 2^N dove N è il numero di player.

Solitamente si dice che ha dimensione $2^N - 1$ perchè escludiamo la coalizione senza player.

Convenzione: Quando scriviamo $\mathbb{R}^A$ significa che ho un intero per ogni elemento di A.

6.2 Transferable Utility Game

La definizione di prima è troppo generica, i TU games sono un sottogruppo di giochi cooperativi.

Dove ogni coalizione ha una utility assegnata a se $v : 2^N \to \mathbb{R}$.

In questo caso quindi valutiamo la coalizione in generale non più la convenienza di ogni player di essere in una coalizione.

Da questa definizione quindi abbiamo che $V(A) = \{x \in \mathbb{R}^A : \sum_{i \in A} x_i \leq v(A)\}$.

6.2.1 Sellers and Buyer

Player 1 è il venditore, e pensa che il suo oggetto valga a. Player 2 è un compratore e valuta l'oggetto di P1 con b. Player 3 è un compratore e valuta l'oggetto di P1 con c.

Il problema è posto in modo che $a < b < c$. I venditori valutano l'oggetto di P1 più di quanto è valutato da P1 (sennò non lo venderebbe).

Abbiamo una serie di coalizioni, quale è la migliore?

Abbiamo le coalizioni singole, cosa valutano i player senza avere una coalizione? Qua ci perderebbero solo i venditori.

$$v(\{1\}) = a, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0$$

Dopo abbiamo le offerte di acquisto

$$v(\{1,2\}) = b \text{ P1 vende a P2}$$

$$v(\{1,3\}) = c \text{ P1 cende a P3}$$

$$v(\{2,3\}) = 0 \text{ P2 non ha nulla da vendere a P3}$$

Infine abbiamo la condizione con N player che assume il valore massimo:

$$v(N) = c$$

6.2.2 Glove game

In questo caso la definizione del gioco è semplice (da non confondere con la definizione di gioco semplice che daremo tra un pò). Ma il problema è chi tra i giocatori avrà più utility degli altri?

Vediamo subito che P3 è quello che ha più potere, può scegliersi la coalizione gli altri due non hanno potere. L'utility dei singoli player dovrebbe riflettere questo.

6.2.3 Weighted Majority Game

Come risolviamo il problema dei votanti UN? 5 membri che devono votare per forza e 10 minoritari di cui ne devono servire 4 per passare un voto.

Dobbiamo trovare la soglia. E' un gioco semplice.

Sia n il numero di voti necessari. Avendo 5 maggioritari che devono per forza passare allora $n > (5-1)f(\text{maggioritari} + 10g(\text{minoritari}))$.

La seconda implica che $n = 5f(\text{maggioritari} + 4g(\text{minoritari}))$

Se supponiamo $g > 1$ allora $n > (5-1)f + 10$ e $n = 5f + 4$, quindi

$$5f + 4 > (5-1)f + 10 \to f > 6 \to f = 7, n = 4 \cdot 7 + 4 = 39$$

6.2.4 Peer Game

In questo gioco ogni player ha i suoi interessi v_i. Esaminando l'albero notiamo condizioni del tipo $v(\{1,2\}) = v(\{1,2,5\}) = v_1 + v_2$, perchè la coalizione con P5 ha la stessa utility dove w_5 non è considerato?

Questo perchè player 5 in quella coalizione non ha potere, il suo peer diretto P3 non fa parte della coalizione.

6.3 The set of TU games

Possiamo rappresentare tutti i tipi di giochi TU in un unico gruppo? Si, ogni gioco cooperativo corrisponde ad un vettore.

Quindi l'insieme di tutti giochi è rappresentabile da un insieme di vettori.

Ma se abbiamo uno spazio vettoriale possiamo definirne le basi.

Una di queste basi è composta dagli **unanimity games**.

6.3.1 Simple Games

Possiamo dividere questo set in classi (giochi additivi, superadditivi).

Una di queste classi è quella dei giochi semplici.

Ogni costo per coalizione è 0 o 1. La probabilità di avere 1 aumenta all'aumentare della dimensione della coalizione. La coalizione intera ha sempre costo 1.

6.4 Solutions to cooperative games

Un vettore soluzione è un vettore contenente le utility dei singoli player.

Quando parliamo di solution in realtà parliamo di **solution concept** ovvero non una soluzione specifica ma un modo di trovare una famiglia di soluzioni.

Una soluzione è un criterio che dato un gioco ci permette di distribuire la utility tra i player.

6.4.1 Imputation

Una **imputation** è una soluzione (una mappa per ogni gioco che fornisce vettori soluzione) fatta in modo che ogni player guadagni più di quanto guadagnerebbe giocando da solo.

La seconda proprietà è detta **efficiency** ovvero le i vettori soluzioni datto sempre il valore della coalizione intera.

Oss. nei giochi additivi o più in generale in tutti i giochi in cui il guadagno della coalizione intera è maggiore di ogni altra coalizione allora ho sicuramente almeno una imputation.

Se non è un gioco con queste proprietà però può ancora avere una o più imputation (condizione sufficiente).

Imputation Set

E' il gruppo di tutte le imputation per un gioco particolare.

6.4.2 The Core

Il core è un sottogruppo del gruppo di imputation. Le imputation sono distribuzioni efficienti le cui utility sono migliori di ogni utility individuale.

Il core è composta da soluzioni efficienti in cui però la somma delle utility di ogni player in una coalizione ha almeno lo stesso guadagno della coalizione stessa.

Ovvvero le soluzioni nel core sono quelle dove nessuna altra coalizione otterrebbe un valore migliore rispetto alle altre.

Chapter 7

Shapley Value and Power Indeces

7.1 Shapley Theorem

$\sigma_i(v)$ è lineare in v.

Il teorema è di **unicità ed esistenza** di una funzione $\sigma_i(v)$ che ha le proprietà di efficienza, simmetria, null player e additività.

Ricordiamo che stiamo creando una funzione che funziona per ogni tipo di gioco. Il teorima dice che esiste una funzione $\sigma_i(v)$ che va dal set dei giochi a quello delle utility, quindi deve funzionare per ogni tipo di gioco.

7.1.1 Proof

[Slide 7]

Efficiency

Dobbiamo dimostrare che la somma di tutte le $\sigma_i(v)$ per ogni player deve essere uguale a $v(N)$.

Per prima cosa consideriamo le coalizioni del tipo $S = N \backslash \{i\}$ otteniamo che il coefficiente è $\frac{(n-1)!(n-n)!}{n!} = \frac{(n-1)! \cdot 1}{n \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n}$.

In seguito consideriamo gli altri tipi di coalizione (ed il nostro obbiettivo è dimostrare che si annullano).

Dato che rimangono solo i coefficienti per la prima condizione otteniamo che $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}[v(N) - v(N \backslash \{i\})] = n \cdot \frac{1}{n} \cdot v(N) = v(N)$

Simmetry

Abbastanza dettagliato sulla slide

Uniqueness

Provate le proprietà, dobbiamo provare l'altra metà del teorema: la unicità della soluzione.

Se non avessimo la proprietà di unicità, una volta scelte le regole come proposto dalla definizione non potremmo avere un modo per decidere quale è obbiettivamente la divisione migliore.

In questo caso dimostrare l'unicità è facile.

Idea: assumiamo che abbiamo uno spazio vettoriale U con una base $\{e_i\}$ e che abbiamo una funzione $L_{e_i} = y_i$. Sappiamo che essendo $\{e_i\}$ una base posso scrivere ogni vettore $u \in U = \sum_i c_i e_i$. Ma quindi $L_u = \sum_i c_i(L_{e_i}) = \sum_i c_i y_i$.

Consideriamo ora una base dello spazio dei giochi considerati (unanimity games) $u_A(T) = \{ {1, A \subset T \atop 0, \text{otherwise}}$.

La funzione $\phi(u_A) = \{ {\frac{1}{|A|}, i \in A \atop 0, i \notin A}$ è unica.??? (ci siamo persi un pezzo)

7.2 Simple Games

Definito A come da slide possiamo dire per semplicità che se $A \subset B, u(A) \leq u(B)$.

Se consideriamo A_i la colaizione che non vincerebbe senza il player i, allora posso scrivere il valore di Shapley così:

$$\sigma_i(v) = \sum_{A \in A_i} \frac{a!(n-a-1)!}{n!}$$

Alternativamente possiamo scriverla pensando all'insieme $A \in W_i$ delle coalizioni che perdendo il player i rimangono vincenti.

$$\sigma_i(v) = \sum_{A \in W_i} \frac{(a-1)!(n-a)!}{n!}$$

Esempio

[Slide 11]

Possiamo considerare la tabella per avere un esempio di come calcolare i valori di shapley senza calcolare i coefficienti.

Sulle colonne abbiamo i contributi del player i che entra nella coalizione sulla colonna. Le righe sono tutti i modi con cui si può formare una coalizione **compreso l'ordine**.

Esempio 123 è la coalizione che si forma quando entra 1 per primo, 2 per secondo, 3 per terzo.

Quindi calcoliamo la prima colonna:

	1	2	3
123	$v(\{1\}) = 0$	$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 4$	$v(N) - v(\{1,2\}) = 4$
132	$v(\{1\}) = 0$	$v(N) - v(\{1,3\}) = 4$	$v(\{1,3\}) - v(\{1\}) = 4$
213	$v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 3$	$v(\{2\}) = 1$	$v(N) - v(\{1,2\}) = 4$
231	$v(N) - v(\{2,3\}) = 6$	$v(\{2\}) = 1$	$v(\{2,3\}) - v(\{2\}) = 1$
312	$v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 3$	$v(N) - v(\{1,3\}) = 4$	$v(\{3\}) = 1$
321	$v(N) - v(\{2,3\}) = 6$	$v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 1$	$v(\{3\}) = 1$
Media	$\frac{18}{6}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{15}{6}$

7.3 Power Indeces

Indicano il rapporto di potenza che ogni player ha sugli altri. Possiamo definire una funzione che ci dice con la nostra soluzione in cui un player ha più potenza relativa rispetto agli altri.

Notiamo che quindi non vogliamo l'efficienza e perdiamo l'unicità della soluzione.

Banzhaf Value

Notiamo che questo valore tratta ogni coalizione con lo stesso coefficiente che non è altro che il fattore di normalizzazione per il numero di coalizioni possibili.

Dato che ci sono 2^{n-1} coalizioni possibili, abbiamo coefficienti $\frac{1}{2^{n-1}}$.

UN Council With Banzhaf Value

Noto che per calcolare il potere dei "veto" players non posso calcolarlo con la simmetria $(1 - 0.005127)$ perchè non la abbiamo.

Dobbiamo fare il calcolo per tutte le coalizioni in cui un "veto" player ha un contributo marginale 1. Questo avviene quando almeno altri 4 non veto player sono presenti.

Noto che però devo considerare non solo quando ho 4 "nonveto"-players ma anche i casi dopo in cui ne ho 5,6,7,8,9,10. Perchè comunque un "veto" player aggiungerà contributo.

Quindi conto tutte le coalizioni in cui l'aggiunta di un "veto" player avrebbe senso. In una coalizione con meno di 4 "nonveto"-player non passerebbe comunque il voto.