1. A partir de l'equació de l'enunciat

$$y = 0,4\sin\pi(t/2 - x/4)$$

podem reescriure-la com

$$y(x,t) = 0,4\sin\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4}\right)$$

en aquest moment hem de triar si deixem un 2π com a factor comú dins el sin o l'introduïm dintre. En cada cas les identificacions que podrem fer seran diferents. En el primer cas multipliquem i dividim per 2 per obtenir

$$y(x,t) = 0,4\sin 2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4}\right) = 0,4\sin 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{8}\right)$$

d'on podem identificar $T = 4\,s$ i $\lambda = 8\,m$

Si triem introduir el factor π tenim

$$y(x,t) = 0,4\sin\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x}{4}\right)$$

de forma que les identificacions són ara

$$\omega = \frac{\pi}{2}\,rad/s \qquad k = \frac{\pi}{4}\,rad/m$$

Per resoldre aquest primer exercici no ens cal això que acabem de discutir, però ho presentem ara com a referència futura per els exercicis de la resta del tema, ja que és una tècnica típica que cal conèixer.

Calculem el que demana explícitament l'exercici, l'elongació per $x = 0\,m$ i $t = 6\,s$, (ho fem a partir de la darrera equació)

$$y(0,6) = 0,4\sin\left(\frac{\pi\cdot 6}{2} - \frac{\pi\cdot 0}{4}\right) = 0,4\sin(3\pi) = 0\,m$$

Ara, per la velocitat transversal v_y calculem la derivada de l'elongació $y(x,t)$ en funció del temps

$$v_y(x,t) = 0,4\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x}{4}\right)$$

llavors,

$$v_y(0,6) = 0,4\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi\cdot 6}{2} - \frac{\pi\cdot 0}{4}\right) = 0,4\cdot\frac{\pi}{2}\cos(3\pi) = -0,2\pi = -0,628\,m/s$$

2. Reescrivint l'equació de l'enunciat

$$y = 0,03 \sin(10\pi x - 40\pi t)$$

Ara, per la velocitat transversal v_y calculem la derivada de l'elongació $y(x,t)$ en funció del temps

$$v_y(x,t) = 0,03 \cdot (-40\pi) \cos(10\pi x - 40\pi t)$$

de forma que

$$\begin{aligned} v_y(0.1, 0.025) &= 0,03 \cdot (-40\pi) \cos(10\pi \cdot 0,1 - 40\pi \cdot 0,025) \\ &= 0,03 \cdot (-40\pi) \cos(\pi - \pi) \\ &= 0,03 \cdot (-40\pi) \cos(0) \\ &= 0,03 \cdot (-40\pi) \cdot 1 \\ &= -3,77\, m/s \end{aligned}$$

3. La distància demanada és la longitud d'ona λ de forma que

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{300}{550} = \frac{6}{11} = 0,545\, m$$

4. A partir de

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \rightarrow v = \lambda f = 0,15 \cdot 20 = 3\, m/s$$

Noteu que la dada de l'amplitud de l'ona no és necessària.

5. (a) Calculem la longitud d'ona

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{10}} = 0,01\, m$$

Llavors, dividint la distància total entre la longitud d'ona

$$\frac{50 \cdot 10^3}{0,01} = 5 \cdot 10^6$$

hi ha $5 \cdot 10^6$ longituds d'ona entre l'avió i l'estació de radar

(b) Ara, amb la formula de cinemàtica $x = vt$

$$t = \frac{x}{v} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 3,33 \cdot 10^{-2}\, s$$

6. A partir de l'equació de l'enunciat

$$y(x,t) = 0,04 \sin 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right)$$

identifiquem directament les magnituds $T = 2\,s$, $\lambda = 4\,m$ i calculem

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5\,Hz$$

i

$$v = \lambda f = 4 \cdot 0,5 = 2\,m/s$$

7. (a) A la teoria vam dir que quan una ona travessa la interfície de separació de dos medis, de totes les magnituds involucrades, només la freqüència quedava inalterada.

   (b) Com $v = \lambda f$ si la freqüència es manté inalterada, com sabem que (en principi) la velocitat de l'ona és diferent en cada medi, llavors la longitud d'ona també ha de canviar.

Compte! Ja vam dir a classe que una situació semblant es donarà dintre del mateix tema però en un altre context (quan parlem d'ones estacionàries), en aquell cas veurem que per les ones estacionàries serà *la velocitat* constant i, per tant, si canviem la longitud d'ona canviarà la freqüència.

8. Dues crestes consecutives d'una ona transversal es troben en el mateix estat de vibració, per tant, la dada de $0,2\,s$ correspon al període de l'ona. Llavors

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5\,Hz$$

9. Amb les dades de l'enunciat calculem la freqüència

$$f = \frac{1700}{10} = 170\,Hz$$

i amb

$$v = \lambda f$$

la longitud d'ona

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{170} = 2\,m$$

Ara, l'equació de l'ona es pot escriure

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \varphi_0 \right)$$

i fent servir les condicions inicials

$$A = y(0,0) = A \sin \varphi_0 \rightarrow \sin \varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

de forma que l'equació queda

$$y(x,t) = 0,2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{2} - \frac{t}{\frac{1}{170}} + \frac{\pi}{2} \right)$$

10. (a) Calculem la freqüència amb la informació de l'enunciat

$$f = \frac{10}{5} = 2\, Hz$$

Sabent que les ones han de recórrer $60\, cm$ en $1\, s$ calculem la seva velocitat de fase amb la formula de cinemàtica $x = vt$

$$x = vt \rightarrow v = \frac{x}{t} = \frac{0,6}{1} = 0,6\, m/s$$

ara podem calcular la longitud d'ona

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{0,6}{2} = 0,3\, m$$

Ara ja tenim tota la informació per poder escriure l'equació de l'ona (com que no ens fixen condicions inicials no podem calcular φ_0, suposarem que val zero, per simplicitat)

$$y(x,t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = 0,1 \sin 2\pi \left(\frac{x}{0,3} - \frac{t}{0,5} \right)$$

noteu que el període es calcula com

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} = 0,5\, s$$

(b) Fixat un valor de x, l'ona vibra amb moviment harmònic simple, amb els paràmetres A, ω heretats de l'equació de l'ona. És a dir els punts *pugen i baixen* amb equació

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

amb $\omega = 2\pi f$ per calcular l'energia cinètica necessitem saber la velocitat. Recordem la relació entre l'elongació i la velocitat a l'oscil·lador harmònic, relació deduïda en el tema anterior.

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{v_y^2}{(A\omega)^2} = 1$$

d'on

$$v_y = \pm A\omega\sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}$$

llavors

$$v_y = \pm 0,1 \cdot 4\pi \cdot \sqrt{1 - \frac{0,05^2}{0,1^2}} = \pm 0,1 \cdot 4\pi \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{0,1 \cdot 4\pi}{2} \cdot \sqrt{3} = 1,088\, m/s$$

L'energia cinètica del suro serà doncs

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (1,088)^2 = 3 \cdot 10^{-3}\, J$$

(c) En quant a l'energia mecànica total del suro, la podem calcular com l'energia cinètica màxima que valia

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

de manera que tenim

$$E_M = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,05 \cdot (0,1 \cdot 4\pi)^2 = 0,04\, J$$