

1. (a) Com es tracta d'un moviment circular podem escriure

$$2\pi(R+h) = vT$$

i amb la segona llei de Newton

$$F = ma_c \rightarrow \frac{GM_P m}{(R_P + h)^2} = m \frac{v^2}{R_P + h}$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{GM_P}{R_P + h}}$$

llavors

$$2\pi(R+h) = \sqrt{\frac{GM_P}{R_P + h}} \cdot T \rightarrow 4\pi^2 (R_P + h)^2 = \frac{GM_P}{R_P + h} T^2$$

finalment

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_P + h)^3}{GM_P}} = 2\pi \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^7 + 800 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{25}}} = 1,032 \cdot 10^4 \text{ s} = 2,87 \text{ h}$$

(b) Per calcular l'energia mecànica fem

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_P m}{R_P + h} = -\frac{1}{2} \frac{GM_P m}{R_P + h} = -\frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{25} \cdot 8 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 10^7 + 800 \cdot 10^3} = -6,41 \cdot 10^{18} \text{ J}$$

on hem fet servir l'expressió de la velocitat per les òrbites circulars estables trobada anteriorment.

(c) Calculem directament

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{25}}{(2 \cdot 10^7)^2} = 8,34 \text{ m/s}^2$$

2. (a) Podem calcular la velocitat amb

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\oplus}^2}{R_{\oplus} + h}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 6,67 \cdot 10^6}{6,67 \cdot 10^6 + 0,30 \cdot 10^6}} = 7,91 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

A partir de

$$2\pi r = vT$$

tenim

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi (6,67 \cdot 10^6 + 0,3 \cdot 10^6)}{7,91 \cdot 10^3} = 5,54 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,54 \text{ h}$$

(b) El valor de l'acceleració demanat es pot calcular com

$$g(R_{\oplus} + h) = \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} = \frac{g_0 R_{\oplus}^2}{(R_{\oplus} + h)^2} = \frac{9,8 \cdot (6,67 \cdot 10^6)^2}{(6,67 \cdot 10^6 + 0,3 \cdot 10^6)^2} = 8,97 \text{ m/s}^2$$

(c) El treball demanat es pot calcular com la diferència entre l'energia mecànica final i la inicial, amb les suposicions habituals fetes als exercicis de classe

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} - \left(-\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \right) = GM_{\oplus}m \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{2(R_{\oplus} + h)} \right) \\ &= GM_{\oplus}m \frac{R_{\oplus} + 2h}{2R_{\oplus}(R_{\oplus} + h)} = g_0 R_{\oplus}^2 m \frac{R_{\oplus} + 2h}{2R_{\oplus}(R_{\oplus} + h)} \\ &= 9,8 \cdot (6,67 \cdot 10^6)^2 \cdot 500 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^6 + 2 \cdot 0,30 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^6 \cdot (6,67 \cdot 10^6 + 0,30 \cdot 10^6)} = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ J} \end{aligned}$$

3. (a) A partir de

$$g = \frac{GM_P}{R_P^2} \rightarrow R_P^2 = \frac{GM_P}{g} = \frac{G \cdot 2500M_{\oplus}}{g}$$

d'on

$$R_P = \sqrt{\frac{2500 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{49,05}} = 1,42 \cdot 10^8 m$$

(b) No fem aquí la deducció de l'expressió necessària per simplicitat

$$v = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2G \cdot 2500 \cdot M_{\oplus}}{R_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2500 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{1,42 \cdot 10^8}} = 1,18 \cdot 10^5 m/s$$

4. (a) A partir de la tercera llei de Kepler aplicada a Io i tenint en compte que Júpiter (J) és el centre de forces,

$$T_{Io}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{J}}} r_{Io}^3 \rightarrow M_{\text{J}} = \frac{4\pi^2 r_{Io}^3}{T_{Io}^2 G}$$

tenim

$$M_{\text{J}} = \frac{4\pi^2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 7,15 \cdot 10^7)^3}{(1,8 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,93 \cdot 10^{27} kg$$

(b) Escrivim la tercera llei de Kepler per cada satèl·lit

$$T_{Io}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{J}}} r_{Io}^3$$

$$T_{Cal}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{J}}} r_{Cal}^3$$

dividint les equacions obtenim

$$\frac{T_{Io}^2}{T_{Cal}^2} = \frac{r_{Io}^3}{r_{Cal}^3}$$

d'on

$$r_{Cal} = r_{Io} \sqrt[3]{\frac{T_{Cal}^2}{T_{Io}^2}} = 3 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 10^7 \sqrt[3]{\frac{(16,7)^2}{(1,8)^2}} = 1,99 \cdot 10^9 m$$