1. (a) Escrivim la tercera llei de Kepler per Orcus i la Terra ($\oplus$), tenint en compte que el centre de forces és el Sol ($\odot$),

$$T_{orcus}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r_{orcus}^3$$

$$T_\oplus^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r_\oplus^3$$

Ara dividim les equacions (no cal passar les unitats al sistema internacional)

$$\frac{T_{orcus}^2}{T_\oplus^2} = \frac{r_{orcus}^3}{r_\oplus^3}$$

$$r_{orcus}^3 = \frac{T_{orcus}^2}{T_\oplus^2} \cdot r_\oplus^3 = \frac{248^2}{1^2} \cdot 1,00^3 \to r_{orcus} = \sqrt[3]{248^2} = 39,5\,UA$$

(b) Per trobar la velocitat d'escapament demanarem que l'energia mecànica d'un objecte de massa m a la superfície d'Orcus

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

valgui zero, que és la condició perquè deixin d'estar lligats gravitatòriament, llavors

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R}$$

d'on

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,41 \cdot 10^{20}}{459 \cdot 10^3}} = 4,32 \cdot 10^2 m/s$$

En quant a la intensitat de camp gravitatori a la seva superfície

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,41 \cdot 10^{20}}{(459 \cdot 10^3)^2} = 0,20\,m/s^2$$

2. (a) Només s'indueix corrent si varia el flux magnètic. Al entrar i sortir de la regió on és present el camp magnètic, el flux varia, i per tant, en aquestes situacions hi haurà corrent induït. Per una altra banda, al moure's l'espira a través de la regió on el camp

és constant, no hi ha variació de flux magnètic, i per tant, no hi haurà corrent induït.

Al entrar el flux magnètic augmenta cap a dins del paper. Llavors, a l'espira s'induirà un corrent en sentit antihorari, per tal de crear un camp magnètic cap enfora (regla de la mà dreta), que s'oposi al que li està passant.

Al sortir de la regió el flux magnètic disminueix cap a dins del paper. Ara s'induirà un corrent en sentit horari, que per tal de crear un camp magnètic cap a dins del paper (regla de la mà dreta), per oposar-se al que li passa.

(b) L'àrea de l'espira afectada pel camp magnètic varia de forma contínua ja que es mou amb velocitat constant.

$$S(t) = ax(t) = avt$$

Calculem el mòdul de la *fem* ja que el signe és informatiu, (ens diu que és tal que la intensitat induïda crearà un camp que s'oposa a la variació de flux) i els sentits són diferents en cada situació, tal com hem descrit abans

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}| &= \frac{d\Phi(t)}{dt} \\
&= \frac{d(B \cdot S(t))}{dt} \\
&= B\frac{dS(t)}{dt} \\
&= B\frac{d(ax(t))}{dt} \\
&= Ba\frac{d(vt)}{dt} \\
&= Bav = 0,2 \cdot 0,03 \cdot 2 = 1,2 \cdot 10^{-2}\, V
\end{aligned}$$

En quant al valor de la intensitat, apliquem la llei d'Ohm en ambdós casos per obtenir

$$V = IR \rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{1,2 \cdot 10^{-2}}{5} = 2,4 \cdot 10^{-3}\, A$$

3. (a) A partir de l'expressió de la força electromotriu en cada bobina podem escriure

$$\mathcal{E}_p = -N_p \frac{d\Phi_p}{dt}$$

$$\mathcal{E}_s = -N_s \frac{d\Phi_s}{dt}$$

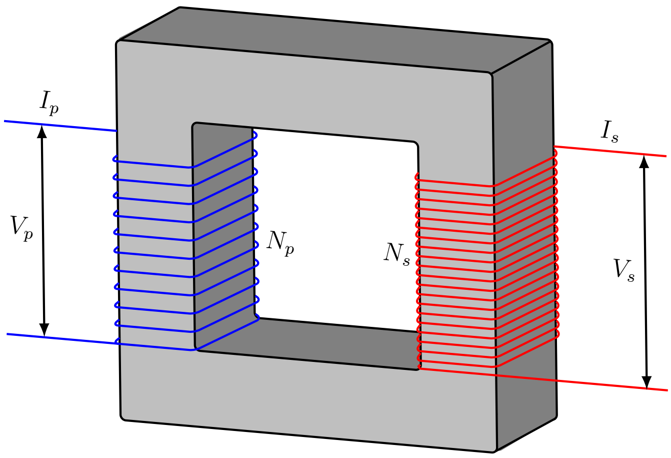
I si considerem que tot el flux magnètic que travessa la bobina primària ho fa també a la secundària podem escriure

$$\frac{d\Phi_p}{dt} = \frac{d\Phi_s}{dt} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_p}{N_p} = \frac{\mathcal{E}_s}{N_s} \rightarrow \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$$

Llavors,

$$V_s = V_p \frac{N_s}{N_p} = 230 \cdot \frac{300}{1200} = 57,5\, V$$

(b) Per l'esquema del transformador podem prendre el que vam fer servir a la teoria



Ara, si suposem que no hi ha pèrdues, llavors la potència elèctrica es transmet íntegrament d'una bobina a l'altre i podem escriure

$$P_p = P_s \rightarrow V_p I_p = V_s I_s$$

d'on

$$I_p = I_s \frac{V_s}{V_p} = 2,0 \cdot \frac{57,5}{230} = 0,5\,A$$

4. (a) El treball que fa el camp elèctric s'inverteix en variar l'energia cinètica de l'electró, així

$$W_{camp} = F_{elec} \cdot q \cdot d = E \cdot q \cdot d = \Delta E_c$$

llavors,

$$E = \frac{\Delta E_c}{q \cdot d} = \frac{10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,602 \cdot^{-19} \cdot 1} = 10^3\,N/C$$

Per tal de poder accelerar l'electró, les línies de camp elèctric han d'anar de dreta a esquerra, perpendiculars a les plaques de l'accelerador. Es pot copiar el dibuix original i afegir-les.

(b) Calculem la velocitat amb que entra a la regió del camp magnètic

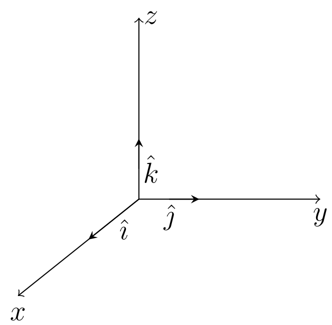
$$\frac{1}{2}mv^2 = \Delta E_c$$

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 1,87 \cdot 10^7\,m/s$$

La llei de Lorentz diu que

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

prenent el sistema de coordenades



és

$$\vec{v} = v(\hat{\jmath}) \quad \vec{B} = B(-\hat{\imath})$$

llavors,

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \\
&= qv(\hat{\jmath}) \times B(-\hat{\imath}) \\
&= -qvB(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) \\
&= -qvB(-\hat{k}) \\
&= qvB\hat{k} \\
&= -1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,87 \cdot 10^{7} \cdot 0,15\hat{k} \\
&= -4,51 \cdot 10^{-13}\hat{k}\, N
\end{aligned}$$

És a dir, que segons l'esquema de l'exercici sentirà l'electró sentirà una força cap avall, *perpendicular a la seva velocitat* que el farà descriure un cercle en sentit horari.

5. (a) Considerem que el quadrat té costat $2a$ i situem el punt C a l'origen de coordenades. Llavors, les càrregues Q_i es troben en els punts P_i donats per

$$P_1 = (-a, -a) \quad P_2 = (-a, a) \quad P_3 = (a, a) \quad P_4 = (a, -a)$$

Per tal de trobar el camp en el punt C, calculem els vectors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1C} &= (0,0) - (-a, -a) = (a, a) \\
\overrightarrow{P_2C} &= (0,0) - (-a, a) = (a, -a) \\
\overrightarrow{P_3C} &= (0,0) - (a, a) = (-a, -a) \\
\overrightarrow{P_4C} &= (0,0) - (a, -a) = (-a, a)
\end{aligned}$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{P_iC}| = a\sqrt{2} \quad \forall i$$

Ara podem escriure

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_C &= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\overrightarrow{P_iC}|^3} \overrightarrow{P_iC} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a\sqrt{2})^3} \sum_{i=1}^{4} Q_i \overrightarrow{P_iC} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a\sqrt{2})^3} \left[Q_1\overrightarrow{P_1C} + Q_2\overrightarrow{P_2C} + Q_3\overrightarrow{P_3C} + Q_4\overrightarrow{P_4C} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{10^{-6}}{(a\sqrt{2})^3} \left[(a,a) - 2(a,-a) + 2(-a,-a) - (-a,a) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{10^{-6}}{(a\sqrt{2})^3} \cdot (-2a, 0) = (-1,59 \cdot 10^3, 0)\, N/C
\end{aligned}
$$

El vector camp elèctric en C l'hauríem de dibuixar amb origen a C i dirigit cap a A.

(b) Hem de calcular el potencial en A i C, comencem per A.

Tornem a calcular els vectors,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1A} &= (-a, 0) - (-a, -a) = (0, a) \\
\overrightarrow{P_2A} &= (-a, 0) - (-a, a) = (0, -a) \\
\overrightarrow{P_3A} &= (-a, 0) - (a, a) = (-2a, -a) \\
\overrightarrow{P_4A} &= (-a, 0) - (a, -a) = (-2a, a)
\end{aligned}
$$

amb mòdul

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{P_1A}| &= a \\
|\overrightarrow{P_2A}| &= a \\
|\overrightarrow{P_3A}| &= a\sqrt{5} \\
|\overrightarrow{P_4A}| &= a\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

llavors

$$V_A = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\overrightarrow{P_i A}|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{|\overrightarrow{P_i A}|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|\overrightarrow{P_1 A}|} + \frac{Q_2}{|\overrightarrow{P_2 A}|} + \frac{Q_3}{|\overrightarrow{P_3 A}|} + \frac{Q_4}{|\overrightarrow{P_4 A}|} \right)$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a} + \frac{2}{a\sqrt{5}} - \frac{1}{a\sqrt{5}} \right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0} \left(1 - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= -2,49 \cdot 10^3 \, V$$

Ara, el potencial en C

$$V_C = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{|\overrightarrow{P_i C}|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{4} \frac{Q_i}{|\overrightarrow{P_i C}|}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|\overrightarrow{P_1 C}|} + \frac{Q_2}{|\overrightarrow{P_2 C}|} + \frac{Q_3}{|\overrightarrow{P_3 C}|} + \frac{Q_4}{|\overrightarrow{P_4 C}|} \right)$$

$$= \frac{10^{-6}}{a\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (1 - 2 + 2 - 1) = 0 \, V$$

Finalment, la diferència de potencial entre A i C

$$V_C - V_A = 0 - (-2,49 \cdot 10^3) = 2,49 \cdot 10^3\, V$$

6. (a) Que el satèl·lit geoestacionari vol dir que es troba sempre sobre la vertical d'un mateix punt de la superfície terrestre, és a dir, que el seu període és de 24 hores. De la tercera llei de Kepler podem escriure

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} - R_T$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600)^2 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6,37 \cdot 10^6$$

$$= 3,59 \cdot 10^7\, m$$

(b) L'energia potencial gravitatòria val

$$E_{pg} = -\frac{GM_T m}{R_T + h} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 300}{6,37 \cdot 10^6 + 3,59 \cdot 10^7} = -2,83 {\cdot} 10^9\, J$$

L'energia mecànica es escriure de forma compacta (veure pàgina 30 dels apunts de teoria, punt **3.4.3**)

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_T m}{R_T + h} = -1,42 \cdot 10^9\, J$$

(c) El treball que cal per posar-lo en òrbita és igual a la variació de l'energia mecànica. Com és habitual, ignorem l'energia cinètica que té associat l'objecte a la velocitat de rotació terrestre.

$$W_{R\to h} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R+h} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{2(R+h)} - \frac{1}{R}\right)$$

$$= -GMm\frac{R-2(R+h)}{2(R+h)R}$$

$$= GMm\frac{2(R+h)-R}{2(R+h)R}$$

$$= GMm\frac{R+2h}{2(R+h)R}$$

$$= 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 300\cdot \frac{6,37\cdot 10^{6}+2\cdot 3,59\cdot 10^{7}}{2(6,37\cdot 10^{6}+3,59\cdot 10^{7})6,37\cdot 10^{6}}$$

$$= 1,74\cdot 10^{10}\,J$$