1. (a) A partir de $F = kx$, on x és la distància que s'allarga la molla al posar-li la massa, podem escriure

$$mg = kx$$

d'on

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,5 \cdot 9,81}{0,02} = 245,25\, N/m$$

En quant a la freqüència angular de l'oscil·lació

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{245,25}{0,5}} = 22,15\, rad/s$$

(b) Tenint en compte que l'amplitud són $A = 0,2\, m$ i que el moviment comença al punt inferior ($y(0) = -A$), l'equació de l'oscil·lador

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

s'escriu

$$y(t) = 0,2\cos(22,15t + \pi)$$

2. (a) El mode fonamental en una corda lligada pels extrems presenta dos nodes i un ventre (els detalls es troben als apunts). La longitud d'ona és $\lambda = 2l$ de forma que $\lambda = 2 \cdot 0,7 = 1,4\, m$.

El tercer harmònic presenta quatre nodes i tres ventres de forma que en la longitud l de la corda hi ha $1,5$ longituds d'ona de forma que ara serà $1,5\lambda = 0,7 \rightarrow \lambda = 0,47\, m$.

(b) La velocitat de l'ona estacionària no varia. La calculem amb les dades del mode fonamental per obtenir

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow v = \lambda f = 1,4 \cdot 300 = 420\, m/s$$

3. (a) El so és una ona mecànica tridimensional longitudinal que correspon a les variacions de pressió que pateix l'aire. La longitud d'ona es pot calcular com

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{698} = 4,87 \cdot 10^{-1}\, m$$

(b) Considerant que es tracta d'una ona tridimensional i sabent que la potència generada per un violí s'haurà de repartir en la superfície d'una esfera de radi $r = 20\,m$, la intensitat valdrà

$$I = \frac{P}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 20^2} = 9,95 \cdot 10^{-7}\,W/m^2$$

Llavors, en quant al nivell d'intensitat sonora si hi ha 15 violins

$$\beta = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{15 \cdot 9,95 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 71,7\,dB$$

4. (a) Centrem el quadrat a l'origen de coordenades i suposem que les càrregues es troben als punts

$$q_1 \to P_1 = (-1, 1)$$
$$q_2 \to P_2 = (1, 1)$$
$$q_3 \to P_3 = (1, -1)$$
$$q_4 \to P_4 = (-1, -1)$$

calculem els vectors i mòduls corresponents

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1O} = (1, -1) \qquad r_1 \equiv |\overrightarrow{P_1O}| = \sqrt{2}$$
$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2O} = (-1, -1) \qquad r_2 \equiv |\overrightarrow{P_1O}| = \sqrt{2}$$
$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{P_3O} = (-1, 1) \qquad r_3 \equiv |\overrightarrow{P_1O}| = \sqrt{2}$$
$$\vec{r}_4 = \overrightarrow{P_4O} = (1, 1) \qquad r_4 \equiv |\overrightarrow{P_1O}| = \sqrt{2}$$

llavors el camp total al centre del quadrat

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^3}\overrightarrow{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^3}\overrightarrow{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3^3}\overrightarrow{r_3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_4^3}\overrightarrow{r_4}$$

de forma que

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{10^{-9}}{(\sqrt{2})^3}\Big[2 \cdot (1, -1) - 3 \cdot (-1, -1) + 4 \cdot (-1, 1) - 5 \cdot (1, 1)\Big]$$
$$= \frac{9}{(\sqrt{2})^3} \cdot (-4, 0) = (-12.73, 0)\,N/C$$

(b) Calculem el treball que s'ha de fer per dur cada càrrega des de l'infinit fins al punt de destí. Recordem que per definició $V_\infty = 0$. Per dur la càrrega q_1 hem de fer un treball

$$W_1 = q_1 \Delta V = q_1(V_{P_1} - V_\infty) = 0$$

Per dur la segona càrrega q_2 al punt P_2 hem de tenir en compte que com q_1 ja es troba al seu lloc, crea un cert potencial en P_2, que val

$$V_{P_2}^{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2} = 9,00\,V$$

i el treball que hem de fer sobre q_2 serà

$$W_2 = q_2 \Delta V = q_2(V_{P_2} - V_\infty) = -3 \cdot 10^{-9} \cdot (9,00 - 0) = -2,7 \cdot 10^{-9}\,J$$

Per dur la tercera càrrega q_3 al punt P_3 hem de tenir en compte el potencial que creen q_1 i q_2

$$\begin{aligned} V_{P_3}^{q_1} + V_{P_3}^{q_2} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} \\ &= 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{8}} + 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{2} \\ &= -0,77\,V \end{aligned}$$

el treball que hem de fer sobre q_3 val

$$W_3 = q_3 \Delta V = q_3(V_{P_3} - V_\infty) = 4 \cdot 10^{-9} \cdot (-0,77 - 0) = -3,09 \cdot 10^{-9}\,J$$

Finalment, per dur la quarta càrrega q_4 al punt P_4 hem de tenir en compte el potencial que creen q_1, q_2 i q_3

$$\begin{aligned} V_{P_4}^{q_1} + V_{P_4}^{q_2} + V_{P_4}^{q_3} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_4}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_4}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{|\overrightarrow{P_3P_4}|} \\ &= 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2} + 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{8}} \\ &+ 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{2} \\ &= 17,45\,V \end{aligned}$$

el treball que hem de fer sobre q_4 val

$W_4 = q_4 \Delta V = q_4(V_{P_4} - V_\infty) = 4 \cdot 10^{-9} \cdot (17,45 - 0) = 6,98 \cdot 10^{-8}\, J$

i el treball total, que correspon a l'energia de configuració del sistema

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 =$$

.

5. (a) Podem escriure la tercera llei de Kepler

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} r^3$$

per trobar

$$r = \sqrt[3]{\frac{T_p^2 GM_e}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,00 \cdot 10^{30}}{4\pi^2}} =$$
$$= 4,49 \cdot 10^{11}\, m$$

(b) A partir de

$$g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

podem escriure

$$GM_p = g_p R_p^2 \qquad 2GM_p = R_p v_e^2$$

i dividint les equacions

$$\frac{\cancel{GM_p}}{2\cancel{GM_p}} = \frac{g_p R_p^{\cancel{2}}}{\cancel{R_p} v_e^2}$$

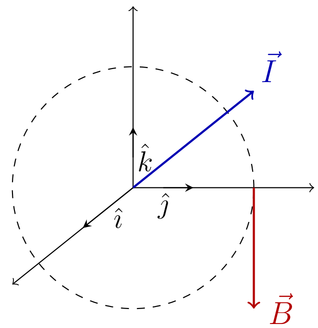
d'on

$$R_p = \frac{v_e^2}{2g_p} = \frac{(11,2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 15} = 4,18 \cdot 10^6\, m$$

i

$$M_p = \frac{g_p R_p^2}{G} = \frac{15 \cdot (4,18 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 3,93 \cdot 10^{24}\, kg$$

6. (a) Donat que és $\vec{I} = -10\,\hat{\imath}$, tenint en compte la circulació del camp magnètic (segons la regla de la mà dreta) tindrem, al punt $(0, 5, 0)$



llavors,el camp magnètic en aquest punt s'escriu com

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\hat{k}) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 5}(-\hat{k}) = -4 \cdot 10^{-7}\,\hat{k}\,T$$

(b) A partir de la llei de Lorentz

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot (4\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}) \times (-4 \cdot 10^{-7}\,\hat{k}) \\ &= 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot (\hat{\imath} \times \hat{k}) + 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot (\hat{\jmath} \times \hat{k}) \\ &= -0,048 \cdot (-\hat{\jmath}) - 0,048 \cdot (\hat{\imath}) = 0,048\hat{\jmath} - 0,048\hat{\imath}\end{aligned}$$

7. (a) El flux es pot trobar com

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \vec{B} \cdot \vec{S} = B(t) \cdot S \cdot \cos\theta \\ &= 2\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 10 \cdot \pi(5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 0,025\pi\sqrt{3}\cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right),\ (Wb)\end{aligned}$$

(b) En quant a la força electromotriu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\left(-0,025\pi\sqrt{3} \cdot 3\pi\sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 0,075\pi^2\sqrt{3}\sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

de forma que per $t = 2\,s$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(2) &= 0,075\pi^2\sqrt{3}\sin\left(3\pi\cdot 2-\frac{\pi}{4}\right) = 0,075\pi^2\sqrt{3}\sin\left(\frac{23\pi}{4}\right)\\ &= 0,075\pi^2\sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0,075\pi^2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -0,907\,V\end{aligned}$$

i la intensitat, calculada a partir de la llei d'Ohm, serà

$$I = \frac{V}{R} = \frac{0,907}{100} = 9,07\cdot 10^{-3}\,A$$

8. (a) Del balanç d'energia de l'efecte fotoelèctric

$$hf = hf_0 + E_c$$

on hf_0 s'interpreta com el treball d'extracció, tenim

$$\begin{aligned}hf_0 &= hf - E_c = h\frac{c}{\lambda} - E_c\\ &= 6,63\cdot 10^{-34}\cdot\frac{3,00\cdot 10^8}{150\cdot 10^{-9}} - 1,602\cdot 10^{-19}\cdot 3,17\\ &= 8,18\cdot 10^{-19}\end{aligned}$$

La longitud d'ona es troba directament a partir del resultat anterior ja que

$$hf_0 = 8,18\cdot 10^{-19} \to f_0 = \frac{8,18\cdot 10^{-19}}{h} = \frac{8,18\cdot 10^{-19}}{6,63\cdot 10^{-34}} = 1,23\cdot 10^{15}\,Hz$$

i llavors

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3,00\cdot 10^8}{1,23\cdot 10^{15}} = 2,44\cdot 10^{-7}\,m = 244\,nm$$

(b) La longitud d'ona de de Broglie es calcula segons

$$\begin{aligned}\lambda_B &= \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2E_c}{m}}} = \frac{6,63\cdot 10^{-34}}{9,11\cdot 10^{-31}\sqrt{\frac{2\cdot 1,602\cdot 10^{-19}\cdot 3,17}{9,11\cdot 10^{-31}}}}\\ &= 6,89\cdot 10^{-10}\,m = 68,9\,nm\end{aligned}$$

9. (a) Calculem l'activitat necessària per una persona de $75\,kg$

$$75\,kg \cdot \frac{0,9\,MBq}{1\,kg} = 67,5\,MBq = 6,75 \cdot 10^7\,Bq$$

el nombre d'àtoms associats a aquesta activitat

$$A = \lambda \cdot N_0 \rightarrow N_0 = \frac{A}{\lambda} = \frac{A}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} = \frac{6,75 \cdot 10^7}{\frac{\ln 2}{3,04 \cdot 24 \cdot 3600}} = 2,56 \cdot 10^{13}$$

llavors, la quantitat en grams que calen és

$$2,56 \cdot 10^{13}\,\cancel{at} \cdot \frac{1\,\cancel{mol\ Tl}}{6,02 \cdot 10^{23}\,\cancel{at}} \cdot \frac{201\,g\ Tl}{1\,\cancel{mol\ Tl}} = 8,54 \cdot 10^{-9}\,g$$

(b) A partir de

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

plantegem l'equació

$$\frac{1}{100} = \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$$

d'on

$$-\lambda t = \ln\left(\frac{1}{100}\right) \rightarrow$$

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln 100 = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\ln 100 = \frac{3,04 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln 2}\ln 100 = 1,74 \cdot 10^6\,s$$