1. (*a*) A partir de la gràfica es veu directament que l'amplitud val

$$A = 100\,nm = 100 \cdot 10^{-9}\,m = 10^{-7}\,m$$

també, podem veure que tarda $6,25\,\mu s$ a fer dues oscil·lacions completes, de forma que podem escriure

$$2T = 6,25\,\mu s \rightarrow T = 3,125\,\mu s = 3,125 \cdot 10^{-6}\,s$$

i llavors, per la freqüència angular tenim

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3,125 \cdot 10^{-6}} = 6,4 \cdot 10^{5}\pi\,rad/s$$

L'equació del moviment és de la forma

$$y(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

i fent servir les condicions inicials

$$y(0) = A \rightarrow A = A\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0$$

llavors podem escriure

$$y(t) = 10^{-7}\cos\left(6,4 \cdot 10^{5}\pi t\right)$$

Per trobar l'acceleració calculem primer la velocitat

$$v(t) = \dot{y}(t) = -6,4 \cdot 10^{-2}\pi\sin\left(6,2 \cdot 10^{5}\pi t\right)$$

llavors

$$a(t) = \dot{v}(t) = -6,4^{2} \cdot 10^{3}\pi^{2}\cos\left(6,4 \cdot 10^{5}\pi t\right)$$

expressió que té com a valor màxim

$$a(t)_{max} = \pm 6,4^{2} \cdot 10^{3}\pi^{2} = \pm 4,043 \cdot 10^{5}\,m/s^{2}$$

al ser el cosinus una funció acotada entre 1 i -1.

(*b*) A partir de les relacions

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega^{2} = \frac{k}{m} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^{2}}$$

podem trobar

$$m = \frac{8}{\left(6,4 \cdot 10^{5}\pi\right)^{2}} = 1,98 \cdot 10^{-12}\,kg$$

Per una altra banda, com és

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

si el període augmenta vol dir que la freqüència angular està disminuïnt i amb

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

es conclou que la massa ha augmentat.

2. (*a*) A partir de les dades del problema, sabem que $A = 7,5\,cm = 0,075\,m$ i per una altra banda, que fa 40 oscil·lacions en $60\,s$.Llavors podem trobar

$$f = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}\,Hz = 0,67\,Hz$$

d'on

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 1,5\,s$$

Per trobar la constant elàstica de la molla calculem la freqüència angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}\,rad/s$$

llavors

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2 = 0,100 \cdot \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 = 1,755\,N/m$$

L'equació del moviment és de la forma

$$y(t) = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

i fent servir les condicions inicials

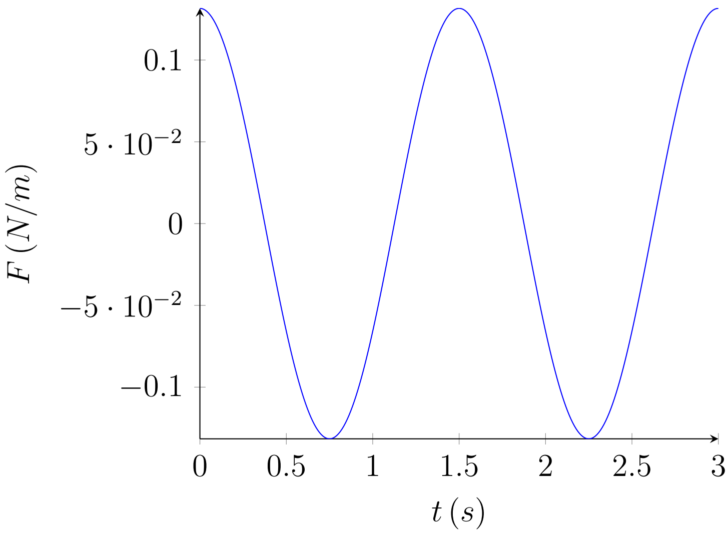
$$y(0) = -A \rightarrow -A = A\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

llavors podem escriure

$$y(t) = 0,075\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \pi\right)$$

L'expressió de la força elàstica en funció del temps es pot trobar com

$$F = -ky(t) = -1,755 \cdot 0,75\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \pi\right) = -0,1316\cos\left(\frac{4\pi}{3}t + \pi\right)$$



(b) L'energia mecànica es pot calcular directament com

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,755 \cdot 0,075^2 = 4,936 \cdot 10^{-3}\,J$$

En quant a l'energia cinètica en funció de la posició de la massa

$$E_c + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \to E_c = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$$

que, amb les dades del problema es pot escriure com

$$E_c = 0,8775\left(5,625 \cdot 10^{-3} - x^2\right)$$

Quan l'elongació val $x = 3\,cm = 0,03\,m$, l'energia cinètica val

$$E_c = 0,8775\left(5,625 \cdot 10^{-3} - 0,03^2\right) = 4,146 \cdot 10^{-3}\,J$$

i com tenim que és

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \to v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

llavors la velocitat demanada valdrà

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,146 \cdot 10^{-3}}{0,1}} = 0,288\,m/s$$

3.(a) Al passar per la posició d'equilibri, l'energia cinètica és la màxima i per tant coincideix amb la mecànica. Per tant, també podem dir que aquest valor de $0,02\,J$ correspon a la potencial elàstica màxima si ens convé, llavors podem escriure

$$\frac{1}{2}kA^2 = 0,02 \rightarrow k = \frac{2\cdot 0,02}{A^2} = \frac{2\cdot 0,02}{(0,05)^2} = 0,8\,N/m$$

(b) Amb

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

tenim

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{14}{0,8}} = 26,284\,s$$

En quant a la velocitat demanada, i a partir de la relació

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_M$$

podem escriure

$$v = \sqrt{\left(E_M - \frac{1}{2}kx^2\right)\frac{2}{m}} = \sqrt{\left(0,02 - \frac{1}{2}0,8\,(0,02)^2\right)\frac{2}{14}} = 0,0532\,m/s$$

4.(a) De l'allargament que provoca la massa al penjar-la de la molla podem deduir

$$mg = ky \rightarrow k = \frac{mg}{y} = \frac{0,5\cdot 9,8}{0,05} = 98\,N/m$$

Ara podem trobar la freqüència angular amb

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{98}{0,5}} = 4,427\,rad/s$$

L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Fent servir les condicions inicials $y(0) = -A$, tindrem

$$-A = A\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

Per una altra banda, la longitud que s'estira després, correspon a l'amplitud del moviment, $A = 0,02\,m$, de forma que podem escriure

$$y(t) = 0,02\cos(4,427t + \pi)$$

(a) Una vegada s'ha penjat la massa, el valor que la molla s'estira està relacionat exclusivament amb l'amplitud del moviment A, i aquest valor no té cap influència en cap altre paràmetre de l'oscil·lador, en particular no altera la pulsació.