1. (a) De la segona llei de Newton tenim

$$F = ma_c \rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

el nanosatèl·lit descriu una circumferència de longitud $2\pi r$ en un temps T, movent-se a velocitat v, llavors

$$2\pi r = vT$$

i podem escriure

$$\frac{GM}{r^2} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r}$$

d'on

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

que resulta ser la tercera llei de Kepler, que ell va deduir experimentalment.
Llavors,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\oplus + h)^3}{GM_\oplus}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6,37\cdot 10^6 + 5,30\cdot 10^5)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}} = 5702,17 = 5,7{\cdot}10^3\,s$$

el nombre de voltes serà

$$\#\,voltes = \frac{24\cdot 3600}{5702,17} = 15,15\,voltes$$

(b) El pes del nanosatèl·lit vindrà condicionat per el valor de g a l'altura on es troba, així

$$g(h) = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{(6,37\cdot 10^6 + 5,30\cdot 10^5)^2} = 8,38\,m/s^2$$

$$P = mg = 1,30\cdot 8,38 = 10,9\,kg$$

2. (a) Fet al primer apartat de l'exercici anterior.

(b) Fent servir les dades de Venus i la tercera llei de Kepler,

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 \, r_{♀}^3}{GT_{♀}^2} = \frac{4\pi \cdot (108,2 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (0,6152 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1,99{\cdot}10^{30} \, kg$$

3. (a) De la segona llei de Newton tenim

$$F = ma_c \rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

que ens proporciona la velocitat de les òrbites circulars estables en funció de la distància al **centre** de forces

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Llavors, l'energia cinètica (el centre de forces és Júpiter) es pot calcular com

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM_J}{R_J + h} = \frac{1}{2}{\cdot}3625{\cdot}\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,90 \cdot 10^{27}}{69911 \cdot 10^3 + 4300 \cdot 10^3} = 3,10{\cdot}10^{12} \, J$$

En quant al període, els objectes en òrbita descriuen una circumferència de longitud $2\pi r$ en un temps T, movent-se a velocitat v, llavors

$$2\pi r = vT$$

i podem escriure

$$\frac{GM}{r^2} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r}$$

d'on

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

En el nostre cas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_J + h)^3}{GM_J}} = 2\pi\sqrt{\frac{(69911 \cdot 10^3 + 4300 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,90 \cdot 10^{27}}} = 1,13 \cdot^4 \, s$$

(b) La sonda es troba lligada gravitatòriament a Júpiter, és a dir, la seva energia mecànica és negativa, i val

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_J\, m}{R_J + h}$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{GM_J}{R_J + h} - G\frac{M_J\, m}{R_J + h}$$

$$= -\frac{1}{2}G\frac{M_J\, m}{R_J + h} \qquad (= -E_c)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,90 \cdot 10^{27} \cdot 3625}{69911 \cdot 10^3 + 4300 \cdot 10^3} = -3,10 \cdot 10^{12}\, J$$

llavors, si volem que ho deixi d'estar, li hem de comunicar exactament l'energia que té, d'aquesta manera $E_M = 0$ que és el valor mínim que ha de tenir l'energia mecànica per considerar que no es troben lligats. En resum, cal donar

$$E = 3,10 \cdot 10^{12}\, J$$

4. Farem servir resultats ja deduïts en els exercicis anteriors.

La velocitat de l'òrbita és

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{GM}{R+6R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 6,37 \cdot 10^6}} = 2,99 \cdot 10^3\, m/s$$

(b) L'energia cinètica val

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot (2,99 \cdot 10^3)^2 = 8,94 \cdot 10^8\, J$$

(c) L'enegia potencial gravitatòria es pot calcular a partir de la seva definició

$$E_{pg} = -\frac{GMm}{R+h} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 200}{7 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = -1,79 \cdot 10^9\, J$$

(d) L'energia mecànica val

$$E_M = E_c + E_{pg} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h} = 8,94 \cdot 10^8 - 1,79 \cdot 10^9 = -8,96 \cdot 10^8\, J$$

(e) Per trobar la velocitat d'escapament demanarem que l'energia mecànica

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h}$$

valgui zero, que és la condició perquè deixin d'estar lligats gravitatòriament, llavors

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R+h}$$

d'on

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 6,37 \cdot 10^6}} = 4,23 \cdot 10^3\, m/s$$

(f) Plantegem un balanç d'energia, compte que ens diuen que s'atura de cop, llavors en el moment de caure només té energia potencial gravitatòria i aquesta ha de ser igual a la cinètica més la potencial gravitatòria que té al arribar a la superfície

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R+h} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{R}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{R} - \frac{GM}{R+h}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = GM \cdot \frac{h}{R(R+h)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}} = \sqrt{\frac{2GM \cdot 6R}{R(R+6R)}} = \sqrt{\frac{12GM}{7R}}$$

$$v = \sqrt{\frac{12 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot}{7 \cdot 6,37 \cdot 10^6}} = 1,04 \cdot 10^4\, m/s$$

(g) El treball que cal per posar-lo en òrbita és igual a la variació de l'energia mecànica. Com és habitual, ignorem l'energia cinètica que té associat l'objecte a la velocitat de rotació terrestre.

$$W_{R\to h} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R+h} - \left(-G\frac{Mm}{R}\right)$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{2(R+h)} - \frac{1}{R}\right)$$

$$= -GMm\frac{R-2(R+h)}{2(R+h)R}$$

$$= GMm\frac{2(R+h)-R}{2(R+h)R}$$

$$= GMm\frac{R+2h}{2(R+h)R}$$

$$= GMm\frac{R+2\cdot 6R}{2(R+6R)R}$$

$$= GMm\frac{13R}{14R^2}$$

$$= GMm\frac{13}{14R}$$

$$= 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 200\cdot\frac{13}{14\cdot 6,37\cdot 10^6} = 1,16\cdot 10^{10}\,J$$