1. (a) Posem un sistema de coordenades amb origen (O) al centre del quadrat (es posar a qualsevol altre punt). D'aquesta manera, les càrregues queden situades en els punts

$$q_1 \to P_1 = (-1, 0)$$
$$q_2 \to P_2 = (1, 1)$$
$$q_3 \to P_3 = (1, -1)$$
$$q_4 \to P_4 = (-1, -1)$$

i els vectors que van de cada càrrega a l'origen de coordenades tenen com a components

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1O} = (1, -1)$$
$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2O} = (-1, -1)$$
$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{P_3O} = (-1, 1)$$
$$\vec{r}_4 = \overrightarrow{P_4O} = (1, 1)$$

Noteu que les components d'aquests vectors no depenen de la tria feta anteriorment per l'origen de coordenades. Els seus mòduls valen

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$|\vec{r}_2| = r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$|\vec{r}_3| = r_3 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$|\vec{r}_4| = r_4 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

de forma que el camp elèctric que crea cada càrrega al centre del quadrat val

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} \cdot (1, -1)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} \cdot (-1, -1)$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3^3}\vec{r}_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{7 \cdot 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} \cdot (-1, 1)$$

$$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_4^3}\vec{r}_4 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} \cdot (1, 1)$$

i la seva suma,

$$\vec{E}_{total} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \cdot \left[27 \cdot (1,-1) - 36 \cdot (-1,-1) + 63 \cdot (-1,1) + 18 \cdot (1,1)\right]$$

$$\vec{E}_{total} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \cdot (18, 90) = (6.36, 31.82)\, N/C$$

(b) El potencial que crea cada càrrega al centre del quadrat val

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{2}}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{2}}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{7 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{2}}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_4}{r_4} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{2}}$$

de forma que el potencial total val

$$V_O = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[27 - 36 + 63 + 18\right] = 50,91\, V$$

(c) Necessitem calcular el potencial al punt mig del costat superior del quadrat (diguem-li per exemple, M) i els vectors involucrats ara són

$$\vec{r'}_1 = \overrightarrow{P_1M} = (1,0)$$
$$\vec{r'}_2 = \overrightarrow{P_2M} = (-1,0)$$
$$\vec{r'}_3 = \overrightarrow{P_3M} = (-1,2)$$
$$\vec{r'}_4 = \overrightarrow{P_4M} = (1,2)$$

amb mòduls

$$|\vec{r'}_1| = r'_1 = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$
$$|\vec{r'}_2| = r'_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$
$$|\vec{r'}_3| = r'_3 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
$$|\vec{r'}_4| = r'_4 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Llavors el potencial que crea cada càrrega en M val

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r'_1} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-9}}{1}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r'_2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-4\cdot 10^{-9}}{1}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r'_3} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{7\cdot 10^{-9}}{\sqrt{5}}$$

$$V_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_4}{r'_4} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{2\cdot 10^{-9}}{\sqrt{5}}$$

i el potencial total en M

$$V_M = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 27 - 36 + \frac{63}{\sqrt{5}} + \frac{18}{\sqrt{5}} = 27,22\,V$$

Ara ja podem calcular el treball que cal fer per moure una càrrega $Q = 5\,nC$ des del centre del quadrat (O), fins al punt mig del costat superior (M)

$$W_{O\to M} = Q(V_M - V_O) = 5\cdot 10^{-9}\cdot(27,22 - 50,91) = -1,2\cdot 10^{-7}\,J$$

2. Calculem el treball que cal fer per portar cada càrrega des de l'infinit fins al punt de destinació de cadascuna.

   Per la primera càrrega aquest treball val

$$W_1 = W_{\infty\to P_1} = q_1(V_{P_1} - V_\infty) = 3\cdot 10^{-9}\cdot(0-0) = 0\,J$$

   ja que abans que q_1 arribi al seu punt de destí, no hi ha cap altre càrrega present i per tant, el potencial electrostàtic al punt P_1 val zero. Recordem que $V_\infty = 0$ per definició.

   En quant a la segona càrrega, quan aquesta arribi a P_2, sí sentirà els efectes del potencial que crea q_1 en aquest punt, perquè q_1 ja està al seu lloc quan q_2 arriba a P_2. Llavors

$$W_2 = W_{\infty\to P_2} = q_2(V_{P_2} - V_\infty)$$

   Necessitem doncs calcular el potencial que crea q_1 en P_2, que anomenarem $V_{P_2}^{q_1}$.

Comencem calculant $\overrightarrow{P_1P_2} = (4, 0)$, amb mòdul $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$, aleshores

$$V_{P_2}^{q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-9}}{4} = \frac{27}{4}\,V$$

i

$$W_2 = -4\cdot 10^{-9}\left(\frac{27}{4} - 0\right) = -2,7\cdot 10^{-8}\,J$$

Ara hem de portar q_3 fins a la seva destinació. Per calcular el treball que cal per fer-ho, hem de calcular el potencial electroestàtic present en P_3 i creat ara tant per q_1 com per q_2.

Necessitem els vectors $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, 4)$ i $\overrightarrow{P_2P_3} = (-2, 4)$, amb mòduls $|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{20}$ i $|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{20}$. Amb la mateixa notació que abans tenim

$$W_3 = W_{\infty\to P_3} = q_3(V_{P_3} - V_\infty)$$

a banda, ara V_{P_3} té dues contribucions, tal com hem dit abans, i és

$$V_{P_3} = V_{P_3}^{q_1} + V_{P_3}^{q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{3\cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}} - 9\cdot 10^9\cdot\frac{4\cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

$$V_{P_3} = -2,012\,V$$

finalment

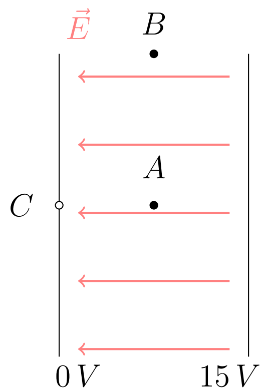
$$W_3 = W_{\infty\to P_3} = q_3(V_{P_3} - V_\infty) = 7\cdot 10^{-9}\cdot(-2,012 - 0) = -1,409\cdot 10^{-8}\,J$$

El treball total doncs serà

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 0 - 2,7\cdot 10^{-8} - 1,409\cdot 10^{-8} = -4,109\cdot 10^{-8}\,J$$

i correspon a l'energia de configuració del sistema de càrregues.

3. A partir de l'enunciat



(a) Els sentit del camp elèctric és l'indicat.

(b) Fent servir

$$E \cdot d = V \rightarrow E = \frac{V}{d} = \frac{15}{3 \cdot 10^{-3}} = 5000\, N/C$$

(c) Al punt A el potencial val exactament el valor mig dels extrems, és a dir

$$\frac{0 + 15}{2} = 7,5\, V$$

(d) El camp elèctric val el mateix en tots els punts interiors del condensador, (es tracta d'un camp uniforme). D'aquesta manera, la relació

$$E = \frac{V}{d}$$

es compleix.

(e) Un electró que entri pel punt B patirà una desviació en la seva trajectòria de forma que de rectilínia passarà a parabòlica, ja que hi ha una força (que provocarà una acceleració) en la direcció horitzontal. Sabem que les càrregues negatives es mouen cap a potencials més alts (vam fer el símil amb una pilota que pujaria espontàniament pel pendent d'una muntanya), per tant, es desvia cap a la dreta.

(f) El protó no es mourà, ja que les càrregues positives es mouen cap a potencials més baixos, i ja es troba en el mínim.