

1. (a) A partir de  $F = kx$ , on  $x$  és la distància que s'allarga la molla al posar-li la massa, podem escriure

$$mg = kx$$

d'on

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0,5 \cdot 9,81}{0,02} = 245,25 \text{ N/m}$$

En quant a la freqüència angular de l'oscil·lació

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{245,25}{0,5}} = 22,15 \text{ rad/s}$$

- (b) Tenint en compte que l'amplitud són  $A = 0,2 \text{ m}$  i que el moviment comença al punt inferior ( $y(0) = -A$ ), l'equació de l'oscil·lador

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

s'escriu

$$y(t) = 0,03 \cos(22,15t + \pi)$$

En quant a la longitud mínima de la molla, l'enunciat és poc precís i pot donar lloc a confusions. Hem d'entendre que la molla s'estira  *fins arribar*  a una longitud de  $20 \text{ cm}$ . És a dir que l'amplitud val  $3 \text{ cm}$ . L'altre interpretació, que l'allarguem  $20 \text{ cm}$  afegits als que ja s'havia estirat és impossible de realitzar perquè la molla mesura, un cop penjada la massa,  $17 \text{ cm}$ . Llavors, la longitud mínima serà  $17 - 3 = 14 \text{ cm}$ . Degut a aquesta imprecisió es comptarà bé qualsevol de les dues interpretacions.

2. (a) El mode fonamental en una corda lligada pels extrems presenta dos nodes i un ventre (els detalls es troben als apunts). La longitud d'ona és  $\lambda = 2l$  de forma que  $\lambda = 2 \cdot 0,7 = 1,4 \text{ m}$ .

El tercer harmònic presenta quatre nodes i tres ventres de forma que en la longitud  $l$  de la corda hi ha  $1,5$  longituds d'ona de forma que ara serà  $1,5\lambda = 0,7 \rightarrow \lambda = 0,47 \text{ m}$ .

- (b) La velocitat de l'ona estacionària no varia. La calculem amb les dades del mode fonamental per obtenir

$$\lambda = \frac{v}{f} \rightarrow v = \lambda f = 1,4 \cdot 300 = 420 \text{ m/s}$$

3. (a) El so és una ona mecànica tridimensional longitudinal que correspon a les variacions de pressió que pateix l'aire. La longitud d'ona es pot calcular com

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{698} = 4,87 \cdot 10^{-1} m$$

- (b) Considerant que es tracta d'una ona tridimensional i sabent que la potència generada per un violí s'haurà de repartir en la superfície d'una esfera de radi  $r = 20 m$ , la intensitat valdrà

$$I = \frac{P}{S} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 20^2} = 9,95 \cdot 10^{-7} W/m^2$$

Llavors, en quant al nivell d'intensitat sonora si hi ha 15 violins

$$\beta = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{15 \cdot 9,95 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 71,7 dB$$

4. (a) Centrem el quadrat a l'origen de coordenades i suposem que les càrregues es troben als punts

$$q_1 \rightarrow P_1 = (-1, 1)$$

$$q_2 \rightarrow P_2 = (1, 1)$$

$$q_3 \rightarrow P_3 = (1, -1)$$

$$q_4 \rightarrow P_4 = (-1, -1)$$

calculem els vectors i mòduls corresponents

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1 O} = (1, -1) \quad r_1 \equiv |\overrightarrow{P_1 O}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2 O} = (-1, -1) \quad r_2 \equiv |\overrightarrow{P_2 O}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{P_3 O} = (-1, 1) \quad r_3 \equiv |\overrightarrow{P_3 O}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}_4 = \overrightarrow{P_4 O} = (1, 1) \quad r_4 \equiv |\overrightarrow{P_4 O}| = \sqrt{2}$$

llavors el camp total al centre del quadrat

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3^3} \vec{r}_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_4}{r_4^3} \vec{r}_4$$

de forma que

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10^{-9}}{(\sqrt{2})^3} \left[ 2 \cdot (1, -1) - 3 \cdot (-1, -1) + 4 \cdot (-1, 1) - 5 \cdot (1, 1) \right] \\ &= \frac{9}{(\sqrt{2})^3} \cdot (-4, 0) = (-12.73, 0) \text{ N/C}\end{aligned}$$

- (b) Calculem el treball que s'ha de fer per dur cada càrrega des de l'infinit fins al punt de destí. Recordem que per definició  $V_\infty = 0$ . Per dur la càrrega  $q_1$  hem de fer un treball

$$W_1 = q_1 \Delta V = q_1 (V_{P_1} - V_\infty) = 0$$

Per dur la segona càrrega  $q_2$  al punt  $P_2$  hem de tenir en compte que com  $q_1$  ja es troba al seu lloc, crea un cert potencial en  $P_2$ , que val

$$V_{P_2}^{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{P_1 P_2}|} = 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2} = 9,00 \text{ V}$$

i el treball que hem de fer sobre  $q_2$  serà

$$W_2 = q_2 \Delta V = q_2 (V_{P_2} - V_\infty) = -3 \cdot 10^{-9} \cdot (9,00 - 0) = -2,7 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Per dur la tercera càrrega  $q_3$  al punt  $P_3$  hem de tenir en compte el potencial que creen  $q_1$  i  $q_2$

$$\begin{aligned}V_{P_3}^{q_1} + V_{P_3}^{q_2} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{P_1 P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{P_2 P_3}|} \\ &= 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{8}} + 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{2} \\ &= -0,77 \text{ V}\end{aligned}$$

el treball que hem de fer sobre  $q_3$  val

$$W_3 = q_3 \Delta V = q_3 (V_{P_3} - V_\infty) = 4 \cdot 10^{-9} \cdot (-0,77 - 0) = -3,09 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Finalment, per dur la quarta càrrega  $q_4$  al punt  $P_4$  hem de tenir en compte el potencial que creen  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$

$$\begin{aligned} V_{P_4}^{q_1} + V_{P_4}^{q_2} + V_{P_4}^{q_3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_4}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_4}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{|\overrightarrow{P_3P_4}|} \\ &= 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2} + 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{8}} \\ &\quad + 9,00 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{2} \\ &= 17,45 \text{ V} \end{aligned}$$

el treball que hem de fer sobre  $q_4$  val

$$W_4 = q_4 \Delta V = q_4 (V_{P_4} - V_\infty) = 4 \cdot 10^{-9} \cdot (17,45 - 0) = 6,98 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

i el treball total, que correspon a l'energia de configuració del sistema

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 =$$

.

5. (a) Podem escriure la tercera llei de Kepler

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} r^3$$

per trobar

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{T_p^2 GM_e}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,00 \cdot 10^{30}}{4\pi^2}} = \\ &= 4,49 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{aligned}$$

- (b) A partir de

$$g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

podem escriure

$$GM_p = g_p R_p^2 \quad 2GM_p = R_p v_e^2$$

i dividint les equacions

$$\frac{GM_p}{2GM_p} = \frac{g_p R_p^2}{R_p v_e^2}$$

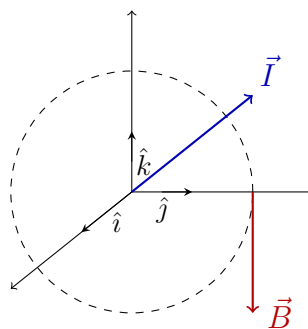
d'on

$$R_p = \frac{v_e^2}{2g_p} = \frac{(11,2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 15} = 4,18 \cdot 10^6 \text{ m}$$

i

$$M_p = \frac{g_p R_p^2}{G} = \frac{15 \cdot (4,18 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 3,93 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

6. (a) Donat que és  $\vec{I} = -10\hat{i}$ , tenint en compte la circulació del camp magnètic (segons la regla de la mà dreta) tindrem, al punt  $(0, 5, 0)$



llavors, el camp magnètic en aquest punt s'escriu com

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\hat{k}) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 5} (-\hat{k}) = -4 \cdot 10^{-7} \hat{k} \text{ T}$$

- (b) A partir de la llei de Lorentz

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot (4\hat{i} + 4\hat{j}) \times (-4 \cdot 10^{-7} \hat{k}) \\ &= 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &= -0,048 \cdot (-\hat{j}) - 0,048 \cdot (\hat{i}) = 0,048\hat{j} - 0,048\hat{i} \end{aligned}$$

7. (a) El flux es pot trobar com

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \vec{B} \cdot \vec{S} = B(t) \cdot S \cdot \cos \theta \\ &= 2 \cos \left( 3\pi t - \frac{\pi}{4} \right) \cdot 10 \cdot \pi (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 0,025\pi\sqrt{3} \cos \left( 3\pi t - \frac{\pi}{4} \right), \text{ (Wb)} \end{aligned}$$

(b) En quant a la força electromotriu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\left(-0,025\pi\sqrt{3} \cdot 3\pi \sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 0,075\pi^2\sqrt{3} \sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

de forma que per  $t = 2 \text{ s}$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(2) &= 0,075\pi^2\sqrt{3} \sin\left(3\pi \cdot 2 - \frac{\pi}{4}\right) = 0,075\pi^2\sqrt{3} \sin\left(\frac{23\pi}{4}\right) \\ &= 0,075\pi^2\sqrt{3} \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0,075\pi^2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -0,907 \text{ V}\end{aligned}$$

i la intensitat, calculada a partir de la llei d'Ohm, serà

$$I = \frac{V}{R} = \frac{0,907}{100} = 9,07 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

8. (a) Del balanç d'energia de l'efecte fotoelèctric

$$hf = hf_0 + E_c$$

on  $hf_0$  s'interpreta com el treball d'extracció, tenim

$$\begin{aligned}hf_0 &= hf - E_c = h\frac{c}{\lambda} - E_c \\ &= 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3,00 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^{-9}} - 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 3,17 \\ &= 8,18 \cdot 10^{-19}\end{aligned}$$

La longitud d'ona es troba directament a partir del resultat anterior ja que

$$hf_0 = 8,18 \cdot 10^{-19} \rightarrow f_0 = \frac{8,18 \cdot 10^{-19}}{h} = \frac{8,18 \cdot 10^{-19}}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 1,23 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

i llavors

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,23 \cdot 10^{15}} = 2,44 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 244 \text{ nm}$$

(b) La longitud d'ona de de Broglie es calcula segons

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2E_c}{m}}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 3,17}{9,11 \cdot 10^{-31}}}}$$

$$= 6,89 \cdot 10^{-10} m = 68,9 nm$$

9. (a) Calculem l'activitat necessària per una persona de 75 kg

$$75 kg \cdot \frac{0,9 MBq}{1 kg} = 67,5 MBq = 6,75 \cdot 10^7 Bq$$

el nombre d'àtoms associats a aquesta activitat

$$A = \lambda \cdot N_0 \rightarrow N_0 = \frac{A}{\lambda} = \frac{A}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} = \frac{6,75 \cdot 10^7}{\frac{\ln 2}{3,04 \cdot 24 \cdot 3600}} = 2,56 \cdot 10^{13}$$

llavors, la quantitat en grams que calen és

$$2,56 \cdot 10^{13} \cdot \frac{1 \overline{mol Tl}}{6,02 \cdot 10^{23} \overline{at}} \cdot \frac{201 g Tl}{1 \overline{mol Tl}} = 8,54 \cdot 10^{-9} g$$

(b) A partir de

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

plantejem l'equació

$$\frac{1}{100} = \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda t}$$

d'on

$$-\lambda t = \ln \left( \frac{1}{100} \right) \rightarrow$$

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln 100 = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln 100 = \frac{3,04 \cdot 24 \cdot 3600}{\ln 2} \ln 100 = 1,74 \cdot 10^6 s$$