5 Treball i energia

5.1 Definició de treball

El treball ($\boldsymbol{W}$) que fa una força $\boldsymbol{F}$ constant aplicada sobre un cos quan aquest recorre una distància $\boldsymbol{x}$ es calcula com:

$$\boldsymbol{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} \tag{18}$$

o també

$$\boldsymbol{W} = |\vec{\boldsymbol{F}}||\vec{\boldsymbol{x}}| \cos \boldsymbol{\theta} \tag{19}$$

on $\boldsymbol{\theta}$ és l'angle que formen la força i la direcció (amb sentit) del moviment del cos.

5.1.1 Forces conservatives

Diem que una força es conservativa si el treball total que realitza sobre una partícula és zero quan la partícula recorre una trajectòria tancada i torna a la seva posició inicial. Per exemple, la força gravitatòria té aquesta propietat, ja que per exemple, per elevar un cos de massa $\boldsymbol{m}$ una certa alçada $\boldsymbol{h}$ cal fer una força igual al seu pes ($\boldsymbol{mg}$), i com la distància recorreguda és $\boldsymbol{h}$, el treball realitzat sobre el cos és

$$\boldsymbol{W} = |\vec{\boldsymbol{F}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{x}}| \cos \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \cos \boldsymbol{0^o} = \boldsymbol{mgh}$$

i si es deixa anar el cos, aquest "torna"el treball que s'havia fet sobre ell. Una altra forma equivalent de descriure una força conservativa és dient que el treball realitzat per una força conservativa és independent de la forma en que la partícula es mou d'un punt a l'altre. Reprenent l'exemple d'abans, és fàcil veure que es faria el mateix treball si pugéssim el cos per un pla inclinat (sense fregament). Una forma d'interpretar les forces conservatives es pensar que d'alguna forma el treball fet sobre un cos "es guarda o conserva en aquestï per tant, més endevant estarà a disposició.

5.1.2 Forces no conservatives

Les forces no conservatives són les que no tenen les propietats abans esmentades. Per exemple, la força de fregament, és no conservativa. Si movem un cos al llarg d'una distància determinada sobre una superfície amb fregament, fem un treball donat pel producte de la força de fregament que hem de vèncer i la distància recorreguda. Si ara tornem el cos enrera, la força de fregament canvia de sentit, (sempre s'oposa al sentit del moviment), i hem de fer més treball. Les forces no conservatives no "guarden"el treball fet sobre el cos, normalment aquest es perd en forma de calor.

5.2 Energia cinètica i potencial

L'energia cinètica d'un cos de massa $\boldsymbol{m}$ que es mou amb velocitat $\boldsymbol{v}$ és:

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}mv^2} \tag{20}$$

i com veiem és sempre una quantitat no negativa.

L'energia potencial gravitatòria d'un cos que es troba a prop de la superfície terrestre és:

$$\boldsymbol{E_{pg} = mgh} \tag{21}$$

On $\boldsymbol{h}$ és l'alçada del cos mesurada desde un cert sistema de referència. La importancia d'aquestes quantitats és que si definim l'energia mecànica d'un cos com:

$$\boldsymbol{E_M = E_c + E_{pg}} \tag{22}$$

aleshores, si totes les forces que actuen sobre un cos són conservatives, l'energia mecànica es conserva. Quan haguem de resoldre exercicis normalment haurem de fer un balanç d'energia. Incorporarem les forces no conservatives calculant el treball que fan aquestes ($\boldsymbol{W_{nc}}$).

5.3 Potència

El treball realitzat per una força en la unitat de temps és la *potència* P de la força:

$$\boldsymbol{P = \frac{W}{t}} \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

i al sistema internacional es mesura en Watts ($\boldsymbol{W}$).

5.4 Xocs

Com hem vist abans, si la resultant de les forces que actuen sobre un cos és zero, el moment lineal del sistema es conserva. Si l'energia cinètica no es conserva direm que el xoc és *inelàstic*. En aquestes condicions els cossos patiran deformacions que poden ser permanents. Si els dos cossos queden units després del xoc, direm que aquest és *totalment inelàstic*. Si l'energia cinètica es conserva, direm que el xoc és *elàstic*.

Existeix una quantitat molt important que s'anomena *coeficient de restitució*, que controla el *grau d'elasticitat* del xoc. Veiem com obtenir-la.

Suposem que tenim dues masses $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$ que patiran un xoc elàstic. Aleshores, de la conservació del moment lineal i l'energia cinètica, podem escriure:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

ara, traient denominadors i reordenant a cada equació:

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 v_1' = m_2 v_2' - m_2 v_2 \\ \\ m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2 = m_2 v_2'^2 - m_2 v_2^2 \end{cases}$$

traient factor comú:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \\ \\ m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \end{cases}$$

fent servir que suma per diferència és diferència de quadrats:

$$\begin{cases} m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \\ \\ m_1 (v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2 (v_2' + v_2)(v_2' - v_2) \end{cases}$$

Fent servir la primera equació en la segona:

$$m_1 (v_1 + v_1') \frac{m_2}{m_1} (v_2' - v_2) = m_2 (v_2' + v_2)(v_2' - v_2)$$

on, suposant que les masses són diferents de zero i $\boldsymbol{v_2' \neq v_2}$, tenim:

$$(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2)$$

o també:

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$$

Aquesta expresió només es compleix si es conserva l'energia cinètica, però podem generalitzar-lo i definir el *coeficient de restitució*, $\boldsymbol{e}$ com:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

Fixem-nos en que per un xoc elàstic serà $\boldsymbol{e = 1}$, per un inelàstic $\boldsymbol{0 < e < 1}$, i per un totalment inelàstic $\boldsymbol{e = 0}$.

Exercicis

1. Una caixa de $\boldsymbol{10kg}$ descansa sobre una taula horitzontal. El coeficient de fricció entre la caiza i la taula és $\boldsymbol{\mu = 0,4}$. Una força $\boldsymbol{F_x}$ impulsa la caixa a velocitat constant al llarg de 5 metres. Trobeu el treball realitzat per:
   (a) la força $\boldsymbol{F_x}$
   (b) la força de fregament
2. Una bala de massa $\boldsymbol{m = 10g}$ té una velocitat $\boldsymbol{v = 1000\frac{m}{s}}$.
   (a) quina és la seva energia cinètica?
   (b) si la velocitat es redueix a la meitat, quina serà ara la seva energia cinètica?
3. Una caixa de massa $\boldsymbol{m = 5kg}$ inicialment en repòs sobre una taula sense fregament, s'empeny amb una força horitzontal constant $\boldsymbol{F = 10N}$ al llarg de 6 metres. Determineu l'energia cinètica final de la caixa i la seva velocitat final.
4. Una caixa de massa $\boldsymbol{m = 2kg}$ està inicialment en repòs sobre una taula horitzontal. El coeficient de fregament entre la caixa i la taula és $\boldsymbol{\mu = 0,4}$. La caixa és impulsada al llarg d'una distància $\boldsymbol{d = 3m}$ per l'acció d'una força $\boldsymbol{F = 10N}$.
   (a) Determineu el treball realitzat per la força aplicada.
   (b) Determineu el treball realitzat per la fricció.
   (c) Determineu la variació d'energia cinètica experimentada per la caixa.
   (d) Calculeu la velocitat de la caixa després d'un recorregut de 3 metres.
5. Un cotxe de massa $\boldsymbol{m = 2000kg}$ es mou amb una velocitat inicial $\boldsymbol{v = 25\frac{m}{s}}$. Si s'atura en 60 metres per l'acció d'una força de fricció constant
   (a) Quina és l'energia inicial del cotxe?
   (b) Quant treball fa la força de fregament?
   (c) Quin és el coeficient de fregament?

6. Una caixa de massa $\boldsymbol{5kg}$ és impulsada una distància de 6 metres al llarg d'una superfície horitzontal sense fregament per una força $\boldsymbol{F = 20N}$ que forma un angle $\boldsymbol{\alpha = 30^o}$ amb l'horitzontal. Determineu:
   (a) el treball realitzat per la força
   (b) la variació d'energia cinètica de la caixa
   (c) la velocitat final si inicialment es trobava en repòs
7. A quina alçada s'ha de pujar una massa perquè incrementi la seva energia potencial en una quantitat igual a l'energia cinètica que tindria si es mogués amb velocitat $\boldsymbol{v = 20\frac{m}{s}}$?
8. Un bloc de massa $\boldsymbol{m_1 = 100kg}$ està en repòs sobre una taula sense fricció i que acaba en un extrem en una paret. Un altre bloc de massa $\boldsymbol{m_2}$ es col·loca entre la paret i el primer bloc i es mou cap a l'esquerra amb una velocitat $\boldsymbol{v_2}$. Suposant que tots els xocs són elàstics trobeu $\boldsymbol{m_2}$ per que els dos blocs es moguin amb la mateixa velocitat una vegada que $\boldsymbol{m_2}$ ha xocat una vegada contra $\boldsymbol{m_1}$ i una altra contra la paret.
9. Una bala de massa $\boldsymbol{m = 100g}$ i amb velocitat $\boldsymbol{v}$ xoca amb un pèndol simple de massa $\boldsymbol{M = 1kg}$ i longitud $\boldsymbol{L = 2m}$. Inmediatament després del xoc la massa $\boldsymbol{M}$ s'enlaira i la bala, que no modifica la seva trajectòria inicial, surt amb velocitat $\boldsymbol{\frac{v}{2}}$.
   (a) quina és la velocitat mínima de la bala per tal que el pèndol doni la volta completa?
   (b) si $\boldsymbol{v = 300\frac{m}{s}}$, trobeu:
      i. el treball fet per les forces de fregament
      ii. la tensió a la corda per a $\boldsymbol{\theta = 45^o}$
      iii. les acceleracions tangencial i normal per a $\boldsymbol{\theta = 90^o}$
10. Es projecta un bloc al llarg d'una superficie horitzontal amb velocitat inicial $\boldsymbol{v_0 = 10\frac{m}{s}}$. El coeficient de fregament entre el bloc i la superfície és $\boldsymbol{\mu = 0,2}$. Quina distància recorre el bloc abans de quedar aturat?
11. Un bloc de massa $\boldsymbol{m = 2kg}$ situat a una alçada d'un metre llisca per una rampa corba i llisa des del repòs. Després arriba a una superfície horitzontal rugosa abans de quedar aturat.
   (a) quina és la velocitat del bloc a la part inferior de la rampa?
   (b) quant treball fa el fregament sobre el bloc?

(c) quant val el coeficient de fregament entre el bloc i la superfície horitzontal?

12. Un cos de massa $\boldsymbol{m = 3kg}$ llisca al larg d'una superfície horitzontal sense fregament amb una velocitat $\boldsymbol{v = 5\frac{m}{s}}$. Després d'haver recorregut una distància de 2 metres es troba amb una rampa inclinada sense fregament que forma un angle $\boldsymbol{\alpha = 30^o}$ amb l'horitzontal. Fins quina alçada arriba el cos? Quant espai ha recorregut en total?

13. Repetiu l'exercici anterior en el cas en que sigui $\boldsymbol{\mu = 0,2}$.

14. Un noi es troba gronxant-se d'una corda de longitud $\boldsymbol{L = 4m}$ que es trencarà quan la tensió a que està sotmesa sigui igual al doble del pes del noi.

    (a) quin és l'angle més gran que pot formar la corda amb la vertical sense trencar-se?

    (b) quina és la velocitat del noi en el moment de trencar-se la corda?

15. Un cos de massa $\boldsymbol{m = 2kg}$ es deixa lliure sobre un pla inclinat cap abaix a una distància de 4 metres d'una molla amb constant $\boldsymbol{k = 100\frac{N}{m}}$. La molla està fixada al llarg del pla inclinat que forma un angle $\boldsymbol{\alpha = 30^o}$.

    (a) trobeu la compressió màxima de la molla, suposant que no té massa.

    (b) si el pla inclinat no és llis si no que té un coeficient de fregament $\boldsymbol{\mu = 0,2}$, trobeu la compressió màxima

    (c) en aquest darrer cas, trobeu fins a quin punt pujarà la massa pel pla després d'abandonar la molla.

16. Es llença una petita pilota de massa $\boldsymbol{15g}$ mitjançant una pistola de joguina que té una molla de constant $\boldsymbol{k = 600\frac{N}{m}}$. La molla pot comprimir-se fins a 5 centímetres

    (a) quina alçada pot assolir la pilota si s'apunta verticalment?

    (b) quina és la distància horitzontal màxima que pot recórrer la pilota amb aquesta compressió?

17. Es dispara sobre un pèndol balístic de massa $\boldsymbol{M = 1,5kg}$ un projectil de massa $\boldsymbol{m = 15g}$. Quan el pèndol està a la seva altura màxima la corda de la qual penja forma una angle $\boldsymbol{\alpha = 60^o}$ amb la vertical. La longitud del péndol és $\boldsymbol{L = 2m}$. Trobeu la velocitat del projectil.