Índex

1 La mesura

1.
a) $1,61 + 0,3 = 1,91 \approx 1,9$ (hem d'arrodonir a un decimal)

b) $5,935 - 4,51 = 1,425 \approx 1,42$ (hem d'arrodonir a dos decimals)

c) $152,06 \cdot 0,24 = 36,4944 \approx 37$ (el resultat ha de tenir dues xifres significatives)

d) $58,93 \cdot 0,1 = 5,893 \approx 6$ (el resultat ha de tenir una xifra significativa)

* * *

2. Anomenem a la variable alçària. Calculem primer la mitjana $\bar{a}$,

$$\bar{a} = \frac{\begin{array}{c}1,85 + 1,89 + 1,92 + 1,94 + 1,96 + \\ + 1,98 + 1,97 + 1,97 + 2,04 + 1,99\end{array}}{10} = 1,951$$

ara, per calcular la desviació estàndard, podem fer servir una taula de la següent manera (de moment mantenim tots els decimals possibles, al final de tot arrodonirem)

a_i	$a_i - \bar{a}$	$(a_i - \bar{a})^2$
1,85	-0,101	0,010201
1,89	-0.061	0,003721
1,92	-0.031	0,000961
1,94	-0.011	0,000121
1,96	0,009	0,000081
1,98	0,029	0,000841
1,97	0,019	0,000361
1,97	0,019	0,000361
2,04	0,089	0,007921
1,99	0,039	0,001521
	$\sum = 0$	$\sum = 0,02609$

Com es pot veure, hem comprovat que la suma de les desviacions dona 0 (ja es va comentar a classe que sempre ha de ser així). Llavors,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (a_i - \bar{a})^2}{n}} = \sqrt{\frac{0,02609}{10}} = \sqrt{0,002609} = 0,051078371$$

amb els càlculs fets podem dir que el valor més aproximat de l'alçària és

$$a = \bar{a} \pm \sigma = 1,951 \pm 0,0051078371$$

com que les dades tenien tres xifres significatives, el valor de la mitjana s'ha d'arrodonir a 1,95 mentre que el de la desviació estàndard l'arrodonim al mateix nombre de decimals que tingui la mitjana (no xifres significatives). Finalment,

$$a = \bar{a} \pm \sigma = 1,95 \pm 0,05\,m$$

* * *

3. Anomenem l la variable longitud. Calculem primer la mitjana

$$\bar{l} = \frac{\begin{array}{c}18,23 + 18,67 + 19,21 + 19,43 + 19,56 + \\ + 20,18 + 19,71 + 19,99 + 19,15 + 20,24\end{array}}{10} = 19,437$$

ara, per calcular la desviació estàndard, podem fer servir una taula de la següent manera (de moment mantenim tots els decimals possibles, al final de tot arrodonirem)

l_i	$l_i - \bar{l}$	$(l_i - \bar{l})^2$
18,23	-1,207	1,456849
18,67	-0.767	0,588289
19,21	-0.227	0,051529
19,43	-0.007	0,000049
19,56	0,123	0,015129
20,18	0,743	0,552049
19,71	0,273	0,074529
19,99	-0,287	0,082369
19,15	0,803	0,644809
20,24	0,553	0,305809
	$\sum = 0$	$\sum = 3,77141$

Com es pot veure, hem comprovat que la suma de les desviacions dona 0 (ja es va comentar a classe que sempre ha de ser així). Llavors,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(l_i - \bar{l})^2}{n}} = \sqrt{\frac{3,77141}{10}} = \sqrt{0,377141} = 0,614118066$$

amb els càlculs fets podem dir que el valor més aproximat de la longitud és

$$l = \bar{l} \pm \sigma = 19,437 \pm 0,614118066$$

com que les dades tenien quatre xifres significatives, el valor de la mitjana s'ha d'arrodonir a 19,44 mentre que el de la desviació estàndard l'arrodonim al mateix nombre de decimals que tingui la mitjana (no xifres significatives). Finalment doncs

$$l = \bar{l} \pm \sigma = 19,44 \pm 0,61\, mm$$

* * *

4. Anomenem t la variable temps. Calculem primer la mitjana tenint en compte que, com hi ha moltes dades, ens interessa fer servir les freqüències f_i, amb que apareix cada dada t_i

$$\bar{t} = \frac{13 \cdot 1 + 38 \cdot 2 + 33 \cdot 3 + 11 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{100} = 2,57$$

ara, per calcular la desviació estàndard, podem fer servir una taula de la següent manera (de moment mantenim tots els decimals possibles, al final de tot arrodonirem)

t_i	f_i	$t_i - \bar{t}$	$(t_i - \bar{t})^2$
1	13	$1 - 2,57 = -1,57$	2,4649
2	38	$2 - 2,57 = -0,57$	0,3249
3	33	$3 - 2,57 = 0,43$	0,1849
4	11	$4 - 2,57 = 1,43$	2,0449
5	5	$5 - 2,57 = 2,43$	5,9049
	100	$\sum = 0$	$\sum = 102,51$

Com es pot veure, hem comprovat que la suma de les desviacions dona 0 (ja es va comentar a classe que sempre ha de ser així). S'ha de tenir en compte que hem de fer les sumes fent servir les freqüències. És a dir, la suma de les desviacions s'ha calculat com

$$13 \cdot (-1,57) + 38 \cdot (-0,57) + 33 \cdot (0,43) + 11 \cdot (1,43) + 5 \cdot (2,43) = 0$$

i la suma de les desviacions al quadrat

$$13 \cdot (2,4649) + 38 \cdot (0,3249) + 33 \cdot (0,1849) + 11 \cdot (2,0449) + 5 \cdot (5,9049) = 102,51$$

Llavors,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{n}} = \sqrt{\frac{102,51}{100}} = \sqrt{1,0251} = 1,01247222$$

amb els càlculs fets podem dir que el valor més aproximat del temps és

$$t = \bar{t} \pm \sigma = 2,57 \pm 1,01247222$$

com que les dades tenien una xifra significativa, el valor de la mitjana s'ha d'arrodonir a 3 mentre que el de la desviació estàndard l'arrodonim al mateix nombre de decimals que tingui la mitjana (no xifres significatives). Finalment

$$t = \bar{t} \pm \sigma = 3 \pm 1\, h$$

2 El moviment

1.
a) A partir del vector posició

$$\vec{r}(t) = (6t^3 + 2, 3t^2)$$

i els temps $t_1 = 1\,s$, $t_2 = 3\,s$, calculem el vector posició pel temps inicial i final

$$\vec{r}(1) = (6 \cdot 1^3 + 2, 3 \cdot 1^2) = (8, 3)$$
$$\vec{r}(3) = (6 \cdot 3^3 + 2, 3 \cdot 3^2) = (164, 27)$$

Ara podem calcular el vector desplaçament

$$\Delta\vec{r} = (164, 27) - (8, 3) = (156, 24)$$

b) El mòdul del desplaçament val

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{156^2 + 24^2} = \sqrt{24912} = 157,84\,m$$

c) La velocitat mitjana es pot trobar com

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(156, 24)}{3 - 1} = \frac{(156, 24)}{2} = (78, 12)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{78^2 + 12^2} = \sqrt{6228} = 78,92\,m/s$$

d) És immediat calcular

$$v(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (18t^2, 6t)$$

e) Amb $\vec{v}(t) = (18t^2, 6t)$ i els valors inicial i final del temps

$$\vec{v}(1) = (18, 6)$$

$$\vec{v}(3) = (162, 18)$$

a partir de la definició d'acceleració mitjana

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(162, 18) - (18, 6)}{3 - 1} = \frac{(144, 12)}{2} = (72, 6)$$

i el seu mòdul val

$$|\vec{a}_m| = \sqrt{72^2 + 6^2} = \sqrt{5220} = 72,25\,m/s^2$$

f) Calculem directament

$$a(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (36t, 6)$$

2.
a) A partir del vector posició

$$\vec{r}(t) = \left(t^2 - t,\ \frac{1}{5}t^5 + 1\right)$$

Calculem la velocitat i el seu mòdul

$$\vec{v}(t) = \left(2t - 1, t^4\right) \qquad |\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(2t-1\right)^2 + t^8}$$

De forma semblant amb l'acceleració total

$$\vec{a}(t) = \left(2, 4t^3\right) \qquad |\vec{a}(t)| = \sqrt{4 + 16t^6}$$

En quant a l'acceleració tangencial tenim, pel seu mòdul

$$|\vec{a}_t(t)| = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{2(2t-1)\cdot 2 + 8t^7}{2\sqrt{(2t-1)^2 + t^8}}$$

A classe vam veure que la derivada de t^n era nt^{n-1}. Aquest "2" que apareix en la derivada de $(2t-1)^2$ prové de que, en general, la derivada de

$$\left(f(t)\right)^n$$

és

$$n\left(f(t)\right)^{n-1} \cdot \frac{df(t)}{dt}$$

que resulta d'aplicar l'anomenada *regla de la cadena*, que s'explica en el context de les derivades a l'assignatura de Matemàtiques.

Per exemple, en el cas que haguéssim de derivar

$$\left(3t^5 + 8t - 3\right)^3$$

hauríem de fer

$$3\left(3t^5 + 8t - 3\right)^2 \cdot \left(15t^4 + 8\right)$$

El mòdul de l'acceleració normal es calcula directament com

$$|\vec{a}_n(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = \frac{(2t-1)^2 + t^8}{R}$$

Finalment, dels càlculs anteriors i la relació entre els mòduls de les components intrínseques de l'acceleració i el de la total

$$a^2(t) = a_t^2(t) + a_n^2(t)$$

podem escriure

$$4 + 16t^6 = \frac{\left(4(2t-1) + 8t^7\right)^2}{4\left[(2t-1)^2 + t^8\right]} + \frac{\left((2t-1)^2 + t^8\right)^2}{R^2}$$

3 Cinemàtica del punt

3.1 Moviment rectilini

3.1.1 Un sol mòbil

1. Passem la velocitat a m/s amb un factor de conversió

$$72\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}=20\,\frac{m}{s}$$

Ara, com sabem que la velocitat és constant,

$$x=vt=20\cdot 60=1200\,m$$

* * *

2. Calculem l'acceleració amb

$$v=v_0+at\rightarrow 10=0+a\cdot 20\rightarrow a=\frac{10}{20}=0,5\,m/s^2$$

L'espai recorregut es pot calcular com

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=0\cdot 20+\frac{1}{2}\cdot 0,5\cdot 20^2=100\,m$$

Si la velocitat hagués estat constant

$$x=vt=10\cdot 20=200\,m$$

* * *

3.
a) Passem la velocitat a m/s amb un factor de conversió

$$108\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}=30\,\frac{m}{s}$$

i calculem l'acceleració

$$v=v_0+at\rightarrow 0=30+a\cdot 5\rightarrow a=\frac{-30}{5}=-6\,m/s^2$$

b) Per calcular l'espai recorregut podem fer

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=30\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot(-6)\cdot 5^2=75\,m$$

També podríem haver fet

$$v^2=v_0^2+2ax\rightarrow x=\frac{v^2-v_0^2}{2a}=\frac{0-30^2}{2\cdot(-6)}=75\,m$$

4.
a) Passem la velocitat a m/s amb un factor de conversió

$$72\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}=20\,\frac{m}{s}$$

Ara, calculem el temps amb

$$v=v_0+at\rightarrow 0=20-2t\rightarrow t=10\,s$$

b) I l'espai recorregut com

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=20\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot 10^2=200-100=100\,m$$

* * *

5. Passem les velocitats que apareixen a l'enunciat al Sistema Internacional

$$36\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}=10\,\frac{m}{s}$$

$$108\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}}\cdot\frac{1000\,m}{1\,\cancel{km}}\cdot\frac{1\,\cancel{h}}{3600\,s}=30\,\frac{m}{s}$$

a)

1r tram A partir de la fórmula

$$v=v_0+at$$

trobem l'acceleració

$$a=\frac{v-v_0}{t}=\frac{30-10}{5}=4\,m/s^2$$

Calculem també l'espai recorregut en aquest tram perquè el necessitarem pel segon apartat

$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2=10\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5^2=100\,m$$

2n tram Com que es mou amb velocitat constant sabem que l'acceleració és zero. Calculem l'espai recorregut en aquest tram

$$x=vt=30\cdot 20=600\,m$$

3r tram A partir de la fórmula

$$v = v_0 + at$$

trobem l'acceleració

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 30}{10} = -3\, m/s^2$$

Calculem també l'espai recorregut en aquest tram

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 30 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot 10^2 = 150\, m$$

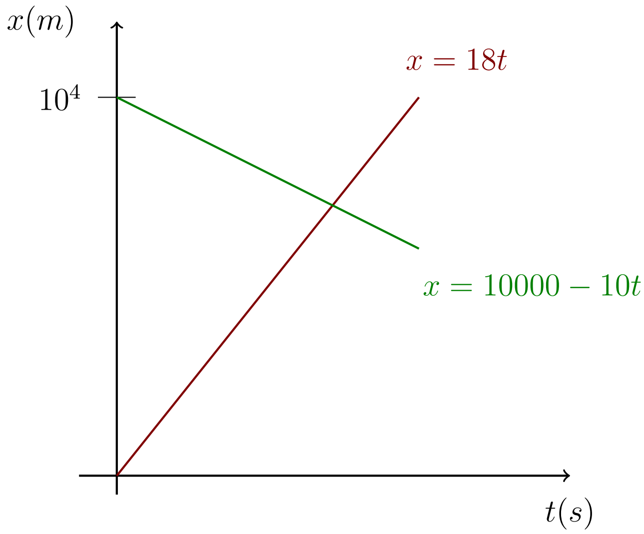
b) L'espai total recorregut serà

$$x_{total} = 100 + 600 + 150 = 850\, m$$

3.1.2 Dos mòbils

1.

Podem representar la situació amb el gràfic



Llavors, a partir de les equacions del moviment fem un sistema

$$\begin{cases} x = 18t \\ x = 10000 - 10t \end{cases}$$

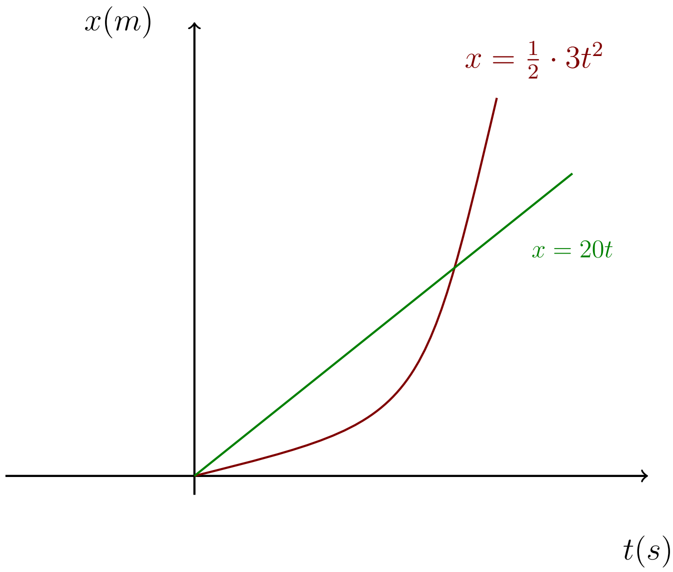
d'on

$$18t = 10000 - 10t \rightarrow 28t = 10000 \rightarrow t = \frac{10000}{28} = 357,14\,s$$

i la posició on es troben val

$$x = 18t = 18 \cdot 357,14 = 6428,57\,m$$

2.



d'on

$$20t = \frac{3}{2}t^2 \rightarrow t^2 - 40t = 0 \rightarrow t(3t - 40) = 0$$

amb solucions $t_1 = 0\,s$, $t_2 = 40/3 = 13,3\,s$,

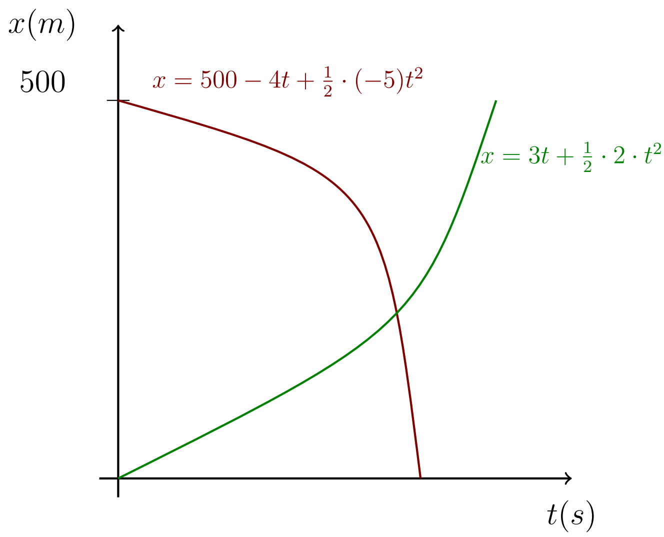
En quant a l'espai recorregut fins que l'atrapa

$$x = 20t \rightarrow x = 20 \cdot 13,3 = 266,67\,m$$

Finalment, la velocitat que té el cotxe quan es troben

$$v = v_0 + at = 0 + 3 \cdot 13,3 = 40\,m/s$$

3.
a)



Noteu com la velocitat inicial i l'acceleració tenen signe negatiu pel mòbil que es dirigeix cap al sistema de coordenades, tot i que no està frenant. El sistema a resoldre és

$$\begin{cases} x = 500 - 4t + \frac{1}{2}(-5)t^2 \\ x = 3t + t^2 \end{cases}$$

igualant i multiplicant per 2 per treure denominadors

$$1000 - 8t - 5t^2 = 6t + 2t^2$$

reordenant termes

$$7t^2 + 14t - 1000 = 0$$

d'on

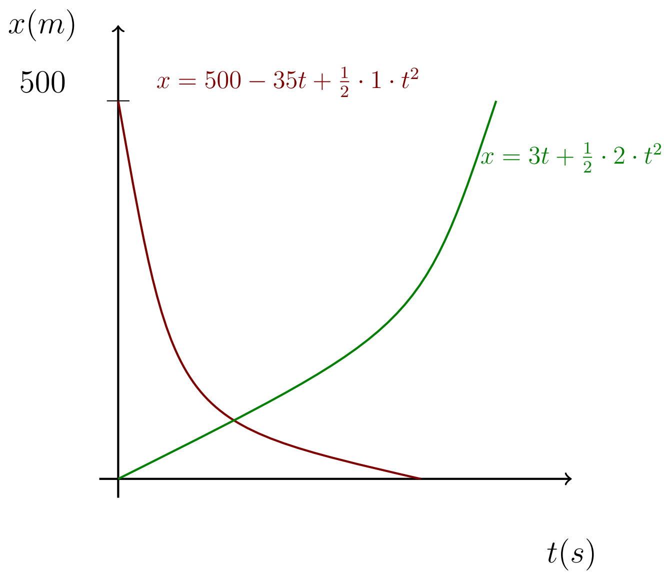
$$t = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-1000)}}{2 \cdot 7} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 + 4 \cdot 7 \cdot 1000}}{2 \cdot 7}$$

amb solucions $t_1 = 10,11\,s$, $t_2 = -3,5\,s$.

Prenem la solució positiva i calculem l'espai des de l'origen

$$x = 3t + t^2 = 3 \cdot 10,11 + 10,11^2 = 132,54\,m$$

b)



Ara, l'acceleració del que es dirigeix a l'origen té signe positiu ja que, encara que estigui frenant, el sentit del seu moviment fa que haguem de posar signe contrari al que tindria. La seva velocitat inicial segueix apareixent negativa perquè es dirigeix cap a l'origen.

$$\begin{cases} x = 500 - 35t + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t^2 \\ x = 3t + t^2 \end{cases}$$

igualant i multiplicant per 2 per treure denominadors

$$1000 - 70t + t^2 = 6t + 2t^2$$

reordenant

$$t^2 + 76t - 1000 = 0$$

d'on

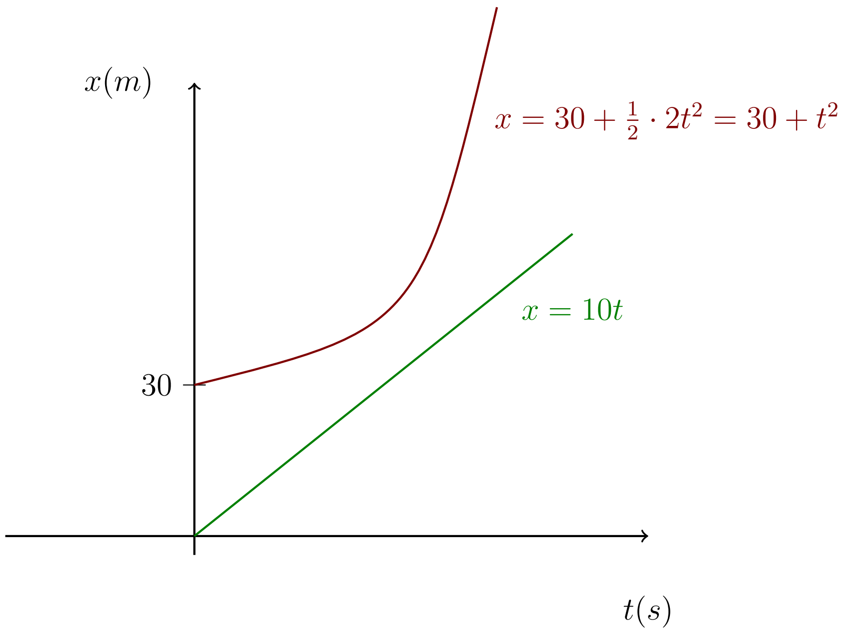
$$t = \frac{-76 \pm \sqrt{76^2 - 4 \cdot (-1000)}}{2} = \frac{-76 \pm \sqrt{76^2 + 4 \cdot 1000}}{2}$$

amb solucions $t_1 = 11,44\,s$, $t_2 = -87,44\,s$ novament ens quedem amb la solució positiva. El temps que trigaria a aturar-se el que frena es pot calcular com

$$v = v_0 + at \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 35}{-1} = 35\,s$$

per tant, es troben abans que s'aturi el que frena, tal com demana l'enunciat.

4. La situació, suposant que no agafa l'autobús, es pot representar com



Resolem el sistema

$$\begin{cases} x = 10t \\ x = 30 + t^2 \end{cases}$$

igualant les equacions

$$10t = 30 + t^2$$

reordenant

$$t^2 - 10t + 30 = 0$$

d'on

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 30}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

que no té solució real. Llavors la conclusió és que no arriba a agafar l'autobús.

Si ara el conductor s'entreté $2\,s$, el sistema d'equacions queda

$$\begin{cases} x = 10t \\ x = 30 + (t-2)^2 \end{cases}$$

igualant i desenvolupant quadrats

$$10t = 30 + t^2 - 4t + 4$$

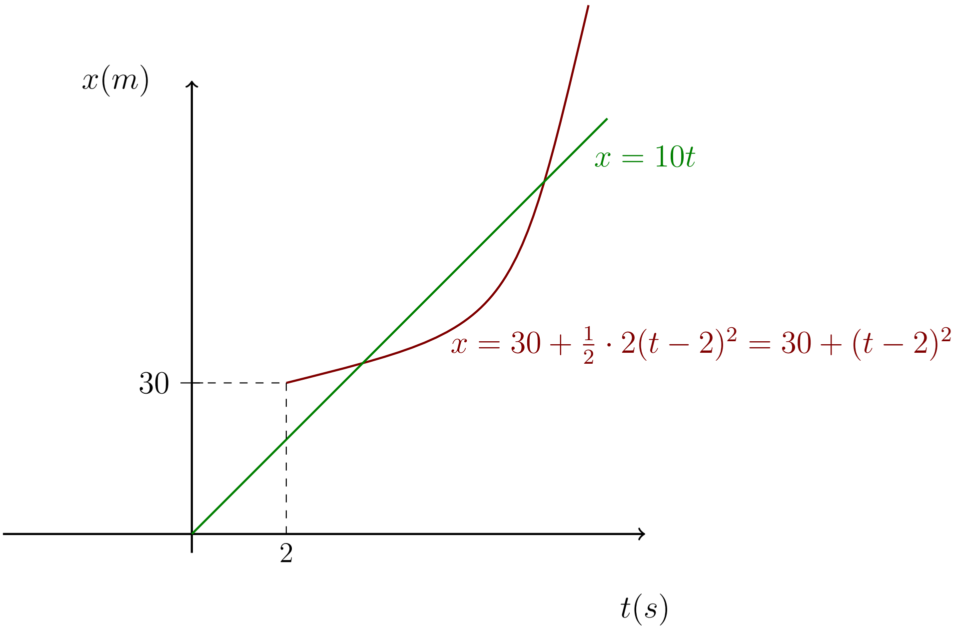
reordenant

$$t^2 - 14t + 34 = 0$$

$$t = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 34}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{60}}{2}$$

amb solucions $t_1 = 10,87\,s$, $t_2 = 3,13\,s$

Sabent que es troben, podem representar la situació com



Les dues solucions obtingudes es poden interpretar de manera que, el passatger podrà arribar a l'autobús en un primer moment i pujar-hi en marxa. Si no hi pugés i seguís corrent avançaria l'autobús, tot i que després el mateix autobús el tornaria a avançar, ja que es mou amb acceleració.

3.2 Moviment de projectils

3.2.1 Moviment vertical

1. En tots els apartats hem pres l'origen d'altures al terra, que és on arribarà l'objecte al cap d'una estona de ser llançat.

a) Les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v = 15 - gt$$

Per calcular el temps demanat imposem la condició $y = 0$

$$0 = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2$$

multiplicant per 2, canviant signes i reordenant,

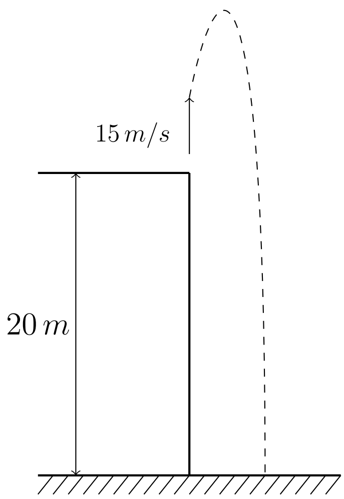
$$gt^2 - 30t - 40 = 0$$

d'on

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot g \cdot 40}}{2g}$$

amb solucions $t_1 = 4,065\,s$, $t_2 = -1,004\,s$ Prenem la solució positiva i calculem la velocitat amb que arriba al terra amb

$$v = 15 - g \cdot 4,065 = -24,84\,m/s$$



b) Les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 20 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v = -gt$$

Per calcular el temps demanat imposem la condició $y = 0$

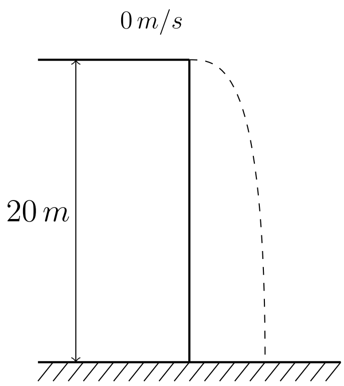
$$0 = 20 - \frac{1}{2}gt^2 \to \frac{1}{2}gt^2 = 20 \to t^2 = \frac{40}{g}$$

d'on

$$t = \sqrt{\frac{40}{g}} = 2,02\,s$$

noteu que hem pres la determinació positiva de l'arrel. Ara calculem la velocitat amb que arriba al terra

$$v = -gt = -g \cdot 2,02 = -19,8\,m/s$$



c) Les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 20 - 10t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v = -10 - gt$$

Per calcular el temps demanat imposem la condició $y = 0$

$$0 = 20 - 10t - \frac{1}{2}gt^2$$

multiplicant per 2, canviant signes i reordenant,

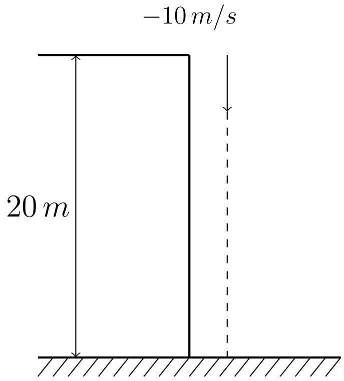
$$gt^2 + 20t - 40 = 0$$

d'on

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 + 4 \cdot g \cdot 40}}{2g}$$

amb solucions $t_1 = 1,243\,s$, $t_2 = -3,284\,s$ Prenem la solució positiva i calculem la velocitat amb que arriba al terra amb

$$v = -10 - g \cdot 1,243 = -22,18\,m/s$$



*   *   *

2. Tot i que el maó es deixa caure, com es trobava junt amb els altres que pujaven a $5\,m/s$, hem de prendre aquesta com la seva velocitat inicial. El moviment que farà és equivalent a llançar des de $6\,m$ d'altura el maó cap a dalt amb velocitat $5\,m/s$.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 6 + 5t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v = 5 - gt$$

Per calcular el temps demanat imposem la condició $y = 0$

$$0 = 6 + 5t - \frac{1}{2}gt^2$$

multiplicant per 2, canviant signes i reordenant,

$$gt^2 - 10t - 12 = 0$$

d'on

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot g \cdot 12}}{2g}$$

amb solucions $t_1 = 1,73\,s$, $t_2 = -0,71\,s$

Prenem la solució positiva i calculem la velocitat amb que arriba al terra amb

$$v = 5 - g \cdot 1,73 = -11,94\,m/s$$

Per trobar l'altura màxima calculem primer el temps que tarda en arribar a dalt de tot, demanant que la velocitat sigui zero

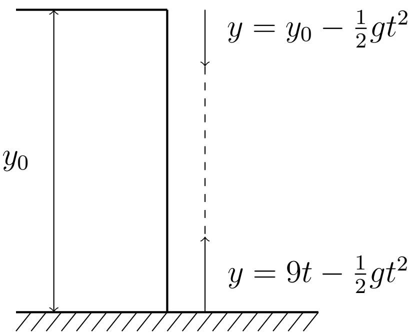
$$v = 5 - gt \rightarrow 0 = 5 - gt \rightarrow t = \frac{5}{g} = 0,51\,s$$

llavors, fent servir aquest valor del temps a l'equació del moviment

$$y(0,51) = 6 + 5 \cdot 0,51 - \frac{1}{2}g \cdot (0,51)^2 = 7,28\,m$$

* * *

3.



A partir de les equacions del moviment de cada cos, i sabent que es troben al cap de $1,8\,s$ podem escriure

$$y_0 - \frac{1}{2}g \cdot (1,8)^2 = 9 \cdot 1,8 - \frac{1}{2}g \cdot (1,8)^2$$

d'on

$$y_0 - \cancel{\frac{1}{2}g \cdot (1,8)^2} = 9 \cdot 1,8 - \cancel{\frac{1}{2}g \cdot (1,8)^2}$$

i finalment

$$y_0 = 9 \cdot 1,8 = 16,2\,m$$

* * *

4. Hem de tenir en compte que la pedra tarda un cert temps a arribar al fons del pou (t_p), i després el so tarda un altre temps a arribar a dalt del pou (t_s), la suma d'aquests dos temps és el que fa $5\,s$ en total.

L'equació del moviment de la pedra, suposant que ens posem al fons del pou s'escriu com

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

i quan la pedra arriba abaix tenim

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_p^2$$

per una altra banda el so recorre (a velocitat constant) la distància y_0 en el temps t_s de forma que podem escriure

$$y_0 = vt_s = 340t_s$$

hem de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_p^2 \\ y_0 = 340t_s \\ t_p + t_s = 5 \end{cases}$$

reescrivint-lo amb dues equacions

$$\begin{cases} 0 = 340t_s - \frac{1}{2}gt_p^2 \\ t_p + t_s = 5 \end{cases}$$

i finalment amb una

$$0 = 340(5 - t_p) - \frac{1}{2}gt_p^2$$

que es pot escriure com

$$gt_p^2 + 680t_p - 3400 = 0$$

d'on

$$t_p = \frac{-680 \pm \sqrt{680^2 + 4 \cdot g \cdot 3400}}{2g}$$

amb solucions $t_1 = 4,684\,s$, $t_2 = -74,07\,s$. Prenem el resultat positiu i calculem de forma recursiva les altres incògnites

$$t_s = 5 - t_p = 5 - 4,684 = 0,316\,s$$

i finalment

$$y_0 = 340t_s = 340 \cdot 0,316 = 107,5\,m$$

5. L'equació del moviment que descriu la situació és

$$y = 80 + 20t - \frac{1}{2}gt^2$$

per esbrinar l'espai recorregut en els darrers 2 s calculem primer quant tarda a arribar a terra. Fent les manipulacions habituals en aquests tipus d'equacions obtenim

$$gt^2 - 40t - 160 = 0$$

d'on

$$t = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 + 4 \cdot g \cdot 160}}{2g}$$

amb solucions $t_1 = 6,57\,s$, $t_2 = -2,486\,s$. Ara, dos segons abans (per $t = 4,57$), l'objecte llançat es troba a una altura

$$y(4,57) = 80 + 20 \cdot 4,57 - \frac{1}{2}g \cdot (4,57)^2 = 69,064\,m$$

que és l'espai que li falta per arribar al terra en els darrers 2 segons.

* * *

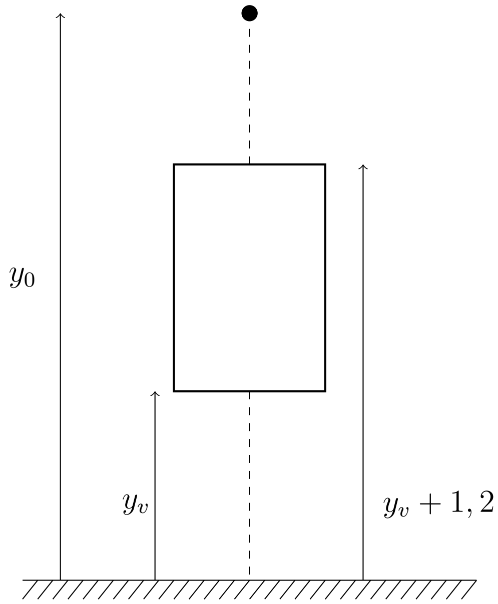
6. Si tarda $12,5\,s$ a tornar al punt de llançament el temps que tarda en arribar al punt màxim d'altura serà la meitat. En aquest punt la velocitat val zero, llavors

$$v = v_0 - g_{☾} \cdot t \rightarrow 0 = 10 - g_{☾} \cdot \frac{12,5}{2}$$

de forma que

$$g_{☾} = \frac{10 \cdot 2}{12,5} = 1,6\,m/s^2$$

7. Podem representar la situació amb l'esquema



Hem pres l'origen al terra, on acabarà el globus, tot i que l'enunciat demana calcular l'altura del llançament des de la part baixa de la finestra. Llavors la distància demanada és $y_0 - y_v$.

Escrivim les equacions del moviment quan el globus es troba a la part superior i inferior de la finestra

$$y_v + 1,2 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_v = y_0 - \frac{1}{2}g(t+0,1)^2$$

restant-les obtenim

$$1,2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}g(t+0,1)^2$$

desenvolupant quadrats

$$1,2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}g\left[t^2 + 2\cdot 0,1\cdot t + 0,1^2\right]$$

i fent distributives

$$1,2 = \cancel{-\frac{1}{2}gt^2} + \cancel{\frac{1}{2}gt^2} + \frac{1}{2}\cdot g\cdot 2\cdot 0,1\cdot t + \frac{1}{2}\cdot g\cdot 0,1^2$$

d'on

$$t = \frac{1,2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 0,1^2}{\frac{1}{2} \cdot g \cdot 2 \cdot 0,1} = 1,1745\,s$$

llavors, fent servir una de les equacions del moviment

$$y_v + 1,2 = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_0 - y_v = 1,2 + \frac{1}{2}gt^2 = 1,2 + \frac{1}{2}g(1,1745)^2 = 7,96\,m$$

3.2.2 Tir parabòlic

1. Les equacions del moviment són

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

aïllant el temps de la primera

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

i substituint a la segona

$$y = y_0 + \cancel{v_0} \sin \alpha \frac{x}{\cancel{v_0} \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

que es pot escriure com

$$y = y_0 + x \tan \alpha - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

que és l'equació d'una paràbola.

* * *

2. Les equacions del moviment i de la velocitat són

$$\begin{cases} x = 20 \cos 45° t \\ y = 20 \sin 45° t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = 20 \sin 45° - g t \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 14,14t \\ y = 14,14t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = 14,14 - g t \end{cases}$$

a) Per trobar el temps de vol demanem $y = 0$

$$0 = 14,14t - \frac{1}{2} g t^2 = t \left(14,14 - \frac{1}{2} g t \right)$$

d'on

$$\begin{cases} t = 0 \\ 14,14 - \frac{1}{2} g t = 0 \rightarrow t = \frac{28,28}{g} = \frac{28,28}{9,8} = 2,886\, s \end{cases}$$

b) Ara, podem calcular l'abast màxim com

$$x = 14,14t = 14,14 \cdot 2,886 = 40,81\,m$$

c) Per calcular l'altura màxima trobem el temps que tarda a arribar a dalt de tot, la condició és $v_y = 0$, llavors

$$0 = 14,14 - gt \rightarrow t = \frac{14,14}{g} = \frac{14,14}{9,8} = 1,443\,s$$

ara posem aquest valor del temps a l'equació del moviment que controla la y

$$y(1,443) = 14,14 \cdot 1,443 - \frac{1}{2}9,8 \cdot 1,443^2 = 10,2\,m$$

d) Finalment, quan falta $0,5\,s$ per arribar al terra el temps és

$$t = 2,886 - 1 = 1,886\,s$$

i la velocitat total en aquest moment

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{(14,14)^2 + (14,14 - 9,8 \cdot 1,886)^2} \\ &= 13,98\,m/s \end{aligned}$$

e) L'equació de la trajectòria es pot obtenir fàcilment a partir de les equacions del moviment

$$\begin{cases} x = 14,14t \\ y = 14,14t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

aïllem el temps de la primera equació

$$t = \frac{x}{14,14}$$

i substituïm a la segona

$$y = \cancel{14,14} \cdot \frac{x}{\cancel{14,14}} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{14,14}\right)^2$$

d'on

$$y = x - \frac{g}{400}x^2$$

3. Les equacions del moviment són

$$\begin{cases} x = 60\cos 60°t \\ y = 200 + 60\sin 60°t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 30t \\ y = 200 + 51,96t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Hem de trobar l'abast màxim. Llavors calculem primer el temps de vol demanant que $y = 0$

$$0 = 200 + 51,96t - \frac{1}{2}gt^2$$

reordenant i canviant signes

$$gt^2 - 103,92t - 400 = 0$$

d'on

$$t = \frac{103,92 \pm \sqrt{103,92^2 + 4 \cdot 400 \cdot g}}{2g}$$

amb solucions $t_+ = 13,604\,s$ i $t_- = -3\,s$

Ara, podem calcular l'abast màxim com

$$x = 30t = 30 \cdot 13,604 = 408,12\,m$$

* * *

4. Les equacions del moviment i la velocitat son

$$\begin{cases} x = 10\sqrt{2}\cos 45°t \\ y = 2 + 10\sqrt{2}\sin 45°t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 10\sqrt{2}\sin 45° - gt \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 2 + 10t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 10 - gt \end{cases}$$

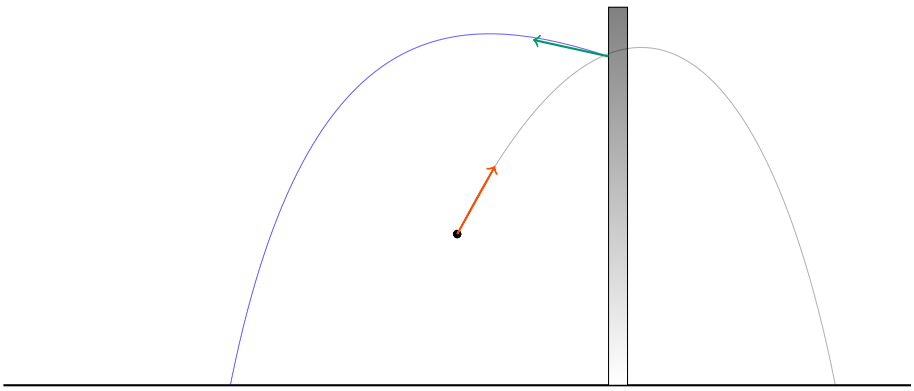
Hem de saber si quan arriba a la paret es troba pujant o baixant. Calculem primer el temps que tarda en arribar a la paret,

$$4 = 10t \rightarrow t = 0,4\,s$$

per aquest valor del temps

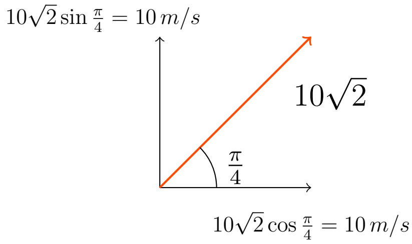
$$v_y(0,4) = 10 - g \cdot 0,4 = 6,08\, m/s$$

la velocitat és positiva, per tant quan arriba a la paret es troba pujant

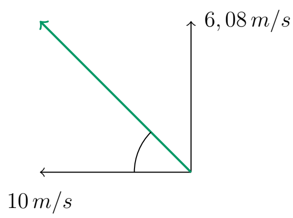


Hem representat la trajectòria que faria si no hi hagués paret amb color gris i la que fa després de rebotar amb la paret amb color blau. Les proporcions són aproximades i no representen fidelment les distàncies reals del problema.

En el moment del llançament tenim



quan impacta a la paret la component vertical es manté (amb el valor que tingués en aquell moment) i l'horitzontal canvia de sentit de forma que tenim un nou tir parabòlic cap a l'esquerra. Recordem que ja tenim calculat d'abans el valor de la component de la velocitat vertical en el moment de l'impacte.



ens cal saber l'altura de l'impacte, ja que serà la nova altura inicial, així

$$y(0,4) = 2 + 10 \cdot 0,4 - \frac{1}{2}g \cdot 0,4^2 = 5,216\,m$$

noteu que com que tenim el valor de les components de la velocitat, no cal conèixer l'angle ni la velocitat total en aquest punt. Les equacions (la de la velocitat no ens cal ara) queden

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = 5,216 + 6,08t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

calculem ara el temps que tarda en arribar a terra

$$0 = 5,216 + 6,08t - \frac{1}{2}gt^2$$

reordenant i canviant signes

$$gt^2 - 12,16t - 10,432 = 0$$

d'on

$$t = \frac{12,16 \pm \sqrt{12,16^2 + 4 \cdot 10,432 \cdot g}}{2g}$$

amb solucions $t_+ = 1,824\,s$ i $t_- = -0,584\,s$ llavors, la distància recorreguda *cap enrere* des de la paret val

$$x = 10t_+ = 10 \cdot 1,824 = 18,24\,m$$

* * *

5. L'objecte és llança amb velocitat inicial v_0 i angle $\alpha = 0°$ llavors les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} x = v_0 \cos 0° t \\ y = y_0 + v_0 \sin 0° t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_0 \sin 0° - gt \end{cases}$$

que es poden escriure

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = 24 - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

calculem el temps de vol

$$0 = 24 - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{48}{g}} = \pm 2,213\,s$$

prenem la solució positiva i sabem que en aquest temps ha recorregut $18\,m$ al llarg de l'horitzontal, per tant

$$18 = v_0\sqrt{\frac{48}{g}}$$

d'on

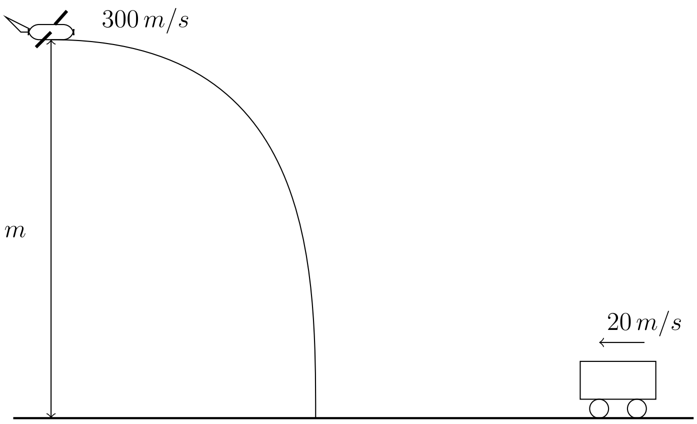
$$v_0 = 18\sqrt{\frac{g}{48}} = 8,13\,m/s$$

Finalment, la velocitat amb que arriba al terra

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{(8,13)^2 + (-9,8\cdot 2,213)^2} \\ &= 23,16\,m/s \end{aligned}$$

* * *

6. Podem representar la situació segons



L'objecte és deixa caure, però en la pràctica és com si és llancés amb velocitat inicial $300\,m/s$ i angle $\alpha = 0°$ llavors les equacions del moviment (la de la velocitat no cal) són

$$\begin{cases} x = 300\cos 0° t \\ y = 100 + 300\sin 0° t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

que es poden escriure

$$\begin{cases} x = 300t \\ y = 100 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Calculem el temps de vol

$$0 = 100 - \frac{1}{2}gt^2$$

d'on

$$t = \sqrt{\frac{200}{g}} = 4,52\,s$$

en aquest temps el paquet ha recorregut horitzontalment una distància

$$x = 300 \cdot 4,52 = 1355,3\,m$$

i el vehicle que es desplaça arran de terra

$$x' = 20 \cdot 4,52 = 90,35\,m$$

llavors, per tal que el paquet caigui just a sobre del vehicle, l'avió l'ha de deixar anar quan la distància inicial que els separa és de

$$x + x' = 1355,3 + 90,35 = 1445,65\,m$$

3.3 Moviment circular

1. A la teoria ja es comenta que la característica principal del moviment circular és que sempre hi ha, al menys, una de les components de l'acceleració, la centrípeta. Llavors, amb les dades de l'exercici

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{5} = 45\, m/s^2$$

* * *

2. Les equacions del moviment són

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{5} t^2 \\ \omega = \frac{\pi}{5} t \end{cases}$$

llavors, la velocitat angular al cap de $10\, s$

$$\omega = \frac{\pi}{5} \cdot 10 = 2\pi\, rad/s$$

i la lineal

$$v = \omega R = 2\pi \cdot 10 = 20\pi = 62{,}83\, m/s$$

L'espai angular es pot calcular com

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{5} 10^2 = 10\pi\, rad$$

i el lineal

$$s = \varphi R = 10\pi \cdot 10 = 314{,}16\, m$$

* * *

3. Les equacions del moviment són

$$\begin{cases} \varphi = 2\pi t + \frac{1}{2} \cdot \pi t^2 \\ \omega = 2\pi + \pi t \end{cases}$$

100 voltes són equivalents a

$$100 \cancel{rev} \cdot \frac{2\pi\, rad}{1 \cancel{rev}} = 200\pi\, rad$$

llavors hem de resoldre l'equació

$$200\pi = 2\pi t + \frac{1}{2} \cdot \pi t^2$$

reordenant i simplificant

$$t^2 + 4t - 400 = 0$$

d'on

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 1600}}{2}$$

amb solucions $t_1 = 18,1\,s$ i $t_2 = -22,1\,s$. Ens interessa l'evolució cap el futur, per tant ens quedem amb la positiva. L'acceleració centrípeta al principi del

moviment es pot calcular com

$$a_c = \omega^2 R = (2\pi)^2 \cdot 1 = 39,45\,m/s^2$$

per calcular-la al final del moviment hem de conèixer la velocitat que té llavors

$$\omega = 2\pi + \pi \cdot 18,1 = 20,1\pi\,rad/s$$

l'acceleració centrípeta serà doncs

$$a_c = \omega^2 R = (20,1\pi)^2 \cdot 1 = 3987,42\,m/s^2$$

* * *

4. Passem primer la velocitat angular a rad/s

$$\frac{1356}{71}\,rpm = \frac{1356}{71}\frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \frac{2\pi\,rad}{1\cancel{rev}} \cdot \frac{1\cancel{min}}{60\,s} = 2\,rad/s$$

Calculem l'acceleració angular amb

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$2 = \alpha 10 \rightarrow \alpha = 0,2\,rad/s$$

L'acceleració lineal o tangencial serà

$$a = \alpha R = 0,2 \cdot 2 = 0,4\,m/s^2$$

i és constant al llarg del temps. L'acceleració centrípeta depèn de la velocitat i a l'inici val zero. Per saber el seu valor al cap de 8 necessitem conèixer la velocitat en aquell moment

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 0,2 \cdot 8 = 1,6\,rad/s$$

de forma que tenim

$$a_c = \omega^2 R = 1,6^2 \cdot 2 = 5,12\,m/s^2$$

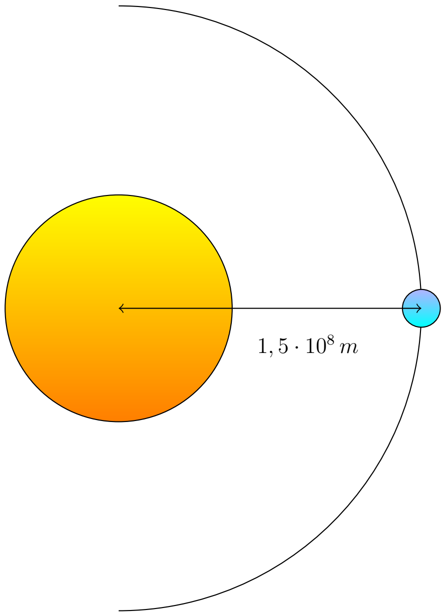
i en quant a l'acceleració total

$$a_{total} = \sqrt{a^2 + a_c^2} = \sqrt{0,4^2 + 5,12^2} = 5,14\,m/s^2$$

noteu com l'acceleració centrípeta *domina* sobre la tangencial quan la velocitat és prou alta.

* * *

5. Quan considerem la translació de la Terra al voltant del Sol, la situació es pot representar de la següent manera



Hem de calcular la velocitat angular. Sabem que la Terra fa una volta en un any, per tant

$$\varphi = \omega t \rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2 \cdot 10^{-7}\,rad/s$$

i l'acceleració centrípeta associada val

$$a_c = \omega^2 R = (2 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 5,9 \cdot 10^{-3}\,m/s^2$$

La gravetat terrestre és

$$\frac{g}{5,9 \cdot 10^{-3}} = 1,65 \cdot 10^3$$

vegades més gran.

En el cas de l'acceleració centrípeta degut a la rotació terrestre podem calcular la velocitat angular com

$$\varphi = \omega t \rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5}\, rad/s$$

i l'acceleració centrípeta associada val

$$a_c = \omega^2 R = (7,27 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,74 \cdot 10^6 = 0,0356\, m/s^2$$

La gravetat terrestre és

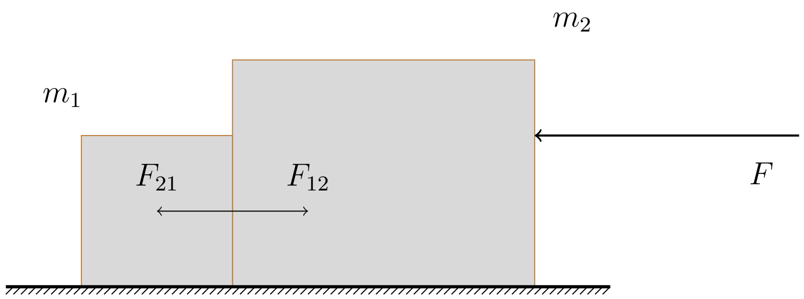
$$\frac{g}{0,0356} = 275$$

vegades més gran.

4 Dinàmica del punt

4.1 Exercicis introductoris

1.



Calculem l'acceleració del sistema aplicant la segona llei de Newton al conjunt

$$F = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{24}{2+10} = 2\,m/s^2$$

Ara apliquem la segona llei de Newton només al bloc m_1

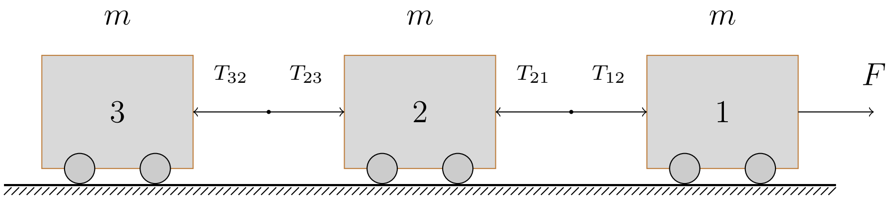
$$F_{21} = m_1 a = 2 \cdot 2 = 4\,N = F_{12}$$

Veiem que el valor de les forces de contacte depèn de sobre quin dels cossos s'aplica la força externa. Quan l'apliquem sobre el cos més massiu, les forces de contacte són relativament petites, quan s'aplica sobre el més lleuger, les forces de contacte són més grans.

Noteu que també podíem haver trobat F_{12} primer, d'una forma més complexa. Aplicant la segona llei de Newton a m_2

$$F - F_{21} = m_2 a \rightarrow F_{21} = F - m_2 a = 24 - 10 \cdot 2 = 4\,N = F_{21}$$

2.



Calculem primer l'acceleració del conjunt

$$F = (m+m+m)a \rightarrow a = \frac{F}{3m} = \frac{10^4}{300} = 33,33\, m/s^2$$

Llavors, per trobar les tensions comencem aplicant la segona llei de Newton al vagó 3, l'últim

$$T_{23} = ma = 100 \cdot 33,33 = 3333\, N = T_{32}$$

ara apliquem la segona llei de Newton al conjunt format pel tercer i segon vagons (dels quals estira T_{12}),

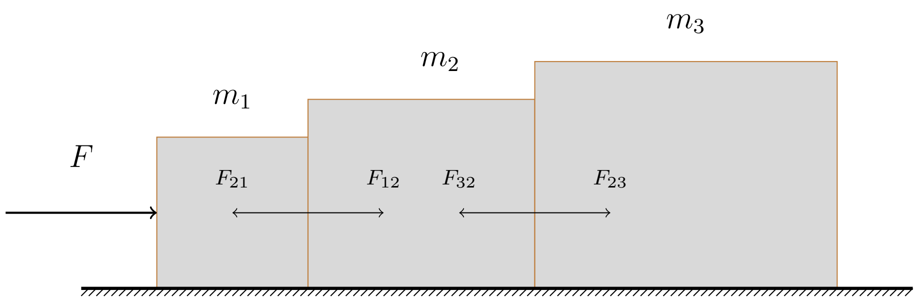
$$T_{12} = (m+m)a = 200 \cdot 33,33 = 6666\, N = T_{21}$$

Podem trobar aquesta darrera tensió d'una forma més complexa, aplicant la segona llei de Newton *només* al vagó 2,

$$T_{12} - T_{32} = ma \rightarrow T_{12} = T_{32} + ma = 3333 + 100 \cdot 33,33 = 6666\, N$$

* * *

3.



Calculem primer l'acceleració del conjunt

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{200}{10 + 11 + 12} = 6,06\, m/s^2$$

Llavors, aplicant la segona llei de Newton al cos m_3

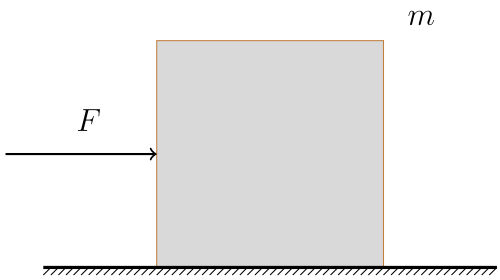
$$F_{23} = m_3 a = 12 \cdot 6,06 = 72,72\, N = F_{32}$$

ara apliquem la segona llei de Newton al conjunt $m_2\,, m_3$

$$F_{12} = (m_2 + m_3)a = (11 + 12)6,06 = 139,38\, N = F_{21}$$

* * *

4. Podem representar la situació segons



Per calcular l'acceleració apliquem la segona llei de Newton

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{100}{40} = 2,5\, m/s^2$$

La velocitat al cap de $2\, s$ la calculem mitjançant les eines vistes a l'avaluació anterior

$$v = v_o + at = 0 + 2,5 \cdot 2 = 5\, m/s$$

* * *

5. De forma semblant a l'exercici anterior

$$F = ma \rightarrow m = \frac{F}{a} = \frac{200}{2} = 100\, kg$$

i en quant al desplaçament efectuat en $10\, s$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \cancel{0 \cdot 10} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 100\, m$$

6. Per resoldre l'exercici i trobar la força aplicada sobre el cos haurem de fer servir la segona llei de Newton, però necessitem saber l'acceleració. Fem servir les dades cinemàtiques que proporciona l'enunciat per calcular-la. A partir de

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

podem escriure

$$30 = \cancel{0 \cdot 20} + \frac{1}{2}a \cdot 20^2$$

d'on

$$a = \frac{2 \cdot 30}{20^2} = 0,15\, m/s^2$$

Ara, podem aplicar $F = ma$ per trobar la força aplicada

$$F = ma = 80 \cdot 0,15 = 12\, N$$

* * *

7. Passem primer la velocitat a m/s

$$72\, \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{1000\, m}{1\, \cancel{km}} \times \frac{1\, \cancel{h}}{3600\, s} = 20\, m/s$$

Calculem ara l'acceleració

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \rightarrow 0 = 20^2 + 2a \cdot 60 \rightarrow a = -\frac{20^2}{2 \cdot 60} = -3,33\, m/s^2$$

i finalment la força demanada

$$F = ma = 1300 \cdot (-3,33) = -4333,33\, N$$

8. Comencem calculant l'acceleració amb que es mourà el cos

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{150}{100} = 1,5\, m/s^2$$

ara, per calcular la velocitat al cap de $8\, s$

$$v = v_0 + at = 0 + 1,5 \cdot 8 = 12\, m/s$$

Al cap de $10\, s$ d'actuar la força la velocitat és més gran, la calculem

$$v = v_0 + at = 0 + 1,5 \cdot 10 = 15\, m/s$$

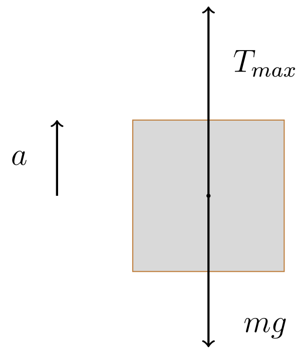
llavors, quan la força deixa d'actuar sobre el cos, i suposant que no actua cap altra força sobre ell, hem de suposar que mantindrà aquesta velocitat assolida. En $5\, s$ recorrerà doncs

$$x = vt = 15 \cdot 5 = 75\, m$$

9. Aplicant la segona llei de Newton

$$T - mg = ma \rightarrow T = mg + ma = m(g + a) = 1200(1 + 9,8) = 12960\, N$$

10.



Notem que la força que hauria de fer el fil per mantenir el cos en equilibri val, $T = mg = 10 \cdot 9,8 = 98\,N$, llavors, en les condicions del problema, s'està accelerant cap amunt, ja que s'està pujant amb $T_{max} = 200\,N$. L'acceleració que li correspon a aquesta tensió es pot calcular aplicant la segona llei de Newton al cos

$$T_{max} - mg = ma_{max}$$

$$a_{max} = \frac{T_{max} - mg}{m} = \frac{200 - 10 \cdot 9,8}{10} = 10,2\,m/s^2$$

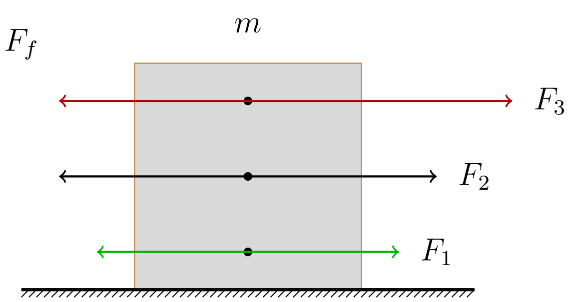
* * *

11. Si el pal fes una força sobre el bomber igual i en sentit contrari al seu pes, aquest estaria quiet. Com que baixa, apliquem la segona llei de Newton al bomber, tenint en compte que al estar baixant, el pes té el signe positiu i la força que li fa el pal, negatiu. En aquestes condicions tenim

$$mg - F_{pal} = ma$$

$$F_{pal} = mg - ma = m(g - a) = 70 \cdot (9,8 - 3) = 476\,N$$

12. Veiem què és el que succeeix quan a un cos que es troba recolzat sobre una superfície amb fregament se li aplica una força variable.



La força aplicada F_1 és més petita que la força de fregament màxima que presenta el cos amb la superfície, de manera que aquesta força de fregament s'adapta al valor de la força aplicada, i el cos roman quiet.

La força aplicada F_2 correspon al valor màxim del fregament entre el cos i la superfície. En aquest cas ens trobem en el límit en que el cos es pot començar a moure.

La força aplicada F_3 correspon a un valor més gran que el que pot assolir la força de fregament i llavors, tenim una força neta cap a la dreta $F_3 - F_f$ que provocarà una acceleració del cos.

En l'exercici que ens ocupa, ens parlen de la situació en la que s'aplicaria la força F_2, que ens diuen que val $500\,N$ i tenim que

$$500 = F_f = \mu_e N = \mu_e mg = \mu_s \cdot 120 \cdot 9,8$$

$$\mu_e = \frac{500}{120 \cdot 9,8} = 0,425$$

on hem usat $N = mg$, un resultat conegut de teoria.

* * *

13. La situació és semblant a la de l'exercici anterior, i podem escriure

$$F_f = \mu mg \rightarrow mg = \frac{F_f}{\mu} = \frac{800}{0.8} = 1000\,N$$

* * *

14. Calculem la força de fregament estàtic màxima que pot presentar el cos

$$F_f = \mu_e mg = 0,4 \cdot 60 \cdot 9,8 = 235,2\,N$$

Com que la força que s'aplica és $F = 300\,N$, més gran, el cos es mourà. Ara farem servir la segona llei de Newton per calcular l'acceleració però hem de tenir en compte que com ja s'està movent, hem de usar el coeficient de fregament dinàmic μ_d

$$F - F_f = ma \rightarrow F - \mu_d mg = ma$$

$$a = \frac{F - \mu_d mg}{m} = \frac{300 - 0,3 \cdot 60 \cdot 9,8}{60} = 2,06\,m/s^2$$

* * *

15. Calculem primer l'acceleració

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$0 = 15^2 + 2a \cdot 97,8 \rightarrow a = \frac{-15^2}{2 \cdot 97,8} = -1,15\, m/s^2$$

Per trobar el coeficient de fregament apliquem la segona llei de Newton, tenint en compte que la única força que està actuant sobre el cos mentre es mou és la de fregament que té sentit contrari al del moviment i per tant, acabarà aturant el cos,

$$-F_f = ma \rightarrow -\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a \rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = -\frac{-1,15}{9,8} = 0,117$$

* * *

16. En quant a la força de fregament, podem escriure

$$F_f = \mu N = \mu mg = 0,3 \cdot 10 \cdot 9,8 = 29,4$$

i per l'acceleració tenim

$$F - F_f = ma \rightarrow a = \frac{F - f_f}{m} = \frac{300 - 29,4}{10} = 27,06\, m/s^2$$

4.2 Cossos enllaçats

1. A partir de l'esquema de la teoria, suposant que la massa m_1 es troba a l'esquerra i la massa m_2 a la dreta, les tensions són iguals i valen T i assumint ara que la politja es mou en sentit antihorari, llavors, pel cos de l'esquerra tenim

$$m_1 g - T = m_1 a$$

i per el de la dreta

$$T - m_2 g = m_2 a$$

Sumant les equacions

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

d'on

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 9,8 \cdot \frac{4-2}{4+2} = 3,27\, m/s^2$$

* * *

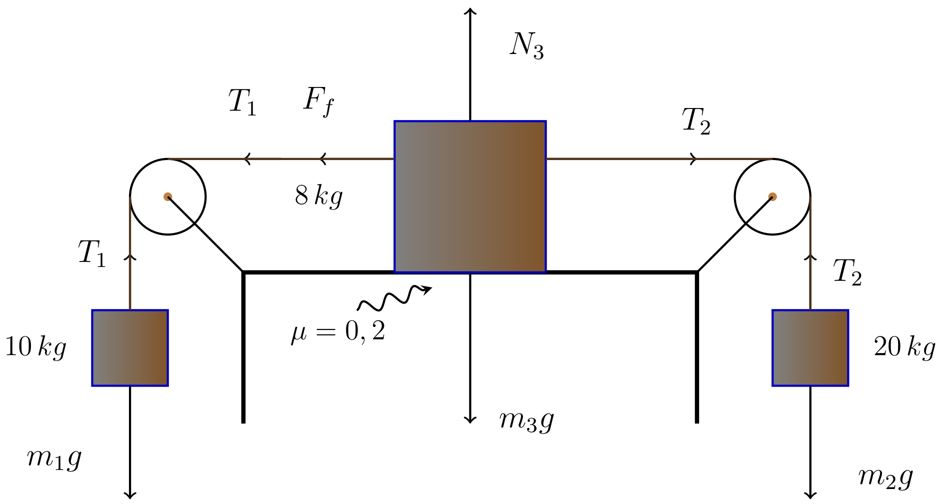
2. El, procés de resolució està detallat a la teoria, les equacions que s'obtenen són

$$a = g\frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 9,8 \cdot \frac{5+1-0,2\cdot 3}{3+5+1} = 5,88\, m/s^2$$

$$N_3 = m_3 g\frac{m_1(1+\mu)}{m_1 + m_2 + m_3} = 1 \cdot 9,8 \cdot \frac{3\cdot(1+0,2)}{3+5+1} = 3,92\, N$$

* * *

3.



Hem suposat que el sistema es mou *cap a la dreta*. Les equacions per cada massa són

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$
$$T_2 - T_1 - F_f = m_3 a \qquad N_3 = m_3 g$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

que es poden escriure com

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$
$$T_2 - T_1 - \mu N_3 = m_3 a \qquad N_3 = m_3 g$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

i, finalment

$$T_1 - m_1 g = m_1 a$$
$$T_2 - T_1 - \mu m_3 g = m_3 a$$
$$m_2 g - T_2 = m_2 a$$

Sumant-les, obtenim

$$m_2 g - m_1 g - \mu m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) a$$

d'on

$$a = g \frac{m_2 - m_1 - \mu m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 9,8 \cdot \frac{20 - 10 - 0,2 \cdot 8}{10 + 20 + 8} = 2,07\, m/s^2$$

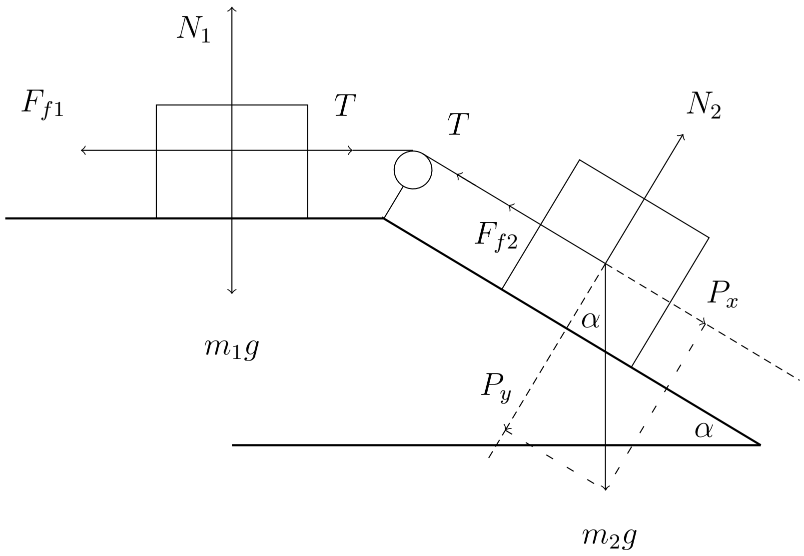
4.3 El pla inclinat

1. Només cal seguir el raonament fet a la teoria i substituir els valors a l'expressió final

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 3,2\,m/s^2$$

* * *

2. Posem noms a les masses, representem les forces i escrivim les equacions per cada cos



Pel cos 1 les equacions són,

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \\ T - F_{f1} = m_1 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1 g \\ T - \mu N_1 = m_1 a \end{cases} \rightarrow T - \mu m_1 g = m_1 a$$

Pel cos 2 les equacions són,

$$\begin{cases} N_2 = P_y \\ P_x - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_2 = m_2 g\cos\alpha \\ m_2 g\sin\alpha - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g\cos\alpha \\ m_2 g\sin\alpha - T - \mu N_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow m_2 g\sin\alpha - T - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a$$

llavors, obtenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g = m_1 a \\ m_2 g\sin\alpha - T - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a \end{cases}$$

que es resol trivialment per donar,

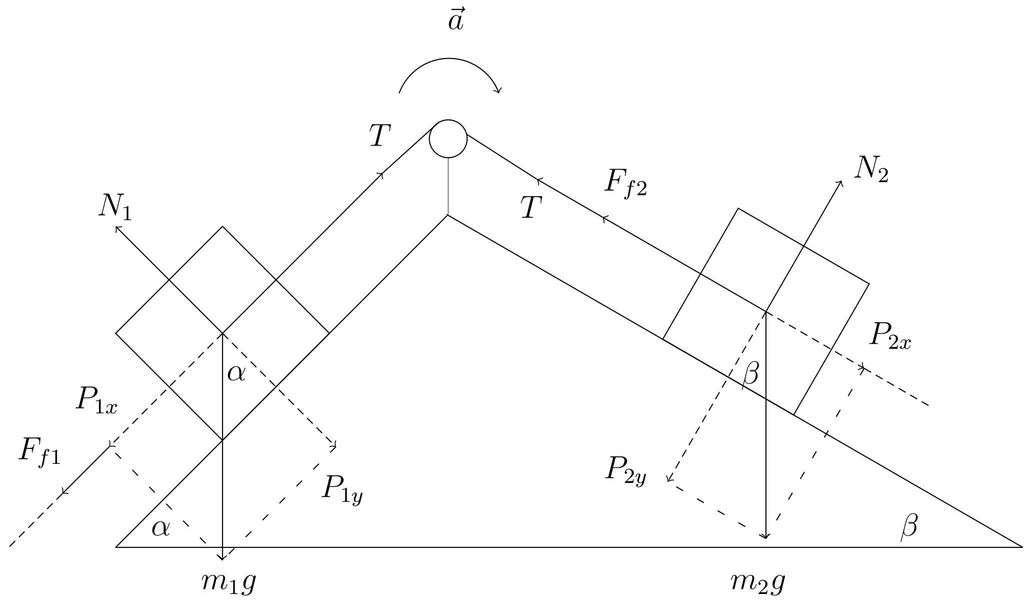
$$m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha - \mu m_1 g = m_1 a + m_2 a$$

d'on

$$\begin{aligned} a &= g \cdot \frac{m_2 \sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha - \mu m_1}{m_1 + m_2} \\ &= 9,8 \cdot \frac{25 \sin 30° - 0,2 \cdot 25 \cos 30° - 0,2 \cdot 8}{8 + 25} \\ &= 1,95\, m/s^2 \end{aligned}$$

* * *

3.



Pel cos 1 les equacions son,

$$\begin{cases} N_1 = P_{1y} \\ T - F_{f1} - P_{1x} = m_1 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ T - F_{f1} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ T - \mu N_1 - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \end{cases} \rightarrow T - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$$

Pel cos 2 les equacions son,

$$\begin{cases} N_2 = P_{2y} \\ P_{2x} - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\beta \\ m_2 g \sin\beta - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\beta \\ m_2 g \sin\beta - T - \mu N_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow m_2 g \sin\beta - T - \mu m_2 g \cos\beta = m_2 a$$

Obtenim llavors el sistema

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \\ m_2 g \sin\beta - T - \mu m_2 g \cos\beta = m_2 a \end{cases}$$

que es resol fàcilment per donar

$$m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a + m_2 a$$

d'on finalment

$$a = g \cdot \frac{m_2 \sin\beta - \mu m_2 \cos\beta - \mu m_1 \cos\alpha - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}$$

4.4 Dinàmica del moviment circular

La utilitat dels exercicis 1, 2 i 3 és ser capaç de reproduir els raonaments que porten als resultats finals. No es repetirà aquí el que s'explica a la teoria.

1. En el cas que el cos és a dalt de tot tenim,

$$T = m\omega^2 L - mg = 5\left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 2 - 5 \cdot 9,8 = 4337,5\,N$$

En el cas que el cos és a mitja alçada,

$$T = m\omega^2 L = 5\left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 2 = 4386,5\,N$$

Quant el cos és a la part inferior de la trajectòria,

$$T = m\omega^2 L + mg = 5\left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 2 + 5 \cdot 9,8 = 4435,5\,N$$

* * *

2. Com a resultat tenim,

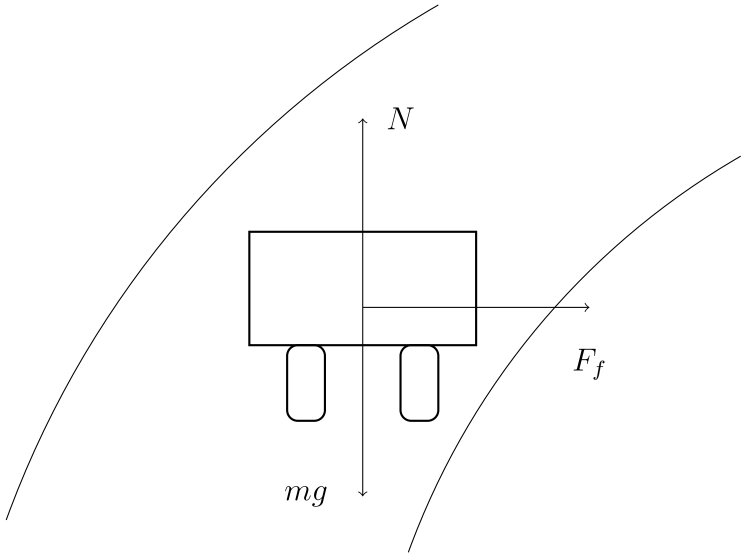
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,3 \cdot 2}} = 4,04\,rad/s$$

* * *

3. A la teoria s'arriba a l'expressió

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{MR}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 9,8}{10 \cdot 1}} = 3,83\,rad/s$$

4.



La força normal equilibra al pes, mentre que hi ha d'haver alguna força no equilibrada que proporcioni acceleració centrípeta, per tal que el cotxe pugui descriure la corba, llavors

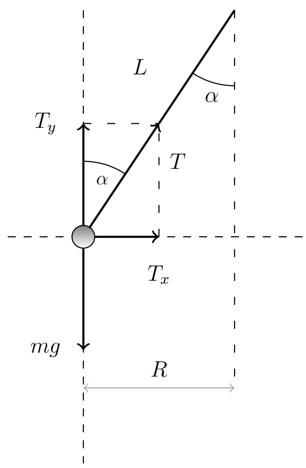
$$\begin{cases} N = mg \\ F_f = m\frac{v^2}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = mg \\ \mu N = m\frac{v^2}{R} \end{cases} \rightarrow \mu \cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

d'on

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,3 \cdot 9,8 \cdot 25} = 8,57\, m/s$$

* * *

5.



Després de posar uns eixos orientats d'acord amb el pes mg veiem que la component vertical de la tensió equilibra al pes i la component horitzontal proporciona l'acceleració centrípeta,

$$\begin{cases} T_x = m\frac{v^2}{R} \\ T_y = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

a) Tenim

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0,5\cdot 9,8}{\cos 60^\circ} = 9,8\,N$$

b) Dividint les equacions

$$\frac{\cancel{T}\sin\alpha}{\cancel{T}\cos\alpha} = \frac{\cancel{m}\frac{v^2}{R}}{\cancel{m}g}$$

d'on

$$v = \sqrt{Rg\tan\alpha}$$

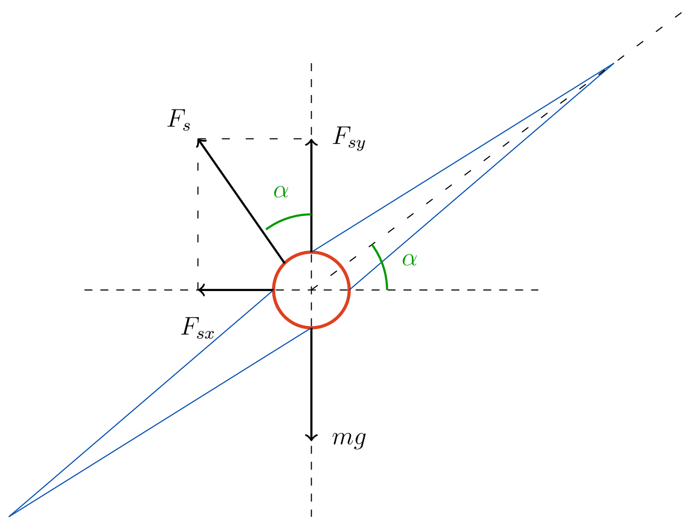
per una altra banda, del dibuix es veu que és $R = L\sin\alpha$, llavors

$$v = \sqrt{Rg\tan\alpha} = \sqrt{Lg\sin\alpha\tan\alpha} = \sqrt{0.5\cdot 9,8\sin 60^\circ\tan 60^\circ} = 2,71\,m/s$$

c) Sabem que la velocitat sempre és tangent a la trajectòria i com l'acceleració centrípeta es dirigeix cap al centre, l'angle que formen velocitat i acceleració és 90°.

* * *

6.



Per tal de girar, el pilot de l'avió maniobra amb els alerons per desequilibrar-lo. D'aquesta manera, la força de sustentació, perpendicular al pla de les ales, proporciona la força centrípeta necessària perquè l'avió descrigui el gir. La component vertical de la força de sustentació equilibra el pes.

$$\begin{cases} F_{sx} = m\frac{v^2}{R} \\ F_{sy} = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_s \sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \\ F_s \cos\alpha = mg \end{cases}$$

Dividint les equacions

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{Rg} \tag{1}$$

a) Les restriccions per l'acceleració màxima ens permeten escriure

$$a_c = \frac{v^2}{R} = 8g$$

d'on

$$R = \frac{v^2}{8g} = \frac{400^2}{8 \cdot 9,8} = 2040,82\,m$$

b) De l'expressió (1), obtinguda abans

$$\alpha = \arctan\frac{v^2}{Rg} = \arctan\frac{8Rg}{Rg} = \arctan 8 = 82,87°$$

4.5 La corba peraltada

1.

Velocitat màxima

a) $\alpha = 0°$

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}$$

Per $\alpha = 0°$ la superfície és horitzontal, i el resultat que obtenim és el mateix que vam trobar en un exercici anterior.

b) $\alpha = 90°$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{-Rg}{\mu}}$$

El resultat no és un nombre real. Ho interpretem com que al ser la superfície vertical no hi ha cap límit superior per la velocitat (sí un valor mínim com veurem després).

Velocitat mínima

a) $\alpha = 0°$

$$v_{min} = \sqrt{-\mu g R}$$

Aquest valor no és un nombre real. Per aquest angle no hi ha velocitat mínima per descriure la corba, de fet el vehicle podria estar aturat.

b) $\alpha = 90°$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{Rg}{\mu}}$$

Quan la superfície és vertical, cal una velocitat mínima perquè el vehicle pugui descriure la corba.

2. Trobem la velocitat mínima i màxima.

$$v_{min} = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{25 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sin 30^\circ - \mu\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + \mu\sin 30^\circ}}$$

$$= 9,1\, m/s$$

$$v_{max} = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{25 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sin 30^\circ + 0,2\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0,2\sin 30^\circ}}$$

$$= 14,67\, m/s$$

* * *

3. A mesura que μ va disminuint, el rang de velocitats pel qual el vehicle pot descriure la corba es va fent més i més petit. Quan és $\mu = 0$ les expressions de la velocitat mínima i màxima coincideixen al valor

$$v = \sqrt{Rg\tan\alpha}$$

5 Treball i energia

5.1 Energia cinètica, potencial i mecànica

1. Fem un balanç d'energia. En el moment de llançar-se l'objecte podem suposar que es troba a altura zero, de forma que no té energia potencial, però sí cinètica, ja que si no no pujaria. Quan arribi a la altura màxima, tota l'energia cinètica que tenia al principi s'haurà convertit en energia potencial gravitatòria. No ens donen el valor de la massa de l'objecte. Quan passa això, farem servir la lletra (m en aquest cas) de la variable a les equacions i esperarem que al final el resultat no en depengui. Potser que algun cop s'hagi de deixar un resultat en funció d'algun paràmetre desconegut. En qualsevol cas, no podem senzillament ni tan sols deixar d'intentar resoldre l'exercici perquè "falten dades".

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gh$$

d'on

$$h = \frac{1}{2g}v^2 = \frac{1}{2 \cdot 9,8} \cdot (10)^2 = 5,10\,m$$

* * *

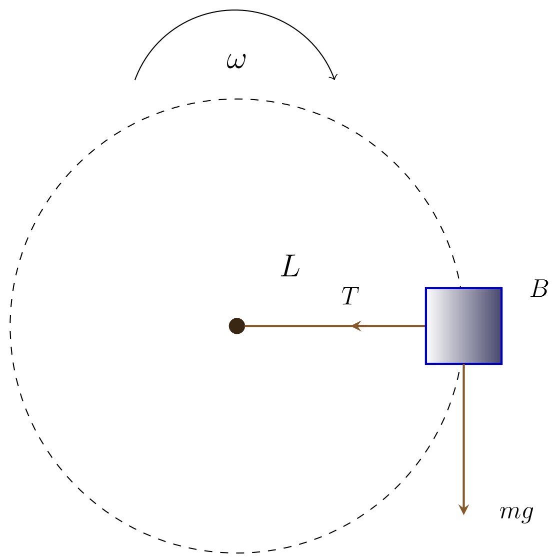
2. Novament establim un balanç d'energia. Prenem $h = 0$ al terra de forma que tenim energia potencial gravitatòria a dalt de tot del tobogan, energia que un cop arribat a baix, trobarem en forma d'energia cinètica i una part perduda en forma de fregament. No cal saber quina llargària ni forma té el tobogan, ja que no ens demanen la força de fregament (ni el coeficient) si no el treball que ha fet, llavors

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + W_{F_{nc}}$$

d'on

$$W_{F_{nc}} = mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 30 \cdot 9,8 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (4)^2 = 348\,J$$

3. La situació es pot representar com



Llavors escrivim un balanç d'energia, tenint en compte que suposem $h = 0$ al punt més baix, que al començament té velocitat v, i que al punt més baix té velocitat v'

$$\cancel{m}gR + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v'^2$$

d'on

$$v' = \sqrt{2gR + v^2} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5 + 6^2} = 6,77\, m/s$$

En quant a la tensió al punt més baix, al tema anterior vam deduir el resultat

$$T - mg = m\frac{v'^2}{R} \rightarrow T = mg + m\frac{v'^2}{R} = 0,5 \cdot 9,8 + 0,5 \cdot \frac{(6,77)^2}{0,5} = 50,73\, N$$

* * *

4. El treball que hem de fer per pujar l'ascensor l'altura demanada és igual a l'energia potencial gravitatòria que aquest guanyi. Llavors,

$$W = mgh = 700 \cdot 9,8 \cdot 20 = 1,37 \cdot 10^5\, J$$

Per calcular la potència

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1,37 \cdot 10^5}{28} = 4,9 \cdot 10^3\, W$$

5. Podem considerar que el treball que ha fet el motor s'ha invertit en l'energia cinètica que té al final, llavors

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 800 \cdot \left(\frac{107}{3,6}\right)^2 = 3,53 \cdot 10^5\, J$$

i la potència val

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3,53 \cdot 10^5}{8} = 4,42 \cdot 10^4\, W$$

* * *

6. Plantegem un balanç d'energia. Al punt més alt només té energia potencial gravitatòria. En un punt intermedi té potencial gravitatòria i cinètica. Novament la solució de l'exercici no depèn de la massa de l'objecte que es deixa caure.

$$\cancel{m}gH = \cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$H = h + \frac{1}{2g}v^2 = 16,25 + \frac{1}{2 \cdot 9,8} \cdot (30)^2 = 62,17\, m$$

La velocitat amb que arriba a terra es pot trobar escrivint el balanç d'energia de principi a fi

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 62,17} = 34,91\, m/s$$

* * *

7. Quan m_1 ha baixat $h = 15\, m$ l'energia potencial gravitatòria que ha perdut s'ha repartit en la potencial que ha guanyat m_2 i en el guany d'energia cinètica de les dues masses, aixi

$$m_1gh = m_2gh + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

en les condicions que ens van permetre resoldre el problema de la màquina d'Atwood l'acceleració de les dues masses és la mateixa, i si han recorregut el mateix espai, la velocitat també ho serà ($v_1 = v_2 \equiv v$), llavors podem escriure

$$2gh(m_1 - m_2) = (m_1 + m_2)v^2$$

d'on

$$v = \sqrt{2gh\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 15 \cdot \frac{15 - 5}{15 + 5}} = 12,12\, m/s$$

8. Si l'objecte arriba a una altura h, el treball que haurà fet el fregament serà $F_a h$. Llavors, plantejant un balanç d'energia

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + F_a h$$

d'on

$$h = \frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{mg + F_a}$$

Ara, al tornar a terra el balanç d'energia s'escriu com

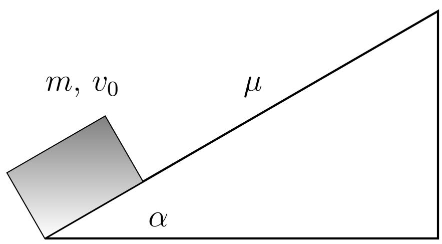
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + F_a h$$

i

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2\frac{mgh - F_a h}{m}} \\ &= \sqrt{2\frac{mg - F_a}{m}h} \\ &= \sqrt{\cancel{2}\frac{mg - F_a}{\cancel{m}}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{m}v_0^2}{mg + F_a}} \\ &= v_0\sqrt{\frac{mg - F_a}{mg + F_a}} \end{aligned}$$

* * *

9.



Plantegem un balanç d'energia de manera que la cinètica que té al peu del pla inclinat s'haurà invertit en energia potencial gravitatòria per una banda, i per l'altra s'haurà perdut en forma de fregament.

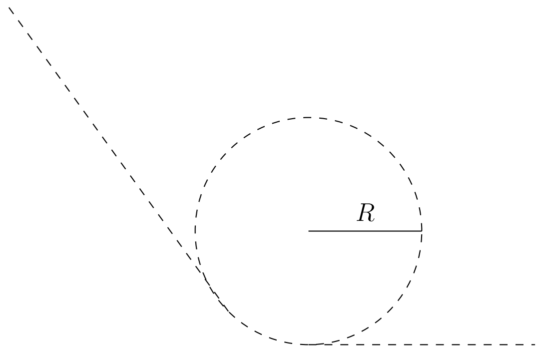
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 &= mgh + W_{F_{nc}} \\ &= mgd\sin\alpha + F_f d \\ &= mgd\sin\alpha + \mu N d \\ &= mgd\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha\, d \end{aligned}$$

d'on

$$d = \frac{\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2}{\cancel{m}g\sin\alpha + \mu\cancel{m}g\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(15)^2}{9,8\sin 30^\circ + 0,1\cdot 9,8\cos 30^\circ} = 19,57\,m$$

* * *

10.



En aquest exercici hem de tenir en compte dos factors, primer de tot volem que les vagonetes que circulen descriguin el *loop*, aquesta condició imposa un valor mínim per la velocitat que han de tenir quan es troben a dalt de tot. Després, ens hem d'assegurar que aquesta velocitat s'assoleix.

Quan una vagoneta és a dalt de tot, les forces que hi actuen són el pes i la normal, les dues proporcionen força centrípeta,

$$N + mg = m\frac{v^2}{R}$$

la velocitat mínima per poder descriure el *loop* es donarà quan $N = 0$, un valor menor de la velocitat faria que la vagoneta caigués descrivint un tir parabòlic (a la realitat les vagonetes tenen un sistema d'ancoratge als rails però aquí estem ignorant aquest fet), llavors

$$0 + \cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \rightarrow v_{min} = \sqrt{gR}$$

Per tal d'assegurar que la vagoneta té aquesta velocitat en aquell moment, cal que es deixi caure doncs d'una altura H tal que

$$\cancel{m}gH = \cancel{m}g2R + \frac{1}{2}\cancel{m}v_{min}^2$$

$$\cancel{g}H = \cancel{g}2R + \frac{1}{2}\cancel{g}R$$

$$H = 2R + \frac{1}{2}R = \frac{5R}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25\,m$$

En quant a la força que fa el rail al tornar a passar per la part baixa, calculem primer la velocitat que tindrà llavors aplicant el principi de conservació de l'energia des que es va llençar fins que arriba a baix com si no hagués fet el *loop*,

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gH}$$

Ara, recordant les idees de dinàmica de rotació del tema anterior

$$N - mg = m\frac{v^2}{R}$$

d'on la força que farà el rail sobre la vagoneta serà

$$\begin{aligned} N &= mg + m\frac{v^2}{R} \\ &= mg + m\frac{2gH}{R} \\ &= mg\left(1 + \frac{2H}{R}\right) \\ &= 80 \cdot 9,8\left(1 + \frac{2 \cdot 25}{10}\right) = 4704\,N \end{aligned}$$

5.2 El moment lineal. Xocs

1. La conservació de la quantitat de moviment es pot escriure de la següent forma

$$0 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

ja que al principi el patinador i la pilota es troben junts i en repòs. Llavors, incorporant les dades de l'enunciat

$$0 = 45 v_1' + 3 \cdot 6 \to v_1' = \frac{-3 \cdot 6}{45} = -0,4\, m/s$$

* * *

2. La conservació de la quantitat de moviment s'escriu

$$mv = \frac{m}{2} v_1' + \frac{m}{2} v_2'$$

simplificant la massa,

$$\cancel{m} v = \frac{\cancel{m}}{2} v_1' + \frac{\cancel{m}}{2} v_2'$$

fent servir les dades de l'enunciat,

$$5 = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} v_2' \to v_2' = 8\, m/s$$

el segon tros es mou en la mateixa direcció i sentit que el cos original.

* * *

3. En el procés que el primer patinador llança la pilota, la conservació de la quantitat de moviment s'escriu

$$0 = m_A v_1' + m_p v_2' \to 0 = 40 v_1' + 6 \cdot 2$$

d'on

$$v_1' = \frac{-12}{40} = -0,3\, m/s$$

Quan el segon patinador captura la pilota,

$$m_p v_2' = (m_B + m_p) v' \to v' = \frac{m_p v_2'}{m_B + m_p} = \frac{6 \cdot 2}{40 + 6} = 0,26\, m/s$$

4. La conservació de la quantitat de moviment i de l'energia s'escriuen

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ v_2 - v_1 = v_1' - v_2' \end{cases}$$

fent servir les dades de l'enunciat

$$\begin{cases} 4 \cdot 8 + 6(-12) = 4v_1' + 6v_2' \\ -12 - 8 = v_1' - v_2' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -40 = 4v_1' + 6v_2' \\ -20 = v_1' - v_2' \end{cases}$$

multiplicant la segona equació per 6 i sumant-les

$$\begin{cases} -40 = 4v_1' + 6v_2' \\ -120 = 6v_1' - 6v_2' \end{cases} \rightarrow -160 = 10v_1' \rightarrow v_1' = -16\,m/s$$

i finalment,

$$v_2' = v_1' + 20 = -16 + 20 = 4\,m/s$$

Com es veu, les dues boles canvien el sentit de moviment després del xoc.

* * *

5. La conservació de la quantitat de moviment i de l'energia s'escriuen

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ v_2 - v_1 = v_1' - v_2' \end{cases}$$

fent servir les dades de l'enunciat

$$\begin{cases} m_1 \cdot 5 = m_1v_1' + 1 \cdot v_2' \\ 0 - 5 = v_1' - v_2' \end{cases}$$

com veiem tenim tres incògnites i dues equacions. Si plantegem el balanç d'energia posterior al xoc,

$$\frac{1}{2}mv_2'^2 = W_{F_{nc}} = \mu mgd$$

d'on la velocitat del bloc

a)

$$v_2' = \sqrt{\frac{2\mu \cancel{m} gd}{\cancel{m}}} = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 9,8 \cdot 2} = 2,8\,m/s$$

Tornant al sistema d'equacions anterior

$$\begin{cases} m_1 \cdot 5 = m_1 v_1' + 1 \cdot 2,8 \\ 0 - 5 = v_1' - 2,8 \end{cases}$$

llavors la velocitat de la bola després del xoc,

$$v_1' = 2,8 - 5 = -2,2\,m/s$$

i la seva massa
b)

$$m_1 = \frac{2,8}{5 - v_1'} = \frac{2,8}{5 - (-2,2)} = 0,39\,kg$$

c) Per calcular l'energia cinètica perduda per la bola fem,

$$\begin{aligned} E_{perd} &= E_i - E_f \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \\ &= \frac{1}{2} 0,39 \cdot 5_1^2 - \frac{1}{2} 0,39 \cdot (-2,2)^2 = 3,93\,J \end{aligned}$$

* * *

6. El pèndol balístic és un dispositiu inercial que es fa servir per mesurar la velocitat de projectils. Es dispara un projectil de massa m coneguda contra un bloc de fusta, per exemple, de massa M de forma que el projectil queda incrustat al pèndol. Llavors, per efecte del xoc el pèndol descriurà un arc de circumferència fins una certa alçada H, que es pot relacionar amb la longitud del pèndol L i l'angle màxim α que forma amb la vertical en la seva ascensió.

En el moment de l'impacte podem escriure

$$mv = (m + M)v'$$

en el procés d'ascensió del pèndol

$$\frac{1}{2}(m + M)v'^2 = (m + M)gH \rightarrow v' = \sqrt{2gH}$$

amb $H = L - L\cos\alpha$.

Llavors,

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{(m+M)v'}{m} \\
&= \frac{m+M}{m}\sqrt{2gH} \\
&= \frac{m+M}{m}\sqrt{\cdot 2gL(1-\cos\alpha)} \\
&= \frac{0,015+1,5}{0,015}\sqrt{2\cdot 9,8\cdot 2(1-\cos 60^\circ)} = 447,15\, m/s
\end{aligned}
$$

5.3 Força elàstica i energia

1.
a) A partir de la conservació de la quantitat de moviment

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_1 v_2'$$

podem escriure

$$0,6 \cdot 4 + 0,2 \cdot 0 = (0,6 + 0,2) \cdot v'$$

on no hem distingit les velocitats després del xoc ja que queden junts.

$$v' = \frac{0,6 \cdot 4 + 0,2 \cdot 0}{0,6 + 0,2} = 3\, m/s$$

Calculem l'energia cinètica del sistema abans del xoc

$$E_i = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 0^2 + \frac{1}{2} 0,6 \cdot 4^2 = 4,8\, J$$

Calculem l'energia cinètica del sistema després del xoc

$$E_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_1) v_1^2 = \frac{1}{2}(0,2 + 0,6) 3^2 = 3,6\, J$$

Llavors l'energia perduda val

$$E_{perd} = E_i - E_f = 4,8 - 3,6 = 1,2\, J$$

b) Ara escrivim un balanç d'energia ja que el conjunt comprimirà la molla amb l'energia cinètica que ha adquirit

$$\frac{1}{\cancel{2}} k x^2 = \frac{1}{\cancel{2}} (m_1 + m_2) v'^2$$

d'on

$$x = v' \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 3 \sqrt{\frac{0,6 + 0,2}{500}} = 0,12\, m$$

* * *

2. La conservació de la quantitat de moviment s'escriu

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_1 v_2'$$

fent servir les dades del problema

$$5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 5 v_1' + 2 v_2' \qquad (1)$$

Ara, el balanç d'energia entre l'energia potencial elàstica i la cinètica dels blocs després de separar-se de la molla

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

fent servir les dades del problema

$$\frac{1}{2}\cdot 2000\cdot 0,1^2 = \frac{1}{2}\cdot 5v_1'^2 + \frac{1}{2}\cdot 2v_2'^2 \qquad (2)$$

Agrupant (1) i (2)

$$\begin{cases} 0 = 5v_1' + 2v_2' \\ 20 = 5v_1'^2 + 2v_2'^2 \end{cases}$$

aïllant $v_2' = -\frac{5}{2}v_1'$ de la primera i substituint a la segona

$$20 = 5v_1'^2 + 2\left(-\frac{5}{2}v_1'\right)^2 \to 20 = 5v_1'^2 + \frac{25}{2}v_1'^2$$

$$v_1'^2 = \frac{20}{5+\frac{25}{2}} \to v_1 = \pm\sqrt{\frac{20}{5+\frac{25}{2}}} = \pm 1,07\, m/s$$

finalment,

$$v_2' = -\frac{5}{2}v_1' = -\frac{5}{2}\cdot(\pm 1,07) = \mp 2,67\, m/s$$

* * *

3. Resolem el problema amb el mètode general. Escrivim el balanç d'energia,

$$mg(h+y) = \frac{1}{2}ky^2$$

a partir d'aquí obtenim una equació de segon grau

$$ky^2 - 2mgy - 2mgh = 0$$

amb solucions

$$\begin{aligned} y &= \frac{2mg \pm \sqrt{(2mg)^2 + 8kmgh}}{2k} \\ &= \frac{2\cdot 5\cdot 9,8 \pm \sqrt{(2\cdot 5\cdot 9,8)^2 + 8\cdot 100\cdot 5\cdot 9,8\cdot 3}}{2\cdot 100} \\ &= \frac{98 \pm 356,66}{200} \end{aligned}$$

$$y_1 = 2,27\, m \qquad y_2 = -1,29\, m$$

La segona solució no té sentit.

5.4 Força gravitatòria

1. A partir del resultat que es va trobar a la teoria, podem calcular el camp gravitatori de la Lluna a la seva superfície com

$$g_{Ll} = \frac{GM_{Ll}}{R_{Ll}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,74 \cdot 10^6)^2} = 1,62\, m/s^2$$

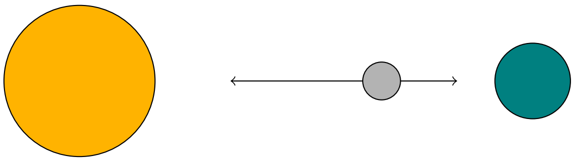
* * *

2. És immediat veure que el càlcul demanat és

$$V = -\frac{GM_{Ll}M_T}{r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{3,8 \cdot 10^8} = -1,3 \cdot 10^4\, J$$

* * *

3. En un eclipsi de Sol, la situació (**no** a escala) és



La força que fa la Terra sobre la Lluna val

$$F_{T-Ll} = G\frac{M_T M_{Ll}}{(d_{T-Ll})^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,8 \cdot 10^8)^2} = 2,027 \cdot 10^{20}\, N$$

La força que la el Sol sobre la Lluna (en aquesta configuració) val

$$F_{S-Ll} = G\frac{M_S M_{Ll}}{(d_{S-Ll})^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,5 \cdot 10^{11} - 3,8 \cdot 10^8)^2} = 4,38 \cdot 10^{20}\, N$$

on hem tingut en compte que

$$d_{S-Ll} = d_{S-T} - d_{T-Ll}$$

Llavors, en un eclipse de Sol, la força neta sobre la Lluna val

$$F = 4,38 \cdot 10^{20} - 2,027 \cdot 10^{20} = 2,353 \cdot 10^{20}\, N$$

i va dirigida cap el Sol.

En un eclipsi de Lluna, la situació (**no** a escala) és

La força que fa la Terra sobre la Lluna val

$$F_{T-Ll} = G\frac{M_T M_{Ll}}{(d_{T-Ll})^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,8 \cdot 10^8)^2} = 2,027 \cdot 10^{20}\, N$$

La força que fa el Sol sobre la Lluna (en aquesta configuració) val

$$F_{S-Ll} = G\frac{M_S M_{Ll}}{(d_{S-Ll})^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(1,5 \cdot 10^{11} + 3,8 \cdot 10^8)^2} = 4,3357 \cdot 10^{20}\, N$$

on hem tingut en compte que ara

$$d_{S-Ll} = d_{S-T} + d_{T-Ll}$$

Llavors, en un eclipse de Sol, la força neta sobre la Lluna val

$$F = 4,3357 \cdot 10^{20} + 2,027 \cdot 10^{20} = 6,3627 \cdot 10^{20}\, N$$

Aquesta diferència de força sobre la Terra en les dues posicions esmentades és, en part, responsable del fenomen de les marees.

* * *

4. Només cal generalitzar l'exemple relacionat que hi ha als apunts. Recordem que el camp gravitatori terrestre en funció de l'altura h, s'escriu com

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

llavors demanem

$$G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{9,8}{n}$$

per algun valor de h, i com teníem que

$$9,8 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

podem escriure

$$\cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{nR_T^2} = \cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{(R_T+h)^2}$$

llavors

$$(R_T+h)^2 = nR_T^2$$

d'on

$$R_T + h = \pm\sqrt{n}R_T$$

i

$$h = \pm\sqrt{n}R_T - R_T = R_T\left(\pm\sqrt{n}-1\right)$$

amb solucions

$$h_1 = \left(\sqrt{n}-1\right)R_T$$
$$h_2 = \left(-\sqrt{n}-1\right)R_T$$

La solució negativa no té sentit aquí.

* * *

5.5 Força elèctrica

1. La força gravitatòria es pot calcular com

$$F_g = G\frac{Mm}{r^2} = 6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3\cdot 5}{(2\cdot 10^{-3})^2} = 2,5\cdot 10^{-4}\,N$$

per una altra banda, la força elèctrica val

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{{}^2} = 9\cdot 10^9\cdot\frac{10\cdot 50}{(2\cdot 10^{-3})^2} = 1,125\cdot 10^{18}\,N$$

de forma que la força elèctrica és unes

$$\frac{1,125\cdot 10^{18}}{2,5\cdot 10^{-4}} = 4,5\cdot 10^{21}$$

vegades més gran que la gravitatòria. Proveu d'esbrinar, com és doncs que l'univers està governat per la força gravitatòria?

6 La llei d'Ohm

1. A partir de la llei d'Ohm $V = IR$,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{90}{30} = 3\,A$$

* * *

2. Com es tracta d'una font d'alimentació, calculem la potència com

$$P = VI = 15 \cdot 3 = 45\,W$$

* * *

3. A partir de l'expressió que relaciona potència amb tensió i resistència,

$$P = \frac{V^2}{R} \rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{80} = 605\,\Omega$$

Si ara es connecta aquesta bombeta a $125\,V$, la potència que dissiparà serà

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{125^2}{605} = 25,83\,W$$

* * *

4. A partir de la llei d'Ohm $V = IR$,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{20} = 5\,A$$

ara, fent servir l'expressió que relaciona potència amb intensitat i resistència,

$$P = I^2R = 5^2 \cdot 20 = 500\,W$$

llavors, la calor dissipada per efecte Joule en 10 hores serà

$$Q = Pt = 500 \cdot 10 \cdot 3600 = 1,8 \cdot 10^7\,J$$

* * *

5. Tal com es comenta als apunts de teoria, per sumar tres resistències en paral·lel fem

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

d'on

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}{R_1R_2R_3}$$

i finalment
$$R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$
En el cas de tenir cinc resistències, observem el resultat anterior; al numerador apareix el producte de les resistències i al denominador apareixen les sumes de totes les combinacions possibles dels productes agafats de dos en dos, llavors, en el cas de cinc resistències, la resistència equivalent val

$$\frac{R_1R_2R_3R_4R_5}{R_1R_2R_3R_4 + R_1R_2R_3R_5 + R_1R_2R_5R_4 + R_1R_5R_3R_4 + R_5R_2R_3R_4}$$

* * *

6. Per cada bombeta podem escriure

$$R_1 = \frac{V_1^2}{P_1} = \frac{220^2}{20} = 2420\,W$$

$$R_2 = \frac{V_1^2}{P_2} = \frac{220^2}{50} = 968\,W$$

$$R_3 = \frac{V_1^2}{P_3} = \frac{220^2}{100} = 484\,W$$

Quan es connecten en sèrie

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 = 2420 + 968 + 484 = 3872\,\Omega$$

Quan es connecten en paral·lel

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$$

$$= \frac{2420 \cdot 968 \cdot 484}{968 \cdot 484 + 2420 \cdot 484 + 2420 \cdot 968}$$

$$= 284,7\,\Omega$$

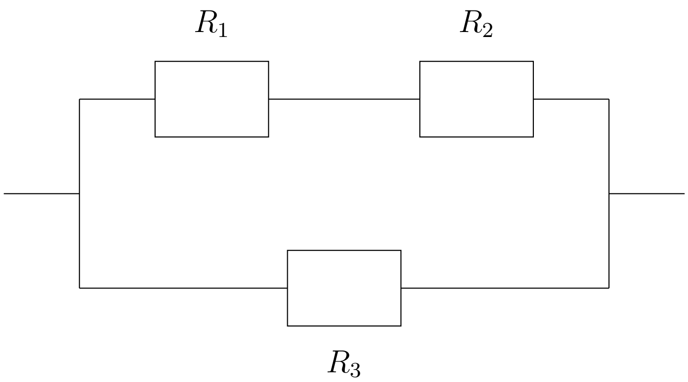
* * *

7. Únicament per agilitzar la correcció de l'exercici, adoptem els següents criteris per establir una notació algebraica adequada (els dibuixos els heu de fer)

- Dues resistències connectades en sèrie les representarem com $R_1 + R_2$

- Dues resistències connectades en paral·lel les representarem com $R_1//R_2$
- Farem servir parèntesis per tal d'establir la prioritat en els esquemes de connexió

Per exemple, l'associació



la representarem per $(R_1 + R_2)//R_3$

Amb aquest conveni provisional, els possibles esquemes de connexió i valor de la resistència equivalent en cada cas per les tres resistències de l'exercici són

1. $R_1 + R_2 + R_3 \rightarrow R_{eq} = 60\,\Omega$
2. $R_1 + (R_2//R_3) \rightarrow R_{eq} = 22\,\Omega$
3. $R_2 + (R_1//R_3) \rightarrow R_{eq} = 27,5\,\Omega$
4. $R_3 + (R_1//R_2) \rightarrow R_{eq} = 36,67\,\Omega$
5. $(R_1 + R_2)//R_3 \rightarrow R_{eq} = 15\,\Omega$
6. $(R_2 + R_3)//R_1 \rightarrow R_{eq} = 8,33\,\Omega$
7. $(R_3 + R_1)//R_2 \rightarrow R_{eq} = 13,33\,\Omega$
8. $R_1//R_2)//R_3 \rightarrow R_{eq} = 5,45\,\Omega$

* * *

8. Fent servir la notació de l'exercici anterior,

1. $R + R + R + R \rightarrow R_{eq} = 40\,\Omega$

2. $R + R + (R//R) \rightarrow R_{eq} = 25\,\Omega$
3. $R + ((R + R)//R) \rightarrow R_{eq} = 16,67\,\Omega$
4. $(R + R)//R//R \rightarrow R_{eq} = 4\,\Omega$
5. $(R + R)//(R + R) \rightarrow R_{eq} = 10\,\Omega$
6. $(R + R + R)//R \rightarrow R_{eq} = 7,5\,\Omega$
7. $R//R//R//R \rightarrow R_{eq} = 2,5\,\Omega$
8. $(R//R) + (R//R) \rightarrow R_{eq} = 10\,\Omega$
9. $(R//R//R) + R \rightarrow R_{eq} = 16,67\,\Omega$

7 Circuits elèctrics simples

1. La font d'alimentació té resistència interna r, al connectar-la a una altra resistència R el que tenim és un circuit amb una font ideal i dues resistències en sèrie.

Apliquem la llei d'Ohm a aquest circuit

$$\mathcal{E} = I(R + r)$$

d'on
a)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{4,5}{220 + 0,5} = 0,02041\,A$$

i la tensió en borns V_b

$$V_b = \mathcal{E} - Ir = 4,5 - 0,02041 \cdot 0,5 = 4,4898\,V$$

b)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{4,5}{1 + 0,5} = 3\,A$$

i la tensió en borns V_b

$$V_b = \mathcal{E} - Ir = 4,5 - 3 \cdot 0,5 = 3\,V$$

Veiem que la tensió en borns depèn del valor de la càrrega (la resistència externa R) que es connecta, ja que quan més gran sigui aquesta, la intensitat circulant és més petita i la tensió que cau dins la font d'alimentació (Ir) també, de forma que la tensió en borns s'aproxima a la força electromotriu que proporciona la bateria.

* * *

2. Recordem de la teoria l'expressió que relaciona la tensió en borns i els altres paràmetres de l'enunciat

$$V_b = \mathcal{E}\frac{R}{R + r}$$

i plantegem un sistema d'equacions amb les dades

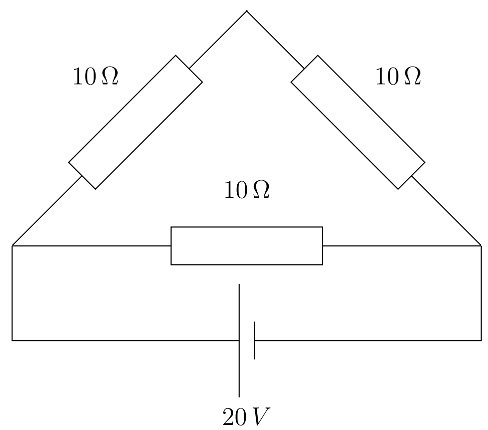
$$\begin{cases} 3\cancel{9} = \mathcal{E}\frac{\cancel{3}}{3+r} \\ \\ 2\cancel{14} = \mathcal{E}\frac{\cancel{7}}{7+r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(3 + r) = \mathcal{E} \\ 2(7 + r) = \mathcal{E} \end{cases} \rightarrow 9 + 3r = 14 + 2r \rightarrow r = 5\,\Omega$$

finalment

$$\mathcal{E} = 3(3 + r) = 3(3 + 5) = 24\,V$$

* * *

3. Podem representar la situació amb un dibuix



llavors la resistència equivalent del circuit val (amb la notació d'exercicis anteriors)

$$R = 10//(10 + 10) \rightarrow R = 10//20 = \frac{10 \cdot 20}{10 + 20} = 6,67\,\Omega$$

i la intensitat que circularà pel circuit

$$V = IR \rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{20}{6,67} = 3\,A$$

Aplicant ara l'expressió del divisor d'intensitat tenim, per la intensitat que passa per les dues resistències en sèrie

$$I_1 = I\frac{R}{R + 2R} = 3 \cdot \frac{10}{10 + 20} = 1\,A$$

i per la que passa per la resistència que es troba sola

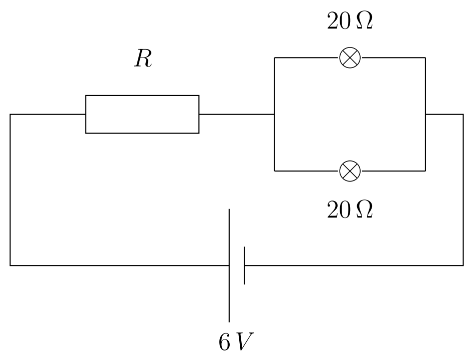
$$I_2 = I\frac{2R}{R + 2R} = 3 \cdot \frac{20}{10 + 20} = 2\,A$$

* * *

4. Les bombetes ($\otimes$) es comporten com a resistències, el valor de les quals es pot calcular a partir de la potència

$$P = \frac{V^2}{R_\otimes} \rightarrow R_\otimes = \frac{V^2}{P} = \frac{3^2}{\frac{9}{20}} = 20\,\Omega$$

L'esquema de connexió es pot representar com



llavors, a la resistència desconeguda R han de caure $3\,V$ per tal que les bombetes estiguin sotmeses a la seva tensió nominal de $3\,V$. Les dues bombetes en paral·lel presenten una resistència equivalent

$$R_{eq} = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10\,\Omega$$

i per tant passa per elles una intensitat

$$3 = I \cdot 10 \rightarrow I = \frac{3}{10} = 0,3\,A$$

Aplicant ara la llei d'Ohm a R

$$3 = I \cdot R \rightarrow R = \frac{3}{0,3} = 10\,\Omega$$

* * *

5.

- Terra en A

  $V_A = 0\,V$, $V_B = -80\,V$, $V_C = -86\,V$, $V_D = -100\,V$

- Terra en B

  $V_B = 0\,V$, $V_C = -6\,V$, $V_D = -20\,V$, $V_A = 80\,V$

- Terra en C

  $V_C = 0\,V$, $V_D = -14\,V$, $V_A = 86\,V$, $V_B = 6\,V$

- Terra en D

  $V_D = 0\,V$, $V_A = 100\,V$, $V_B = 20\,V$, $V_C = 14\,V$

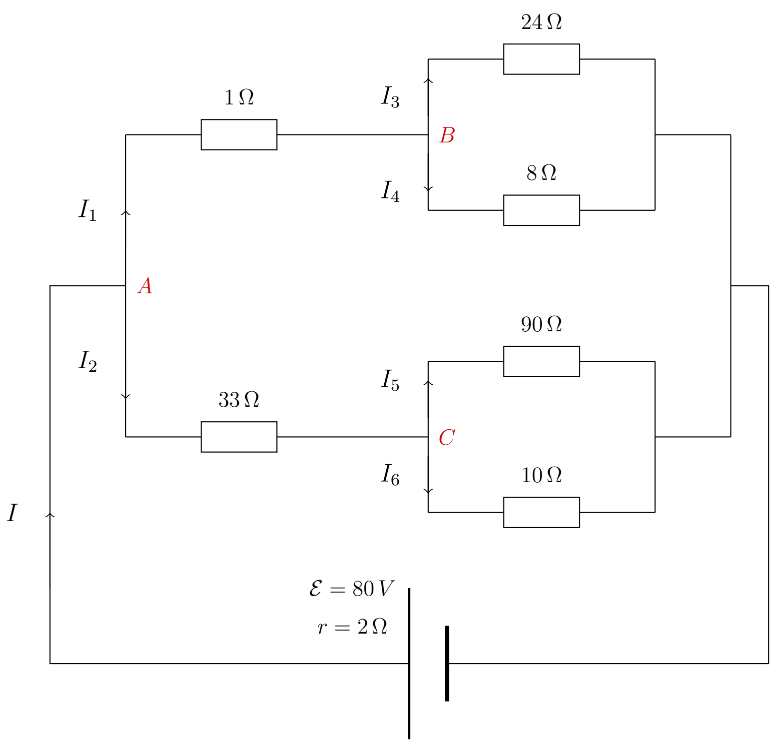
6. Trobem la resistència equivalent del circuit

$$
\begin{aligned}
R_{eq} &= 2 + (1 + (24//8))//(33 + (90//10)) \\
&= 2 + \left(1 + \frac{24 \cdot 8}{24 + 8}\right) // \left(33 + \frac{90 \cdot 10}{90 + 10}\right) \\
&= 2 + (1 + 6)//(33 + 9) \\
&= 2 + 7//42 = 2 + \frac{7 \cdot 42}{7 + 42} = 2 + 6 = 8\,\Omega
\end{aligned}
$$

Ara calculem la intensitat que passa pel circuit

$$\mathcal{E} = IR_{eq} \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{80}{8} = 10\,A$$

A continuació podem anar seguint *el camí* que fa la intensitat i calcular la tensió que cau en cada resistència



Per trobar les intensitats a les derivacions aplicarem el resultat que vam deduir a la teoria pel divisor de intensitat (*secció 7.2, pàgina 87*).

A la derivació A necessitem tenir calculades les associacions de resistències següents (podem aprofitar els càlculs parcials que hem hagut de fer per trobar la resistència equivalent del circuit)

- $24//8 = 6$
- $1 + 24//8 = 7$
- $90//10 = 9$
- $33 + 90//10 = 42$

llavors, per I_1

$$I_1 = I\frac{42}{42+7} = 10 \cdot \frac{42}{49} = 8,57\,A$$

per I_2

$$I_2 = I\frac{7}{42+7} = 10 \cdot \frac{7}{49} = 1,43\,A$$

per I_3

$$I_3 = I_1\frac{8}{8+24} = 8,57 \cdot \frac{8}{32} = 2,1425\,A$$

per I_4

$$I_4 = I_1\frac{24}{24+8} = 8,57 \cdot \frac{24}{32} = 6,4275\,A$$

per I_5

$$I_5 = I_2\frac{10}{10+90} = 1,43 \cdot \frac{10}{100} = 0,143\,A$$

per I_6

$$I_6 = I_2\frac{90}{90+10} = 1,43 \cdot \frac{90}{100} = 1,287\,A$$

I en quant a les caigudes de tensió

$$V_{1\,\Omega} = I_1 \cdot 1 = 8,57 \cdot 1 = 8,57\,V$$

$$V_{24\,\Omega} = I_3 \cdot 24 = 2,1425 \cdot 24 = 51,42\,V$$

$$V_{8\,\Omega} = I_4 \cdot 8 = 6,4275 \cdot 8 = 51,42\,V$$

$$V_{33\,\Omega} = I_2 \cdot 33 = 1,43 \cdot 33 = 47,19\,V$$

$$V_{90\,\Omega} = I_5 \cdot 90 = 0,143 \cdot 90 = 12,87\,V$$

$$V_{10\,\Omega} = I_6 \cdot 10 = 1,287 \cdot 10 = 12,87\,V$$

i finalment la caiguda de tensió a la resistència interna de la bateria

$$V_{2\,\Omega} = I \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20\,V$$

* * *

7. a) En les condicions d'aquest apartat, la llei d'Ohm aplicada al circuit s'escriu

$$\mathcal{E} = I(R + r + 6) \rightarrow 12 = 0,75(1 + R + 6)$$

d'on

$$R = \frac{12}{0,75} - 7 = 9\,\Omega$$

b) La potència dissipada en forma de calor a la resistència interna val

$$P = I^2 r = 0,75^2 \cdot 1 = 0,5625\,W$$

c) Quant els dos interruptors es troben tancats la resistència equivalent del circuit val

$$R_{eq} = R + r + 3//6 = 9 + 1 + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 10 + 2 = 12\,\Omega$$

i la intensitat que passa llavors pel circuit

$$\mathcal{E} = I' R_{eq} \rightarrow I' = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}} = \frac{12}{12} = 1\,A$$

d) Si l'interruptor S_1 es troba obert no hi ha pas de corrent pel circuit i l'amperímetre marcaria zero.

8 La llum

1. Calculem la potència total que emet l'antena amb

$$P = \frac{E}{t} \to E = P \cdot t = 1 \cdot 10^3 \cdot 60 = 6 \cdot 10^4 \, J$$

Per una altra banda, l'energia *d'un sol* fotó és

$$E = hf = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 98 \cdot 10^6 = 6,49 \cdot 10^{-26} \, J$$

per tant el nombre de fotons (γ) serà

$$\# \gamma = \frac{6 \cdot 10^4}{6,49 \cdot 10^{-26}} = 9,24 \cdot 10^{29}$$

* * *

2. Comencem passant el MeV a Joule

$$200 \, MeV \cdot \frac{10^6 \, eV}{1 \, MeV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \, J}{1 \, eV} = 3,2 \cdot 10^{-11} \, J$$

llavors la freqüència

$$f = \frac{3,2 \cdot 10^{-11}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 4,83 \cdot 10^{22} \, Hz$$

la longitud d'ona serà

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,83 \cdot 10^{22}} = 6,21 \cdot 10^{-15} \, m$$

Aquesta radiació és a la zona dels raigs gamma (γ).

* * *

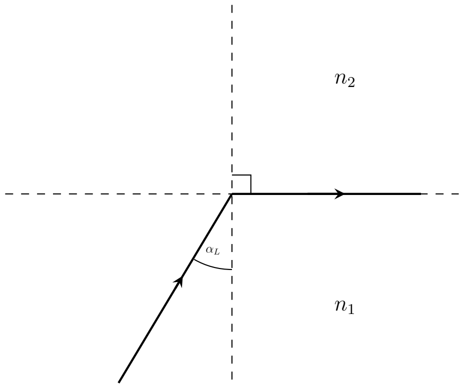
3. Fent servir la llei d'Snell per la refracció

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

d'on, tenint en compte que per l'aire és $n_1 = 1$

$$n_2 = \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{1 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 14,90^\circ} = 1,33$$

4. El fenomen de l'angle límit es dona quan la llum passa d'un medi a un altre i l'índex de refracció del primer és més gran que el del segon medi.



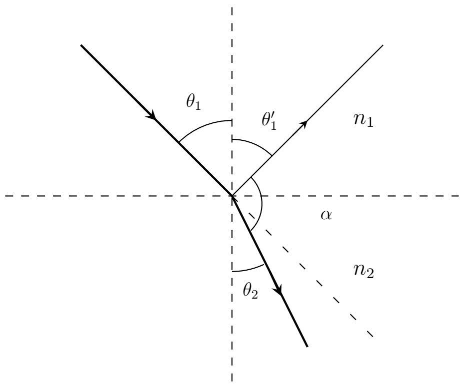
$$n_1 \sin \alpha_L = n_2 \sin 90° \rightarrow n_1 \sin \alpha_L = n_2$$

d'on

$$\alpha_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1,33}{1,54} = 59,73°$$

* * *

5. Podem representar la situació en el següent diagrama



de la llei d'Snell pel raig reflectit sabem que $\theta_1 = \theta_1'$ i observant el diagrama es veu que

$$\theta_1' + \alpha + \theta_2 = 180°$$

$$30° + 135° + \theta_2 = 180° \rightarrow \theta_2 = 15°$$

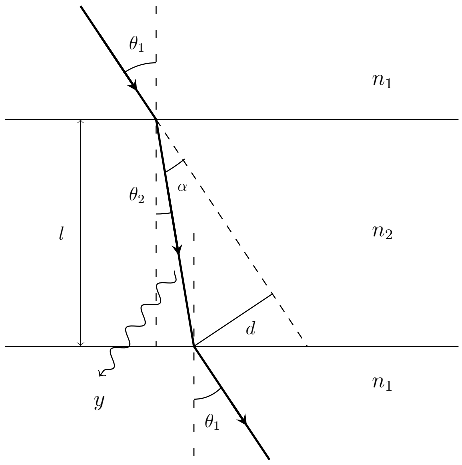
llavors, a partir de la llei d'Snell de la refracció

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$n_2 = \frac{n_1 \sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{1 \cdot \sin 30°}{\sin 15°} = 1,932$$

on hem suposat que el medi 1 era aire ($n_1 = 1$), com és habitual si no es diu res.

6. La doble refracció en una làmina plano-paral·lela es pot representar com



És fàcil veure que en els triangles rectangles que han quedat definits es pot escriure

$$\cos\theta_2 = \frac{l}{y} \qquad \sin\alpha = \frac{d}{y}$$

d'on

$$l = y\cos\theta_2 = \frac{d}{\sin\alpha}\cos\theta_2 = \frac{d\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} \tag{2}$$

Per una altra banda, amb la llei d'Snell de la refracció

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin\theta_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{1,5}\right) = 28,123^\circ$$

llavors, substituint en (2)

$$l = \frac{d\cos\theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{0,18 \cdot \cos 28,123^\circ}{\sin(45^\circ - 28,123^\circ)} = 0,547\,cm$$

* * *

7. Quan la llum passa d'un medi a un altre amb índexs de refracció diferents, la freqüència de la llum no canvia, si no que ho fa la longitud d'ona. En el buit, (o de forma equivalent en l'aire, on considerem $n = 1$), la relació entre freqüència i longitud d'ona s'escriu

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

on c és a velocitat de la llum en el buit. En un medi qualsevol, l'índex de refracció es definia com el quocient de la velocitat de la llum en el buit i la velocitat de la llum dins el medi

$$n = \frac{c}{v}$$

Llavors, la longitud d'ona en un medi on la velocitat no és la de la llum sinó v, és

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Amb les dades de l'exercici calculem la freqüència de la radiació, ja que aquest valor no canviarà

$$f = \frac{3 \cdot 10^8}{5890 \cdot 10^{-10}} = 5,09 \cdot 10^{14}\, Hz$$

En l'alcohol, com l'índex de refracció és 1,36, la velocitat de la llum en ell val

$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,36} = 2,206 \cdot 10^8\, m/s$$

i per tant la longitud d'ona

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2,206 \cdot 10^8}{5,09 \cdot 10^{14}} = 4,33 \cdot 10^{-7}\, m$$

En el benzè, com l'índex de refracció és 1,50, la velocitat de la llum en ell val

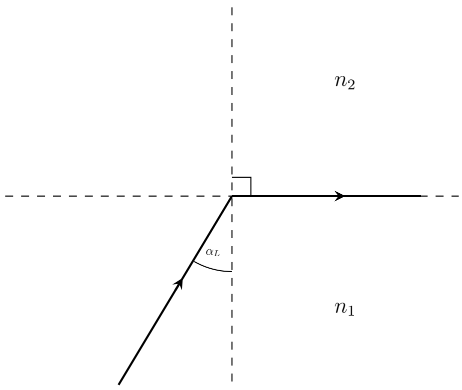
$$n = \frac{c}{v} \rightarrow v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,50} = 2 \cdot 10^8\, m/s$$

i per tant la longitud d'ona

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2 \cdot 10^8}{5,09 \cdot 10^{14}} = 3,93 \cdot 10^{-7}\, m$$

* * *

8. De forma semblant a l'exercici 4.



$$n_1 \sin \alpha_L = n_2 \sin 90° \rightarrow n_1 \sin \alpha_L = n_2$$

d'on

$$\alpha_L = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{1,45}{1,52} = 72,54°$$

* * *

9. Fent servir la llei d'Snell de la refracció

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Ara bé, al incidir llum blanca (que és composta d'una barreja de tots els colors) cada raig patirà un desviament diferent ja que l'índex de refracció té un valor per cada freqüència (color). Calculem l'angle de refracció pel vermell

$$\theta_2 = \arcsin \left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{n_{ver}} \right) = \arcsin \left(\frac{1 \cdot \sin 30°}{1,61} \right) = 18,0929°$$

De forma semblant, pel violat

$$\theta_2 = \arcsin \left(\frac{n_1 \sin \theta_1}{n_{vio}} \right) = \arcsin \left(\frac{1 \cdot \sin 30°}{1,67} \right) = 17,4216°$$

De forma que l'angle que formen aquests dos raigs refractats val

$$\alpha = 18,0929° - 17,4216° = 0,67132°$$

9 Miralls. Lents primes. Plans principals

1. Les representacions de cada cas estan fetes amb detall als apunts i no es repetiran aquí. En quant als càlculs analítics de les imatges,

a) L'equació que ens permet trobar la imatge és

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

fent servir les dades de l'apartat

$$\frac{1}{-8} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-6}$$

d'on

$$\frac{1}{s'} = \frac{-2}{6} + \frac{1}{8} = \frac{-16+6}{48} = \frac{-10}{48} \rightarrow s' = \frac{48}{-10} = -4,8\,cm$$

Si calculem l'augment lateral β', (en miralls $\beta' = -\frac{s'}{s}$)

$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{-4,8}{-8} = -0,6$$

cosa que ens diu que la imatge és real (es forma a l'esquerra del mirall còncau), invertida i més petita que l'original tal com es comprova a la solució gràfica.

b) Ara tenim

$$\frac{1}{-4} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-6}$$

d'on

$$\frac{1}{s'} = -\frac{2}{6} + \frac{1}{4} = \frac{-8+6}{24} = \frac{-2}{24} \rightarrow s' = \frac{24}{-2} = -12\,cm$$

Si calculem l'augment lateral β',

$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{-12}{-4} = -3$$

la imatge és real, invertida i més gran que l'original.

c) En aquest darrer cas

$$\frac{1}{-2} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-6}$$

d'on

$$\frac{1}{s'} = \frac{2}{-6} + \frac{1}{2} = \frac{4-6}{-12} = \frac{-2}{-12} \rightarrow s' = \frac{12}{2} = 6\,cm$$

L'augment lateral β' val ara,

$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{6}{-2} = 3$$

la imatge és virtual (es forma a la dreta del mirall còncau), dreta i més gran que l'original.

* * *

2. Quan $s = -6\,cm$, l'objecte es troba situat sobre el centre del mirall. El càlcul analític de la imatge proporciona

$$\frac{1}{-6} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-6}$$

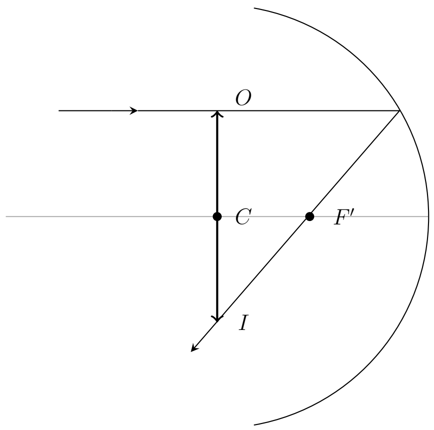
llavors

$$\frac{1}{s'} = -\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \rightarrow s' = -6\,cm$$

i l'augment lateral

$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{-6}{-6} = -1$$

cosa que ens diu que la imatge és real, invertida i d'igual mida que l'objecte.



mostrem només el raig que, sent paral·lel a l'eix òptic, passarà pel punt focal després de reflectir-se al mirall.

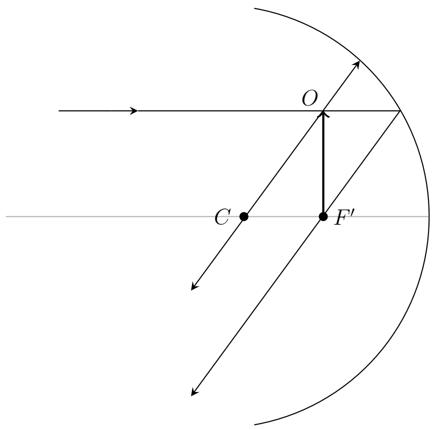
Quan $s = -3\,cm$, l'objecte es troba sobre el punt focal. el càlcul analític proporciona

$$\frac{1}{-3} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-6}$$

llavors

$$\frac{1}{s'} = -\frac{2}{6} + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow s' = \frac{1}{0} = \infty$$

la imatge es forma a l'infinit i es diu que el sistema és afocal.



* * *

3. Fent servir l'equació dels miralls

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{r}$$

amb les dades de l'exercici

$$\frac{1}{-6}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{4}$$

llavors

$$\frac{1}{s'}=\frac{2}{4}+\frac{1}{6}=\frac{12+4}{24}=\frac{16}{24}\rightarrow s'=1,5\,cm$$

en quant a l'augment lateral

$$\beta'=-\frac{s'}{s}=-\frac{1,5}{-4}=0,375$$

cosa que ens diu que la imatge és virtual (ja que es forma a la dreta del mirall, on podria haver-hi qualsevol material), dreta i de mida més petita que l'objecte.

L'obtenció gràfica de la imatge està detallada als apunts.

4. A partir de l'equació de les lents primes

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$$

a) Amb les dades de l'apartat

$$-\frac{1}{-7}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{3}$$

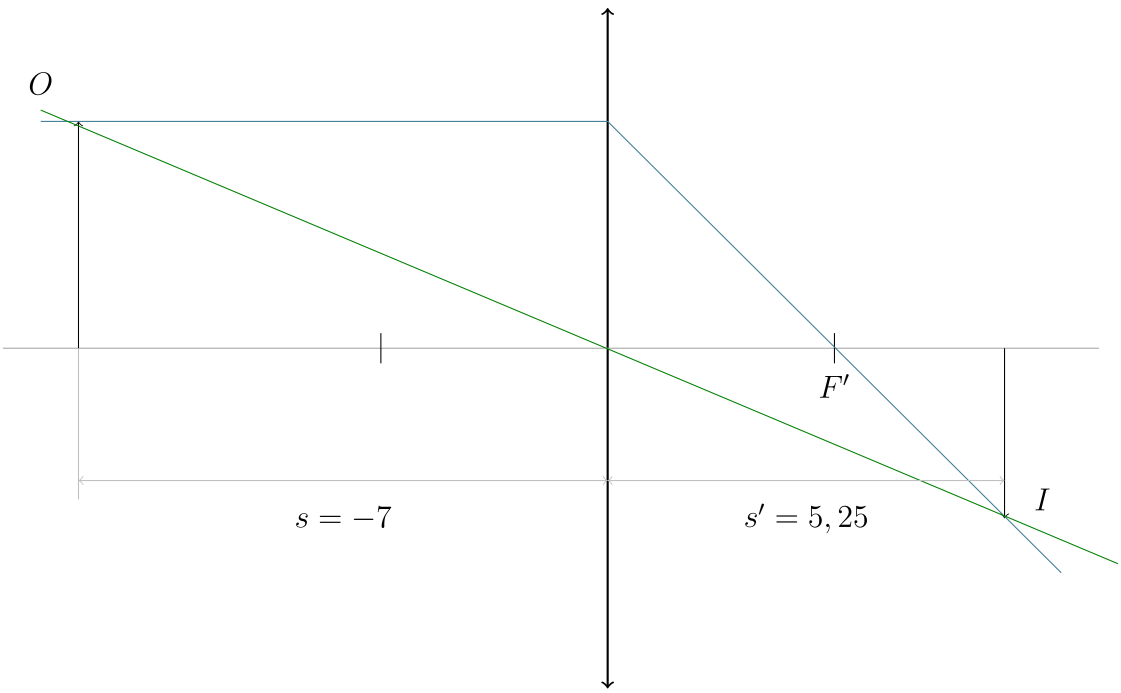
d'on

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{7-3}{21}=\frac{4}{21}\rightarrow s'=\frac{21}{4}=5,25\,cm$$

Calculem l'augment lateral

$$\beta=\frac{s'}{s}=\frac{5,25}{-7}=-0.75$$

Veiem que la imatge és real (es forma a l'altra banda de la lent), invertida ($\beta<0$)i més petita ($|\beta|<1$).



Per trobar l'altura de la imatge fem servir l'augment lateral

$$-0,75=\beta=\frac{y'}{y}\rightarrow y'=y\cdot\beta=3\cdot(-0.75)=-2,25\,cm$$

b) Fent servir les dades de l'apartat

$$-\frac{1}{-2}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{3}$$

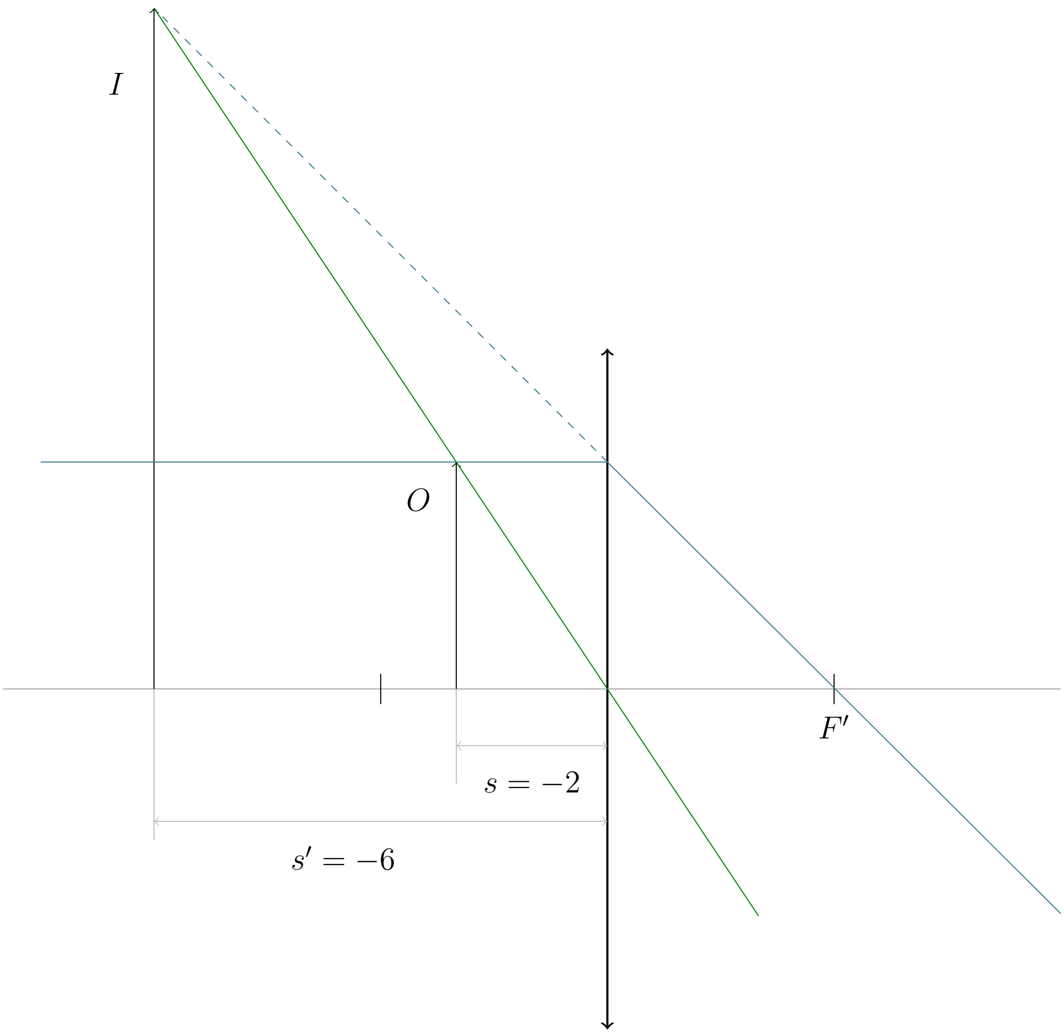
d'on

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2-3}{6}=\frac{-1}{6}\rightarrow s'=-6\,cm$$

Calculem l'augment lateral

$$\beta=\frac{s'}{s}=\frac{-6}{-2}=3$$

Veiem que la imatge és virtual (es forma a l'espai objecte), dreta ($\beta>0$)i més gran ($|\beta|>1$).



Per trobar l'altura de la imatge fem servir l'augment lateral

$$3 = \beta = \frac{y'}{y} \rightarrow y' = y \cdot \beta = 3 \cdot 3 = 9\,cm$$

* * *

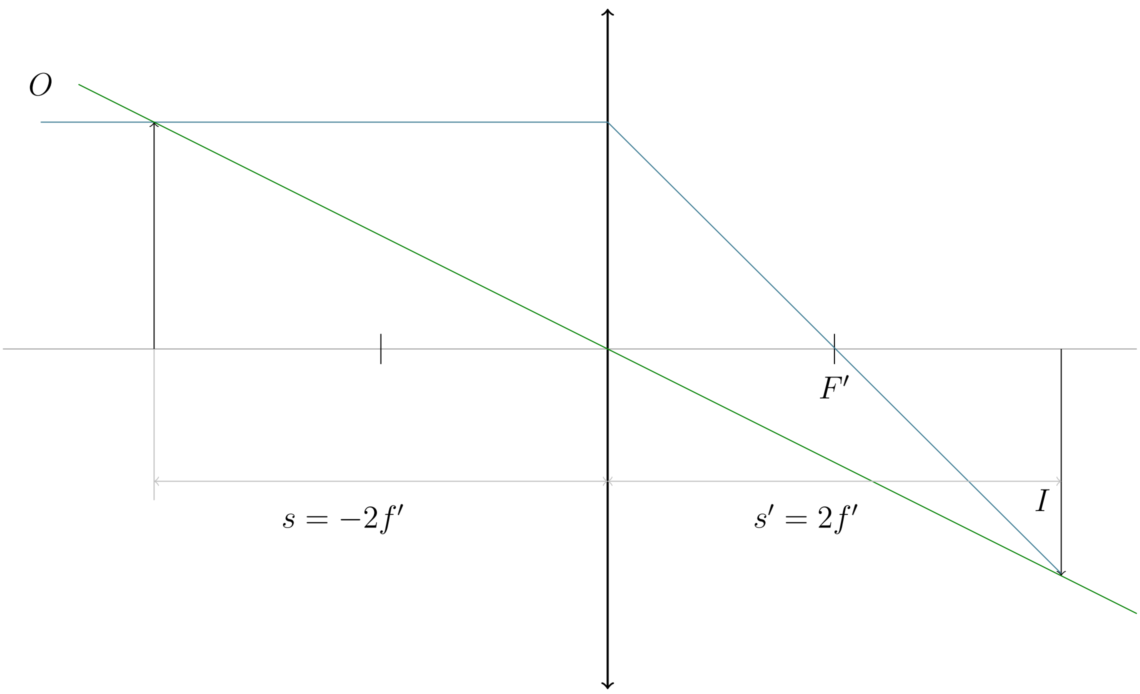
5.
a) En aquest cas la imatge serà real, invertida i de la mateixa mida, tal com veurem.

A partir de l'equació de les lent primes i demanant $s = -2f'$

$$-\frac{1}{-2f'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

d'on

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{2f'} = \frac{1}{2f'} \rightarrow s' = 2f'$$



Calculem l'augment lateral

$$\beta = \frac{s'}{s} = \frac{2f'}{-2f'} = -1$$

Per trobar l'altura de la imatge fem servir l'augment lateral

$$-1 = \beta = \frac{y'}{y} \rightarrow y' = y \cdot \beta = y \cdot (-1) = -y\,cm$$

tot i que no sabem l'altura original de l'objecte, és clar que la imatge té la mateixa altura i està invertida.

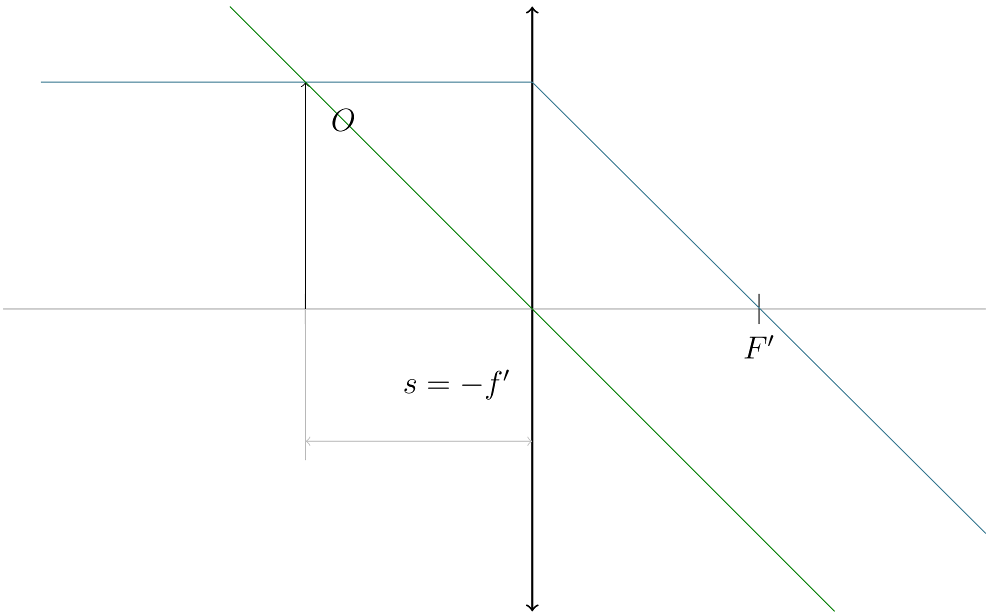
b) A partir de l'equació de les lent primes i demanant $s = -f'$

$$-\frac{1}{-f'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

d'on

$$\frac{1}{s'} = 0 \rightarrow s' = \infty$$

i el sistema és afocal.



6. En aquest cas es tracta d'una lent divergent. L'equació de les lent primes és per tots els apartats

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$$

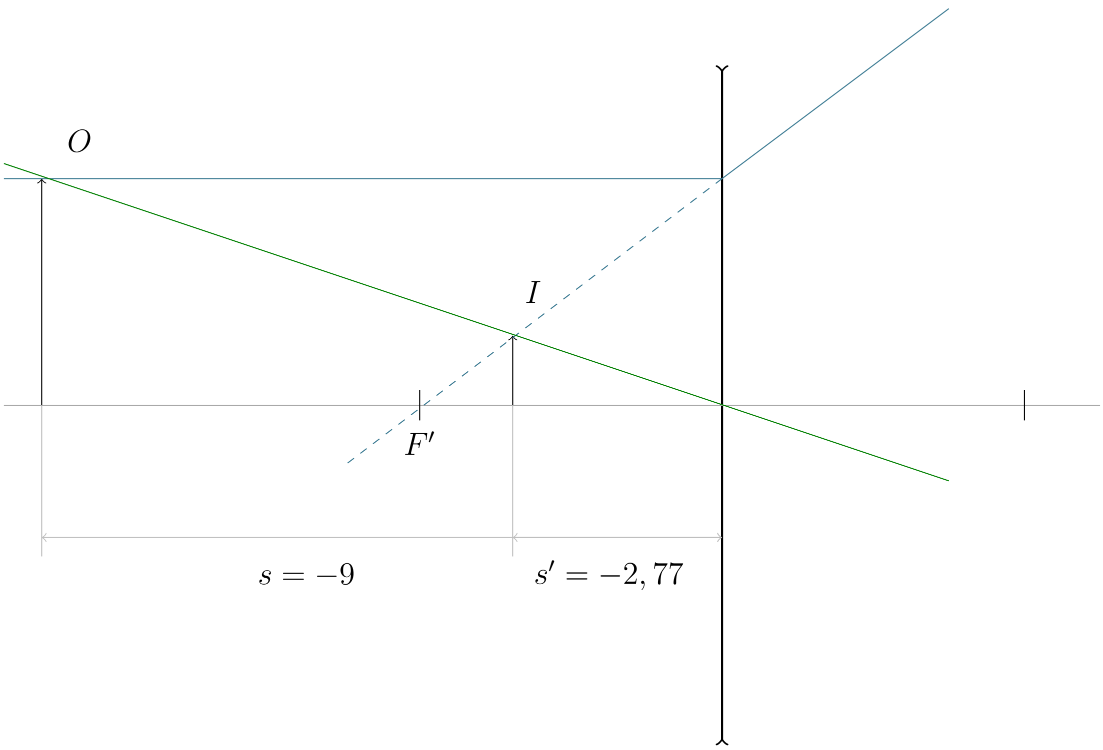
a) Fent servir les dades de l'enunciat i tenint en compte que

$$P=\frac{1}{f'}\rightarrow f'=\frac{1}{P}=\frac{1}{-25}=-0,04\,m=-4\,cm$$

tenim

$$-\frac{1}{-9}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-4}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{-4}-\frac{1}{9}=\frac{-1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{-9-4}{36}=\frac{-13}{36}\rightarrow s'=\frac{36}{-13}=-2,77\,cm$$



Calculem l'augment lateral

$$\beta=\frac{s'}{s}=\frac{-2,77}{-9}=0,3078$$

Per trobar l'altura de la imatge fem servir l'augment lateral

$$0,3078=\beta=\frac{y'}{y}\rightarrow y'=y\cdot\beta=3\cdot(0,3078)=0,923\,cm$$

veiem que la imatge és virtual, dreta i més petita que l'objecte.

b) La solució gràfica d'aquest cas és molt semblant al de l'apartat anterior i al que mostren els apunts de teoria. Fem amb detall la resolució analítica,

$$-\frac{1}{-6}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-4}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{-4}-\frac{1}{6}=\frac{-1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{-6-4}{24}=\frac{-10}{24}\rightarrow s'=\frac{-24}{10}=-2,4\,cm$$

Calculem ara l'augment lateral

$$\beta=\frac{s'}{s}=\frac{-2,4}{-6}=0,4$$

Per trobar l'altura de la imatge fem servir l'augment lateral

$$0,4=\beta=\frac{y'}{y}\rightarrow y'=y\cdot\beta=3\cdot(0,4)=1,2\,cm$$

veiem que la imatge és virtual, dreta i més petita que l'objecte.

c) La solució gràfica d'aquest cas és molt semblant al del primer apartat i l'anterior. Fem aquí només la resolució analítica

$$-\frac{1}{-2}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-4}$$

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{-4}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{-2-4}{8}=\frac{-6}{8}\rightarrow s'=\frac{-8}{6}=-1,33\,cm$$

Calculem ara l'augment lateral

$$\beta=\frac{s'}{s}=\frac{-1,33}{-2}=0,667$$

Per trobar l'altura de la imatge fem servir l'augment lateral

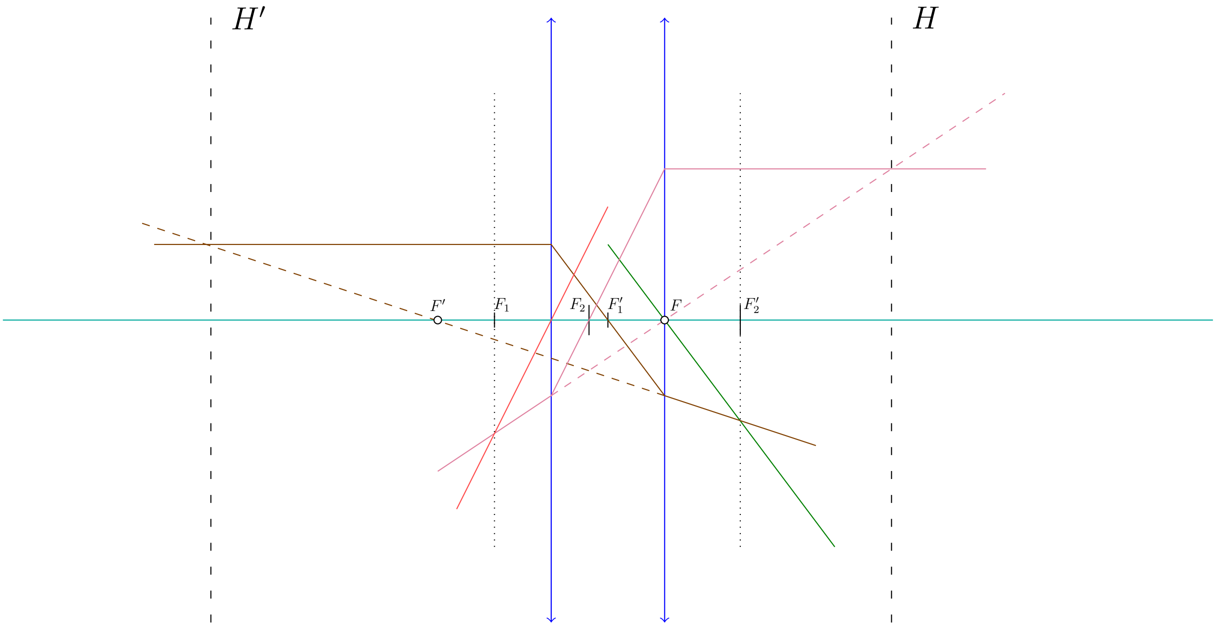
$$0,667=\beta=\frac{y'}{y}\rightarrow y'=y\cdot\beta=3\cdot(0,667)=2\,cm$$

veiem que la imatge és virtual, dreta i més petita que l'objecte.

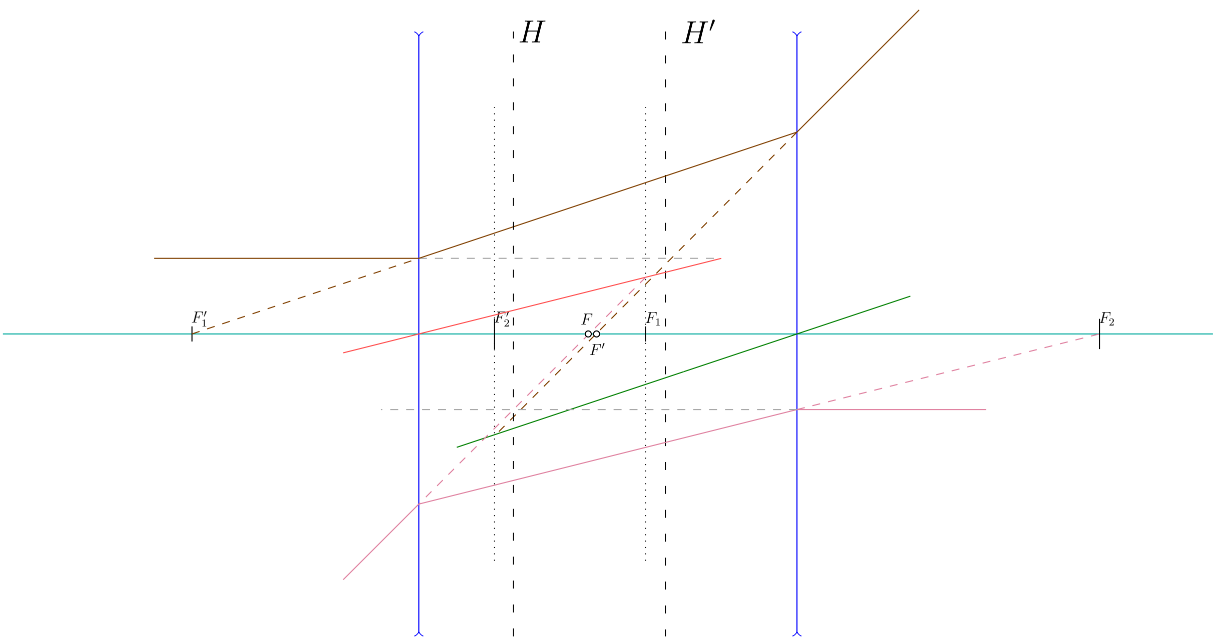
7. En tots els casos s'ha fet servir la mateixa codificació per els diferents elements que hi apareixen:

- Raig de llum que ve des de l'esquerra: línia sòlida de color taronja fosc.
- Prolongacions virtuals del raig anterior: mateix color i línia discontínua poc espaiada.
- Raig auxiliar per la refracció del raig que ve des de l'esquerra color verd fosc.
- Raig de llum que ve des de la dreta: línia sòlida de color porpra clar.
- Prolongacions virtuals del raig anterior mateix color i línia discontínua poc espaiada.
- Raig auxiliar per la refracció del raig que ve des de la dreta color vermell.
- Plans focals d'interès: línia de punts.
- Plans principals: línia discontinua més espaiada.
- Prolongacions dels raigs inicials per trobar la intersecció amb els raigs emergents: línia discontínua de color gris.
- Punts focals objecte i imatge del sistema compost: ○.

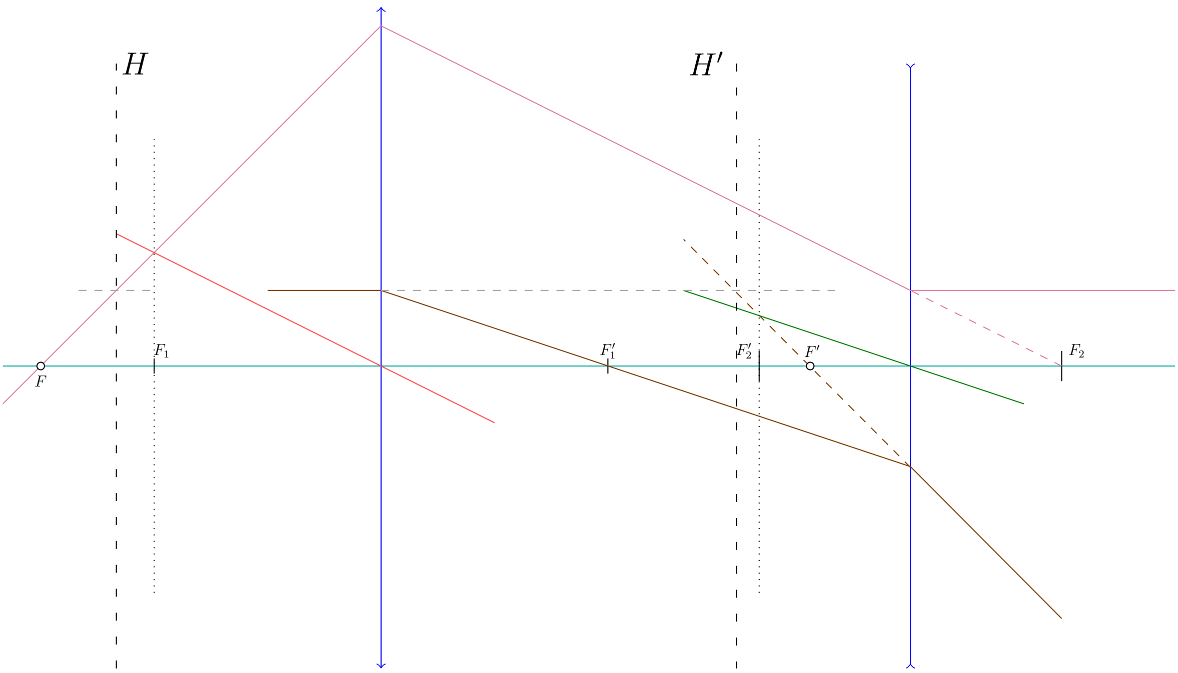
a) En aquest cas tenim



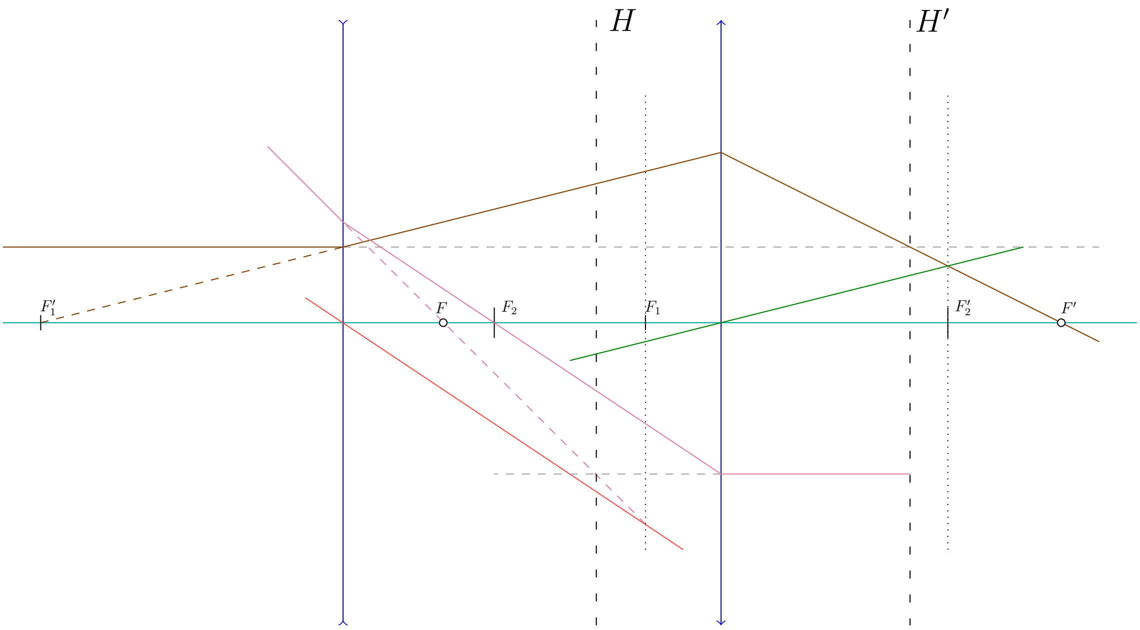
b) En aquest cas tenim



c) En aquest cas tenim



d) En aquest cas tenim



8.
a) A partir de l'equació de lents primes

$$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{f'_1}$$

i amb $s_1=-4\,cm$, podem escriure

$$-\frac{1}{-4}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{2}$$

d'on

$$\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\rightarrow s'_1=4\,cm$$

L'augment lateral val

$$\beta'_1=\frac{s'_1}{s_1}=\frac{4}{-4}=-1$$

La imatge intermèdia és real (es forma a l'altra banda de la lent), invertida ($\beta'<0$) i d'igual mida ($|\beta'|=1$). Ara, l'altura d'aquesta imatge intermèdia

$$y'_1=y_1\beta'_1=20\cdot(-1)=-20\,cm$$

En quant a l'efecte de la segona lent sobre aquesta imatge intermèdia

$$-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f'_2}$$

tenint en compte que la separació entre les lents és $e=5\,cm$ i que hem obtingut $s'_1=4\,cm$, és clar que serà $s_2=-1\,cm$, llavors

$$-\frac{1}{-1}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{3}$$

d'on

$$\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{3}-1=\frac{1-3}{3}=\frac{-2}{3}\rightarrow s'_2=\frac{-3}{2}=-1,5\,cm$$

L'augment lateral és ara

$$\beta'_2=\frac{s'_2}{s_2}=\frac{-1,5}{-1}=1,5$$

de forma que la imatge és ara (respecte a la intermèdia que hem trobat abans) virtual, dreta i més gran. L'augment del sistema òptic és pot calcular com

$$\beta'=\beta'_1\beta'_2=(-1)\cdot(1,5)=-1,5$$

la mida de la imatge final serà

$$y'_2 = y_2\beta'_2 = (-20)\cdot 1,5 = -30$$

b) A partir de l'equació de lents primes

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f'_1}$$

i amb $s_1 = -1\,cm$, podem escriure

$$-\frac{1}{-1} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{2}$$

d'on

$$\frac{1}{s'_1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow s'_1 = -2\,cm$$

L'augment lateral val

$$\beta'_1 = \frac{s'_1}{s_1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

La imatge intermèdia és virtual (es forma a la mateixa banda de la lent), dreta ($\beta' > 0$) i més gran ($|\beta'| > 1$). Ara, l'altura d'aquesta imatge intermèdia

$$y'_1 = y_1\beta'_1 = 20\cdot 2 = 40\,cm$$

En quant a l'efecte de la segona lent sobre aquesta imatge intermèdia

$$-\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f'_2}$$

tenint en compte que la separació entre les lents és $e = 5\,cm$ i que hem obtingut $s'_1 = -2\,cm$, és clar que serà $s_2 = -7\,cm$, llavors

$$-\frac{1}{-7} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{3}$$

d'on

$$\frac{1}{s'_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7-3}{21} = \frac{4}{21} \rightarrow s'_2 = \frac{21}{4} = 5,25\,cm$$

L'augment lateral és ara

$$\beta'_2 = \frac{s'_2}{s_2} = \frac{5,25}{-7} = -0,75$$

de forma que la imatge és ara (respecte a la intermèdia que hem trobat abans) real, invertida i més petita. L'augment del sistema òptic és pot calcular com

$$\beta' = \beta_1'\beta_2' = 2 \cdot (-0,75) = -1,5$$

la mida de la imatge final serà

$$y_2' = y_2\beta_2' = 40 \cdot (-0,75) = -30\,cm$$

9. Fent servir l'equació de les lents primes per la primera lent

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1'}$$

fent servir les dades de l'enunciat

$$-\frac{1}{-10} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{-3}$$

d'on

$$\frac{1}{s_1'} = \frac{-1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{-13}{30} \rightarrow s_1' = \frac{-30}{13} \approx -2,308\,cm$$

L'augment lateral per aquesta lent és

$$\beta_1' = \frac{s_1'}{s_1} = \frac{-2,038}{-10} = 0,2308$$

i l'altura de la primera imatge intermèdia

$$y_1' = y_1\beta_1' = 5 \cdot 0,2308 = 1,154\,cm$$

Amb la informació que tenim fins ara podem dir que aquesta primera imatge intermèdia és virtual, més petita i dreta. La seva posició respecte la segona lent és

$$s_2 = -(6 + 2,308) = -8,308\,cm$$

i aplicant l'equació de les lents primes a la segona lent

$$-\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2'}$$

obtenim

$$\frac{-1}{-8,308} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8,308} = \frac{3,308}{41,5385} = 0,08$$

d'on

$$s_2' = 12,56\,cm$$

l'augment lateral serà ara

$$\beta_2' = \frac{s_2'}{s_2} = \frac{12,56}{-8,3081} = -1,512$$

i l'altura de la segona imatge intermèdia

$$y_2' = y_2\beta_2' = 1,154 \cdot (-1,512) = -1,745\,cm$$

de forma que aquesta imatge (respecte l'anterior) és real, invertida i més gran. La posició d'aquesta imatge respecte la tercera lent es pot trobar com

$$s_3 = 12,56 - 7 = 5,56\,cm$$

procedint com abans

$$-\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_3'} = \frac{1}{f_3'}$$

d'on

$$-\frac{1}{5,56} + \frac{1}{s_3'} = \frac{1}{-2} \to \frac{1}{s_3'} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{5,56} = \frac{-3,56}{11,12} = -0,32$$

la posició de la imatge final (respecte la tercera lent) serà

$$s_3' = -3,1236\,cm$$

L'augment lateral que correspon a aquesta tercera lent val

$$\beta_3' = \frac{s_3'}{s_3} = \frac{-3,1236}{5,56} = -0,56$$

i l'altura de la imatge final

$$y_3' = y_3\beta_3' = (-1,745) \cdot (-0,56) = 0,98\,cm$$

La imatge final és, respecte la tercera lent, real (es troba a l'altra banda de la lent), més petita i invertida (en el sentit que la lent ha canviat l'orientació del seu objecte).

L'augment combinat del sistema òptic es pot calcular com

$$\beta' = \beta_1'\beta_2'\beta_3' = 0,2308 \cdot (-1,512) \cdot (-0,56) = 0,0925$$