1. (a) A partir de la tercera llei de Kepler,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

tenim

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2 \cdot (3,84 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (27,3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 6,02 \cdot 10^{24}\, kg$$

(b) Ara fer servir la relació

$$2\pi r = vT \to v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^8}{27,3 \cdot 24 \cdot 3600} = 1,02 \cdot 10^3\, m/s$$

2. (a) Calculem directament la velocitat com

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{150 \cdot 10^3 + 1,737 \cdot 10^6}} = 1,61 \cdot 10^3\, m/s$$

i amb

$$2\pi r = vT \to T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(150 \cdot 10^3 + 1,737 \cdot 10^6)}{1,61 \cdot 10^3} = 7,36 \cdot 10^3\, s$$

(b) Calculem l'energia que cal com la diferència d'energia mecànica entre les òrbites

$$\begin{aligned} W =& -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r'} - \left(-\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}\right) = \frac{GMm}{2}\left(-\frac{1}{r'} + \frac{1}{r}\right) \\ =& \frac{1}{2} \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot 800}{10^3}\left(\frac{-1}{500 + 1737} + \frac{1}{150 + 1737}\right) \\ =& 1,63 \cdot 8\, J \end{aligned}$$

3. (a) Calculem el vector $\vec{r}$ que va de O a P i el seu mòdul

$$\vec{r} = (4,0) \to |\vec{r}| \equiv r = 4\, m$$

i podem trobar el potencial demanat directament

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} = 4500\, V$$

(b) El treball demanat es pot trobar com

$$W = q_2\,(V_P - V_\infty) = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 4500 = 0,0135\, J$$

(c) Aquest treball és el mateix que hem calculat a l'apartat anterior, canviat de signe, ja que era el que correspon a l'energia de configuració del sistema.

4. (a) Apliquem directament la llei de Colulomb

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e q_p}{r^2} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(1,6\cdot 10^{-19})^2}{(5,3\cdot 10^{-11})^2} = 8,2\cdot 10^{-8}\,N$$

La interacció electroestàtica és molt més gran que la gravitatòria i els efectes d'aquesta es poden ignorar. A escala de l'univers, com els cossos celestes són pràcticament neutres, governa la interacció gravitatòria.

(b) Calculem a partir de les dades del problema

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_p}{r} = 9\cdot 10^9 \cdot \frac{1,6\cdot 10^{-19}}{5,3\cdot 10^{-11}} = 27,17\,V$$

i l'energia potencial valdrà

$$E_p = q_e V = -4,35\cdot 10^{-18}\,V$$

5. (a) A partir de la relació

$$R = \frac{mv}{qB} \rightarrow v = \frac{RqB}{m}$$

podem calcular

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\cancel{Rq_1B}}{m_1}}{\frac{\cancel{Rq_2B}}{m_2}} = \frac{q_1 m_2}{q_2 m_1} = \frac{\cancel{q_1}\cdot 4\cancel{m_1}}{2\cancel{q_1}\cancel{m_1}} = 2$$

(b) De forma semblant

$$E_{c1} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \qquad E_{c2} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

i tenim

$$\frac{E_{c1}}{E_{c2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} = \frac{m_1(2v_2)^2}{4m_1 v_2^2} = \frac{4m_1 v_2^2}{4m_1 v_2^2} = 1$$

6. (a) Podem relacionar l'energia cinètica amb la potencial segons

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 2500}{3,98\cdot 10^{-26}}} = 1,42\cdot 10^5\,m/s$$

Per trobar el radi de curvatura

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{3,98 \cdot 10^{-26} \cdot 1,42 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2} = 0,177\,m$$

(b) De la relació anterior veiem que la relació entre el radi i la massa és directament proporcional, de manera que si augmenta aquesta, i tots els altres paràmetres es mantenen igual, el radi serà més gran.

7. (a) L'àrea de l'espira que "veu" camp magnètic es pot escriure com

$$S(t) = L^2 - vtL$$

per $t = 0$ l'espira tot just ha començat a sortir de l'àrea on hi ha el camp i per $t = \frac{L}{v}$, ja ha sortit del tot. Entre aquests dos valors del temps hi ha variació de flux magnètic i per tant, corrent induït

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\,(BS)}{dt} = -B\frac{dS}{dt} \\ &= -B\frac{d\,(L^2 - vtL)}{dt} = BvL \\ &= 0,6 \cdot 2 \cdot 0,2 = 0,24\,V\end{aligned}$$

i aplicant la Llei d'Ohm

$$V = IR \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0,24}{5} = 0,048\,A$$

(b) Com el camp que està entrant en el paper està disminuint, en l'espira s'induirà un corrent que compensi aquest fet, voldrà augmentar el camp entrant en el paper, i per la regla de la mà dreta el corrent ha de circular en sentit horari.

8. (a) En aquest cas no hi ha variació de flux degut a la simetria cilíndrica del problema i per tant no hi ha corrent induït.

(b) En aquest cas el camp entrant s'afebleix i per contrarestar aquest fet en l'espira s'induirà un corrent en sentit horari de manera que es crei un camp que entra en el paper.

(c) En aquest cas el camp entrant augmentarà de valor i per compensar s'induirà un corrent en sentit antihorari, que crea un camp sortint.

(d) Si l'àrea es fa petita el flux entrant està disminuint i s'induirà un corrent en sentit horari que crei un camp entrant.

(e) En aquest cas no hi ha variació de flux sigui quina sigui la forma de l'espira, tot i que el camp no és constant ja que varia amb la distància, les variacions es compensen al girar l'espira.