Índex

1 Introducció

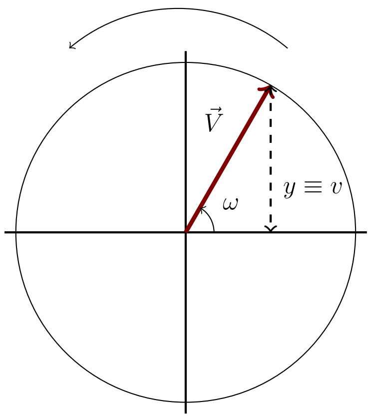
Tal com vam comentar el curs anterior quan parlàvem de la generació del corrent elèctric, la forma més senzilla de produir electricitat és fer girar una espira conductora en el sí d'un camp magnètic. D'aquesta manera, s'aconsegueix crear una *força electromotriu* que ve donada per

$$\mathcal{E}(t) = v(t) = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

Al tema 6 de la matèria de Física es veu que el valor màxim d'aquesta força electromotriu val

$$\mathcal{E} = N\omega SB$$

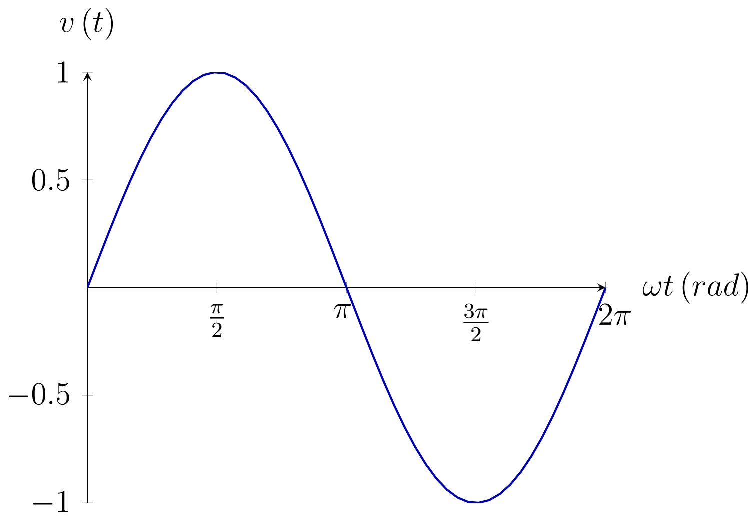
on N és el nombre d'espires (si n'hi ha més d'una), ω la velocitat angular, S l'àrea d'una d'elles i B el valor del camp magnètic al que es troben sotmeses. Els valors de la tensió i la intensitat instantanis en el context del corrent altern es representen amb lletres minúscules (i, v) per distingir-les de les corresponents magnituds del corrent continu. Per representar les magnituds vectorials, és habitual fer servir els anomenats *fasors*, que no són més que representacions vectorials de les funcions trigonomètriques associades. Per exemple, per un vector (podem suposar que representa la tensió), $\vec{V}$ que gira amb velocitat angular constant ω



la component vertical ve donada per

$$y(t) = v(t) = V \sin \omega t$$

que es pot representar (s'ha pres arbitràriament $V = 1$) com

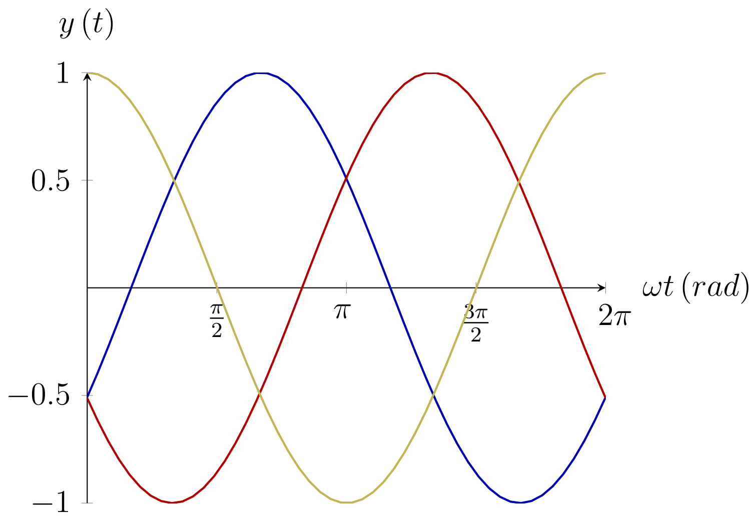


1.1 Paràmetres del corrent altern

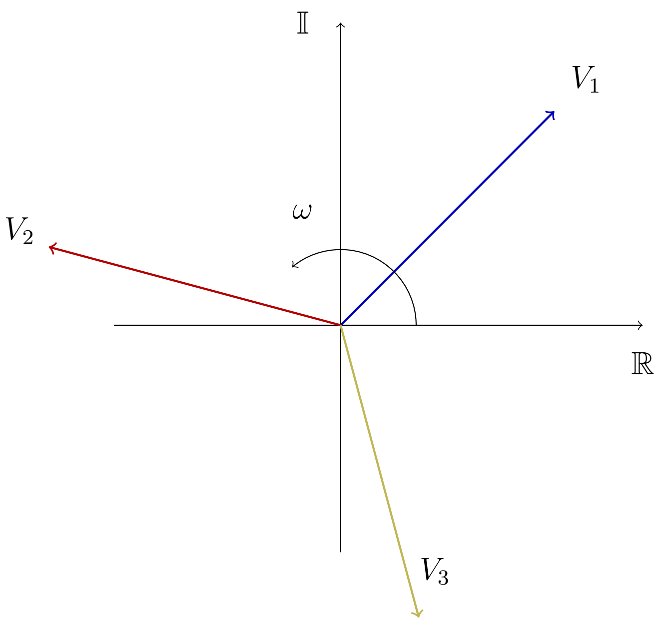
A partir de la gràfica anterior podem definir els següents paràmetres del corrent altern

- **Valor màxim,** V_{max}. És el valor màxim que pot prendre el senyal.
- **Valor instantani,** v. És el valor que pren el senyal en un determinat instant del temps.
- **Valor eficaç,** V_{ef}. És el valor que mostren els aparells de mesura. Es pot provar que és
$$V_{ef} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$
- **Període,** T. És el temps mínim que tarda a completar-se un cicle. Està relacionat directament amb la *freqüència angular*
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
- **Freqüència,** f. És el nombre de cicles per segon que descriu el senyal.
$$f = \frac{1}{T}$$

Quan més endavant tractem el corrent trifàsic veurem que consta de tres senyals amb un defasatge de 120° entre ells. En el domini del temps podem representar la situació com



Mentre que en el domini de les freqüències tenim l'anomenat diagrama de *fasors*, que es pot representar com



La utilitat dels fasors és que es poden representar per nombres complexos i, per tant fer servir les propietats definides en aquests per resoldre els problemes que es plantegen en corrent altern.

2 Elements passius lineals en CA

En corrent continu anomenàvem *resistència* al fenomen macroscòpic que modelava l'oposició a circular el corrent. En aquell context, aquesta oposició estava relacionada amb xocs dels portadors de càrrega (entre ells i amb els nuclis atòmics) dins els conductors. Amb el corrent altern, apareixen altres fenòmens que col·laboren a dificultar el pas del corrent. Així, la capacitat de conducció dels condensadors depèn de la freqüència (f) d'aquest corrent. I de la mateixa manera, la freqüència del corrent influeix en l'efecte d'inducció de les bobines. Anomenarem *impedància* Z, a aquesta generalització de la resistència que coneixíem quan vam treballar amb corrent continu. Escriurem la llei d'Ohm com

$$V = IZ$$

- Per les resistències farem servir R com a símbol per la seva impedància. La representarem com a nombre complex segons R_{0° en forma polar o R, en binòmica.

- Per un condensador de *capacitat* C (mesurada en *farads*, F), la impedància s'anomena capacitància o impedància capacitiva i es representa amb X_C, sent

  $$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi f C}$$

  La capacitat d'un condensador representa la quantitat de càrrega que pot emmagatzemar quan es troba polaritzat a una determinada diferència de potencial

  $$C = \frac{Q}{V}$$

  Com a nombre complex, escriurem X_{C-90°, en forma polar, ja que es comprova que els condensadors *avancen* el senyal de la intensitat que els travessa respecte a la tensió que se'ls aplica. En forma binòmica escrivim $(-j)X_C$.

- Per una bobina amb *coeficient d'autoinducció* L (mesurada en *henrys*, H), la impedància s'anomena inductància o impedància inductiva i es representa amb X_L, sent

  $$X_L = L\omega = 2\pi f L$$

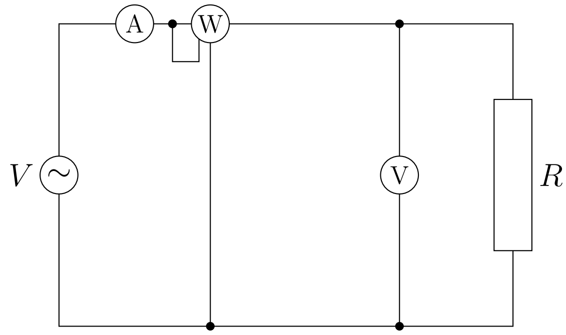
  El fenomen d'inducció electromagnètica s'estudiarà amb detall a la matèria de Física més endavant. Com a nombre complex, escriurem X_{L90° en forma polar ja que es comprova que les bobines *endarrereixen* el senyal del corrent que les travessa respecte a la tensió que se'ls aplica. En forma binòmica escrivim jX_L.

En el context del corrent altern, farem servir el símbol j com a unitat imaginària per evitar confusions amb el valor instantani de la intensitat de corrent $i(t)$.

3 Circuits en CA

3.1 Circuit R

En aquest cas la impedància del circuit coincideix amb el valor de la resistència i no depèn de la freqüència del corrent.



Noteu l'esquema de connexió d'un voltímetre, amperímetre i wattímetre al circuit. Al aplicar una tensió de la forma

$$v(t) = V_{max} \sin \omega t$$

al circuit anterior apareix en ell una intensitat

$$i(t) = \frac{V_{max} \sin \omega t}{R} = \frac{V_{max}}{R} \sin \omega t = I_{max} \sin \omega t$$

Si treballem amb valors eficaços podem escriure

$$V_{max} = I_{max} R \rightarrow \frac{V}{\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{I}{\cancel{\sqrt{2}}} R \rightarrow V = IR$$

Exemple 3.1.1

Una resistència de $100\,\Omega$ es troba connectada a una font d'alimentació que proporciona una tensió (eficaç) $V = 10\,V$ i que té una freqüència $f = 100\,Hz$. Calculeu el valor de la intensitat que hi circula i representeu la situació en un diagrama fasorial.

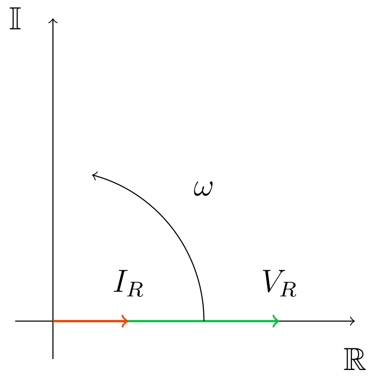
♠ A partir de la llei d'Ohm

$$V = IZ$$

podem trobar

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R} = \frac{10}{100} = 0,1\,A$$

En quant al diagrama fasorial, i prenent com a origen d'angles la tensió, tenim



La tensió aplicada a la resistència i la intensitat que la travessa es troben en fase.

3.1.1 Potència

La potència dissipada en la resistència es pot calcular com

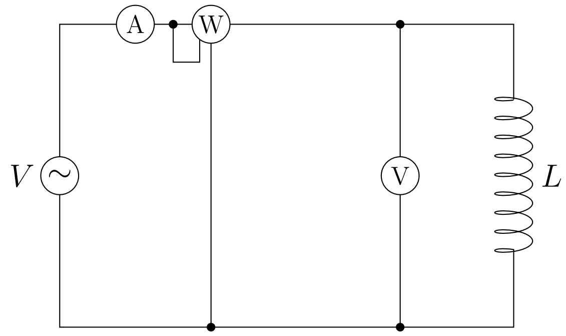
$$P = v(t)i(t) = (V_{max}\sin\omega t)\,(I_{max}\sin\omega t) = P_{max}\sin^2\omega t$$

i com podem veure és sempre una quantitat positiva. La potència que mesuraria un *wattímetre* és la mitjana i es pot demostrar que val

$$P = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = VI$$

3.2 Circuit L

En aquest cas la impedància del circuit vindrà donada per la de la bobina



suposant que la bobina és ideal (no té resistència òhmica) s'observa que el wattímetre mesura una potència pràcticament nul·li que els valors de la intensitat són relativament limitats. La bobina ofereix una oposició al corrent elèctric de caràcter diferent a la de les resistències òhmiques. Això es deu a l'efecte d'autoinducció de la bobina que s'estudiarà al final de la segona avaluació a Física. La llei d'Ohm s'escriu

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{jL\omega} = \frac{V}{j2\pi fL}$$

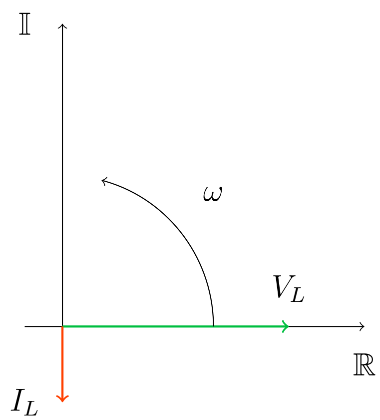
Exemple 3.2.1

Calculeu la intensitat que passa per una bobina ($L = 1,4\,H$) quan se sotmet a una tensió $V = 220\,V$, $f = 50\,Hz$.

♠ Apliquem la llei d'Ohm per trobar

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220}{j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 1,4} = -0,5\,j\,A$$

En quant al diagrama fasorial, i prenent com a origen d'angles la tensió, tenim



Tal com havíem comentat abans (2), la intensitat queda endarrerida $\pi/2$ respecte la tensió.

3.2.1 Potència

Per veure com es comporta la potència en la bobina fem el càlcul

$$P = v(t)i(t) = (V_{max} \sin \omega t) \left(I_{max} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{P_{max}}{2} \sin 2\omega t$$

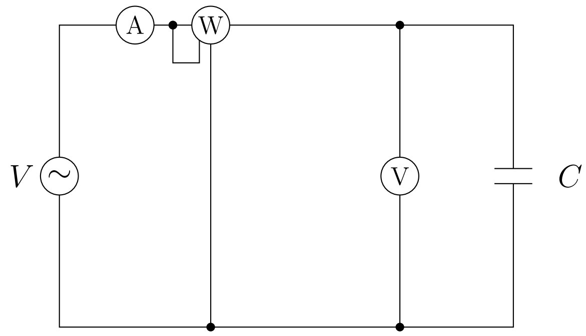
on s'ha fet servir que $\sin(\omega t - \pi/2) = \cos \omega t$ i que

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

És fàcil comprovar que ara la potència va canviant de signe. A la meitat de cicle la bobina emmagatzema potència i en l'altre meitat l'entrega al circuit. Tal com hem comentat abans, la potència que mesuraria un wattímetre en aquest cas seria zero.

3.3 Circuit C

En aquest cas la impedància del circuit vindrà donada per la del condensador



suposant el condensador ideal (resistència òhmica propera a zero), es veu que el wattímetre assenyalarà una potència pràcticament nul·la. Al aplicar tensió al condensador, apareix en aquest un fort corrent de càrrega que disminueix a mesura que augmenta la diferència de potencial entre les seves plaques. En el moment que s'ha completat la càrrega, el corrent és zero i la tensió màxima, per això es diu que el condensador avança el corrent 90° respecte la tensió. Al canviar la polaritat de la tensió aplicada, el condensador es descarrega retornant l'energia al circuit. La llei d'Ohm s'escriu

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\frac{-j}{2\pi f C}} = j2\pi V f C$$

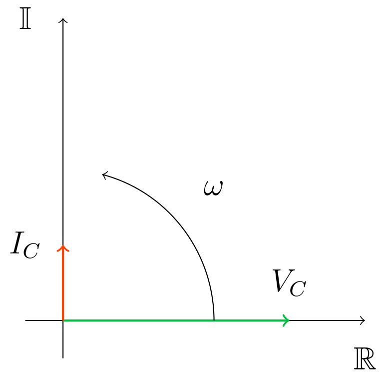
Exemple 3.3.1

Calculeu la intensitat que circula per un circuit que consta d'un condensador de $3\mu F$ quan se sotmet a una tensió $V = 210\,V$, $f = 60\,Hz$.

♠ Apliquem la llei d'Ohm per trobar

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\frac{-j}{2\pi fC}} = j \cdot 2\pi VfC = j \cdot 2\pi \cdot 210 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 0,2375\,j\,A$$

En quant al diagrama fasorial, i prenent com a origen d'angles la tensió, tenim



Veiem que la intensitat al condensador s'avança respecte la tensió aplicada.

3.3.1 Potència

Per veure com es comporta la potència en el condensador fem el càlcul

$$P = v(t)i(t) = (V_{max}\sin\omega t)\left(I_{max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{P_{max}}{2}\sin 2\omega t$$

i com podem comprovar canvia de signe en cada cicle. Tal com hem vist abans la potència que mesuraria un wattímetre és zero.

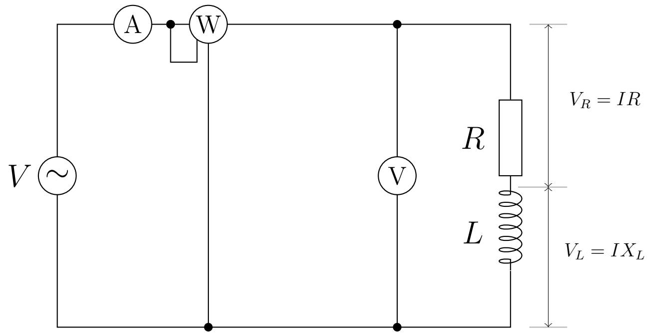
3.4 Circuits RL

Considerem primer un circuit RL en sèrie. Al connectar una resistència òhmica amb una reactància inductiva, el corrent queda limitat per l'efecte combinat el R i X_L. Com aquests elements es troben en sèrie, passa el mateix corrent pels dos. La llei d'Ohm s'escriu

$$V = IZ$$

i la impedància del circuit es pot calcular com

$$Z = R + jL\omega$$



Exemple 3.4.1

Suposem que connectem en sèrie una resistència de $50\,\Omega$ amb una bobina de $L = 50\,mH$ a una font de tensió alterna sinusoïdal de $220\,V$ i $100\,Hz$. Es demana determinar els valors de Z, I, V_R, V_L i l'angle φ que formen Z i R. Feu també una representació fasorial del circuit on apareguin la tensió d'alimentació (agafada com a referència d'angles), el corrent I que circula pel circuit i les tensions a la resistència i la bobina. Finalment, calculeu les potències activa, reactiva i aparent del circuit.

♠ La impedància del circuit es pot calcular com

$$Z = R + jL\omega = 50 + j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 50 + 31,416j$$

amb mòdul

$$|Z| = \sqrt{50^2 + 31,416^2} = 59\,\Omega$$

La intensitat al circuit val

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{220}{50 + 31,416j} = 3,155 - 1,982j$$

amb mòdul

$$|I| = \sqrt{3,155^2 + (-1,982)^2} = 3,73\,A$$

i argument

$$\arctan\left(\frac{-1,982}{3,155}\right) = -32,14^\circ$$

Per una altra banda tenim

$$V_R = IR = (3,155 - 1,982j) \cdot 50 = 157,75 - 99,1j$$

i
$$V_L = IX_L = (3,155 - 1,982j) \cdot 31,416j = 62,27 + 99,1j$$
Noteu que la suma de les caigudes de tensió a la resistència i a la bobina és, llevat d'errors d'arrodoniment, la que proporciona la font d'alimentació

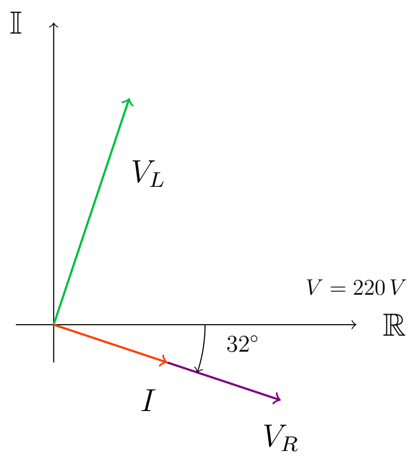
$$157,75 - 99,1j + 62,27 + 99,1j \approx 220\,V$$

El cosinus de l'angle que formen la tensió i la intensitat al circuit serà

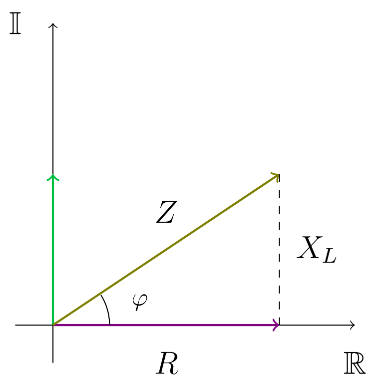
$$\cos\varphi = \cos(-32,14°) = 0,847$$

Aquesta quantitat $\cos\varphi$, té una importància molt destacada i s'anomena *factor de potència*.

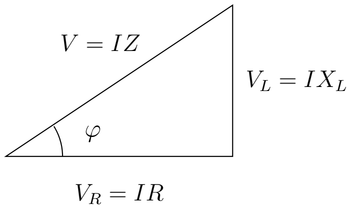
En quant al diagrama fasorial demanat



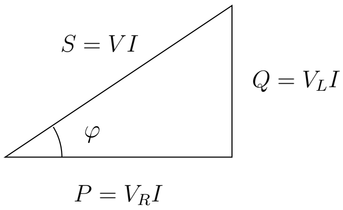
Per calcular les potències demanades considerem la relació entre Z, R i X_L a partir de la seva representació al pla d'Argand



tenim el que s'anomena *triangle d'impedàncies*, a partir del qual es pot construir el *triangle de tensions*



i el *triangle de potències*



on s'han definit (hem de tenir en compte que aquí escrivim I per abús del llenguatge quan hauríem d'escriure $|I|$).

3.5 Potència activa, reactiva i aparent

Potència activa, P. És la corresponent a la resistència òhmica i és la que dissipa energia. les seves unitats són W. Es calcula com

$$P = VI\cos\varphi$$

Potència reactiva, Q. És la corresponent a la impedància inductiva. No dissipa energia, les seves unitats són VAR, es llegeix volt-ampers reactius.

$$Q = VI\sin\varphi$$

La potència reactiva pot tenir signe negatiu però en general considerarem el seu valor absolut.

Potència aparent, S. És la que correspon a la suma geomètrica de les altres dues, les seves unitats són VA, volt-ampers.

$$S = VI$$

és fàcil veure que es compleix

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Com hem vist abans, el factor de potència, $\cos\varphi$, ens indica quina part de la potència aparent és activa. El seu valor és igual a 1 quan no hi ha impedàncies d'origen inductiu o capacitiu. El factor de potència és un paràmetre fonamental que tenen en compte les empreses comercialitzadores d'energia elèctrica, ja que a aquestes els interessa que la potència reactiva sigui la menor possible, ja que no produeix treball útil i representa una sobrecàrrega per la seva distribució. D'aquesta forma, es penalitza a aquells usuaris o empreses que tenen un factor de potència en la seva instal·lació molt diferent a 1. Més endavant veurem com es pot minimitzar la potència reactiva en una instal·lació elèctrica per tal d'evitar aquestes penalitzacions econòmiques.

Exemple 3.5.1

Les característiques d'un motor monofàsic d'inducció són $P = 5\,kW$, $V = 220\,V$ i $\cos\varphi = 0,86$. Es demana determinar la intensitat que circula, la potència reactiva i aparent i els paràmetres del circuit equivalent suposant que podem modelar el motor com una bobina i una resistència en sèrie.

♠ A partir de la dada de la potència activa

$$P = VI\cos\varphi$$

podem calcular directament

$$I = \frac{P}{V\cos\varphi} = \frac{5000}{220\cdot 0,86} = 26,42\,A$$

Per una altra banda, com

$$\varphi = \arccos 0,86 = 30,6834°$$

podem calcular la potència reactiva

$$Q = VI\sin\varphi = 220\cdot 26,42\cdot\sin 30,6834 = 2966\,VAR$$

i finalment la potència aparent

$$S = VI = 220\cdot 26,42 = 5812,4\,VA$$

Per trobar el valor de la resistència òhmica que correspon al motor fem

$$P = I^2R$$

d'on

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{5000}{26,42^2} = 7,163\,\Omega$$

De forma semblant, per la impedància inductiva

$$Q = I^2 X_L$$

llavors

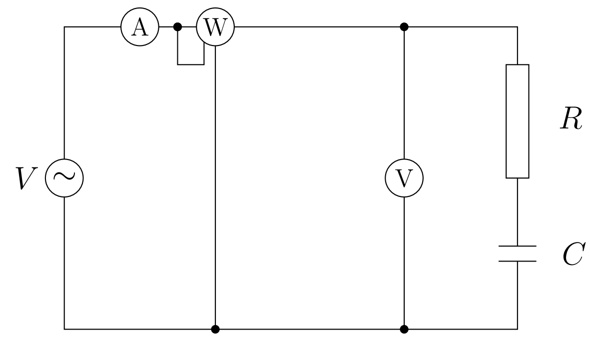
$$X_L = \frac{Q}{I^2} = \frac{2966}{26,42^2} = 4,25\,\Omega$$

3.6 Circuits RC

Aquests tipus de circuits es resolen de forma semblant al cas dels RL, tenint en compte que la impedància d'un condensador és

$$Z = \frac{1}{jC\omega}$$

Exemple 3.6.1



Suposeu que tenim una resistència $R = 100\,\Omega$ connectada en sèrie a un condensador $C = 100\,\mu F$ i que els sotmetem a una tensió alterna $V = 10\,V$, $f = 50\,Hz$. Calculeu la intensitat que circula i la tensió que cau en cada element. Representeu la situació en un diagrama de fasors.

♠ Comencem calculant la impedància del circuit

$$Z = R + \frac{1}{jC\omega} = 100 + \frac{1}{j100 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 100 - 31,83j$$

llavors, aplicant la llei d'Ohm

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10}{100 - 31,83j} \cdot \frac{100 + 31,83j}{100 + 31,83j} = \frac{1000 + 318,3j}{100^2 + 31,83^2}$$

que es pot escriure com

$$I = \frac{1000}{11013,15} + \frac{318,3}{11013,15}j$$

en forma polar

$$I = \sqrt{\left(\frac{1000}{11013,15}\right)^2 + \left(\frac{318,3}{11013,15}\right)^2}_{\arctan \frac{318,3}{1000}} = 0,09529_{17,6^\circ}$$

de forma que la caiguda de tensió a la resistència val

$$V_R = IR = 0,09529_{17,6^\circ} \cdot 10 = 0,9529_{17,6^\circ}$$

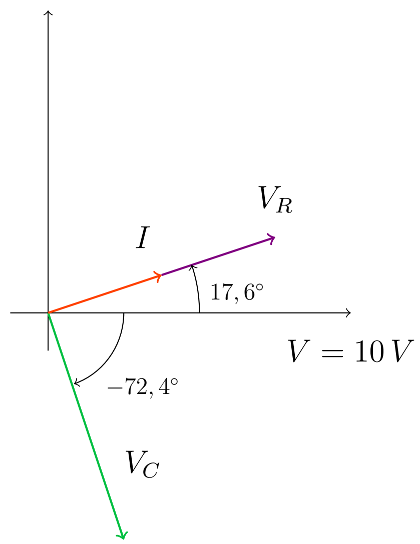
Per calcular la caiguda de tensió al condensador calculem la seva impedància en forma polar

$$X_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j100 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = -31,83j \rightarrow X_C = 31,83_{-90^\circ}$$

llavors

$$V_C = IX_c = 0,09529_{17,6^\circ} \cdot 31,83_{-90^\circ} = 3,033_{-72,4^\circ} = 3,033_{287,6^\circ}$$

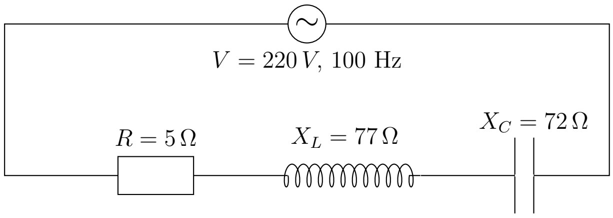
En quant al diagrama de fasors (no està fet a escala)



3.7 Circuits mixtos

Exemple 3.7.1

Considerem un circuit RLC en sèrie



Suposem que ens demanen les tensions que cauen en cada element, el diagrama fasorial de tensions i la freqüència per la qual la impedància del circuit seria mínima. La impedància total del circuit es pot calcular com

$$Z = 5 + 77j - 72j = 5 + 5j = 5\sqrt{2}_{45^\circ}$$

La intensitat valdrà

$$V = IZ \to I = \frac{V}{Z} = \frac{220}{5\sqrt{2}_{45^\circ}} = 22\sqrt{2}_{-45^\circ} = 22 - 22j$$

Un amperímetre mostraria una lectura de $22\sqrt{2} = 31,11\,A$ i es veu que la intensitat es troba endarrerida respecte la tensió, tal com correspon als circuits inductius. Calculem ara la tensió que cau en cada element. Per la resistència òhmica

$$V_R = IR = (22 - 22j) \cdot 5 = 110 - 110j = 110\sqrt{2}_{-45^\circ}$$

Observem que la tensió que cau a la resistència es troba en fase amb la intensitat del corrent al circuit. En quant a la bobina

$$V_L = IX_L = (22 - 22j)77j = 1694 + 1694j = 1694\sqrt{2}_{45^\circ}$$

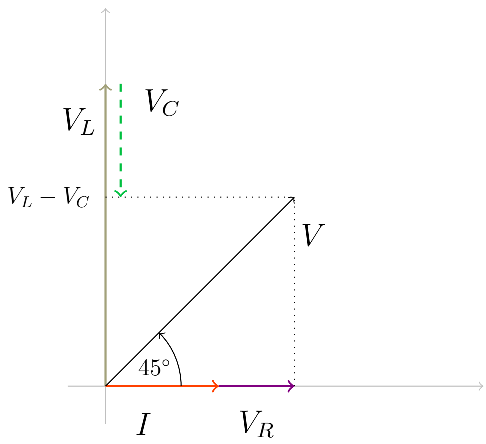
Veiem que la tensió que cau a la bobina es troba avançada 90° respecte la intensitat. Respecte al condensador

$$V_C = IX_C = (22 - 22j)(-72j) = -1584 - 1584j = 1584\sqrt{2}_{225^\circ}$$

aquesta tensió es troba endarrerida 45° respecte la intensitat. La lectura corresponent que faria un voltímetre de cada element seria

$$V_R = 155,56\,V \qquad V_L = 2395,68\,V \qquad V_C = 2240,11\,V$$

El diagrama fasorial corresponent al circuit (no a escala) és, situant la intensitat a l'eix horitzontal



Ara, la condició d'impedància mínima en un circuit RLC en sèrie és equivalent a demanar que $X_L = X_C$ ja que és

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

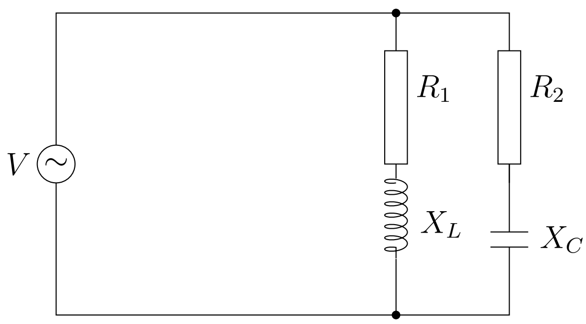
tenim llavors

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{2\pi LC}}$$

aquesta freqüència s'anomena *freqüència de ressonància*. En aquestes condicions la intensitat es trobarà en fase amb la tensió que proporciona la font d'alimentació.

Exemple 3.7.2

Considerem ara el següent circuit



Sabent que $V = 200\,V$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $X_L = 30\,\Omega$ i $X_C = 15\,\Omega$, es demana calcular: la intensitat total I, la intensitat que travessa R_1 i R_2, la potència activa del circuit, la reactiva i la aparent, el factor de potència del circuit i la tensió que cau en la bobina. Finalment, representeu el diagrama fasorial pels corrents.

Calculem les impedàncies en cada branca

$$Z_1 = R_1 + X_L = 10 + 30j$$

$$Z_2 = R_2 + X_C = 20 - 15j$$

com es troben en paral·lel, la impedància equivalent val

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(10 + 30j)(20 - 15j)}{10 + 30j + 20 - 15j} = 23,3 + 3,33j$$

es veu que la impedància total té caràcter inductiu. Calculem la intensitat total a partir de la llei d'Ohm

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{200}{23,3 + 3,33j} = 8,4 - 1,2j$$

que en forma polar seria $8,5_{-8,1^\circ}$, de forma que està endarrerida respecte la tensió, com correspon als circuits inductius. En quant a la intensitat que circula per cada branca

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{200}{10 + 30j} = 2 - 6j = 6,3_{-71,6^\circ}$$

i

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{200}{20 - 15j} = 6,4 + 4,8j = 8_{36,9^\circ}$$

Es pot comprovar que és $I = I_1 + I_2$. La potència activa del circuit val

$$P = V|I| \cos\varphi = 200 \cdot 8,5 \cos 8,1^\circ = 1683\, W$$

la potència reactiva

$$P = V|I| \sin\varphi = 200 \cdot 8,5 \sin 8,1^\circ = 240\, VAR$$

i la potència aparent

$$S = V|I| = 200 \cdot 8,5 = 1700\, VA$$

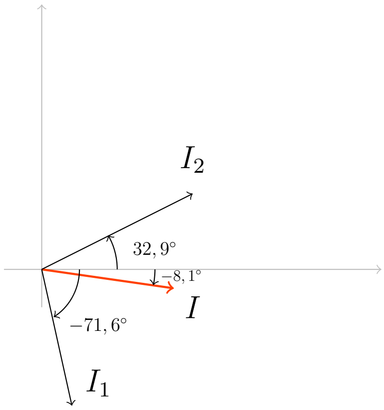
El factor de potència del circuit val

$$\cos\varphi = \cos 8,1^\circ = 0,99$$

Finalment, la tensió que cau a la bobina val

$$V_L = I_1 X_L = (2 - 6j) \cdot (30j) = 180 + 60j = 189,7_{18,43^\circ}\, V$$

Pel diagrama fasorial (no a escala), tenim

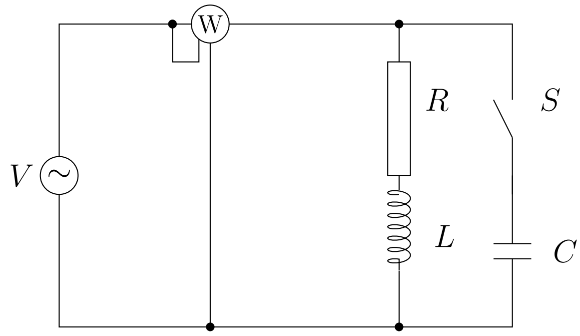


4 Resolució de circuits "sense complexos"

Veiem ara uns quants exemples en els que no farem servir els nombres complexos per resoldre'ls, tot i que sí que cal saber tota la teoria.

Exemple 4.1

Considerem el següent circuit



Amb $R = 10\,\Omega$, $V = 100\,V$, $f = 50\,Hz$. Quan l'interruptor es troba obert, el wattímetre marca $250\,W$. En aquestes condicions es demana trobar: el valor del corrent que circula per R, el valor de la inductància L i la tensió en ella. Quan l'interruptor es troba tancat, calculeu el valor de C per tal que el circuit estigui en ressonància, el valor de la intensitat que circula per C i la lectura del wattímetre.

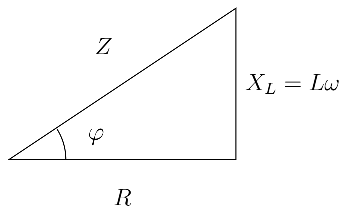
Quan l'interruptor S es troba obert, no circula corrent pel condensador i la lectura del wattímetre correspon a la potència dissipada per la resistència, així

$$P = I^2 R \rightarrow I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{250}{10}} = 5\,A$$

Aplicant la llei d'Ohm al conjunt

$$V = IZ \rightarrow Z = \frac{V}{I} = \frac{100}{5} = 20\,\Omega$$

Si representem el triangle d'impedàncies



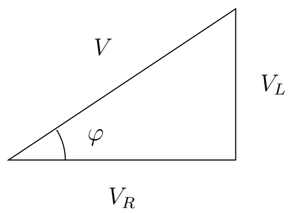
Podem escriure

$$Z^2 = R^2 + (L\omega)^2$$

d'on

$$L = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{Z^2 - R^2} = \frac{1}{100\pi}\sqrt{20^2 - 10^2} = 0,0551 = 55,1\,mH$$

Si representem el triangle de tensions



A la resistència cau una tensió

$$V_R = IR = 5 \cdot 10 = 50\,V$$

De forma que

$$V_L = \sqrt{V^2 - V_R^2} = \sqrt{100^2 - 50^2} = 86,6\,V$$

Quan l'interruptor es troba tancat, i per demanar que el circuit estigui en ressonància, no podem fer

$$X_L = X_C$$

ja que la bobina i el condensador es troben en branques diferents, no en sèrie tal com havíem vist a l'exemple 3.7.1. En aquest cas demanarem que la potència reactiva associada a la bobina sigui igual a la associada al condensador. Per una banda, la intensitat que circula per la branca on es troben la resistència i la bobina no canvia al connectar en paral·lel més elements, com el condensador en aquest cas (sí que canviarà la intensitat *total*). Llavors

$$Q_L = I_L^2 X_L = I_L^2 \sqrt{Z^2 - R^2} = 5^2 \cdot \sqrt{20^2 - 10^2} = 433,01\, VAr$$

per una altra banda, pel condensador podem escriure

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} \rightarrow X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{100^2}{433,01} = 23,094\,\Omega$$

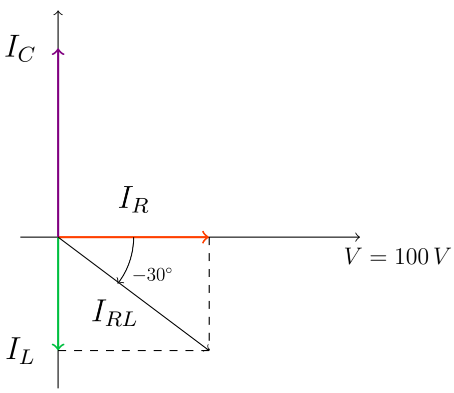
i la capacitat del condensador es pot calcular segons

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{X_C \cdot 2\pi \cdot f} = \frac{1}{23,094 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50} = 1,378 \cdot 10^{-4} = 137,8\,\mu F$$

Calculem ara la intensitat que circula per la branca on es troba el condensador

$$V = I_C X_C \rightarrow I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{100}{23,094} = 4,33\,A$$

La lectura del wattímetre serà la mateixa que abans, $250\,W$ ja que aquest mesura la potència activa que consumeix cada branca que puguem tenir al circuit i com hem afegit una branca purament capacitiva, aquesta no contribueix a la lectura del wattímetre. Fem finalment un diagrama fasorial per les intensitats per acabar d'entendre l'exemple.

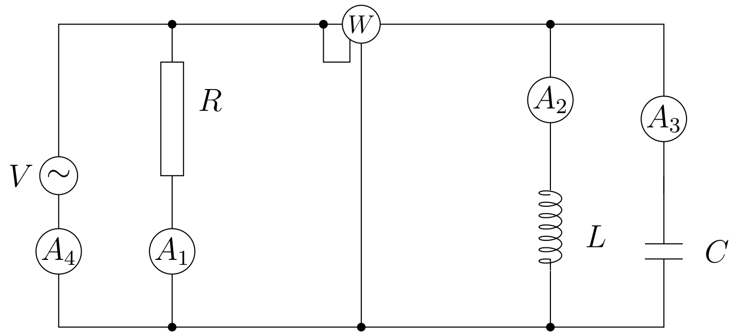


Podem calcular la intensitat total amb

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \qquad I_L = I_{RL} \sin 30° \qquad I_R = I_{RL} \cos 30°$$

Exemple 4.2

Considerem el circuit



Amb $R = 10\,\Omega$, $L = 25\,mH$, $C = 47\mu F$, $V = 100\,V$ i $f = 50\,Hz$. Es demana trobar la lectura dels quatre amperímetres, del wattímetre i calcular la freqüència de ressonància del circuit.

Per saber la lectura de l'amperímetre A_1 podem aplicar la llei d'Ohm a la branca on es troba la resistència R per obtenir

$$V = I_1 R \rightarrow I_1 = \frac{V}{R} = \frac{100}{10} = 10\,A$$

Calculem ara les impedàncies de la bobina i el condensador

$$X_L = L\omega = 25 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50 = 7,854\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{47 \cdot 10^{-6} \cdot 2\pi \cdot 50} = 67,73\,\Omega$$

Llavors, per l'amperímetre A_2 tenim

$$V = I_2 X_L \rightarrow I_2 = \frac{V}{X_L} = \frac{100}{7,854} = 12,73\,A$$

i per l'amperímetre A_3 tenim

$$V = I_3 X_C \rightarrow I_3 = \frac{V}{X_C} = \frac{100}{67,73} = 1,476\,A$$

L'amperímetre A_4 mesurarà un corrent donat per

$$I_4 = \sqrt{I_1^2 + (I_2 - I_3)^2} = \sqrt{10^2 + (12,73 - 1,476)^2} = 15,055\,A$$

Finalment, la freqüència de ressonància del circuit es pot calcular a partir de

$$Q_L = Q_C \rightarrow \frac{V^2}{X_L} = \frac{V^2}{X_C} \rightarrow X_L = X_C \rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

de forma que serà

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 47 \cdot 10^{-6}}} = 146,83\,Hz$$

Exemple 4.3

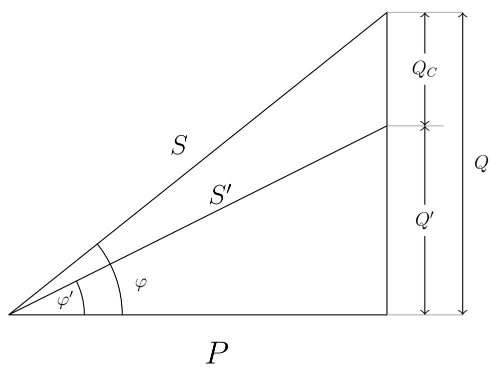
5 Correcció del factor de potència

En moltes instal·lacions industrials i tallers mecànics es treballa amb motors i làmpades de descàrrega que tenen associat un transport de potència reactiva que les empreses de distribució energètiques han de proporcionar. Com hem vist abans, el cost de l'energia elèctrica es veu incrementat a mesura que el factor de potència d'una insta l·lació és més proper a zero (l'ideal és 1). Per aquesta raó es fan servir sistemes per compensar la potència reactiva d'origen inductiu que es genera en una install·lació. Aquesta compensació s'aconsegueix típicament amb una bateria de condensadors, tal com veurem a continuació.

Exemple 4.1

Suposem que tenim un motor monofàsic de $5000\,W$ que té un factor de potència $\cos\varphi = 0,7071$ a $220\,V$ i $f = 50\,Hz$. Quines són les característiques de la bateria de condensadors que s'haurà de fer servir si es vol millorar el factor de potència a $\cos\varphi' = 0,95$

♠ Podem representar la situació de la següent manera



Amb φ l'angle inicial, es vol disminuir la potència reactiva (inductiva) inicial Q a un valor Q' que ve determinat per l'angle φ' necessari. Això permet calcular la potència reactiva (capacitiva) que haurem d'afegir per tal d'aconseguir el nostre objectiu. Tenim que ha de ser

$$Q_C = Q - Q'$$

i com es veu al esquema

$$Q = P\tan\varphi \qquad Q' = P\tan\varphi'$$

llavors podem escriure

$$Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

necessitem calcular

$$\varphi = \arccos 0,7071 = 45^\circ$$
$$\varphi' = \arccos 0,95 = 18,195^\circ$$

d'aquesta manera

$$Q_C = 5000 \cdot (\tan 45^\circ - \tan 18,195^\circ) = 3356,6\, VAR$$

Ara podem calcular la intensitat que alimentarà els condensadors

$$Q_C = VI \rightarrow I = \frac{Q_C}{V} = \frac{3356,6}{220} = 15,257\, A$$

de forma que la seva impedància valdrà

$$V = IX_C \rightarrow X_C = \frac{V}{I} = \frac{220}{15,257} = 14,42\,\Omega$$

i la capacitat que han de tenir els condensadors serà

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 14,42} = 2,2 \cdot 10^{-4}\, F$$

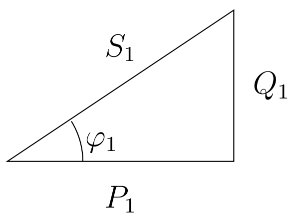
En el cas que tinguem una instal·lació amb diferents carregues de potència activa i factor de potència conegut hem de procedir com al següent exemple.

Exemple 4.2 Considerem una instal·lació amb $220\, V$ i $50\, Hz$ que consta dels següents receptors:

- 1 motor monofàsic de $15\, kW$, $\cos\varphi_1 = 0,65$
- 50 fluorescents de $400\, W$, $\cos\varphi_2 = 0,6$
- 45 bombetes incandescents de $80\, W$

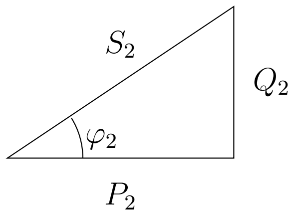
Es demana fer els càlculs necessaris per determinar les característiques de la bateria de condensadors que s'haurà de fer servir per corregir el factor de potència de la instal·lació a 0,99.

♠ Calculem la potència reactiva del motor



$$Q_1 = P_1 \tan\varphi_1 = 15 \cdot 10^3 \tan(\arccos 0,65) = 1,7537 \cdot 10^4\, VAR$$

De forma semblant, calculem la potència reactiva associada als fluorescents

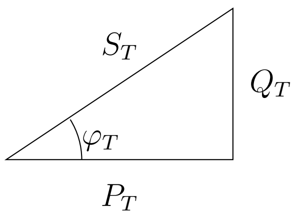


$$Q_2 = P_2 \tan\varphi_2 = 50 \cdot 400 \tan(\arccos 0,6) = 2,6667 \cdot 10^4\, VAR$$

En quant a les bombetes incandescents (només tenen potència activa)

$$P_3 = 45 \cdot 80 = 3600$$

Ara podem calcular el factor de potència total segons



Amb

$$P_T = 15000 + 50 \cdot 400 + 45 \cdot 80 = 38600\, W$$
$$Q_T = 1,7537 \cdot 10^4 + 2,6667 \cdot 10^4 = 44204\, VAR$$
$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{38600^2 + 44204^2} = 58685,2\, VA$$

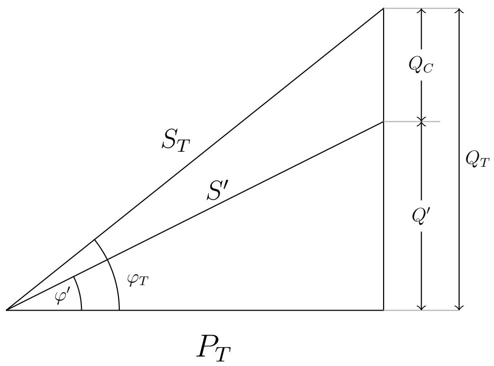
llavors

$$\cos\varphi_T = \frac{P_T}{S_T}$$

d'on

$$\varphi_T = \arccos\left(\frac{P_T}{S_T}\right) = \arccos\left(\frac{38600}{44204}\right) = 29,16°$$

Ara, de forma semblant a com hem fet a l'exemple anterior



com que és

$$Q_C = Q_T - Q' = P_T \tan\varphi_T - P_T \tan\varphi' = P_T(\tan\varphi_T - \tan\varphi')$$

fent servir les dades que tenim

$$Q_C = 38600 \cdot (\tan 29,16^\circ - \tan(\arccos 0,99)) = 160372,6\,VAR$$

La intensitat que alimenta la bateria de condensadors serà

$$I = \frac{Q_C}{V} = \frac{160372,6}{220} = 728,966\,A$$

la impedància

$$X_C = \frac{V}{I} = \frac{220}{728,966} = 0,3018\,\Omega$$

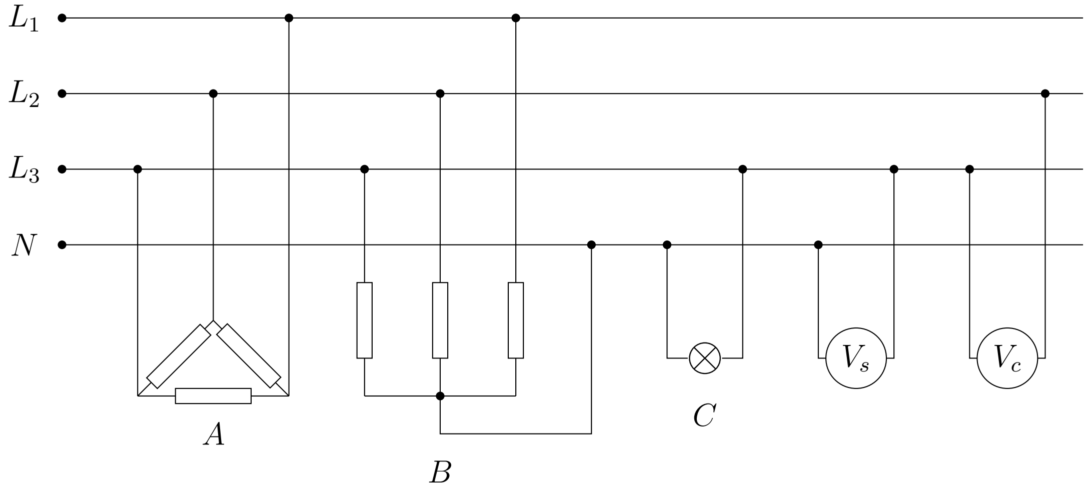
i la capacitat

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 0,3018} = 0,010547\,F = 10,547\,mF$$

Noteu que es parla en general de bateria de condensadors perquè en una situació més realista s'hauria de considerar que no tots els receptors es trobaran en funcionament simultàniament, de manera que caldria disposar d'un conjunt esglaonat de condensadors que es poguessin connectar i desconnectar a mesura que la potència reactiva de la instal·lació va canviant.

6 Corrents alterns trifàsics

Tal com vam comentar a l'inici d'aquest document el corrent trifàsic consisteix a treballar amb tres línies de corrent desfasats entre ells 120° i un altre conductor anomenat *neutre* que no es troba alimentat. La producció, transport i distribució d'energia elèctrica es fa majoritàriament en forma de corrent trifàsic. Moltes indústries tenen una varietat de receptors que funcionen amb aquest tipus de corrent. De fet, les instal·lcions domèstiques monofàsiques no són més que una derivació del sistema trifàsic. Veiem els diferents esquemes de connexió a un sistema trifàsic que estudiarem.



El primer receptor (A), està connectat *en triangle.* El segon receptor (B), es troba connectat *en estrella.* En aquest cas, cal notar el punt de connexió comú al neutre. Si el sistema està equilibrat, tindrem $I_N = 0$. Això passarà quan les intensitats de cada línia L_1, L_2 i L_3 siguin iguals i també $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = \cos\varphi_3$. Aquesta circumstància es donarà quan les tres impedàncies del receptor siguin idèntiques. El cas C representa l'esquema de connexió d'un receptor típic monofàsic, com són la majoria dels que es fan servir en l'àmbit domèstic. En els darrers casos s'identifica l'anomenada *tensió simple*, V_s o *tensió de fase* entre una fase i el neutre, i l'anomenada *tensió composta*, V_c o *tensió de línia* entre dues fases. Es pot demostrar la relació

$$V_c = \sqrt{3}V_s$$

que també es pot escriure com

$$V_{línia} = \sqrt{3}V_{fase}$$

6.1 Connexió de receptors en triangle. Potència

En aquesta configuració cada impedància del receptor queda sotmesa a la tensió composta. Al corrent que les travessa l'anomenem *corrent de fase* i al que s'absorbeix de la línia, *corrent de línia.* Es compleix

$$I_{línia} = \sqrt{3} I_{fase}$$

i la llei d'Ohm aplicada a cada fase s'escriu com

$$V_c = I_f Z$$

La potència consumida pel receptor, suposant que el sistema està equilibrat serà

$$P_T = 3V_c I_{fase} \cos\varphi = \sqrt{3} V_c I_{línia} \cos\varphi$$

de forma semblant, per la potència reactiva

$$Q_T = 3V_c I_{fase} \sin\varphi = \sqrt{3} V_c I_{línia} \sin\varphi$$

i per l'aparent

$$S_T = 3V_c I_{fase} = \sqrt{3} V_c I_{línia}$$

Exemple 5.1.1 Un motor trifàsic es troba connectat en triangle. Determineu el corrent elèctric que absorbeix de la línia si al connectar-lo a una xarxa amb tensió entre fases de $380\,V$ desenvolupa una potència de $15\,kW$ amb un factor de potència de $0,7$. Trobeu també la seva potència reactiva i aparent.

♠ Fent servir un resultat anterior

$$P = \sqrt{3} V_c I_{línia} \cos\varphi$$

podem trobar

$$I_{línia} = \frac{P}{\sqrt{3} V_c \cos\varphi} = \frac{15000}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0,7} = 32.557\,A$$

en quant a la potència reactiva

$$Q = \sqrt{3} V_c I_{línia} \sin\varphi = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 32,557 \sin(\arccos 0,7) = 15303\,VAR$$

i l'aparent

$$S = \sqrt{3} V_c I_{línia} = \sqrt{3} \cdot 380 \cdot 32,557 = 21428,34\,VA$$

Noteu que el corrent que travessa cada bobina no és $I_{línia} = 32,557\,A$ si no que és

$$I_{fase} = \frac{I_{línia}}{\sqrt{3}} = \frac{32,557}{\sqrt{3}} = 18,8\,A$$

Exemple 5.1.2 Es connecten en triangle tres bobines iguals a una xarxa trifàsica de $380\,V$, $50\,Hz$. Les bobines es poden modelar per una reactància inductiva de $30\,\Omega$ en sèrie amb una resistència òhmica de $10\,\Omega$. Es demana calcular: I_f, $I_{línia}$, $\cos\varphi$, P, Q i S.

♠ La impedància de cada bobina es pot escriure com $Z = 10 + 30j$ de forma que la la intensitat I_f que les travessa serà

$$I_f = \frac{V_c}{Z} = \frac{380}{10+30j} = 3,8 - 11,4j \rightarrow 12,02_{-71,56^\circ}\,A$$

en quant al mòdul de la intensitat de línia

$$I_{línia} = \sqrt{3}I_f = \sqrt{3}\cdot 12,02 = 20,82\,A$$

El factor de potència val

$$\cos\varphi = \cos(-71,56^\circ) = 0,316$$

Les potències es calculen fàcilment

$$P = \sqrt{3}V_c I_{línia}\cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 20,82\cos(-71,56^\circ) = 4334,5\,W$$

$$Q = \sqrt{3}V_c I_{línia}\sin\varphi = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 20,82\sin(-71,56^\circ) = -13000\,VAR$$

$$S = \sqrt{3}V_c I_{línia} = \sqrt{3}\cdot 380\cdot 20,82 = 13703,3\,VA$$

6.2 Connexió de receptors en estrella. Potència

Ara cada fase queda sotmesa a la tensió simple V_s i el corrent que les travessa és la mateixa que transporta cada línia, podem escriure

$$V_s = I_{línia}Z$$

En quant a la potència activa

$$P_T = 3V_s I_{línia}\cos\varphi = \sqrt{3}V_c I_{línia}\cos\varphi$$

la reactiva

$$Q_T = 3V_s I_{línia}\sin\varphi = \sqrt{3}V_c I_{línia}\sin\varphi$$

i l'aparent

$$S_T = 3V_s I_{línia} = \sqrt{3} V_c I_{línia}$$

Exemple 5.2.1 Es connecten en estrella tres bobines reals iguals a una xarxa trifàsica de tensió composta $220\,V$, $50\,Hz$. Cada bobina presenta $10\,\Omega$ de resistència òhmica i $30\,\Omega$ de resistència inductiva. Es demana calcular la intensitat de línia, el factor de potència i les potències activa, reactiva i aparent de la instal·lació.

♠ Com les bobines estan connectades en estrella es troben sotmeses a la tensió simple que val en aquest cas

$$V_s = \frac{V_c}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127\,V$$

La seva impedància ve donada per

$$Z = 10 + 30j$$

de forma que la intensitat que les travessa i que és igual a la intensitat de línia al estar en estrella, és

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{127}{10 + 30j} = 1,27 - 3,81j \rightarrow 4,016_{-71,56^\circ}$$

Ara podem calcular directament el factor de potència

$$\cos\varphi = \cos(-71,56^\circ) = 0,316$$

Finalment, la potència activa val

$$P = 3V_s I_{línia} \cos\varphi = 3 \cdot 127 \cdot 4,016 \cdot \cos(-71,56^\circ) = 483,86\,W$$

la potència reactiva

$$Q = 3V_s I_{línia} \sin\varphi = 3 \cdot 127 \cdot 4,016 \cdot \sin(-71,56^\circ) = -1451,53\,VAR$$

i l'aparent

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{483,86^2 + (-1451,53)^2} = 1530\,VA$$