Tema 8 Les lleis de Newton

Així com la cinemàtica s'ocupa de l'estudi del moviment dels cossos sense atendre a les causes que l'han produït, la dinàmica estudia precisament aquestes causes que, habitualment, seran forces i la qüestió fonamental serà relacionar aquestes amb el comportament del cossos sobre els quals s'apliquen. El pilar teòric sobre el qual s'edifica la dinàmica són les anomenades

1. Lleis de Newton.

- 1a Llei de Newton (Llei d'inèrcia)

  Si la suma de les forces que actuen sobre un cos és zero, llavors aquest conserva el seu estat de moviment, és a dir roman en repòs o amb moviment rectilini uniforme.

- 2a Llei de Newton

  L'acceleració d'un cos és inversament proporcional a la seva massa i directament proporcional a la força externa resultant que actúa sobre ell.

  $$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- 3a Llei de Newton (Llei d'acció i reacció)

  Les forces sempre es presenten per parelles. Si un cos A exerceix una força sobre un cos B, el cos B exercirà una força amb igual direcció i mòdul però sentit contrari sobre el cos A.

La formulació de les lleis és aparentment senzilla, però en realitat tenen molt contingut. Per tal d'evitar confusions, comentarem amb un cert detall cadascuna d'elles.

- 1a Llei de Newton (comentada)

  El que ens diu aquesta llei és que si la velocitat d'un cos canvia, necessàriament hi ha alguna força aplicada sobre ell. S'ha de tenir present que la velocitat pot canviar independentment en mòdul i direcció.

- 2a Llei de Newton (comentada)

  Aquesta llei és la que farem servir a nivell quantitatiu, donat que proporciona una relació explícita entre la massa (massa inercial) d'un cos i l'acceleració que adquireix en aplicar-li una força. Cal tenir present que aquesta força pot ser la resultant (i de fet, sovint serà així) d'un sistema de forces més complex. Al ser les forces objectes vectorials, cal sumar-les com a tals.

- 3a Llei de Newton (comentada)

  Aquesta és potser la que causa més confusions. S'ha de tenir en compte que les parelles de forces que esmenta actuen sempre sobre cossos diferents. Per comoditat sovint ignorarem una de les parelles de les forces en els problemes, donat que les que ens interessaran són les forces que actuen sobre un cos determinat. S'haurà de tenir molta cura a no considerar parelles acció-reacció a forces que no ho són (per exemple el pes d'un cos i la força normal que actua sobre ell al recolzar-lo sobre una taula).

2. Forces fictícies.

Normalment, per tal d'estudiar el moviment d'un cos, serà convenient referir la seva posició a un sistema de referència. Habitualment, hi ha més d'un possible, i part de la feina al resoldre els exercicis és triar el que sigui més convenient. Sovint n'hi ha algún en el que les equacions del moviment s'escriuen de la forma més simple possible o en el que la descomposició d'un sistema de forces és més natural.

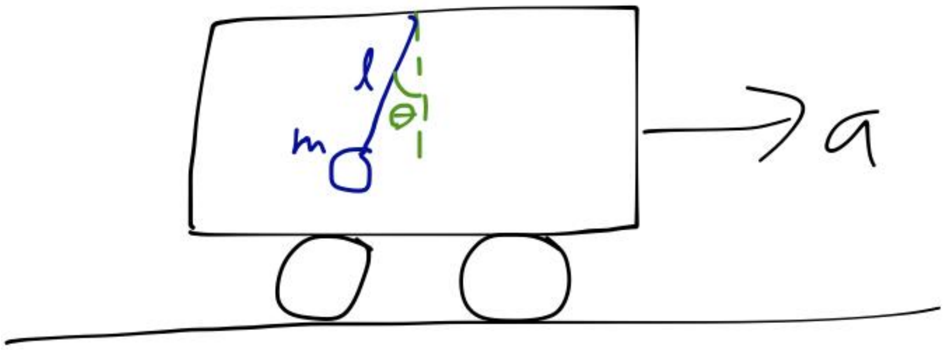
Sistemes de referencia inercials i no inercials.

Direm que un sistema de referència és *inercial* si no està accelerat. Per contra, un sistema de referencia és *no inercial* si està accelerat. La característica principal dels sistemes de referencia no inercials és que en ells les lleis de Newton aparentment no es compleixen. Per que es compleixin cal introduïr en el sistema forces que en realitat no existeixen. Per aquesta raó, aquestes forces s'anomenen *forces fictícies.*

Les forces fictícies són:

- **Força d'inercia**

  Aquesta força apareix per exemple si volen descriure el que succeeix amb un pèndol penjat del sostre d'un vehicle quan aquest accelera. Des de l'interior del cotxe, (que no és un sistema de referencia inercial, ja que està accelerat) només podem explicar el fet que el péndol quedi inclinat amb ajut d'una *força d'inèrcia* que fa que el pèndol s'oposi d'alguna manera a l'acceleració a que està sotmés. Si descrivim el problema desde fora del cotxe, a terra, quiets, que és un sistema de referencia inercial, (això no és del tot cert, ¿per què?), aleshores el que raonem és que en realitat el pèndol s'inclina per proporcionar l'acceleració necessària per seguir al cotxe. No és necessari introduir cap força estranya.



- **Força centrífuga**

  Aquesta força apareix si, per exemple, volem descriure el moviment d'un cotxe quan agafa un revolt. Encara que la velocitat sigui constant, com la direcció d'aquesta canvia, necessàriament hi ha d'haver una acceleració. Des de l'interior del cotxe pensem que hi ha una força que ens estira *cap a fora*, i l'anomenem força centrífuga. Si ens ho mirem des de l'exterior, el que comprenem en realitat és que hi ha d'haver una força que faci possible que el cotxe descrigui la corba. Normalment aquesta força prové del fregament de les rodes amb el terra, encara que també es pot peraltar la corba, i d'aquesta manera, com veurem més endevant en els exercicis, s'aconsegueix que la *normal* col·labori proporcionant força centrípeta. Com aquesta força va dirigida sempre cap el centre de l'arc que descriu el móvil, s'anomena *força centrípeta*, i aquesta, sí que és real.

- **Força de Coriolis**

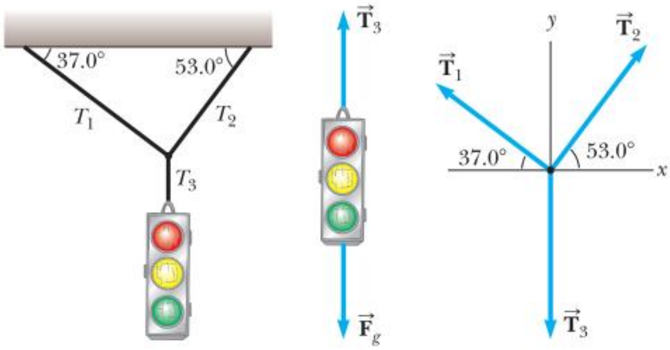
  Aquesta força fictícia sorgeix en sistemes de referencia que giren al voltant d'un eix. No tindrem ocasió de trobar-la en els exercicis, però es comentarà breument a classe.

3. Descomposició de forces.

Per aplicar la segona llei de Newton sovint haurem de descomposar les forces que intervenen en el problema que estem resolent.

Exemple 1.

Volem calcular les tensions als cables que subjecten un semàfor que pesa $122\,N$.



Descomposarem les tensions segons uns eixos que privilegien el pes del semàfor. Les condicions perque el semàfor no es mogui són

$$T_{1y} + T_{2y} = T_3, \quad T_{1x} = T_{2x}$$

en components,

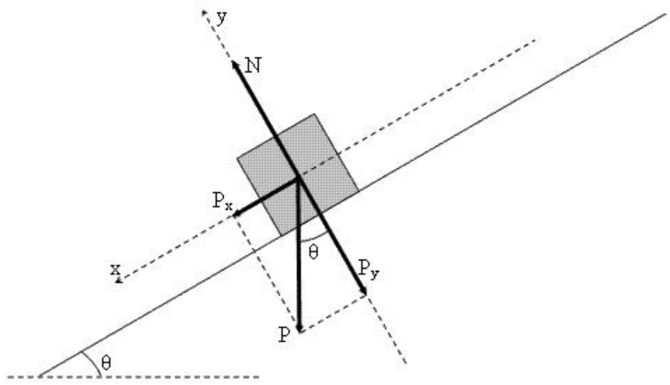
$$T_1 \sin 37^\circ + T_2 \sin 53^\circ = T_3, \quad T_1 \cos 37^\circ = T_2 \cos 35^\circ$$

com T_3 equilibra al pes tenim $T_3 = 122\,N$ i resolent el sistema d'equacions

$$T_1 = 73,4\,N \quad T_2 = 97,4\,N$$

Exemple 2. Pla inclinat

Suposem que tenim un objecte de massa m sobre un pla inclinat (sense fregament) un angle θ respecte l'horitzontal. Volem calcular l'acceleració amb la que baixarà el cos.



Les forces que hi ha presents són el pes $P = mg$ del cos, i la normal N. Descomposarem el pes segons uns eixos que privilegien la normal. De forma que en l'eix vertical tenim

$$N = P_y$$

i en l'horitzontal

$$P_x = ma$$

en components aquestes equacions s'escriuen

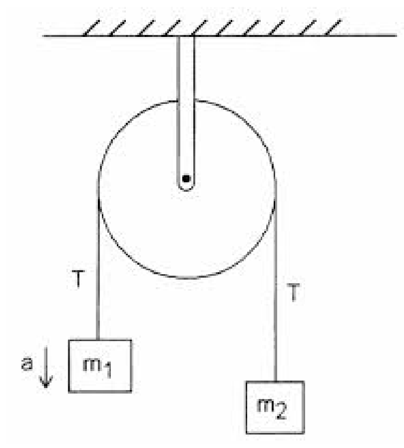
$$N = P\cos\theta = mg\cos\theta, \quad P\sin\theta = mg\sin\theta = ma$$

d'on

$$a = g\sin\theta$$

Exemple 3. Màquina d'Atwood

Considereu el sistema dinàmic format per dues masses unides per una corda que passa per una politja sense massa ni fregament.



Volem trobar l'acceleració amb que es mou el sistema. El primer que hem de fer és decidir un sentit de gir, en la figura s'ha suposat que és antihorari. Llavors escrivim la segona llei de Newton per a cada massa

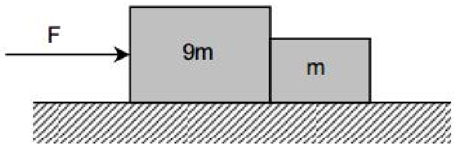
$$m_1 g - T = m_1 a \quad T - m_2 g = m_2 a$$

on hem suposat que les tensions a banda i banda de la politja són iguals. Resolent obtenim

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Exemple 4. Cossos en contacte

Volem calcular la força que fa el cos 1 de massa $9m$ sobre el 2 de massa m quan apliquem una força F sobre el cos de massa $9m$.



Apliquem la segona llei de Newton al conjunt per obtenir

$$F = (9m + m)a$$

d'on l'acceleració amb la que es mou el conjunt és

$$a = \frac{F}{10m}$$

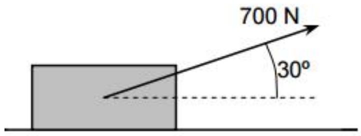
ara apliquem la segona llei de Newton al cos de massa m

$$F_{12} = ma = m\frac{F}{10m} = \frac{F}{10}$$

on F_{12} és la força que fa el cos 1 sobre el 2 i és el que, en definitiva, el mou. En resposta a aquesta força, el cos 2 fa una força sobre el 1 F_{21} de mateixa direcció i mòdul però de sentit oposat. Aquest parell de forces constitueixen un parell acció-reacció i s'annul·len entre elles, són un exemple de forces internes. És interessant resoldre el problema suposant ara que empenyem el conjunt des de la dreta, aplicant la força F al cos de massa m. Quant valen ara les forces internes?

Exemple 5.

Apliquem una força $F = 700\,N$ amb un angle $\alpha = 30\circ$ respecte l'horitzontal sobre un cos de massa $m = 100\,kg$ i volem calcular l'acceleració amb que es mourà.



Descomposem F de forma que una component F_y va dirigida en la mateixa direcció que la normal i l'altre, F_x és paral·lela a la superfície del pla. Llavors tenim que en l'eix vertical

$$N + F_y = mg$$

i en l'horitzontal

$$F_x = ma$$

en components

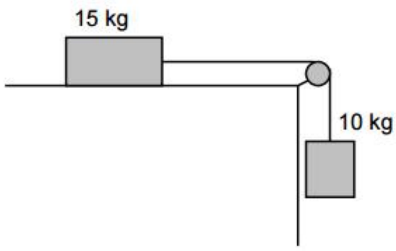
$$N + F \sin\alpha = mg, \quad F \cos\alpha = ma$$

d'on

$$a = \frac{F \cos\alpha}{m} = 6,06\ m/s^2$$

Exemple 6. Cossos enllaçats

Volem calcular l'acceleració amb que es mou el sistema



suposant que no hi ha fregament.

Sobre el cos 1 de $15\,kg$ actuen: el seu pes, la normal i la tensió de la corda. Sobre el cos 2 de $10\,kg$ actuen el seu pes i la tensió. Escrivint la segona llei de Newton pel cos 1 en els eixos vertical i horitzontal respectivament, tenim

$$N = m_1 g, \quad T = m_1 a$$

pel cos 2 (suposem que el sistema es mou en sentit horari)

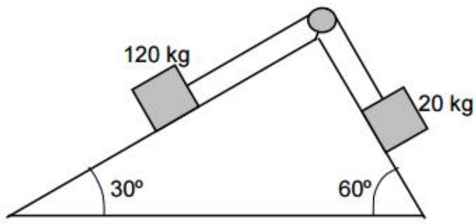
$$m_2 g - T = m_2 a$$

d'on

$$m_2 g = (m_1 + m_2)a \Longrightarrow a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 3,92\ m/s^2$$

Exemple 7. Cossos enllaçats

Volem calcular l'acceleració amb que es mou el sistema (suposant que no hi ha fregament)



Hem de descomposar el pes de cada cos tal com haviem fet en l'exemple 2 i aplicar la segona llei de Newton en els eixos vertical i horitzontal per cada cos. Per començar, hem de suposar un sentit de gir, en aquest cas suposarem que el sistema es mou en sentit antihorari. Pel cos de massa $m = 120\,kg$ tenim

$$N = 120\cos 30°, \quad 120\sin 30° - T = 120 \cdot a$$

pel cos de massa $20\,kg$ tenim

$$N = 20\cos 60°, \quad T - 20\sin 60° = 20 \cdot a$$

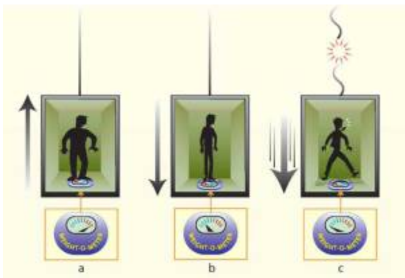
d'on

$$120\sin 30° - 20\sin 60° = (120 + 20) \cdot a$$

de forma que $a = 0,3\ m/s^2$

Exemple 8. Pes aparent

Volem saber què mesura una balança situada dins un ascensor quan aquest es mou amb acceleració.



En el cas a), quan l'ascensor puja amb una acceleració a la segona llei de Newton aplicada a la persona de massa m que hi ha sobre la balança ens dóna

$$N - mg = ma \Longrightarrow N = m(g + a)$$

En el cas b), quan l'ascensor baixa amb una acceleració a tenim

$$mg - N = ma \Longrightarrow N = m(g - a)$$

i finalment, si l'ascensor cau amb una acceleració $a = g$ llavors de la darrera expresió tenim que la balança marca

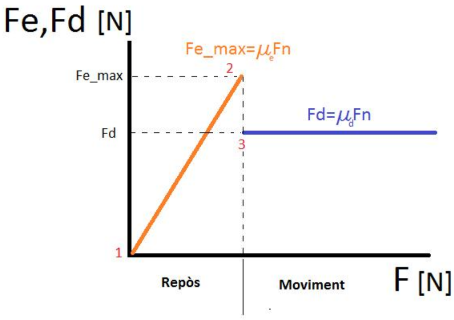
$$N = m(g - g) = 0$$

Aquest exemple posa de manifest que les balances no mesuren la massa dels objectes o persones, (tot i que marquen kilograms), i segons com, ni tan sols el pes.

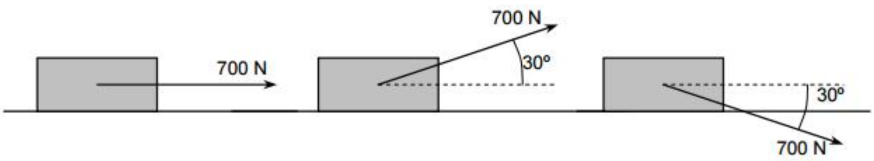
3. Força de fregament

La força de fregament apareix al intentar moure objectes en contacte. El seu origen és microscòpic i està relacionat amb la creació i ruptura d'enllaços mol·leculars entre els materials en contacte. Té un valor màxim, que depén de la *normal* i d'un coeficient experimental que es representa amb la lletra μ. Es considera $F_f = \mu \cdot N$ i en general és $0 \leq \mu \leq 1$. La força de fregament és pràcticament independent de la superfície en contacte. A més, hem de distingir entre un coeficient de fregament estàtic μ_e, quan encara no hem aconseguit posar en moviment un objecte respecte l'altre, i un dinàmic μ_d, quan ja hi ha moviment relatiu. En general és $\mu_e > \mu_d$, d'acord amb l'experiència habitual de que costa més posar en moviment un moble pesant, per exemple, que seguir-lo movent després. La força de fregament sempre s'oposa al sentit del moviment que pretenem imposar als objectes.

Si, a partir del repós, apliquem una força sobre un objecte que es troba sobre una superfície determinada, la força de fregament (a través del coeficient de fregament estàtic), anirà augmentant fins un valor màxim $\mu_e \cdot N$ a partir del qual començarà el moviment. Llavors el coeficient de fregament passa a ser μ_d de manera que la força de fregament disminueix i es manté pràcticament constant.



Exemple 9.



Volem calcular l'acceleració amb que es mou en cada cas l'objecte representat suposant que la massa és $m = 100\,kg$ i $\mu = 0,4$

- En el primer cas tenim les següents equacions (F és la força amb que s'arrossega el cos)

  $$N = mg, \quad F - F_f = ma$$

  d'on

  $$F - \mu N = ma$$
  $$F - \mu mg = ma$$

  i, finalment

  $$a = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{700 - 0,4 \cdot 100 \cdot 9,8}{100} = 3,08\,m/s^2$$

- En aquest segon cas hem de considerar les components vertical i horitzontal de la força F

  $$F \sin\alpha + N = mg, \quad F\cos\alpha - F_f = ma$$

  $$a = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m} = 3,54\,m/s^2$$

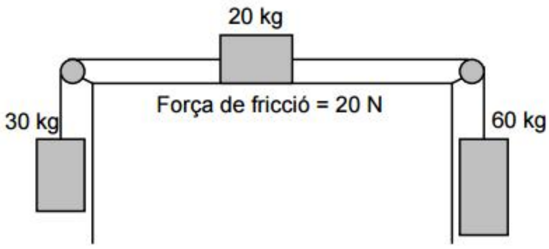
- De forma semblant pel tercer cas tenim

$$N = F \sin\alpha + mg, \quad F\cos\alpha - F_f = ma$$

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu(F\sin\alpha + mg)}{m} = 0,74\, m/s^2$$

Exemple 10.

En aquest cas volem determinar l'acceleració del sistema amb les dades que s'ofereixen



Suposarem que la tensió a la corda que passa per la politja de l'esquerra és T_1 i la de la dreta T_2. Suposem a més que el sistema es mou en sentit horari, llavors, pel cos de $30\, kg$

$$T_1 - 30 \cdot 9,8 = 30a$$

pel de $20\, kg$

$$T_2 - T_1 - 20 = 20a$$

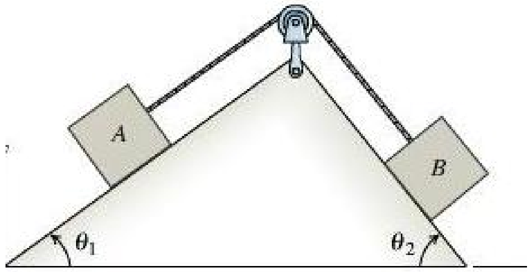
i pel cos de $60\, kg$

$$60 \cdot 9,8 - T_2 = 60a$$

resolent s'obté $2,54\, m/s^2$

Exemple 11.

Volem ara calcular l'acceleració amb que es mou el sistema dinàmic següent, suposem fregament de coeficient μ amb la superfície i moviment en sentit horari



Pel cos A tenim

$$N_A = m_A g \cos\theta_1, \quad T - m_A g \sin\theta_1 - \mu N_A = m_A a$$

pel cos B

$$N_B = m_B g \cos\theta_2, \quad m_B g \sin\theta_2 - T - \mu N_B = m_B a$$

d'on obtenim

$$a = \frac{m_B g \sin\theta_2 - m_A g \sin\theta_1 - \mu m_A g \cos\theta_1 - \mu m_B g \cos\theta_2}{m_A + m_B}$$

Si al fer els càlculs amb les dades del problema ens queda aquesta acceleració negativa voldrà dir que el sistema no es mou en el sentit que hem suposat. Caldrà tornar a resoldre el problema suposant sentit contrari i obtindrem

$$a = \frac{m_A g \sin\theta_1 - m_B g \sin\theta_2 - \mu m_A g \cos\theta_1 - \mu m_B g \cos\theta_2}{m_A + m_B}$$

Si tornés a donar un resultat negatiu hauríem de concloure que el sistema no es mou.

4. El moment lineal

El moment lineal o *quantitat de moviment* d'un cos que té massa m i es mou amb velocitat $\vec{v}$ es defineix com $\vec{p} = m\vec{v}$. De la segona llei de Newton (en forma diferencial), es dedueix directament que, en absència de forces externes, el moment lineal és una quantitat conservada. Aquest resultat és molt útil en multitud de situacions. Per exemple, en un xoc de partícules, totes les forces són internes, de manera que es pot aplicar aquesta llei de conservació. El mateix succeeix en una explosió, o també en un avió a reacció, un coet, etc. Quan tinguem un conjunt de cossos, el moment lineal del conjunt es calcula sumant els moments lineals de cadascun d'ells.

Una magnitud relacionada amb la quantitat de moviment és l'anomenat *impuls mecànic*, I que es calcula com $I = F \cdot \Delta t$. El següent resultat s'eleva a la categoria de teorema i s'anomena *teorema de l'impuls mecànic*

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

Exemple 12.

Dues boles de masses $50\,g$ i $30\,g$ es mouen, respectivament, a $3\,m/s$ i $2\,m/s$ en sentit contrari. Si, després de la col·lisió, la bola de $30\,g$ retrocedeix amb una velocitat de $5\,m/s$, quina serà la velocitat de la bola de $50\,g$?

Plantegem l'equació de conservació de la quantitat de moviment total del sistema abans i després del xoc

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

substituint les dades i prenent com a positiu el sentit en el que es mou la primera bola

$$0,05 \cdot 3 + 0,03 \cdot (-2) = 0,05 \cdot v_1' + 0,03 \cdot 5$$

d'on sobté

$$v_1' = -1,2\,m/s$$

el signe ens diu que la primera bola també canvia el sentit després del xoc.

Exemple 13.

Un jugador de golf colpeja la pilota amb una força de $2500\,N$ i s'estima que el pal està en contacte amb la pilota $0,002\,s$. Sabent que la pilota té una massa de $0,045\,g$, calculeu la velocitat que adquireix.

Plantegem el teorema de l'impuls mecànic

$$2500 \cdot 0,002 = 0,045 \cdot \Delta v$$

d'on

$$\Delta v = 111.11\,m/s = 400\,km/h$$