1) Les equacions que s'obtenen són

$$\begin{cases} 4 = 5(I_1 - I_2) + 8I_1 \\ 12 - 4 = 3I_2 + 5(I_2 - I_1) \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} 4 = 13I_1 - 5I_2 \\ 8 = -5I_1 + 8I_2 \end{cases}$$

(la de baix la marquem perquè la farem servir al final). Multiplicant la de dalt per 8 i la de baix per 5

$$\begin{cases} 32 = 104I_1 - 40I_2 \\ 40 = -25I_1 + 40I_2 \end{cases}$$

sumant-les

$$72 = 79I_1 \to I_1 = \frac{72}{79}\,A$$

i fent servir aquest resultat en

$$8 = -5I_1 + 8I_2$$

obtenim

$$I_2 = \frac{8 + 5I_1}{8} = \frac{8 + 5 \cdot \frac{72}{79}}{8} = \frac{\frac{8 \cdot 79 + 5 \cdot 72}{79}}{8} = \frac{8 \cdot 79 + 5 \cdot 72}{8 \cdot 79} = \frac{79 + 5 \cdot 9}{79} = \frac{124}{79}\,A$$

2) Les equacions que s'obtenen són

$$\begin{cases} -40 = 200I_1 + 78(I_1 - I_2) \\ 40 - 360 = 19(I_2 - I_3) + 78(I_2 - I_1) \\ 360 - 80 = 68I_3 + 19(I_3 - I_2) \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} -40 = 278I_1 + 78I_2 \\ -320 = -78I_1 + 97I_2 - 19I_3 \\ 280 = -19I_2 + 87I_3 \end{cases}$$

En el cas de sistemes de més de dues equacions és més entenedor fer servir el mètode de Gauss. La matriu associada al sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & 78 & 0 & -40 \\ \colorbox{orange}{-78} & 97 & -19 & -320 \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array}\right)$$

Comencem fent un zero al lloc on és el $\colorbox{orange}{-78}$. Per aconseguir-ho substituïm la segona fila per una combinació lineal de la primera i la segona. La primera la multipliquem per 78, la segona per 278 i sumem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \colorbox{orange}{278} & \colorbox{tan}{78} & \colorbox{green}{0} & \colorbox{purple}{-40} \\ \colorbox{orange}{-78} & \colorbox{tan}{97} & \colorbox{green}{-19} & \colorbox{purple}{-320} \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 278 & 78 & 0 & -40 \\ \colorbox{blue}{0} & \colorbox{cyan}{33050} & \colorbox{red}{-5282} & \colorbox{yellow}{-92080} \\ 0 & -19 & 87 & 280 \end{array}\right)$$

així cada element de la segona fila ha quedat substituït per el valor que resulta de fer la *mateixa* combinació lineal als elements de les dues primeres files

$$\begin{aligned} \colorbox{blue}{0} &= 78 \cdot \colorbox{orange}{278} + 278 \cdot \colorbox{orange}{-78} \\ \colorbox{cyan}{33050} &= 78 \cdot \colorbox{tan}{78} + 278 \cdot \colorbox{tan}{97} \\ \colorbox{red}{-5282} &= 78 \cdot \colorbox{green}{0} + 278 \cdot \colorbox{green}{-19} \\ \colorbox{yellow}{-92080} &= 78 \cdot \colorbox{purple}{-40} + 278 \cdot \colorbox{purple}{-320} \end{aligned}$$

Ara farem una operació semblant a la matriu que ens ha quedat. Volem fer un zero al lloc on és el nombre $\colorbox{orange}{-19}$, per aconseguir això substituïm la tercera fila per una combinació lineal de la segona i la tercera. Multiplicarem la segona per 19, la tercera per 33050 i sumem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & 78 & 0 & -40 \\ 0 & 33050 & -5282 & -92080 \\ \colorbox{pink}{0} & \colorbox{orange}{-19} & 87 & 280 \end{array}\right)$$

Noteu que **no** funcionarà fer una combinació lineal de la primera i la tercera per eliminar el $\colorbox{orange}{-19}$ perquè llavors el $\colorbox{pink}{0}$ se'ns desfaria al barrejar-se amb el 278 de la primera fila. L'ordre sempre és el mateix, primer, fer un zero en aquest element $\boxed{*}$, després en aquest $\boxed{*}$ i en darrer lloc en aquest $\boxed{*}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ \boxed{*} & * & * & * \\ \boxed{*} & \boxed{*} & * & * \end{array}\right)$$

Fixeu-vos que en el nostre cas el zero que tocava fer a la posició $\boxed{*}$ ja el teníem d'entrada. No sempre passarà això. Tornant a la matriu,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 278 & 78 & 0 & -40 \\ 0 & \boxed{33050} & \boxed{-5282} & \boxed{-92080} \\ 0 & \boxed{-19} & \boxed{87} & \boxed{280} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 278 & 78 & 0 & -40 \\ 0 & 33050 & -5282 & -92080 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{2774992} & \boxed{7504480} \end{array}\right)$$

$$\boxed{0} = 19 \cdot \boxed{33050} + 33050 \cdot \boxed{-19}$$

$$\boxed{2774992} = 19 \cdot \boxed{(-5282)} + 33050 \cdot \boxed{87}$$

$$\boxed{7504480} = 19 \cdot \boxed{(-92080)} + 33050 \cdot \boxed{280}$$

La matriu resultant és equivalent al sistema

$$\begin{cases} 278I_1 + 78I_2 = -40 \\ 33050I_2 - 5282I_3 = -92080 \\ 2774992I_3 = 7504480 \end{cases}$$

D'on, llegint la tercera equació

$$2774992I_3 = 7504480 \rightarrow I_3 = \frac{7504480}{2774992} = 2,7043\,A$$

llegint la segona

$$33050I_2 - 5282I_3 = -92080 \rightarrow I_2 = \frac{5282I_3 - 92080}{33050}$$

i fent servir el valor trobat per I_3

$$I_2 = \frac{5282 \cdot 2,7043 - 92080}{33050} = -2,3539\,A$$

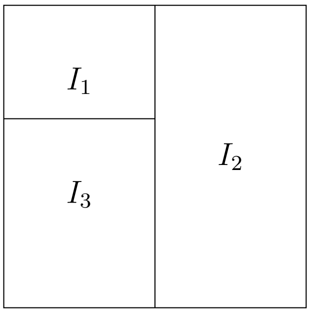
finalment, llegint la primera

$$278I_1 + 78I_2 = -40 \to I_1 = \frac{-40 - 78I_2}{278}$$

i fent servir el valor trobat per I_2

$$I_1 = \frac{-40 - 78 \cdot (-2,3539)}{278} = 0,5166\,A$$

3) Suposant que hem etiquetat les malles de la següent forma, amb les orientacions suggerides per l'enunciat



Les equacions que s'obtenen són

$$\begin{cases} 0 = 3I_1 + 5(I_1 - I_2) + 3(I_1 - I_3) \\ 12 - 4 = 1I_2 + 5(I_2 - I_1) + 1(I_2 - I_3) + 3I_2 \\ 4 = -3I_1 - I_2 + 12I_3 \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} 0 = 11I_1 - 5I_2 - 3I_3 \\ 8 = -5I_1 + 10I_2 - I_3 \\ 4 = -3I_1 - I_2 + 12I_3 \end{cases}$$

La matriu associada al sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ -5 & 10 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array}\right)$$

Comencem fent un zero al lloc on és el -5. Per aconseguir-ho substituïm la segona fila per una combinació lineal de la primera i la segona. La primera la multipliquem per 5, la segona per 11 i sumem,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{11} & \boxed{-5} & \boxed{-3} & \boxed{0} \\ \boxed{-5} & \boxed{10} & \boxed{-1} & \boxed{8} \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{85} & \boxed{-26} & \boxed{88} \\ -3 & -1 & 12 & 4 \end{array}\right)$$

així cada element de la segona fila ha quedat substituït per el valor que resulta de fer la *mateixa* combinació lineal als elements de les dues primeres files

$$\boxed{0} = 5 \cdot \boxed{11} + 11 \cdot \boxed{-5}$$

$$\boxed{85} = 5 \cdot \boxed{-5} + 11 \cdot \boxed{10}$$

$$\boxed{-26} = 5 \cdot \boxed{-3} + 11 \cdot \boxed{-1}$$

$$\boxed{88} = 5 \cdot \boxed{0} + 11 \cdot \boxed{8}$$

Ens queda la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ \boxed{-3} & -1 & 12 & 4 \end{array}\right)$$

Repetim el procés per fer un zero ara a la posició on és el $\boxed{-3}$. Substituïm la tercera fila per una combinació lineal de la primera multiplicada per 3, i la tercera per 11 i sumant,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{11} & \boxed{-5} & \boxed{-3} & \boxed{0} \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ \boxed{-3} & \boxed{-1} & \boxed{12} & \boxed{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ \boxed{0} & \boxed{-26} & \boxed{123} & \boxed{44} \end{array}\right)$$

$$\boxed{0} = 3 \cdot \boxed{11} + 11 \cdot \boxed{-3}$$

$$\boxed{-26} = 3 \cdot \boxed{-5} + 11 \cdot \boxed{-1}$$

$$\boxed{123} = 3 \cdot \boxed{-3} + 11 \cdot \boxed{12}$$

$$\boxed{44} = 3 \cdot \boxed{0} + 11 \cdot \boxed{4}$$

Ens ha quedat la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ 0 & \text{-26} & 123 & 44 \end{array}\right)$$

Ara volem fer el darrer zero al lloc on és el nombre -26, per aconseguir això substituïm la tercera fila per una combinació lineal de la segona i la tercera. Multiplicarem la segona per 26, la tercera per 85 i sumem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & \text{-26} & 88 \\ 0 & \text{-26} & 123 & 44 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 85 & -26 & 88 \\ 0 & 0 & 9779 & 6028 \end{array}\right)$$

$$0 = 26 \cdot 85 + 85 \cdot \text{-26}$$

$$9779 = 26 \cdot \text{(-26)} + 85 \cdot 123$$

$$6028 = 26 \cdot 88 + 85 \cdot 44$$

La matriu que queda és equivalent al sistema

$$\begin{cases} 11I_1 - 5I_2 - 3I_3 = 0 \\ 85I_2 - 26I_3 = 88 \\ 9779I_3 = 6028 \end{cases}$$

d'on

$$9779I_3 = 6028 \rightarrow I_3 = \frac{6028}{9779} = 0,6164\,A$$

llegint la segona

$$85I_2 - 26I_3 = 88 \rightarrow I_2 = \frac{26I_3 + 88}{85}$$

i fent servir el valor trobat per I_3

$$I_2 = \frac{26 \cdot 0,6164 + 88}{85} = 1,2238\,A$$

finalment, llegint la primera

$$11I_1 - 5I_2 - 3I_3 = 0 \to I_1 = \frac{5I_2 + 3I_3}{11}$$

i fent servir el valor trobat per I_2, I_1

$$I_1 = \frac{5 \cdot 1,2238 + 3 \cdot 0,6164}{11} = 0,7244\,A$$