1.

(a) Situem la càrrega desconeguda q_0 a l'origen de coordenades i considerem els punts

$$O = (0,0),\ A = (0,a),\ B = (a,a),\ C = (a,0)$$

Si la força elèctrica en el punt B ha de ser zero, el camp elèctric ho ha de ser. Llavors, calculem el seu valor en B en funció dels paràmetres que tenim. Necessitem els vectors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (a,a) - (0,a) = (a,0) \\
\overrightarrow{OB} &= (a,a) - (0,0) = (a,a) \\
\overrightarrow{CB} &= (a,a) - (a,0) = (0,a)
\end{aligned}$$

i el seu mòdul

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{a^2+0^2} = a \\
|\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2} \\
|\overrightarrow{CB}| &= \sqrt{0^2+a^2} = a
\end{aligned}$$

Amb aquesta informació, el camp total en el punt B serà

$$\begin{aligned}
\vec{E}_T &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{|\overrightarrow{AB}|^3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{|\overrightarrow{OB}|^3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{|\overrightarrow{CB}|^3}\overrightarrow{CB} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{a^3}(a,0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{(a\sqrt{2})^3}(a,a) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{a^3}(0,a) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{a^2}(1,0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{a^2(\sqrt{2})^3}(1,1) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{a^2}(0,1) \\
&= \frac{1}{a^2 4\pi\varepsilon_0}\left[(-q,0) + \left(\frac{q_0}{(\sqrt{2})^3}, \frac{q_0}{(\sqrt{2})^3}\right) + (0,-q)\right] \\
&= \frac{1}{a^2 4\pi\varepsilon_0}\left(-q + \frac{q_0}{(\sqrt{2})^3}, \frac{q_0}{(\sqrt{2})^3} - q\right)
\end{aligned}$$

Si volem $\vec{E} = 0$, ha de ser

$$-q + \frac{q_0}{(\sqrt{2})^3} = 0$$

d'on

$$q_0 = q(\sqrt{2})^3 = 10 \cdot 10^{-6} (\sqrt{2})^3 = 2,83 \cdot 10^{-5}\, C$$

És interessant notar que aquest resultat no depèn del valor del costat a, del quadrat.

(b) Hem de calcular el potencial elèctric al centre del quadrat, que anomenarem D amb coordenades $D = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$
Com el potencial elèctric és un escalar, podem explotar la simetria del problema anomenant, d a la distància de cada càrrega al centre (que val el mateix per totes), amb

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

llavors

$$V_D = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{d}} + \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{d}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{d} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}(q_0 - q) = 1,55 \cdot 10^7$$

Llavors el treball que cal fer per dur una càrrega $Q = 0,50\mu C$ des de l'infinit fins punt D, centre del quadrat, val

$$W_{\infty \to D} = Q\Delta V = Q(V_D - V_\infty) = 0,50 \cdot 10^{-6}(1,55 \cdot 10^7 - 0) = 7,76\, V$$

2.

(a) Tenim, de l'expressió del mòdul del camp elèctric creat per una càrrega puntual, i anomenant al radi de la Terra $R_{\oplus}$,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d^2} \rightarrow q = 4\pi\varepsilon_0 E R_{\oplus}^2 = \frac{150 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^9} = 6,76 \cdot 10^5$$

en quant al signe de la càrrega, hem de concloure que el signe és negatiu, ja que ens diuen que el camp va dirigit cap al centre de la Terra.

(b) Volem que la força elèctrica (que va cap a dalt per tractar-se d'un electró) compensi la gravitatòria, llavors

$$F_e = F_g \rightarrow qE = mg$$

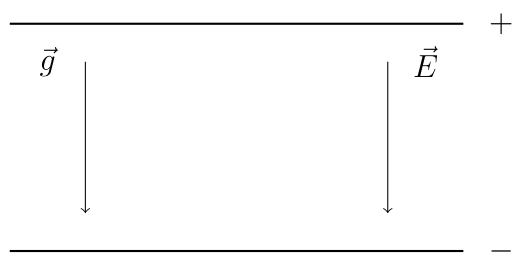
$$qE = \rho V g \rightarrow q = \frac{\rho g V}{E} = \frac{1,00 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot \frac{4\pi(18 \cdot 10^{-6})^3}{3}}{150} = 1,60 \cdot 10^{-12}\, C$$

Per saber el nombre d'electrons

$$\# e^- = \frac{Q_{total}}{Q_{e^-}} = \frac{1,60 \cdot 10^{-12}}{1,60 \cdot 10^{-19}} = 10^7\, e^-$$

3.

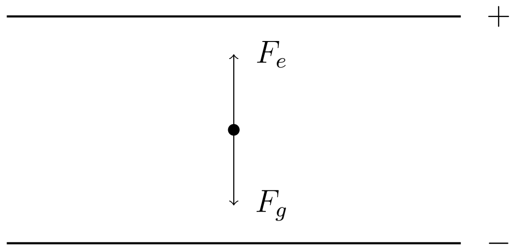
(a) Podem fer un esquema similar a aquest



La diferència de potencial entre les plaques es pot calcular a partir de la relació que té amb el camp elèctric uniforme i la distància entre plaques

$$V = Ed = 5,92 \cdot 10^4 \cdot 2,00 \cdot 10^{-2} = 1184\,V = 1,12 \cdot 10^3\,V$$

(b) De la mateixa manera tenim



I per la condició d'equilibri es pot escriure com

$$F_e F_g \to qE = mg \to q = \frac{mg}{E} = \frac{2,93 \cdot 10^{-15} \cdot 9,81}{5,92 \cdot 10^4} = 4,855{\cdot}10^{-19}\,C$$

4.

(a) De la relació entre el mòdul del camp elèctric i el potencial elèctric tenim

$$V = Ed = 3,00 \cdot 10^6 \cdot 1,00 \cdot 10^{-3} = 3,00 \cdot 10^3\,V$$

(b) Calcularem el treball que cal fer per portar els electrons un a un des de l'infinit fins el seu punt de destí. Suposem que el triangle equilàter que formaran té costat a $(= 0,1 \cdot 10^{-9})$, i vèrtexs als punt A, B, C. Suposem que el primer electró anirà al punt A, el segon al B i el tercer al C. Només cal saber la distància de cada punt als altres, com veurem després.

El treball per dur el primer electró val zero, ja que no hi ha cap altra càrrega present i el potencial que hi ha al seu punt de destí és zero. Recordem per altra banda, que vam triar l'origen de potencial elèctric al punt de l'infinit, és a dir $V_\infty = 0$. A més, farem $q \equiv q_{e^-}$

$$W_1 = q\Delta V = q(V_A - V_\infty) = q(0 - 0) = 0\,J$$

El segon electró patirà l'efecte del potencial que crea el que ja hi ha a A, al punt B que és on ha d'anar el segon. Aquest potencial val,

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

$$W_2 = q(V_B - V_\infty) = q\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} - 0\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a}$$

Ara, el tercer electró sentirà l'efecte del potencial que creen els dos anterior, i aquest potencial (en C) val,

$$V_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a}$$

llavors

$$W_3 = q(V_C - V_\infty) = q\left(\frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a} - 0\right) = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a}$$

finalment

$$\begin{aligned}
W_T &= W_1 + W_2 + W_3 \\
&= 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a} + \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a} \\
&= \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a} \\
&= 3 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{(1,60 \cdot 10^{-19})^2}{0,1 \cdot 10^{-9}} \\
&= 6,91 \cdot 10^{-18}\,J
\end{aligned}$$