1. (a) L'energia potencial elàstica acumulada en la molla es convertirà en cinètica al moment de separar-se la massa

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1v^2$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m_1}} = \sqrt{\frac{500 \cdot (0,3)^2}{1,5}} = 5,48\, m/s$$

Ara, la massa m_1 llisca sobre la superfície amb fregament de forma que arribarà a la massa m_2 amb una velocitat v' que podem trobar plantejant el balanç d'energia

$$\frac{1}{2}\cancel{m_1}v^2 = \mu\cancel{m_1}gd + \frac{1}{2}\cancel{m_1}v'^2$$

$$v' = \sqrt{v^2 - 2\mu gd} = \sqrt{(5,48)^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 0,2 \cdot 2} = 4,71$$

També podíem haver plantejat el balanç des del principi fins al final, és a dir

$$\frac{1}{2}kx^2 = \mu m_1gd + \frac{1}{2}m_1v'^2$$

per obtenir

$$v' = \sqrt{\frac{kx^2}{m_1} - 2\mu gd} = \sqrt{\frac{500(0,3)^2}{1,5} - 2 \cdot 0,2 \cdot 9,8 \cdot 2} = 4,71\, m/s$$

(b) Com el xoc és elàstic escrivim les equacions que corresponen a la conservació de la quantitat de moviment i de l'energia cinètica

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_1v_2' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \end{cases}$$

Sabem, de la teoria, que aquestes dues equacions es poden acabar escrivint com

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_1v_2' \\ v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \end{cases}$$

Fent servir les dades del problema

$$\begin{cases} \cancel{1,5} \cdot 4,71 + 0 = \cancel{1,5}v_1' + \cancel{1,5}v_2' \\ 4,71 - 0 = v_2' - v_1' \end{cases}$$

Aïllant $v_2' = v_1' + 4,71$ i substituint a la primera

$$4,71 = v_1' + v_1' + 4,71 \rightarrow v_1' = 0 \rightarrow v_2' = 4,71\,m/s$$

Veiem que les els dos cossos han *intercanviat* les seves velocitats. Es pot demostrar que, quan el xoc és elàstic i les masses iguals, precisament això és el que passa.

(c) Plantegem primer un balanç d'energia per saber amb quina velocitat arriba m_2 a dalt

$$\frac{1}{2}\cancel{m_2}v_2'^2 = \cancel{m_2}g2R + \frac{1}{2}\cancel{m_2}v_B^2$$

d'on

$$v_B = \sqrt{v_2'^2 - 4gR} = \sqrt{4,71^2 - 4 \cdot 9,8 \cdot 0,25} = 3,52\,m/s$$

Ara, de la definició d'acceleració centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{3,52^2}{0,25} = 49,53\,m/s^2$$

2. (a) L'energia potencial gravitatòria que té la massa a dalt s'invertirà en cinètica per, acte seguit, comprimir la molla. Al llarg de la baixada el fregament s'endú treball i ho hem de tenir en compte. El balanç a la baixada és,

$$mgh = (\mu mg\cos\alpha)d + \frac{1}{2}kx^2$$

d'on

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2mg\left(\frac{h - \mu d\cos\alpha}{k}\right)} \\ &= \sqrt{2mg\left(\frac{d\sin\alpha - \mu d\cos\alpha}{k}\right)} \\ &= \sqrt{2mgd\left(\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{k}\right)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 4\left(\frac{\sin 30^\circ - 0,2\cos 30^\circ}{100}\right)} \\ &= 0,716\,m \end{aligned}$$

On hem tingut en compte que hem d'expressar l'altura en funció de l'angle i la distància recorreguda.

(b) Plantegem un balanç semblant, l'energia potencial elàstica emmagatzemada a la molla s'invertirà en potencial gravitatòria per pujar i el fregament tornarà a endur-se energia,

$$\frac{1}{2}kx^2 = (\mu mg\cos\alpha)d' + mgh'$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = (\mu mg\cos\alpha)d' + mgd'\sin\alpha$$

llavors

$$d' = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}100(0,716)^2}{0,2\cdot 2\cdot 9,8\cos 30^\circ + 2\cdot 9,8\sin 30^\circ} = 1,94\,m$$

i, finalment, per l'altura que assoleix a la tornada

$$h' = d'\sin\alpha = 1,94\cdot\sin 30^\circ = 0,97\,m$$

3. (a) L'energia potencial gravitatòria que té la massa s'inverteix en cinètica just abans de començar a comprimir la molla

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 = E_c \rightarrow E_c = mgh = 2,50\cdot 9,8\cdot 1 = 24,5\,J$$

(b) L'energia potencial perduda per la massa servirà per a comprimir la molla, hem de tenir en compte que l'altura total recorreguda és $(1+0,15)\,m$

$$mg(h+y) = \frac{1}{2}ky^2$$

d'on

$$k = \frac{2mg(h+y)}{y^2} = \frac{2\cdot 2,50\cdot 9,8\cdot(1+0,15)}{(0,15)^2} = 2,50\cdot 10^3\,N/m$$