3 Cinemàtica del punt

3.1 Moviment rectilini

En aquesta secció estudiarem el moviment en una dimensió de cossos puntuals sotmesos a una acceleració constant. Les equacions que descriuen aquest tipus de moviment són:

$$\boldsymbol{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v = v_0 + a(t - t_0)} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)} \tag{3}$$

A on $\boldsymbol{x}$ és la posició del mòbil respecte un cert origen de referència, $\boldsymbol{x_0}$ és la posició per a $\boldsymbol{t = 0}$, $\boldsymbol{v_0}$ és la velocitat per a $\boldsymbol{t = 0}$, $\boldsymbol{a}$ l'acceleració, suposada constant, $\boldsymbol{v}$ la velocitat i $\boldsymbol{t}$ el temps . Quan l'acceleració és igual a zero les anteriors equacions queden resumides en

$$\boldsymbol{x = x_0 + v(t - t_0)} \tag{4}$$

A l'hora de resoldre problemes, les equacions (1), (2) i (3) habitualment es poden escriure d'una forma més senzilla. N'hi ha prou de triar adequadament els valors de $\boldsymbol{x_0}$ i $\boldsymbol{t_0}$. Això s'anomena triar l'origen d'espai i de temps i es correspón amb escollir un sistema de coordenades adequat al problema en qüestió. Això sempre es podrà fer si hem d'escriure les equacions del moviment per un sol mòbil. Si en tenim dos o més, només podrem privilegiar un d'ells.

Exemple
Un cotxe necessita $\mathbf{15}\,\boldsymbol{s}$ per arribar a una velocitat de $\mathbf{108}\,\boldsymbol{km/h}$ partint del repòs. Es demana calcular l'acceleració i l'espai recorregut en aquest temps. Suposant que després frena amb una acceleració de $\mathbf{3}\,\boldsymbol{m/s^2}$, calcular el temps que triga a aturar-se.
Passem la velocitat al SI

$$108\frac{km}{h} \times \frac{1000\,m}{1\,km} \times \frac{1\,h}{3600\,s} = 30\,m/s$$

llavors, podem calcular el temps que triga a assolir aquesta velocitat amb

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$30 = 0 + a \cdot 15$$

d'on obtenim

$$a = 2\,m/s^2$$

Per calcular l'espai recorregut podem fer

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 = 0 \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30^2 = 900\,m$$

Finalment, si ara frena fins a aturar-se, per trobar el temps emprat farem

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$0 = 30 + (-3) \cdot t$$

$$t = \frac{30}{3} = 10\,s$$

Exemple
Una bicicleta surt d'una ciutat $\boldsymbol{A}$ en direcció a una altra $\boldsymbol{B}$ (separades $\mathbf{15}\,\boldsymbol{km}$) amb una velocitat constant de $\mathbf{5}\,\boldsymbol{m/s}$. Un minut després, un cotxe que passava per $\boldsymbol{B}$ amb velocitat $\mathbf{2}\,\boldsymbol{m/s}$ i amb acceleració $\mathbf{1}\,\boldsymbol{m/s^2}$ es dirigeix cap a $\boldsymbol{A}$. Es demana calcular el temps que triguen a trobar-se i a quina distància de $\boldsymbol{A}$ ho fan.
Les equacions del moviment per cada mòbil són

$$A \quad x = x_0 + v(t - t_0)$$

$$B \quad x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Si posem l'origen de coordenades i temps al punt $\boldsymbol{A}$, tindrem

$$A \quad x = 5t$$

$$B \quad x = 15000 - 2(t - 60) + \frac{1}{2}(-1)(t - 60)^2$$

d'on

$$5t = 15000 - 2(t - 60) + \frac{1}{2}(-1)(t - 60)^2$$

fent operacions, obtenim

$$t^2 - 111t + 2100 = 0$$

amb solucions

$$t = \frac{111 \pm \sqrt{111^2 - 4 \cdot 2100}}{2}$$

$$t_1 = 86,8\,s, \quad t_2 = 24,2\,s$$

Degut a les condicions del problema, només $\boldsymbol{t_1}$ té sentit com a solució.

Exercicis

1. Un cotxe arrenca des del repòs amb una acceleració constant $\boldsymbol{a} = \mathbf{8}\boldsymbol{m/s^2}$. Quina velocitat tindrà als 10 segons? Quin espai haurà recorregut aleshores? (*Sol:v=80m/s, x=400m*)

2. Un objecte amb velocitat inicial $\boldsymbol{v_0} = \mathbf{5}\boldsymbol{m/s}$ té una acceleració constant $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}\boldsymbol{m/s^2}$. Quan la seva velocitat sigui $\boldsymbol{v} = \mathbf{15}\boldsymbol{m/s}$, quant espai haurà recorregut? (*Sol:x=50m*)

3. Un objecte té una acceleració constant $\boldsymbol{a = 4m/s^2}$. La seva velocitat és $\boldsymbol{v = 1m/s}$ per $\boldsymbol{t = 0}$, instant en el qual està a $\boldsymbol{x = 7m}$. Amb quina velocitat es mou quan està a $\boldsymbol{x = 8m}$? Quan succeeix això? (*Sol:v=3m/s, t=0,5s*)

4. Dos vehicles separats inicialment una distància de $\boldsymbol{10km}$ es mouen en sentit contrari amb velocitats $\boldsymbol{v_1 = 10m/s}$ i $\boldsymbol{v_2 = 18m/s}$. Calculeu quant de temps tarden a creuar-se i a quina distància ho fan des del punt on va sortir el primer. (*Sol:t=357s, x=3571m*)

5. Un cotxe circula a una velocitat $\boldsymbol{v = 80km/h}$ en una zona escolar. Un cotxe de policia el veu passar pel seu costat i inicia una persecució accelerant amb $\boldsymbol{a = 2m/s^2}$. Quan atrapa l'altre cotxe? Quina serà la velocitat del cotxe de policia en aquell moment? (*Sol:t=22,22s, v=44,44m/s*)

6. El cotxe de policia del problema anterior pretén aquesta vegada atrapar a un altre cotxe que circula amb $\boldsymbol{v = 125km/h}$. La velocitat màxima del cotxe de policia és de 190 km/h, i arrenca des del repòs amb una acceleració constant $\boldsymbol{a = 3m/s^2}$. Quan atrapa l'altre cotxe si es posa en moviment just quan passa pel seu costat? Quin espai hauran recorregut els dos cotxes en aquell moment? Suposeu ara que quan el cotxe de policia està a 100 metres de l'altre, aquest frena. Suposant que els dos cotxes poden frenar amb $\boldsymbol{a = 6m/s^2}$, i que el conductor del cotxe de policia frena just al veure les llums de fre de l'altre, demostreu que els cotxes xocaran. Quina és la velocitat relativa dels cotxes en l'instant del xoc? Quant de temps passa des de que s'apliquen els frens fins que es produeix la col.lisió? L'interval de temps que passa entre que el policia veu la llum del frens de l'altre cotxe i acciona els seus s'anomena *temps de reacció T*. Estimeu un valor de $\boldsymbol{T}$ i dieu de quina manera influeix en el problema. (*Sol:t=25,73s, x=1358m, v=18m/s, t=5,54s, T=0,2s, velocitat relativa més gran.*)

3.2 Moviment de projectils

3.2.1 Moviment vertical

En els casos en que un objecte es llença o deixa caure verticalment, les equacions a utilitzar són formalment les mateixes que les de la secció anterior. S'ha de tenir present però, que en aquests casos l'acceleració és sempre coneguda, ja que és la de la gravetat terrestre ($\boldsymbol{g = 9,8m/s^2}$). L'espai l'anomenarem

$\boldsymbol{y}$, altura, per comoditat, i s'ha de tenir en compte que per la velocitat prendrem com a signe positiu si va cap a dalt i negatiu si va cap abaix. D'acord amb tot això i com l'acceleració de la gravetat va sempre cap abaix, escriurem les equacions de la següent forma:

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \tag{5}$$
$$v = v_0 - g(t - t_0) \tag{6}$$
$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \tag{7}$$

Una vegada més, insistir en que, si podem triar les condicions inicials, les equacions a utilitzar es simplifiquen notablement.

Exemple
Es llença des del terra una pilota amb una velocitat inicial de $10\,m/s$. Un segon després es llença des del mateix punt una altra pilota amb una velocitat de $20\,m/s$. Calculeu el temps que triga a arribar al terra la primera pilota i amb quina velocitat ho fa. Determineu ara si es troben en l'aire, i en cas afirmatiu, a quina alçada. Dieu també si quan es troben ho fan pujant o baixant.
L'equació del moviment per la pilota que es llença des del terra és

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2$$

per calcular el temps que triga en arribar a terra demanem $y = 0$, d'on

$$0 = 10t - \frac{1}{2}gt^2$$

amb solucions $t = 0\,s$ i $t = \frac{20}{g}\,s$

La velocitat amb que arriba a terra es pot trobar amb

$$v = v_0 - gt$$

llavors

$$v = 10 - g\frac{20}{g} = -10\,m/s$$

Ara, per determinar si es troben escrivim les equacions del moviment i ressolem el sistema.

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 20(t-1) - \frac{1}{2}g(t-1)^2$$

d'on

$$10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20(t-1) - \frac{1}{2}g(t-1)^2$$

$$10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20(t-1) - \frac{1}{2}g(t^2 - 2t + 1)$$

$$10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20t - 20 - \frac{1}{2}gt^2 + gt - \frac{1}{2}g$$

d'on

$$t = \frac{40+g}{20+2g}$$

L'alçada la podem trobar com

$$y = 10\frac{40+g}{20+2g} - \frac{1}{2}\left(\frac{40+g}{20+2g}\right)^2$$

i, finalment, la velocitat amb que es creuen

$$v = 10 - g\frac{40+g}{20+2g}$$

$$v = 20 - g\left(\frac{40+g}{20+2g} - 1\right)$$

Exercicis

1. Una càrrega de maons està sent pujada amb una grua a una velocitat de 5 m/s quan, a sis metres del terra, un maó es desprèn. Descriure el

moviment del maó. Quina és l'alçada màxima que assoleix respecte el terra? Quant de temps triga a arribar a terra? Amb quina velocitat ho fa? (*Sol:Ymax=7,3m, t=1,73s, v=12m/s*)

2. Es deixa caure una pilota des del terrat d'un edifici. En el mateix instant es llança verticalment i cap adalt una altra pilota des de terra amb una velocitat $\boldsymbol{v_0 = 9m/s}$. Les pilotes xoquen 1,8 segons més tard. Trobeu l'alçada de l'edifici. (*Sol: h=16,2m*)

3. Un alumne que es troba a la seva habitació en una residència d'estudiants veu caure per la finestra un globus ple d'aigua. S'apropa a la finestra i mesura que el temps que un segon globus tarda en recórrer els 1,2 metres de la seva finestra és $\boldsymbol{t = 0,1s}$. Si suposem que els globus s'han deixat caure des del repòs, des de quina alçada respecte la part inferior de la seva finestra s'estan llençant? (*Sol:9,2m*)

3.2.2 Tir parabòlic

En aquesta secció treballarem l'anomenat tir parabòlic, l'estudi del qual es fa considerant el moviment com una composició en els eixos horitzontal i vertical. Suposem que es llença un cos amb una velocitat $\boldsymbol{v}$ i un angle $\boldsymbol{\alpha}$ respecte l'horitzontal. L'única acceleració és la gravitatòria en l'eix vertical, per això les equacions del moviment són, per l'eix $\boldsymbol{OX}$:

$$\boldsymbol{x = x_0 + v_{0x}(t - t_0)} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x}} \tag{9}$$

i per l'eix $\boldsymbol{OY}$:

$$\boldsymbol{y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{v_y = v_{0y} - g(t - t_0)} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)} \tag{12}$$

Tenint en compte que és:

$$\boldsymbol{v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{v_{0y} = v_0 \sin\alpha}$$

En el tir parabòlic és típic voler conèixer:

- Temps de vol $\boldsymbol{t_{vol}}$
- Abast màxim $\boldsymbol{x_{max}}$

- Altura màxima y_{max}
- Velocitat en qualsevol temps (en particular amb la que arriba a terra)

Per trobar el temps de vol buscarem per quins valors del temps és $y = 0$

$$0 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

d'on

$$\begin{cases} t = 0 \\ t_v = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \end{cases}$$

per trobar l'abast màxim en tenim prou de substituir el temps de vol en l'equació del moviment per la x. Llavors

$$x_{max} = v_0 \cos \alpha t_v = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Per trobar l'altura màxima aprofitarem la simetria de la paràbola i calcularem l'altura a la que es troba quan ha transcorregut la meitat del temps de vol, així

$$y_{max} = y\left(\frac{t_v}{2}\right) = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Per una altra banda, la velocitat per qualsevol temps es pot calcular com

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

En el cas que l'objecte sotmés al tir parabòlic es llancés des d'una altura y_0 hem d'escriure les equacions de la següent manera

$$x = v_0 \cos \alpha t \tag{13}$$

$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{14}$$

el temps de vol el trobarem com en el cas més senzill, la diferència és que ara haurem de resoldre una equació de segon grau complerta de la que obtindrem dos valors del temps, un positiu t_+ i un negatiu t_-. El temps de vol coincideix amb t_+. Per calcular l'altura màxima podem seguir explotant la simetria de la paràbola però ara haurem de fer

$$y_{max} = y\left(\frac{t_+ + t_-}{2}\right)$$

Exercicis

1. Suposeu que es llença un objecte amb una velocitat $\boldsymbol{v}$ i un angle $\boldsymbol{\alpha}$ respecte l'horitzontal. Es demana trobar en funció de $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha}$:
   (a) L'alçada màxima
   (b) L'abast màxim
   (c) El temps que està a l'aire
   (d) Finalment, trobeu l'equació de la trajectòria, és a dir la relació entre $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x}$ (*Sol:Ymax=*$\frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$, *Xmax=*$\frac{v_0^2 \sin\alpha}{g}$, $t_{vol} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, $y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$)

2. Es dispara un projectil a l'aire des de la part més alta d'un barranc a 200 metres d'alçada. La seva velocitat inicial és de 60 m/s a 60º respecte l'horitzontal. On caurà el projectil? (*Sol:x=408m*)

3. Un noi que està a 4 metres d'una paret vertical tira una pilota contra ella. La pilota surt de la seva mà a dos metres per sobre el terra amb una velocitat inicial $\boldsymbol{v} = \mathbf{10\sqrt{2}}\boldsymbol{m/s}$ i un angle $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\pi}{4}$. Quan la pilota xoca contra la paret, s'invirteix la component horitzontal de la seva velocitat. Calculeu on caurà la pilota. (*Sol:x=14,24 darrera d'ell*)

4. Una pedra llençada horitzontalment des d'una torre xoca amb el terra a una distància de 18 metres respecte la seva base. Sabent que l'altura de la torre es de 24 metres, trobeu amb quina velocitat es va llençar la pedra i la velocitat que té quan arribi al terra. (*Sol:*$v_0 = 8,1m/s$, *v=23,15m/s,* $\alpha = 70^o$ *sota l'hortizontal*)

3.3 Moviment circular

En aquesta secció estudiarem aquells casos en els que el moviment, o part d'aquest, descriu una circumferència. Sigui doncs una circumferència de radi $\boldsymbol{R}$ i un objecte que es pot moure al llarg d'aquesta. Suposem que aquest objecte s'ha mogut de forma que la seva posició i la d'abans descriuen un angle $\boldsymbol{\phi}$ (*en radians*). La relació que hi ha entre la longitud de l'arc ($\boldsymbol{s}$) recorregut per l'objecte i aquest angle és:

$$s = \phi R$$

on $\boldsymbol{R}$ es el radi de la circumferència. La velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$ es relaciona amb la lineal de forma semblant:

$$v = \omega R$$

i l'acceleració angular $\boldsymbol{\alpha}$ amb la lineal:

$$\boldsymbol{a = \alpha R}$$

Els problemes de moviment circular es resolen aplicant les equacions (1), (2) i (3) de la primera secció, sense més que fer els canvis de magnituds lineals per angulars, és a dir que quedaran:

$$\boldsymbol{\phi = \phi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)} \tag{17}$$

Una novetat és que al tractar-se d'una trajectòria no rectilínea, apareix una altra component de l'acceleració, que s'anomena acceleració normal o centrípeta, donat que sempre està dirigida cap al centre de la circumferència. El seu mòdul val :

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{R}}$$

i com veiem existeix sempre que el cos no estigui aturat.

Exercicis

1. Una partícula descriu una moviment circular de 5 metres de radi amb velocitat constant de 15 m/s. Quan val la seva acceleració? (*Sol:45m/s*)

2. Un objecte situat a l'equador té una acceleració dirigida cap al centre de la Terra degut a la rotació terrestre i una acceleració dirigida cap al Sol degut al moviment de la Terra en la seva órbita. Calculeu els mòduls de les dues acceleracions i expresseu-los com fraccions de l'acceleració de la gravetat $\boldsymbol{g}$. *Radi de la Terra 6740 km. Distància Terra-Sol 150.000.000 km.* (*Sol:*$\boldsymbol{a_{nterra} = 0,036 m/s^2}$, $\boldsymbol{a_{nterra-sol} = 5,95 \cdot 10^{-3} m/s^2}$)