1. El vector posició d'un mòbil ve donat per $\vec{r}(t) = (8 - 2t^3 + t^2, t^4)$, en unitats del SI. Es demana:

   (a) El vector desplaçament entre els instants $t_1 = 1\,s$ i $t_2 = 3\,s$

   (b) El mòdul del vector desplaçament entre aquests instants.

   (c) La velocitat mitjana entre aquests instants del temps i el seu mòdul.

   (d) La velocitat instantània en funció del temps.

   (e) L'acceleració mitjana entre els mateixos instants de temps i el seu mòdul.

   (f) L'acceleració instantània en funció del temps.

(a) Calculem el vector posició en cada temps

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(1) = (7, 1)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(3) = (-37, 81)$$

Ara és immediat trobar el vector desplaçament

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}(3) - \vec{r}(1) = (-37, 81) - (7, 1) = (-44, 80)$$

(b) Calculem directament

$$|\Delta\vec{r}| = |(-44, 80)| = \sqrt{(-44)^2 + 80^2} = \sqrt{8336} = 91,302\,m$$

(c) Aplicant la definició de velocitat mitjana

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-44, 80)}{2} = (-22, 40)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{v}_m| = |(-22, 40)| = \sqrt{(-22)^2 + 40^2} = \sqrt{2084} = 45,65\,m/s$$

(d) Derivant el vector posició respecte el temps

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (-6t^2 + 2t, 4t^3)$$

(e) Calculem la velocitat pels instants de temps considerats

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(1) = (-4, 4)$$

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(3) = (-48, 108)$$

ara, aplicant la definició d'acceleració mitjana

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(-48, 108) - (-4, 4)}{3 - 1} = \frac{(-44, 104)}{2} = (-22, 52)$$

En quant al mòdul

$$|\vec{a}_m| = |(-22, 52)| = \sqrt{(-22)^2 + 52^2} = \sqrt{3188} = 56,46\, m/s^2$$

(f) Derivant el vector velocitat respecte el temps

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (-12t + 2, 12t^2)$$

2. Suposem que el vector posició d'un mòbil ve donat per

$$\vec{r}(t) = \left(7 - 3t + \frac{2}{3}t^3,\, \frac{3}{7}t^7 - \frac{5}{9}t^9 + 1\right)$$

en unitats del SI. Es demana trobar, de forma implícita, l'expressió que relaciona el radi de curvatura de la trajectòria que descriu, en funció del temps.

L'objectiu de l'exercici és establir la igualtat

$$|\vec{a}(t)|^2 = |\vec{a}_t(t)|^2 + |\vec{a}_n(t)|^2$$

Comencem calculant el vector velocitat

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(-3 + 2t^2,\, 3t^6 - 5t^8\right)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(-3 + 2t^2\right)^2 + \left(3t^6 - 5t^8\right)^2}$$

Calculem ara el vector acceleració (total)

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \left(4t,\, 18t^5 - 40t^7\right)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(4t)^2 + \left(18t^5 - 40t^7\right)^2}$$

Ara, el mòdul de l'acceleració centrípeta

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}_n(t)| &= \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\left(-3+2t^2\right)^2+\left(3t^6-5t^8\right)^2}\right)^2}{R} \\
&= \frac{\left(-3+2t^2\right)^2+\left(3t^6-5t^8\right)^2}{R}
\end{aligned}
$$

Finalment el mòdul de l'acceleració tangencial

$$
|\vec{a}_t(t)| = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} = \frac{2(-3+2t^2)\cdot(4t)+2(3t^6-5t^8)\cdot(18t^5-40t^7)}{2\sqrt{(-3+2t^2)^2+(3t^6-5t^8)^2}}
$$

De forma que la relació implícita demanada entre el radi de curvatura de la trajectòria i el temps serà

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{\left(4t\right)^2+\left(18t^5-40t^7\right)^2}\right)^2 &= \left(\frac{2(-3+2t^2)\cdot(4t)+2(3t^6-5t^8)\cdot(18t^5-40t^7)}{2\sqrt{(-3+2t^2)^2+(3t^6-5t^8)^2}}\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\left(-3+2t^2\right)^2+\left(3t^6-5t^8\right)^2}{R}\right)^2
\end{aligned}
$$

que podem deixar com

$$
\begin{aligned}
\left(4t\right)^2+\left(18t^5-40t^7\right)^2 &= \frac{\left[2(-3+2t^2)\cdot(4t)+2(3t^6-5t^8)\cdot(18t^5-40t^7)\right]^2}{4\left[(-3+2t^2)^2+(3t^6-5t^8)^2\right]} \\
&+ \frac{\left[\left(-3+2t^2\right)^2+\left(3t^6-5t^8\right)^2\right]^2}{R^2}
\end{aligned}
$$