1. (*a*) Sí que es pot calcular, a partir de l'expressió

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

que podem escriure com

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{T^2 k}{4\pi^2}$$

pengem la massa i l'estirem una certa distància posant-la a osci l·lar, calculem el que tarda a fer una oscil·lació i calculem el valor de la massa. Podríem fer una mesura i prou però per tal de tenir més precisió el més convenient seria calcular tantes vegades com puguem el període d'oscil·lació, fer una mitja aritmètica i aplicar la fórmula anterior. Si fessim l'experiment a la Lluna obtindríem el mateix resultat perquè l'acceleració de la gravetat del lloc on es fa no apareix en l'expressió que hem vist. (*b*) L'equació d'un oscil·lador d'amplitud A, pulsació ω i angle de fase φ_0 s'escriu com

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

trobem φ_0 amb les condicions inicials $y(0) = -A$

$$-A = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \cos(\varphi_0) = -1 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

amb les dades de l'enunciat,

$$A = 6,00 \cdot 10^{-2}\, m, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10,0 = 20\pi\, rad/s$$

podem escriure finalment

$$y(t) = 6,00 \cdot 10^{-2} \cos(20\pi t + \pi)$$

Per trobar la velocitat màxima calculem (a partir de la primera l'equació)

$$v(t) = \dot{y}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

i com el sinus és una funció acotada $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$, tindrem

$$v_{max} = \pm A\omega$$

De la mateixa manera podem calcular l'acceleració

$$a(t) = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

i amb un argument semblant pel cosinus tenim

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

2. (a) L'amplitud del moviment val $8,00/2 = 4,00\,cm$ i l'energia mecànica de l'oscil·lador es pot escriure com

$$E_M = E_c + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

de forma que podem calcular el seu valor, per exemple, quan la velocitat val zero (als extrems del moviment), llavors tindrem que tota l'energia és potencial elàstica i val

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 35,0\cdot\left(4,00\cdot 10^{-2}\right)^2 = 0,028\,J$$

per una altra banda, la velocitat que tindrà en funció de l'elongació es pot calcular a partir de

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_M = 0,028$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(0,028 - \frac{1}{2}kx^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{50,0\cdot 10^{-3}}\left(0,028 - \frac{1}{2}\cdot 35,0\cdot(1\cdot 10^{-2})^2\right)}$$

i tenim $v = 1,0247\,m/s$

(b) L'energia potencial elàstica per $x = 3,00\,cm$ val

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 35,0\cdot(3,00\cdot 10^{-2})^2 = 0,01575\,J$$

de forma que la cinètica serà

$$E_c = E_M - E_{pot} = 0,028 - 0,01575 = 0,26425\,J$$

3. (a) A la gràfica es veu que el pendent de la recta es pot calcular com

$$\frac{0,4-0}{1,2-0} = 1/3$$

i a partir de

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

podem trobar

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \to m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{k}{4\pi^2}T^2 \to T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m$$

llavors podem calcular la constant elàstica amb d'on podem identificar el pendent de la recta calculat a partir de la gràfica amb $4\pi^2/3$

$$\frac{1}{3} = \frac{4\pi^2}{k}$$

la constant elàstica valdrà doncs,

$$k = 4\pi^2 \cdot 3 = 118,44\,N/m$$

Aquest valor trobat de depèn de la massa que oscil·la. Ara, per una massa de $5,00\,kg$ tenim, en quant a la freqüència angular o pulsació

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{118,44}{5,00}} = 4,87\,rad/s$$

i en quant a la freqüència

$$f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4,87} = 1,29\,Hz$$

Comptar el temps d'unes quantes oscil·lacions enlloc d'una sola millorarà la precisió de la mesura, si suposem que no hi ha fregament tal com diu l'enunciat, però hem de tenir en compte que en el cas d'un oscil·lador real el període va disminuint a cada oscil·lació i si esperem massa temps la mesura no tindrà cap sentit.

(b) L'equació de l'osci l·lador es pot escriure com

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

fent servir les condicions inicials $x(0) = A$

$$A = A\cos(\varphi_0) \to \cos(\varphi_0) = 1 \to \varphi_0 = 0\,rad$$

ara, fent servir les dades de l'enunciat l'equació quedarà

$$x(t) = 15,0 \cdot 10^{-2}\cos(4,87t)$$

Podem invocar la conservació de l'energia mecànica a l'oscil·lador harmònic per justificar que el mòdul de la velocitat màxima es dona a la posició d'equilibri, ja que l'energia potencial elàstica $\frac{1}{2}kx^2$ val zero en aquest punt i tota l'energia serà cinètica. L'acceleració màxima es dona als extrems ja que de la segona llei de Newton $F = ma$, i la força ($F = -kx$) és màxima en aquest punts (on $x = \pm A$).

4. (a) Com que ens diuen que fa 6 oscil·lacions en 30 segons, podem calcular la freqüència com

$$f = \frac{6}{30} = 0,2\,Hz$$

el període valdrà

$$T = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5\,s$$

i la freqüència angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,2 = \frac{2}{5} = 0,4\pi\,rad/s$$

L'equació del moviment es pot escriure com

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

fent servir les condicions inicials $y(0) = A$

$$A = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \cos(\varphi_0) = 1 \rightarrow \varphi_0 = 0\,rad$$

ara, fent servir les dades de l'enunciat l'equació quedarà

$$y(t) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$$

(b) La constant elàstica de la corda es pot calcular a partir de la massa de la saltadora (suposem negligible la massa de la corda) i la freqüència angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2 = 60 \cdot \left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 = 94,75\,N/m$$

Quan la saltadora es troba aturada al punt d'equilibri es compleix

$$mg = kl$$

on l és la longitud que s'allarga la corda a causa del pes de la saltadora, llavors

$$l = \frac{mg}{k} = \frac{60 \cdot 9,8}{94,75} = 6,2\,m$$

de forma que la corda mesura en aquest moment $30 + 6,2 = 36,2\,m$