Problema 1

a) Al ser una òrbita circular estable (són les úniques que hem estudiat) podem escriure

$$2\pi r = v \cdot T \rightarrow r = \frac{v \cdot T}{2\pi} = \frac{2,3 \cdot 10^4 \cdot 30 \cdot 60}{2\pi} = 6,59 \cdot 10^6\, m$$

llavors, amb la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \rightarrow M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (6,59 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (30 \cdot 60)^2} = 5,22 \cdot 10^{25}\, kg$$

b) L'energia mecànica en una òrbita circular estable es calcula com

$$E_M = -\frac{GMm}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,22 \cdot 10^{25} \cdot 150}{6,59 \cdot 10^6} = 7,93 \cdot 10^{10}\, J$$

Problema 2

a) De la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{30} \cdot (3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 4,5 \cdot 10^{11}\, m$$

b) De les expressions del camp gravitatori a la superfície del planeta i de la velocitat d'escapament

$$g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2} \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

podem plantejar el sistema

$$\begin{cases} g_0 R_p^2 = GM_p \\ \\ v_e^2 R_p = 2GM_p \end{cases}$$

i dividint les equacions

$$\frac{g_0 R_p}{v_e^2} = \frac{1}{2} \rightarrow R_p = \frac{v_e^2}{2g_0} = \frac{(11,2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 15} = 4,2 \cdot 10^6\, m$$

llavors

$$M_p = \frac{g_0 \cdot R_p^2}{G} = \frac{15 \cdot (4,2 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 3,9 \cdot 10^{24}\, kg$$

Problema 3

a) El volumm d'una esfera de radi R es calcula com

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

i l'expressió per la densitat de la Terra

$$\rho_\oplus = \frac{M_\oplus}{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3}$$

Llavors, de l'enunciat

$$\rho_p = \frac{M_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3} \qquad \rho_p = 16\rho_\oplus$$

$$\frac{2\cancel{M_\oplus}}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_p^3} = 16\frac{\cancel{M_\oplus}}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_\oplus^3} \to R_p^3 = \frac{R_\oplus^3}{8} \to R_p = \sqrt[3]{\frac{R_\oplus^3}{8}} = \frac{R_\oplus}{2}$$

Llavors, la velocitat d'escapament d'aquest planeta és

$$v_e = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}} = \sqrt{\frac{G \cdot 2 \cdot M_\oplus}{R_\oplus/2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,371 \cdot 10^6}} = 22,4\, km/s$$

com aquesta velocitat és superior a la de llançament no marxarà per sempre.

b) *En aquest apartat, per un error meu en un factor de conversió les respostes que s'oferien al test eren totes incorrectes.*

Calculem primer la g_0 del planeta

$$g_0 = \frac{GM_p}{R_p^2} = \frac{G \cdot 2 \cdot M_p}{(R_p/2)^2} = 8 \cdot \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 8 \cdot 9,8 = 78,4\, m/s^2$$

Ara, la dada de l'energia cinètica ens permet escriure

$$10 \cdot 10^{11} = \frac{1}{2}mv^2 \to m = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{11}}{v^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{11}}{(18 \cdot 10^3)^2} = 6,17 \cdot 10^3\, kg$$

i el seu pes

$$P = mg_0 = 6,17 \cdot 10^3 \cdot 78,4 = 4,84 \cdot 10^5 \, N$$

Problema 4

a) A partir de la tercera llei de Kepler i les dades de l'enunciat

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \rightarrow M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (671100 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,55 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1,90 \cdot 10^{27} \, kg$$

b) La velocitat d'escapament es pot calcular amb

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,90 \cdot 10^{27}}{69911 \cdot 10^3}} = 6 \cdot 10^4 \, m/s$$