En el primer exercici es demana explícitament deduir l'expressió de la tercera llei de Kepler. És fonamental comprendre i aprendre el raonament que es fa servir, ja que en la majoria de les correccions d'exàmens oficials publicades es valora detallar aquest procés abans de fer servir l'expressió coneguda $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$. Pot ser una mica feixuc haver de fer aquesta deducció amb detall pràcticament cada vegada que es resol un exercici de gravitació. En qualsevol cas, als exàmens cal fer-la per si de cas.

---

1. Fem les identificacions

$$M_{A0620-00} \equiv M$$

$$m_{estrella} \equiv m$$

   (a) De la segona llei de Newton tenim

$$F = ma_c \rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

   l'estrella descriu una circumferència de longitud $2\pi r$ en un temps T, movent-se a velocitat v, llavors

$$2\pi r = vT$$

   i podem escriure

$$\frac{GM}{r^2} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \frac{1}{r}$$

   d'on

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

   que resulta ser la tercera llei de Kepler, que ell va deduir experimentalment. Llavors

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{31} \cdot (0,33 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 3,11 \cdot 10^9\,m \end{aligned}$$

   Si volem ser totalment estrictes amb les xifres significatives, hauríem de donar com a resultat $3,1 \cdot 10^9\,m$

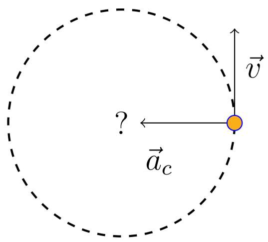
(b) En quant a la velocitat lineal

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,11 \cdot 10^9}{0,33 \cdot 24 \cdot 3600} = 6,86 \cdot 10^5\, m/s$$

igual que abans, el resultat podria ser $v = 6,9 \cdot 10^5\, m/s$. Per l'acceleració centrípeta tenim

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(6,86 \cdot 10^5)^2}{3,11 \cdot 10^9} = 151,3\, m/s^2$$

El vector velocitat $\vec{v}$ és tangent a la trajectòria de l'estrella i el vector acceleració centrípeta $\vec{a}_c$ és perpendicular a $\vec{v}$ i dirigit cap el centre.



* * *

2. Per simplicitat en la resolució fem servir el símbol ♂, corresponent al planeta Mart

(a) De la definició de camp gravitatori

$$g_{♂} = \frac{GM_{♂}}{R_{♂}^2} \rightarrow M_{♂} = \frac{g_{♂} R_{♂}^2}{G} = \frac{3,71\,(3,39 \cdot 10^6)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,39 \cdot 10^{23}\, kg$$

(b) En quant al radi de l'òrbita, aplicant la tercera llei de Kepler

$$T_{Deimos}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{♂}} r_{Deimos}^3$$

d'on podem obtenir

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{GM_{♂} T_{Deimos}^2}{4\pi^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,39 \cdot 10^{23} \cdot (30,35 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} \\ &= 2,34 \cdot 10^7\, m \end{aligned}$$

La velocitat d'escapament s'obté per aplicació directa del resultat que vam veure a teoria

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{♂}}{R_{♂}}} = 5,01 \cdot 10^3\, m/s$$

* * *

3. L'energia mecànica que té el satèl·lit (de massa m) quan es llença des de la superfície de la Terra, val

$$E_M^{sup} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}$$

on v és la velocitat amb que s'ha de llançar, ignorant (com és habitual si no es diu el contrari) l'energia cinètica que pugui tenir el satèl·lit a causa de la rotació o translació terrestres.

L'energia mecànica que tindrà quan es trobi a l'altura demanada serà exclusivament potencial gravitatòria, ja que no ens diuen que s'ha de posar en òrbita a una determinada altura, si no que tan sols hi arribi. Així

$$E_M^{alt} = -\frac{GM_\oplus m}{(R_\oplus + R_\oplus)} = -\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}$$

llavors, escrivint el balanç d'energia $E_M^{sup} = E_M^{alt}$

$$-\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus \cancel{m}}{R_\oplus} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM_\oplus \cancel{m}}{R_\oplus}$$

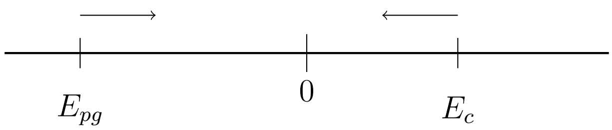
d'on obtenim

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2\left(\frac{GM_\oplus}{R_\oplus} - \frac{1}{2}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\right)} \\ &= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}} \\ &= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} = 7,91 \cdot 10^3\, m/s \end{aligned}$$

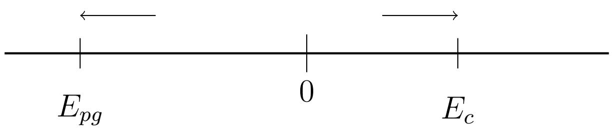
4. L'energia mecànica d'un cometa de massa m en òrbita *el·líptica* estable al voltant del Sol es pot escriure com

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\odot m}{r}$$

on v té una expressió més complexa que en el cas de les òrbites *circulars* estables. En qualsevol cas, quan el cometa es troba més lluny del Sol, r és més gran i per tant el terme d'energia potencial gravitatòria s'acosta a zero (creix) i per tant com l'energia total es conserva el terme d'energia cinètica ha de disminuir.



Quan el cometa es troba més a prop del Sol, r és més petit, el terme d'energia potencial gravitatòria pren valors negatius més grans (es fa més petit) i per tant l'energia cinètica ha de créixer.



Noteu que la suma de l'energia cinètica i la potencial gravitatòria ha de ser constant (l'energia total o *mecànica*) i en el cas d'objectes lligats, aquesta constant és negativa.

* * *

5. Les òrbites circulars estables d'un objecte de massa m al voltant d'un cos celeste de massa M i radi R, a una alçada h sobre la superfície d'aquest es poden trobar per aplicació de la *segona llei de Newton*

$$F = ma_c$$

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

(a) Llavors, amb les dades de l'exercici

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 3,85 \cdot 10^5}} = 7,68 \cdot 10^3\, m/s$$

Calculem el període, que serà el temps que ha de passar entre dues visualitzacions consecutives

$$2\pi r = vT$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 3,85 \cdot 10^5)}{7,68 \cdot 10^3} = 5,52 \cdot 10^3\, s \approx 92\, min$$

Com el resultat és prou més petit que el període de rotació terrestre, ignorem el fet que la Terra gira.

(b) Per trobar la velocitat d'escapament demanem que l'energia mecànica sigui zero

$$0 = E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}$$

Llavors

$$v = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 3,85 \cdot 10^5}} = 1,09 \cdot 10^4\, m/s$$

Per tant, la velocitat addicional que cal donar serà

$$v_{add} = 1,09 \cdot 10^4 - 7,68 \cdot 10^3 = 3,2 \cdot 10^3\, m/s$$

* * *

6. (a) El període el podem calcular a partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} r^3$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\oplus + h)^3}{GM_\oplus}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}} = 9,96 \cdot 10^3\, s$$

En quant a la velocitat, recordant que és una òrbita circular

$$2\pi(R_\oplus + h) = vT$$

$$v = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6)}{9,96 \cdot 10^3} = 6,31 \cdot 10^3\, m/s$$

Alternativament, fent servir l'expressió per la velocitat de les òrbites circulars estables

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6}} = 6,31 \cdot 10^3\, m/s$$

(b) En el punt P, després del canvi en la velocitat tenim,

$$E_c = \frac{1}{2} m v_P'^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot (7 \cdot 10^3)^2 = 4,9 \cdot 10^{10}\, J$$

$$E_{pg} = -\frac{GM_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h_P} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^3}{6,37 \cdot 10^6 + 3,63 \cdot 10^6} = -7,96 \cdot 10^{10}\, J$$

$$E_M = E_c + E_{pg} = 4,9 \cdot 10^{10} - 7,96 \cdot 10^{10} = -3,06 \cdot 10^{10}\, J$$

En quant al punt A, recalculem l'energia potencial gravitatòria i fem servir que l'energia mecànica es conserva,

$$E_{pg} = -\frac{GM_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h_A} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^3}{6,37 \cdot 10^6 + 9,53 \cdot 10^6} = -5,01 \cdot 10^{10}\, J$$

$$E_M = E_c + E_{pg} = -3,06 \cdot 10^{10}\, J$$

Ara podem calcular l'energia cinètica en A

$$E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 = E_M - E_{pg} = -3,06 \cdot 10^{10} - (-5,01 \cdot 10^{10}) = 1,95 \cdot 10^{10}\, J$$

* * *

7. (a) Fem servir les dades que es proporcionen a l'exercici. En quant a la velocitat,

$$2\pi \cdot R_{Galatea} = vT \rightarrow v = \frac{2\pi R_{Galatea}}{T_{Galatea}} = \frac{2\pi \cdot 6,20 \cdot 10^7}{0,428 \cdot 24 \cdot 3600} = 1,05 \cdot 10^4\, m/s$$

Recordant l'expressió que relaciona la velocitat de les òrbites circulars estables amb la seva distància al centre de forces

$$v = \sqrt{\frac{GM_{♆}}{r}}$$

tenim

$$M_{♆} = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(1,05 \cdot 10^4)^2 \cdot 6,20 \cdot 10^7}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,02 \cdot 10^{26}\, kg$$

(b) El camp gravitatori a Neptú val,

$$g_{♆} = \frac{GM_{♆}}{R_{♆}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,02 \cdot 10^{26}}{(2,46 \cdot 10^7)^2} = 11,24\, m/s^2$$

* * *

8. L'expressió de l'energia mecànica d'un objecte que orbita al voltant d'un altre està deduïda a la teoria. Llavors, l'energia mecànica de la Lluna es pot calcular com

$$E_{M☾} = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\oplus}M_{☾}}{r_{\oplus - ☾}} = -3,82 \cdot 10^{28}\, J$$

* * *

9. (a) Els satèl·lits geoestacionaris tenen com a període $T = 24\, h$. L'enunciat diu que l'Sputnik 1 té un període de 96,2 minuts, per tant, no es troba en una òrbita geoestacionària, de fet passaria sobre el mateix punt de la Terra unes

$$\frac{24 \cdot 60}{96,2} \approx 15$$

vegades per dia.

Per trobar el radi de l'òrbita que correspon a aquest valor del període (96,2 minuts), fem servir la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}} r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_{\oplus}}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{(96,2 \cdot 60)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}}$$
$$= 6,95 \cdot 10^6\, m$$

per tant, respecte la superfície de la Terra

$$h = r - R_{\oplus} = 6,95 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 5,82 \cdot 10^5\, m$$

(b) Per trobar el treball demanat, ho farem restant l'energia mecànica de la destinació (l'òrbita) i l'energia mecànica inicial. En aquest exercici es proposa que l'objecte a posar en òrbita té energia cinètica quan es troba sobre la superfície de la Terra, tal com passa en la realitat, ja que la Terra gira i els objectes que hi ha a la seva superfície tenen de per sí una certa velocitat, màxima a l'equador i mínima als pols. Recordem que aquesta situació és excepcional als exercicis, ja que habitualment considerem només el terme d'energia potencial gravitatòria.

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2}\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}+h} - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}\right) \\ &= GM_{\oplus}m\left[\frac{-1}{2(R_{\oplus}+h)} + \frac{1}{R_{\oplus}}\right] - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= GM_{\oplus}m\frac{R_{\oplus}+2h}{2R_{\oplus}(R_{\oplus}+h)} - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\cdot 83,6 \\ &\cdot \frac{6,37\cdot 10^{6}+2\cdot 5,82\cdot 10^{5}}{2\cdot 6,37\cdot 10^{6}\cdot(6,37\cdot 10^{6}+5,82\cdot 10^{5})} \\ &- \frac{1}{2}\cdot 83,6\cdot 325^2 \\ &= 2,83\cdot 10^{9}\,J \end{aligned}$$

* * *

10. (a) Fet als apunts de teoria.

    (b) Igualem l'energia mecànica que té el cos a la superfície de la Lluna amb la que tindrà un cop hagi assolit l'altura màxima, h

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GM_{☾}}{R_{☾}}}\right)^2 - \frac{GM_{☾}\,m}{R_{☾}} = -\frac{GM_{☾}\,m}{R_{☾}+h}$$

fent càlculs i simplificant termes

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\frac{1}{4}\frac{\cancel{2GM_{☾}}}{R_{☾}} - \frac{\cancel{GM_{☾}\,m}}{R_{☾}} = -\frac{\cancel{GM_{☾}\,m}}{R_{☾}+h}$$

d'on queda

$$\frac{1}{R_{☾}+h} = \frac{1}{R_{☾}} - \frac{1}{4R_{☾}} = \frac{3}{4R_{☾}}$$

i finalment

$$R_{☾}+h = \frac{4R_{☾}}{3} \rightarrow h = \frac{1}{3}R_{☾} = \frac{1}{3}\cdot 1,737\cdot 10^{6} = 5,79\cdot 10^{5}\,m$$

11. (a) De l'enunciat tenim

$$R_{♃-\odot} = 5,203 R_{\oplus-\odot} \qquad M_{♃} = 317,8 M_{\oplus} \qquad R_{♃} = 10,52 R_{\oplus}$$

Llavors, aplicant la tercera llei de Kepler a les parelles, Sol-Júpiter i Sol-Terra

$$T_{♃}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}} R_{♃-\odot}^3$$

$$T_{\oplus}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}} R_{\oplus-\odot}^3$$

ara, dividint les equacions

$$\frac{T_{♃}^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{R_{♃-\odot}^3}{R_{\oplus-\odot}^3}$$

i finalment

$$T_{♃} = T_{\oplus}\sqrt{\left(\frac{R_{♃-\odot}}{R_{\oplus-\odot}}\right)^3} = 1 \cdot \sqrt{(5,203)^3} = 11,87\, anys$$

(b) Ara, podem escriure

$$v_e^{♃} = \sqrt{\frac{2GM_{♃}}{R_{♃}}} = \sqrt{\frac{2G \cdot 317,8 \cdot M_{\oplus}}{10,52 \cdot R_{\oplus}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{635,6 \cdot g_{0\oplus} R_{\oplus}^{\cancel{2}}}{10,52 \cdot \cancel{R_{\oplus}}}} = \sqrt{\frac{635,6 \cdot 9,8 \cdot 6,367 \cdot 10^6}{10,52}} = 6,14 \cdot 10^4\, m/s$$

* * *

12. (a) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\oplus}}(R_{\oplus} + h)^3$$

aïllem l'altura de l'expressió anterior

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_{\oplus}}{4\pi^2}} - R_{\oplus}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(24 \cdot 3600)^2 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6,37 \cdot 10^6 = 3,59 \cdot 10^7\, m$$

(b) Tenint en compte que

$$v = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} = \frac{2\pi(6,37\cdot 10^6 + 3,59\cdot 10^7)}{24\cdot 3600} = 3,07\cdot 10^3\, m/s$$

podem calcular l'energia cinètica com

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2,00\cdot 10^3(3,07\cdot 10^3)^2 = 9,45\cdot 10^9\, J$$

Per una altra banda, l'energia que se li ha de proporcionar per tal que deixi d'estar lligat gravitatòriament a la Terra és justament l'energia mecànica que té en aquest òrbita, que val

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h} = -\frac{1}{2}\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}\cdot 2,00\cdot 10^3}{6,37\cdot 10^6 + 3,59\cdot 10^7} = 9,42\cdot 10^9\, J$$

Es comprova (llevat d'errors d'arrodoniment) la relació coneguda de teoria $E_M = -E_c$.

* * *

13. (a) Fem un balanç d'energia entre les dues posicions del meteorit, quan es troba a $10^7\, m$ d'altura i quan arriba a la superfície de la Lluna

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM_{☾}\cancel{m}}{R_{☾} + h} = \frac{1}{2}\cancel{m}v'^2 - \frac{GM_{☾}\cancel{m}}{R_{☾}}$$

d'on

$$\frac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{☾}}{R_{☾} + h} + \frac{GM_{☾}}{R_{☾}}$$

$$\frac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{2}v^2 + GM_{☾}\left(\frac{1}{R_{☾}} - \frac{1}{R_{☾} + h}\right)$$

$$\frac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{2}v^2 + GM_{☾}\frac{h}{R_{☾}(R_{☾} + h)}$$

i finalment

$$v' = \sqrt{v^2 + 2GM_{☾}\frac{h}{R_{☾}(R_{☾} + h)}} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1,5\cdot 10^4}{3,6}\right)^2 + 2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,35\cdot 10^{22}\cdot\frac{10^7}{1,74\cdot 10^6(1,74\cdot 10^6 + 10^7)}} =$$

$$= 4,71\cdot 10^3\, m/s$$

(b) L'energia mecànica que té a 10000 km en les condicions del problema (caient a $v = 15000\, km/h$) de la Lluna val

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_☾\, m}{R_☾ + h} \\ &= \frac{1}{2}400\left(\frac{1,5\cdot 10^4}{3,6}\right)^2 - \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,35\cdot 10^{22}\cdot 400}{1,74\cdot 10^6 + 10^7} \\ &= 3,30\cdot 10^9\, J \end{aligned}$$

Notem que l'energia mecànica és > 0, és a dir que si la trajectòria del satèl·lit no fos de col·lisió, passaria de llarg i no tornaria a la Lluna, ja que no està lligat gravitatòriament.

Per una altra banda, l'energia mecànica d'un cos de la mateixa massa que el meteorit que estigui en una òrbita circular estable al voltant de la Lluna a l'altura $h = 1\cdot 10^7$ val

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_☾\, m}{R_☾ + h} = -\frac{1}{2}\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,35\cdot 10^{22}\cdot 400}{1,74\cdot 10^6 + 1\cdot 10^7} = -8,35\cdot 10^7\, J$$

És evident que $3,30\cdot 10^9\, J > -8,35\cdot 10^7\, J$

* * *

14. (a) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_☾}(R_☾ + h)^3$$

aïllem la massa de la Lluna l'expressió anterior

$$\begin{aligned} M_☾ &= \frac{4\pi^2}{GT^2}(R_☾ + h)^3 \\ &= \frac{4\pi^2}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot (118\cdot 60)^2}\cdot (1,74\cdot 10^6 + 1\cdot 10^5)^3 \\ &= 7,36\cdot 10^{22}\, kg \end{aligned}$$

La intensitat de camp gravitatori es pot calcular com

$$g_☾ = \frac{GM_☾}{R_☾^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 7,36\cdot 10^{22}}{(1,74\cdot 10^6)^2} = 1,62\, m/s^2$$

(b) La velocitat d'escapament de la Lluna des de la seva superfície val

$$v_e^{☾} = \sqrt{\frac{2GM_{☾}}{R_{☾}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,36 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^{6}}} = 2,38 \cdot 10^{3}\, m/s$$

Recordeu que a vegades no es demana explícitament la deducció de la fórmula anterior però es puntua a la correcció oficial que després es publica.

* * *

15. (a) El camp gravitatori que *Ceres* crea a la seva superfície val

$$g_{Ceres} = \frac{GM_{Ceres}}{R^2_{Ceres}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,43 \cdot 10^{20}}{(477 \cdot 10^3)^2} = 0,28\, m/s^2$$

La velocitat demanada és la d'escapament, que val

$$v_e^{Ceres} = \sqrt{\frac{2GM_{Ceres}}{R_{Ceres}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9,43 \cdot 10^{20}}{477 \cdot 10^3}} = 513,36\, m/s$$

L'energia mecànica mínima per tal que pugui escapar és igual a la que el manté lligat, llavors serà, ignorant l'energia cinètica deguda a una possible rotació de Ceres

$$E_M^{min} = -\frac{GM_{Ceres}m}{R_{Ceres}}$$

que no es pot calcular numèricament perquè no ens proporcionen la massa d'aquesta suposada nau espacial.

(b) Escrivim la tercera llei de Kepler per les parelles *Sol-Ceres* i *Sol-Terra*

$$T_C^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}(R_{C\to\odot})^3$$

$$T_\oplus^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot}(R_{\oplus\to\odot})^3$$

dividim les equacions per obtenir

$$\frac{T_C^2}{T_\oplus^2} = \frac{\cancel{\frac{4\pi^2}{GM_\odot}}(R_{C\to\odot})^3}{\cancel{\frac{4\pi^2}{GM_\odot}}(R_{\oplus\to\odot})^3}$$

que es pot escriure com

$$\left(\frac{R_{C\to\odot}}{R_{\oplus\to\odot}}\right)^3 = \left(\frac{T_C}{T_\oplus}\right)^2$$

d'on

$$R_{C\to\odot} = R_{\oplus\to\odot}\sqrt[3]{\left(\frac{T_C}{T_\oplus}\right)^2} = 1,50\cdot 10^{11}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{4,60}{1}\right)^2} = 4,15\cdot 10^{11}\,m$$

noteu com no cal passar els períodes a segons i els podem expressar en anys ja que es troben dividint.

* * *

16. (a) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}(R_\oplus + h)^3$$

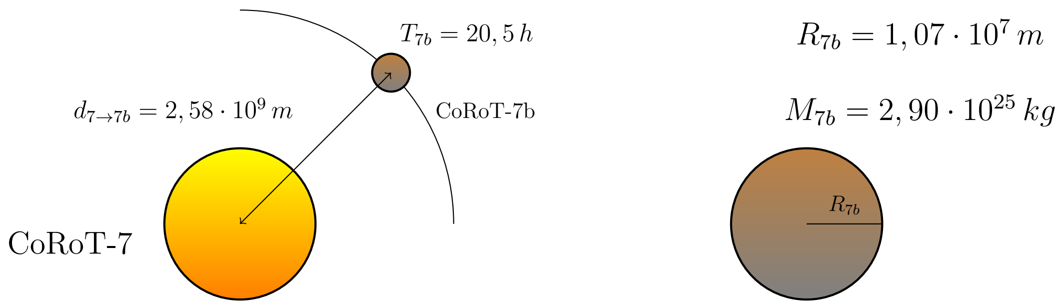
aïllem el període

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_\oplus}(R_\oplus + h)^3} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\oplus + h)^3}{GM_\oplus}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{(6,38\cdot 10^6 + 760\cdot 10^3)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}} = 6,00\cdot 10^3\,s$$

(b) L'energia demanada es pot calcular com la diferència entre l'energia mecànica que tindrà un cop a la seva òrbita de destí i la mecànica que tenia a superfície de la Terra (recordeu quin argument vam fer servir en el seu moment per, en general, ignorar l'energia cinètica a la superfície de la Terra quan ens demanen fer aquest càlcul)

$$W_{R_\oplus\to h} = -\frac{1}{2}G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus + h} - \left(-G\frac{M_\oplus m}{R_\oplus}\right)$$
$$= -GM_\oplus m\left(\frac{1}{2(R_\oplus + h)} - \frac{1}{R_\oplus}\right) = -GM_\oplus m\frac{R_\oplus - 2(R_\oplus + h)}{2(R_\oplus + h)R_\oplus}$$
$$= GM_\oplus m\frac{2(R_\oplus + h) - R_\oplus}{2(R_\oplus + h)R_\oplus} = GM_\oplus m\frac{R_\oplus + 2h}{2(R_\oplus + h)R_\oplus}$$
$$= 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot 4,86\cdot 10^3$$
$$\cdot\frac{6,38\cdot 10^6 + 2\cdot 760\cdot 10^3}{2(6,38\cdot 10^6 + 760\cdot 10^3)\cdot 6,38\cdot 10^6}$$
$$= 1,68\cdot 10^{11}\,J$$

17. Representem la situació amb un esquema per major claredat



(a) Calculem la massa de l'estel *CoRoT-7* a partir de la tercera llei de Kepler

$$T_{7b}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_7}(d_{7\to 7b})^3$$

d'on

$$M_7 = \frac{4\pi^2(d_{7\to 7b})^3}{GT_{7b}^2} = \frac{4\pi^2(2,58 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (20,5 \cdot 3600)^2} = 1,87 \cdot 10^{30}\,kg$$

(b) L'acceleració de la gravetat a la superfície del planeta *CoRoT-7b* val

$$g_{7b} = \frac{GM_{7b}}{R_{7b}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,90 \cdot 10^{25}}{(1,07 \cdot 10^7)^2} = 16,89\,m/s^2$$

i la velocitat d'escapament

$$v_e^{7b} = \sqrt{\frac{2GM_{7b}}{R_{7b}}} = 1,90 \cdot 10^4\,m/s$$

Recordem un cop més el que ja hem comentat diverses vegades. En alguns exercicis es demana explícitament demostrar d'on prové l'expressió de la velocitat d'escapament i per tant, a les correccions oficials es donen punts per fer-ho. En altres exercicis no es demana explícitament aquesta demostració i no es donen punts per fer-ho (sembla lògic), i en d'altres no es demana la demostració i **sí** es donen punts per fer-ho. Com que el criteri al llarg dels anys no és únic, hauríem de fer la demostració encara que no ens la demanin, sempre i quan això no ens tregui temps de fer un altre exercici que sí es puntuï explícitament.

* * *

18. 1. L'energia cinètica associada a la velocitat d'escapament es pot calcular com

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_e^2 &= \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus} = \frac{1}{2}m\frac{2g_0R_\oplus^2}{R_\oplus} \\ &= mg_0R_\oplus\end{aligned}$$

2. L'expressió del valor del camp gravitatori en funció de l'altura és

$$g(h) = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}$$

llavors

$$\frac{g_0}{16} = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}$$

o també

$$\frac{\cancel{g_0}}{16} = \frac{\cancel{g_0}R_\oplus^2}{(R_\oplus + h)^2}$$

reordenant termes

$$(R_\oplus + h)^2 = 16R_\oplus^2$$

ara

$$R_\oplus + h = \pm 4R_\oplus$$

finalment

$$h = \pm 4R_\oplus - R_\oplus$$

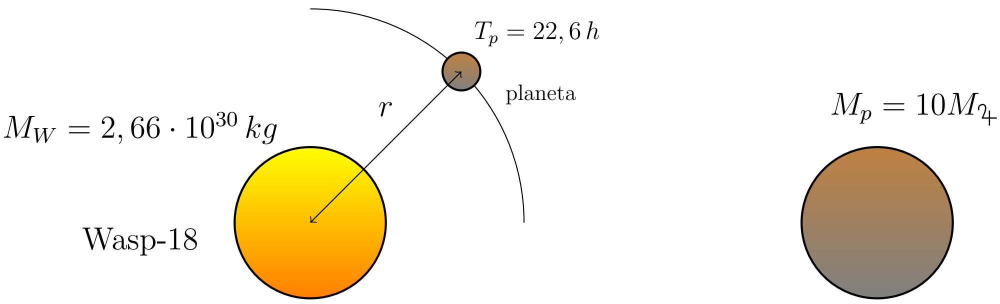
prenent la solució positiva que és la que es troba fora de la superfície terrestre

$$h = 3R_\oplus$$

que no és cap de les propostes de l'apartat.

* * *

19. Fem servir un esquema per representar la situació



(a) Calculem el radi de l'órbita del planeta a partir de la tercera llei de Kepler

$$T_p^2 = \frac{4\pi^2}{GM_W} r^3$$

d'on

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_W T_p^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,66 \cdot 10^{30} \cdot (22,6 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 3,10 \cdot 10^9\,kg$$

(b) Podem calcular la velocitat del planeta en la seva òrbita amb dades que tenim a mà

$$2\pi r = vT \rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,10 \cdot 10^9}{22,6 \cdot 3600} = 2,39 \cdot 10^5\,m/s$$

i l'energia cinètica valdrà

$$E_c = \frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{1}{2}10M_{\text{♃}} v^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1,90 \cdot 10^{27} \cdot (2,39 \cdot 10^5)^2 = 5,45 \cdot 10^{38}\,J$$

L'energia mecànica per sistemes lligats es pot calcular com

$$E_M = -E_c = -5,45 \cdot 10^{38}\,J$$

* * *

20. (a) De l'expressió ja coneguda

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

tenim, per cada altura considerada

$$9 = \frac{GM}{R^2} \qquad 8,7 = \frac{GM}{(R+10^5)^2}$$

dividint les equacions

$$\frac{9}{8,7} = \frac{\frac{\cancel{GM}}{R^2}}{\frac{\cancel{GM}}{(R+10^5)^2}}$$

llavors

$$\frac{9}{8,7} = \frac{(R+10^5)^2}{R^2}$$

d'on

$$\frac{9}{8,7}R^2 = (R+10^5)^2$$

fent l'arrel quadrada a les dues bandes

$$\pm R\sqrt{\frac{9}{8,7}} = R + 10^5$$

i finalment

$$R\left(\pm\sqrt{\frac{9}{8,7}} - 1\right) = 10^5$$

$$R = \frac{10^5}{\pm\sqrt{\frac{9}{8,7}} - 1}$$

només la determinació positiva de l'arrel té sentit físic en aquest exercici,

$$R = \frac{10^5}{\sqrt{\frac{9}{8,7}} - 1} = 5,85 \cdot 10^6\, m$$

(b) Aquest apartat no té res a veure amb l'anterior. Ara ens parlen d'un objecte en òrbita terrestre. La relació entre la velocitat de les òrbites circulars estables i el radi de l'òrbita és

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R_\oplus + h}}$$

d'on

$$h = \frac{GM}{v^2} - R_\oplus = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(10^4)^2} - 6371 \cdot 10^3 = -2,38 \cdot 10^6$$

que no és possible.

* * *

21. (a) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus}(R_\oplus + h)^3$$

aïllem l'altura de l'expressió anterior

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_\oplus}{4\pi^2}} - R_\oplus =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(91,2\cdot 60)^2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{4\pi^2}} - 6,37\cdot 10^6 = 3,43\cdot 10^5\,m$$

(b) L'energia que cal donar-li per tal que s'allunyi per sempre correspon a l'energia mecànica que té en la seva òrbita, llavors

$$\Delta E_c = |E_M^{orbita}| = |-E_c^{orbita}| = \frac{1}{2}mv^2$$

la velocitat que té es pot calcular amb

$$2\pi(R_\oplus + h)vT$$

$$v = \frac{2\pi(R_\oplus + h)}{T} = \frac{2\pi\cdot(6,37\cdot 10^6 + 3,43\cdot 10^5)}{91,2\cdot 60} = 7,71\cdot 10^3$$

llavors

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 7790\cdot(7,71\cdot 10^3)^2 = 2,31\cdot 10^{11}\,J$$

* * *

22. (a) La velocitat de les òrbites circulars estables a una distància r del centre de la Terra es calcula amb

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}}{1,5\cdot 10^9}} = 5,16\cdot 10^2\,m/s$$

llavors, per trobar el període

$$2\pi r = vT$$

d'on

$$T = \frac{2\pi}{v} = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi\cdot 1,5\cdot 10^9}{5,16\cdot 10^2} = 1,83\cdot 10^7\,s = 221,4\,dies$$

(b) L'energia cinètica val

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1800 \cdot (5,16 \cdot 10^2)^2 = 2,40 \cdot 10^8 \; J$$

fent servir el teorema del Virial

$$E_p = -2E_c = -4,80 \cdot 10^8 \; J$$

i

$$E_M = E_c + E_p = 2,40 \cdot 10^8 - 4,80 \cdot 10^8 \; J$$

(c) Si s'atura en la seva òrbita, cauria radialment cap a la Terra. Igualarem l'energia que té en aquell moment (només potencial gravitatòria) a la cinètica al arribar a la superfície de la Terra més potencial gravitatòria,

$$-\frac{G\cancel{m}}{r} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R_\oplus}$$