Física 1r Batxillerat

Artur Arroyo i Pascual§
https://artur-sjo.github.io/index.html

Col·legi Sant Josep Obrer
C. Covadonga, s/n 08906 L'Hospitalet del Llobregat

Darrera revisió 13/5/2022

Resum

Aquest curs representa una ampliació dels continguts vistos al llarg de l'ESO, possiblement en assignatures diferents. L'objectiu és tenir una bona fonamentació d'aspectes bàsics de la Física que es faran servir l'any vinent, al curs de 2n de Batxillerat, per presentar idees més complexes.

§aarroyo@stjosep.org

Índex

1 La mesura **5**
1.1 Magnituds i unitats 5
1.2 Anàlisi dimensional 6
1.3 El problema de la mesura 7
1.3.1 Incertesa en els resultats 8
1.3.2 Significat de la mitjana i la desviació estàndard 10
1.3.3 Arrodoniment 10
1.3.4 Propagació de la incertesa en fer operacions 11

2 El moviment **13**
2.1 Introducció 13
2.2 La posició 13
2.3 El vector posició 13
2.4 El vector desplaçament 14
2.5 La velocitat 15
2.5.1 La velocitat mitjana 15
2.5.2 La velocitat instantània 15
2.5.3 La velocitat i el sistema de referència 17
2.6 L'acceleració 17
2.6.1 L'acceleració mitjana 17
2.6.2 L'acceleració instantània 18
2.7 Components intrínseques de l'acceleració 19

3 Cinemàtica del punt **23**
3.1 Moviment rectilini 23
3.1.1 Casos amb un sol mòbil 23
3.1.2 Casos amb dos mòbils 30
3.2 Moviment de projectils 36
3.2.1 Moviment vertical 36
3.2.2 Tir parabòlic 41
3.3 Moviment circular 50

4 Dinàmica del punt **55**
4.1 Lleis de Newton 55
4.2 Forces fictícies 57
4.3 La tensió 60
4.4 Diferència entre massa i pes 60
4.5 La força normal 61
4.6 Forces de fregament 63

4.7 Cossos enllaçats . . . 67
4.8 El pla inclinat . . . 71
4.9 Dinàmica del moviment circular . . . 74
4.10 La corba peraltada . . . 81

5 Treball i energia **84**
5.1 Definició de treball . . . 84
5.1.1 Forces conservatives . . . 84
5.1.2 Forces no conservatives . . . 84
5.2 Energia cinètica i potencial . . . 85
5.3 Teorema (de les forces vives) . . . 85
5.4 Potència . . . 88
5.5 El moment lineal. Xocs . . . 92
5.5.1 Coeficient de restitució . . . 94
5.5.2 El pèndol balístic . . . 95
5.6 Força elàstica i energia . . . 98
5.7 Força gravitatòria . . . 102
5.8 Força elèctrica . . . 106
5.8.1 Potencial elèctric i energia potencial electroestàtica . . 106

6 Llei d'Ohm pel corrent continu **108**
6.1 Llei d'Ohm i resistència . . . 109
6.2 Energia i potència en els circuits elèctrics . . . 110
6.3 Associació de resistències . . . 112

7 Circuits de corrent continu **116**
7.1 Fonts d'alimentació reals . . . 116
7.2 Divisor de intensitat . . . 117
7.3 Instruments de mesura . . . 120
7.3.1 Amperímetre . . . 120
7.3.2 Voltímetre . . . 120

8 Mètode de Maxwell **125**
8.1 Introducció i exemples . . . 125

9 La llum **130**
9.1 Naturalesa de la llum . . . 130
9.1.1 Classificació de les ones . . . 130
9.2 Conceptes importants associats a una ona . . . 131
9.3 L'espectre electromagnètic . . . 133
9.4 Propagació de la llum. Fenòmens ondulatoris. . . . 134

9.4.1 Índex de refracció 134
9.4.2 Reflexió i refracció 135
9.4.3 Dispersió 137
9.5 La llum segons el model corpuscular 138

10 Imatges **141**
10.1 Òptica geomètrica 141
10.1.1 Conceptes. Conveni de signes. 141
10.2 Miralls 142
10.2.1 Miralls plans 142
10.2.2 Miralls esfèrics 142
10.3 Lents primes 146
10.3.1 Lents convergents 147
10.3.2 Lents divergents 149
10.4 Plans principals d'un sistema òptic compost 152
10.4.1 Motivació 152
10.4.2 Mètode gràfic 156
10.4.3 Fórmules d'acoblament de sistemes òptics 159

1 La mesura

1.1 Magnituds i unitats

A física és fonamental distingir entre magnitud i unitat. Per exemple, la longitud és una magnitud, que es pot mesurar en diferents unitats: metre, centímetres, milles nàutiques, etc. També cal distingir entre magnituds escalars i vectorials. Les primeres es poden descriure amb un nombre i una unitat, per exemple la temperatura. Per les segones, al tractar-se de vectors, necessitem donar, a part del valor numèric, la direcció, sentit i possiblement punt d'aplicació. Per exemple, la velocitat d'un cotxe és una magnitud vectorial.

Les magnituds fonamentals són:

- longitud **L**
- temps **T**
- massa **M**
- intensitat de corrent **I**

Per representar aquestes magnituds farem servir el *sistema internacional* d'unitats també anomenat SI o MKS. En aquest sistema, la unitat de longitud és el metre (m), la unitat de temps és el segon (s), la unitat de massa és el kilogram (kg) i la unitat de intensitat de corrent és l'Ampere (A). És evident que només amb aquestes magnituds, (longitud, temps, massa, intensitat de corrent), no podrem fer gaire cosa, és per això que tenim les anomenades *magnituds derivades* que són, juntament amb la unitat corresponent del SI:

- Freqüència, Hertz (Hz)
- Força, Newton (N)
- Energia, Joule (J)
- Potencia, Watt (W)
- Pressió, Pascal (Pa)
- Càrrega elèctrica, Coulomb (C)
- Potencial elèctric, Volt (V)
- Capacitat elèctrica, Farad (F)
- Resistència elèctrica, Ohm (Ω)
- Flux magnètic, Weber (Wb)
- Densitat de flux magnètic, Tesla (T)
- Inductància, Henry (H)

Com veiem, moltes magnituds derivades tenen nom propi, per exemple el *Newton* que correspon a la següent combinació d'unitats

$$1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$$

Tot i això, hi ha altres unitats que, malgrat no ser del sistema internacional convé conèixer:

- Ångstrom, 1 Å$= 10^{-10} m$
- Fermi, $1\, fm = 10^{-15} m$
- barn, $1\, barn = 10^{-28} m^2$
- parsec, $1\, pc = 3 \cdot 10^{16} m$
- any llum, $1\, ly = 0,3066 pc$
- electronvolt, $1\, eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$
- Unitat astronòmica, $1\, UA = 1,5 \cdot 10^{11} m$

1.2 Anàlisi dimensional

En aquest context la paraula dimensió no té res a veure amb l'accepció habitual de dimensió d'un cert objecte matemàtic (per exemple dimensió d'un espai vectorial). Per dimensió, entendrem "com estan relacionades entre sí les magnituds fonamentalsï quan parlem d'anàlisi dimensional ens referim a que en qualsevol expressió o fórmula que tinguem, les dimensions a banda i banda de l'equació han de ser les mateixes. Per exemple; com la velocitat es calcula fent espai dividit entre temps, dimensionalment escriurem:

$$[v] = \frac{L}{T}$$

de forma que l'expressió

$$v = et$$

no pot ser una fórmula correcta a física, donat que les dimensions a banda i banda de l'equació no són les mateixes (es comprova). L'anàlisi dimensional pot ser molt útil per recordar fórmules, o fins i tot per deduir-ne d'altres.

Exercici
Trobeu, mitjançant l'anàlisi dimensional, la fórmula que relaciona el període d'un pèndol simple (temps), amb la seva longitud i l'acceleració de la gravetat en el lloc $\left(g = 9,8 \frac{m}{s^2}\right)$.

1.3 El problema de la mesura

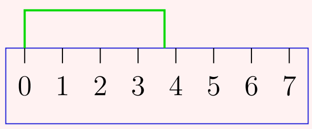
En prendre la mesura d'algun observable hem de tenir en compte dos aspectes: la fiabilitat i l'exactitud.

- La **fiabilitat** representa el fet que, mesurant en les mateixes condicions obtenim resultats semblants (no necessàriament propers amb el valor exacte del valor que mesurem).
- L'**exactitud** indica la proximitat dels resultats obtinguts al mesurar al valor real de la mesura.

Hi ha molts factors que influeixen en el valor que obtenim al mesurar una determinada quantitat, són factors aleatoris i incontrolables que afecten la mesura (encara que l'experiment i els aparells estiguin molt ben dissenyats). La forma de reduir aquesta influència és repetint la mesura tantes vegades com es pugui i fer servir mètodes estadístics per donar el resultat. D'aquesta manera, el resultat d'una mesura s'expressa com un **valor més probable** i una **incertesa**. Si només podem fer una mesura, com a valor per la incertesa prendrem la **sensibilitat** (**s**) de l'aparell

$$s = \frac{\text{divisió més petita de l'instrument}}{2}$$

Exemple 1
Hem mesurat la longitud L, d'un objecte amb un regle graduat en cm, tal com es veu a la figura. Quin és el valor que hem de donar per aquesta mesura?



El regle està graduat en cm i a ull nu només podem dir si la longitud de l'objecte que es vol mesurar està més a prop d'una xifra o una altra. Aquesta és la idea de definir la sensibilitat tal com s'ha fet abans. En l'exemple tenim

$$s = \frac{1\,cm}{2} = 0.5\,cm$$

llavors, com veiem que l'extrem de l'objecte és més a prop del 4 que del 3, donarem el resultat de la mesura com

$$L = 4 \pm 0.5\,cm$$

1.3.1 Incertesa en els resultats

Tal com hem dit abans, la manera d'obtenir el valor més acurat d'una quantitat **q**, és fer tantes mesures $(q_1, q_2, \ldots, q_N)$ com es pugui. Amb aquestes dades i després d'un tractament estadístic adequat prendrem com a valor de la mesura

$$q = \bar{q} \pm \sigma$$

on $\bar{q}$ és la mitjana aritmètica de les mesures obtingudes

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^{N} q_i}{N}$$

i N és el nombre total de dades. El símbol σ representa la **desviació estàndard** del conjunt obtingut de mesures i es calcula com

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (q_i - \bar{q})^2}{N}}$$

o alternativament

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} q_i^2}{N} - \bar{q}^2}$$

Exemple 2
En un experiment, mesurem cinc vegades amb una balança digital la massa d'un objecte i obtenim: $m_1 = 2,25\,kg$; $m_2 = 2,27\,kg$; $m_3 = 2,33\,kg$; $m_4 = 2,28\,kg$; $m_5 = 2,35\,kg$. Calculeu el millor valor de la mesura.

Hem de calcular la mitjana aritmètica $\overline{m}$ i la desviació estàndard σ.

$$\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{N} = \frac{2,25 + 2,27 + 2,33 + 2,28 + 2,35}{5} = 2,296$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2,25^2 + 2,27^2 + 2,33^2 + 2,28^2 + 2,35^2}{5} - 2,296^2} = 0,0377$$

Llavors donarem com a resultat per la massa d'aquest objecte

$$m = 2,296 \pm 0,0377 \approx 2,30 \pm 0,04\,kg$$

Noteu que σ es dona amb el mateix nombre de decimals que $\bar{q}$, no el de xifres significatives (veure 1.3.4).

Alternativament, podem construir una taula per fer servir l'altra versió de la desviació estàndard. A partir del càlcul de la mitja aritmètica $\bar{m} = 2,296$

m_i	$m_i - \bar{m}$	$(m_i - \bar{m})^2$
2,25	$2,25 - 2,296 = -0,046$	$0,002116$
2,27	$2,27 - 2,296 = -0,026$	$0,000676$
2,33	$2,33 - 2,296 = 0,034$	$0,001156$
2,28	$2,28 - 2,296 = -0,016$	$0,000256$
2,35	$2,35 - 2,296 = 0,054$	$0,002916$
Σ	0	$0,00712$

Observeu que la columna de les desviacions suma zero, això és teòric i sempre ha de ser així. És una propietat útil que permet veure si els càlculs intermedis de la desviació estàndard tenen alguna errada. La suma de la darrera columna s'ha de dividir ara pel nombre de dades

$$\frac{0,00712}{5} = 0,001424$$

i fer l'arrel quadrada per trobar

$$\sigma = \sqrt{0,001424} = 0,0377$$

Exemple 3
En una mostra de 50 progenitors d'entre 30 i 40 anys d'edat, s'ha trobat que no tenen cap fill, 10; en tenen un, 15; en tenen dos, 18; en tenen tres, 6 i en tenen quatre, 1. Calculeu la mitjana aritmètica i desviació estàndard de la mostra.

Per la mitjana aritmètica fem

$$\overline{n} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i}{N} = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1}{50} = 1,46$$

Per la desviació estàndard construïm una taula tenint en compte les freqüències de cada resultat per no haver de representar la taula completa amb 50 files.

n_i	f_i	$n_i - \bar{n}$	$(n_i - \bar{n})^2$
0	10	$0 - 1,46 = -1,46$	$2,1316$
1	15	$1 - 1,46 = -0,46$	$0,2116$
2	18	$2 - 1,46 = 0,54$	$0,2916$
3	6	$3 - 1,46 = 1,54$	$2,3716$
4	1	$4 - 1,46 = 2,54$	$6,4516$
Σ	50	0	$50,42$

Llavors

$$\sigma = \sqrt{\frac{50,42}{50}} = 1,00419$$

De forma que tenim

$$n = \bar{n} \pm \sigma = 1,46 \pm 1,00419 \approx 1 \pm 1$$

Recordem que a una desviació estàndard tenim només un 68% de les dades.

1.3.2 Significat de la mitjana i la desviació estàndard

La mitja aritmètica és una mesura de tendència central dels valors d'una mostra. la desciació estàndard és en canvi una mesura de dispersió i la informació que ens proporciona és que donada una mostra, el 68% de les dades es trobaran a una σ. Si volem més precisió, hem de prendre 2σ, llavors tindrem el 95% de les dades i si prenem 3σ tindrem el $99,7\%$.

1.3.3 Arrodoniment

Quan volguem arrodonir un nombre decimal prendrem el següent criteri:

- Si la xifra a partir de la qual volem arrodonir és més gran que 5 augmentarem el valor de la xifra de la seva esquerra en 1. Per exemple, per arrodonir $3,1417$ a 3 xifres decimals farem

$$3,1417 \approx 3,142$$

- Si la xifra a partir de la qual volem arrodonir és més petita que 5 deixarem inalterada la xifra de la seva esquerra. Per exemple, per arrodonir $3,1414$ a 3 xifres decimals farem

$$3,1414 \approx 3,141$$

- Si la xifra a partir de la qual volem arrodonir és igual a 5 llavors hem de tenir en compte la paritat de la xifra de la seva esquerra, si es tracta d'una xifra parella, la deixarem inalterada, si és senar, l'augmentarem en 1. Per exemple, per arrodonir $3,1415$ a 3 xifres decimals farem

  $$3,1415 \approx 3,142$$

  I per arrodonir $3,1485$ a 3 xifres decimals farem

  $$3,1485 \approx 3,148$$

1.3.4 Propagació de la incertesa en fer operacions

Al fer operacions amb nombres que en principi no són exactes s'ha de tenir en compte que aquesta incertesa es propaga als resultats i per tant, cal donar el nombre correcte de xifres significatives al final dels càlculs.

Al multiplicar o dividir, el resultat no pot tenir més xifres significatives que cap dels nombres presents en l'operació. Per exemple, no és el mateix partir d'un valor d'un temps mesurat $t_1 = 3,12\,s$ que $t_2 = 3,12000\,s$. El primer valor té tres *xifres significatives* mentre que el segon en té sis. Si hem de calcular t^3, el resultat en ambdós casos és $t^3 = 30,371328$ resultat que sembla molt precís tot i que no té perquè ser-ho si el nombre de xifres significatives original era petit. Haurem d'escriure $t_1^3 = 30,4$ i $t_2^3 = 30,3713$, arrodonint en cada cas si cal.

Al sumar o restar, el resultat no pot tenir més decimals que cap dels nombres que participi en l'operació. Per exemple, per l'operació

$$17,2 + 8,246 + 79$$

escriurem

$$17,2 + 8,246 + 79 \approx 104$$

A l'hora de fer càlculs complexos amb la calculadora convé fer el càlcul d'un sol cop i després, arrodonir. En el seu defecte, cal conservar totes les xifres que apareixen a la pantalla i arrodonir només al final.

Exercicis

1. Feu els següents càlculs, arrodonint el resultat al nombre correcte de xifres significatives i decimals:

   (a) $1,61 + 0,3 =$

   (b) $5,935 - 4,51 =$

   (c) $152,06 \cdot 0,24 =$

   (d) $58,93 \cdot 0,1 =$

2. S'ha mesurat l'alçada (en metres) dels jugadors d'un equip de bàsquet i s'han obtingut els següents resultats:

   $1,85$; $1,89$; $1,92$; $1,94$; $1,96$; $1,98$; $1,97$; $1,97$; $2,04$; $1,99$

   Calculeu la mitjana i desviació estàndard de la mostra.

3. Les longituds (en mm) de 10 peces fabricades en una màquina de control numèric han estat:

   $18,23$; $18,67$; $19,21$; $19,43$; $19,56$; $20,18$; $19,71$; $19,15$; $20,24$; $19,99$

   Es demana calcular la mitjana i desviació estàndard de la mostra.

4. Havent fet una enquesta a 100 persones demanant quantes hores de televisió veien al dia, les respostes ha estat: 1 hora, 13 persones; 2 hores, 38 persones; 3 hores, 33 persones; 4 hores, 11 persones i 5 hores, 5 persones. Calculeu la mitjana i desviació estàndard de la mostra.

2 El moviment

2.1 Introducció

La cinemàtica és la part de la física que estudia el moviment dels cossos sense tenir en compte les seves causes. Definirem el **punt material** com un objecte sense mida, però amb massa. També l'anomenarem **mòbil**.

2.2 La posició

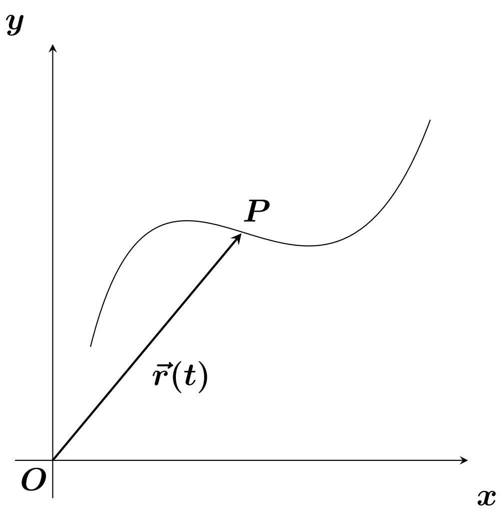
Per estudiar el moviment d'un mòbil, típicament farem servir un sistema de coordenades cartesià, de forma que la posició quedarà determinada en cada moment per les coordenades del punt on es trobi el mòbil. Per determinar la posició en un pla en tenim prou amb dues coordenades (x, y). En canvi, per estudiar el moviment dels cossos a l'espai calen tres coordenades (x, y, z).

2.3 El vector posició

Sovint descriurem la posició dels objectes mitjançant un vector anomenat **vector posició** $\vec{r}(t)$, que per definició és un vector amb origen l'origen de coordenades del sistema de referència $\boldsymbol{O}$, i final les coordenades del punt $\boldsymbol{P}$ on es troba l'objecte que estem estudiant, de forma que és

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}$$

El vector posició determina la posició en funció del temps.

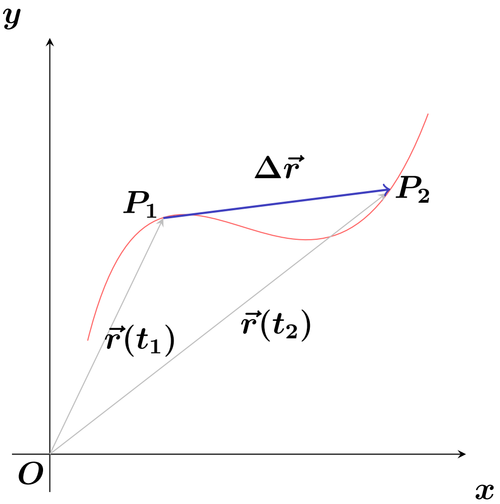


2.4 El vector desplaçament

Suposem que un mòbil descriu una trajectòria determinada, que en un instant t_1 es troba en el punt P_1 i que en un instant posterior t_2 es troba en el punt P_2. Llavors el **vector desplaçament** entre aquests dos instants de temps t_1, t_2 es calcula com

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

on $\vec{r}_2$, $\vec{r}_1$ són els vectors posició en cada temps.



Cal notar que es compleix sempre

$$|\Delta\vec{r}| \leq \Delta s$$

on Δs és la distància real sobre la trajectòria recorreguda per el mòbil (també anomenada longitud d'arc). Podeu dir en quines condicions es dóna la igualtat?

Exemple 1
El vector posició en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte que es mou al pla, ve donat per $\vec{r}(t) = (t^2+1, t-4)$. Es demana trobar el mòdul del vector desplaçament entre els instants $t_1 = 1\,s$, $t_2 = 5\,s$

Calculem

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(1) = (2, -3)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(5) = (26, 1)$$

llavors

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(5) - \vec{r}(1) = (26,1) - (2,-3) = (24,4)$$

finalment

$$|\Delta\vec{r}| = |(24,4)| = \sqrt{24^2 + 4^2} = \sqrt{592} = 24,33\ m$$

2.5 La velocitat

La velocitat d'un objecte indica la rapidesa amb que varia la seva posició en funció del temps. En el Sistema Internacional, la velocitat es mesura en m/s.

2.5.1 La velocitat mitjana

La velocitat mitjana $\vec{v}_m$ d'un objecte entre dos instants del temps t_1, t_2 es calcula com

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

No hem de confondre la velocitat mitjana, que és un vector, amb la *celeritat* mitjana, que és un escalar definit com el quocient entre l'espai recorregut (entès com la longitud d'arc) i l'interval de temps què s'ha invertit.

Exemple 2
A partir de l'exemple 1, calculeu el mòdul de la velocitat mitjana entre els temps considerats.

Tenim que

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(24,4)}{4} = (6,1)$$

i el mòdul val

$$|\vec{v}_m| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} = 6,08\ m/s$$

2.5.2 La velocitat instantània

La velocitat instantània $\vec{v}(t)$, d'un objecte es calcula com

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}(t)$$

que no és més que la *derivada* del vector posició respecte el temps. Aquest vector és sempre tangent a la trajectòria sigui quina sigui aquesta.

De cara als exercicis cal recordar que per una funció polinòmica qualsevol de grau n

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n$$

tenim

$$\frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{f}(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

Exemple 3
Donats el següents vectors posició, trobeu la velocitat instantània en cada cas:
a) $\vec{r}_1 = (3t^2 + 5t, 2t^6)$
b) $\vec{r}_2 = \left(5 - t^3 - 6t^4, \frac{7}{4}t^4 + t^{10}\right)$

En el primer cas tenim

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \dot{\vec{r}}_1(t) = \left(6t + 5, 12t^5\right)$$

En el segon,

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \dot{\vec{r}}_2(t) = \left(-3t^2 - 24t^3, 7t^3 + 10t^9\right)$$

També pot ser útil l'anomenada *regla de la cadena* per derivar funcions compostes

$$\frac{df(g(t))}{dt} = \dot{f}(g(t)) \cdot \dot{g}(t)$$

Exemple 4
Donades les següents funcions, trobeu la seva derivada respecte el temps:
a) $\alpha(t) = (3t^4 - 2t^5)^4$
b) $\beta(t) = (6 - t^{10} + 4t^2 - 9t)^5$

Tenim

$$\dot{\alpha}(t) = 4\left(3t^4 - 2t^5\right)^3 \cdot \left(12t^3 - 10t^4\right)$$

i

$$\dot{\beta}(t) = 5\left(6 - t^{10} + 4t^2 - 9t\right)^4 \cdot \left(-10t^9 + 8t - 9\right)$$

2.5.3 La velocitat i el sistema de referència

La velocitat d'un objecte depèn del sistema de referència respecte al qual es mou. Quan tenim diversos objectes en un mateix sistema de referència, podem considerar la **velocitat relativa** d'un d'ells respecte un altre. D'aquesta manera, si volem calcular la velocitat relativa d'un cos 2 respecte un altre 1 farem

$$\vec{v}_{2,1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Exemple 5
Suposem que circulem per una carretera de doble sentit amb un cotxe que té una velocitat $90\,km/h$. Per una banda, veiem venir per l'altre carril una moto que circula a $70\,km/h$ i per l'altre un camió que se'ns acosta per darrera a $75\,km/h$. Calculeu, en km/h:
a) La velocitat relativa de la moto respecte el cotxe.
b) La velocitat relativa del camió respecte el cotxe.
c) La velocitat relativa del camió respecte la moto.

Tenint en compte els signes de la velocitat en cada cas, tenim:

$$\vec{v}_{moto,\,cotxe} = -70 - 90 = -160\,km/h$$
$$\vec{v}_{cam,\,cotxe} = 75 - 90 = -15\,km/h$$
$$\vec{v}_{cam,\,moto} = -75 - 70 = -140\,km/h$$

2.6 L'acceleració

L'acceleració d'un objecte en moviment representa com varia la seva velocitat. Si aquesta augmenta diem que el cos està accelerant; si disminueix, direm que està frenant. És important tenir en compte que un objecte accelera si la seva acceleració té el mateix signe que la velocitat, sigui quin sigui aquest signe, positiu o negatiu i si l'acceleració i la velocitat tenen signe contrari, llavors l'objecte en moviment està frenant. En qualsevol cas cal recordar que la velocitat és un vector i quan parlem de la seva variació, aquesta pot ser en mòdul i/o direcció. Aquest detall serà important quan parlem de moviment circular. En el Sistema Internacional l'acceleració es mesura en m/s^2.

2.6.1 L'acceleració mitjana

L'acceleració mitjana $\vec{a}_m$ d'un objecte en moviment, entre dos instants de temps t_1, t_2 es defineix com

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Exemple 6
El vector velocitat en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte ve donat per $\vec{v}(t) = (2t^3 - 2, 3t + 5)$. Es demana trobar el mòdul del vector acceleració mitjana entre els instants $t_1 = 1\ s$, $t_2 = 3\ s$

Calculem

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(1) = (0, 8)$$
$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(3) = (52, 14)$$

llavors

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(3) - \vec{v}(1) = (52, 14) - (0, 8) = (52, 6)$$

Ara

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(52, 6)}{2} = (26, 3)$$

finalment

$$|\vec{a}_m| = |(26, 3)| = \sqrt{26^2 + 3^2} = \sqrt{685} = 26,17\ m/s$$

2.6.2 L'acceleració instantània

Si en l'expressió de l'acceleració mitjana prenem intervals de temps cada cop més petits, obtenim l'acceleració instantània.

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

La direcció d'aquest vector és tangent a la trajectòria (en moviments rectilinis) i el seu sentit és igual o oposat al de la velocitat.

Exemple 7
El vector posició en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte ve donat per

$$\vec{r}(t) = \left(2 - t^3 + 6t^5, 3t^4 + 5t^7\right)$$

Es demana trobar, el vector velocitat instantània i el vector acceleració instantània en funció del temps.

És fàcil calcular

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \left(-3t^2 + 30t^4, 12t^3 + 35t^6\right)$$

i

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \left(-6t + 120t^3, 36t^2 + 210t^5\right)$$

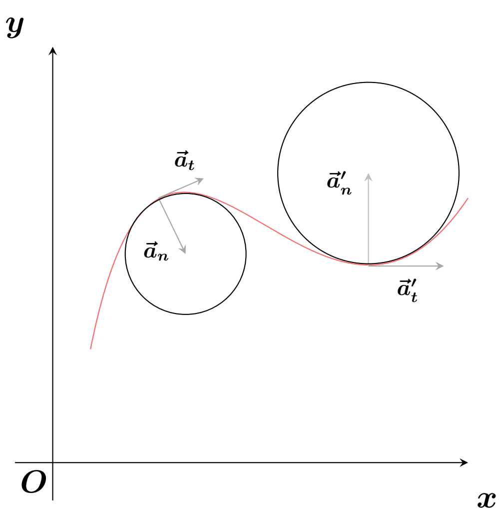
2.7 Components intrínseques de l'acceleració

Tal com hem dit abans, el vector velocitat pot variar en mòdul o direcció. D'aquesta manera es defineix:

- **Acceleració tangencial**, $\vec{a}_t$: que està relacionada amb el canvi del mòdul de la velocitat.
- **Acceleració normal o centrípeta**, $\vec{a}_n = \vec{a}_c$: que està relacionada amb el canvi de la direcció de la velocitat.

Per qualsevol tipus de trajectòria que segueixi un objecte, l'acceleració tangencial té la mateixa direcció que la velocitat (i mateix sentit o contrari en funció de si l'objecte es troba accelerant o frenant), i l'acceleració centrípeta té la direcció perpendicular a la velocitat i sentit dirigit cap al *centre de curvatura* de la trajectòria en cada moment.

Per un objecte que segueix una trajectòria arbitrària prou suau (sense canvis sobtats en la trajectòria) podem considerar en cada instant la circumferència de contacte màxim amb la corba, de forma que l'acceleració total de l'objecte es pot descompondre en cada punt en les seves components intrínseques. Els valors d'aquestes components poden variar de punt a punt,



El mòdul de l'acceleració normal es calcula com

$$|\vec{a}_n| \equiv a_n = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{v^2}{R}$$

on R és el *radi de curvatura* de la trajectòria en cada moment. Si el moviment és circular, R coincideix amb el radi del cercle.

D'aquesta manera, per un moviment que segueix una trajectòria qualsevol, l'**acceleració total** en un cert instant del temps és la suma de la tangencial i la normal

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

i el seu mòdul val

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Les components intrínseques de l'acceleració seran necessàries quan estudiem el tema de moviment circular.

Exemple 8
El vector posició en funció del temps (en unitats del SI), per un determinat objecte ve donat per $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 - 2, \frac{1}{2}t^2 + 5\right)$. Es demana trobar, de forma implícita, el radi de curvatura de la trajectòria que descriu, en funció del temps.

Trobem primer el vector velocitat

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \left(t^2, t\right)$$

i el seu mòdul

$$|\vec{v}(t)| \equiv v(t) = \sqrt{t^4 + t^2}$$

Trobem ara el vector acceleració total

$$\vec{a}(t) \equiv \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (2t, 1)$$

amb mòdul

$$|\vec{a}(t)| \equiv a(t) = \sqrt{4t^2 + 1}$$

El mòdul de l'acceleració normal val

$$|\vec{a}_n(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R} = \frac{\left(\sqrt{t^4 + t^2}\right)^2}{R} = \frac{t^4 + t^2}{R}$$

L'acceleració tangencial és la variació del mòdul de la velocitat, per tant es calcula com
$$\vec{a}_t(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\hat{u} = \frac{dv(t)}{dt}\hat{u} \equiv \dot{v}(t)\hat{u}$$
on $\hat{u}$ és un vector unitari en la direcció del vector $\vec{a}_t(t)$. Amb aquestes consideracions, el mòdul del vector acceleració tangencial val

$$|\vec{a}_t(t)| \equiv a_t(t) = |\dot{v}(t)\hat{u}| = \dot{v}(t)|\hat{u}| = \dot{v}(t) \cdot 1 = \dot{v}(t)$$

Ara, recordant que per una funció irracional qualsevol teníem*

$$f(t) = \sqrt{g(t)} \rightarrow \dot{f}(t) = \frac{\dot{g}(t)}{2\sqrt{g(t)}}$$

serà

$$a_t(t) = \frac{4t^3 + 2t}{2\sqrt{t^4 + t^2}}$$

Llavors, a partir del resultat

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t) \rightarrow |\vec{a}(t)|^2 = |\vec{a}_t(t)|^2 + |\vec{a}_n(t)|^2$$

tenim, finalment

$$4t^2 + 1 = \frac{\left(4t^3 + 2t\right)^2}{4\left(t^4 + t^2\right)} + \frac{\left(t^4 + t^2\right)^2}{R^2}$$

Exercicis

1. El vector posició d'un mòbil ve donat per $\vec{r}(t) = (6t^3 + 2, 3t^2)$, en unitats del SI. Es demana:
   (a) El vector desplaçament entre els instants $t_1 = 1\ s$ i $t_2 = 3\ s$
   (b) El mòdul del desplaçament entre aquests instants.
   (c) La velocitat mitjana entre aquests instants del temps i el seu mòdul.
   (d) La velocitat instantània en funció del temps.
   (e) L'acceleració mitjana entre els mateixos instants de temps i el seu mòdul.
   (f) L'acceleració instantània en funció del temps.

2. Suposem que el vector posició d'un mòbil ve donat per

$$\vec{r}(t) = \left(t^2 - t,\ \frac{1}{5}t^5 + 1\right)$$

   en unitats del SI. Es demana trobar, de forma implícita, l'expressió que relaciona el radi de curvatura de la trajectòria que descriu, en funció del temps.

*Podeu consultar la diapositiva 21 d'aquest arxiu.

3 Cinemàtica del punt

3.1 Moviment rectilini

En aquesta secció estudiarem el moviment en una dimensió de cossos puntuals sotmesos a una acceleració constant. Les equacions més generals que descriuen aquest tipus de moviment són:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \tag{1}$$

$$v = v_0 + a(t - t_0) \tag{2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{3}$$

On x és la posició del mòbil respecte un cert origen de referència, x_0 és la posició per a $t = 0$, v_0 és la velocitat per a $t = 0$, a l'acceleració, suposada constant, v la velocitat i t el temps . Quan l'acceleració és igual a zero les anteriors equacions queden resumides en

$$x = x_0 + v(t - t_0) \tag{4}$$

A l'hora de resoldre problemes, les equacions (1), (2) i (3) habitualment es poden escriure d'una forma més senzilla. N'hi ha prou de triar adequadament els valors de x_0 i t_0. Això s'anomena triar l'origen d'espai i de temps i es correspon amb escollir un sistema de coordenades adequat al problema en qüestió. Això sempre es podrà fer si hem d'escriure les equacions del moviment per un sol mòbil. Si en tenim dos o més, només podrem privilegiar un d'ells.

3.1.1 Casos amb un sol mòbil

En aquests casos, tal com s'ha dit abans, si demanem que per $t = 0$ la posició sigui $x = 0$, podem treballar amb la següent versió (simplificada) de les equacions anteriors

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{5}$$

$$v = v_0 + at \tag{6}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \tag{7}$$

Exemple 1
Un cotxe necessita $\mathbf{15\,s}$ per arribar a una velocitat de $\mathbf{108\,km/h}$ partint del repòs. Es demana calcular l'espai recorregut en aquest temps. Suposant que després frena amb una acceleració de $\mathbf{3\,m/s^2}$, calculeu el temps que triga a aturar-se.

Comencem passant la velocitat al SI

$$108\,\frac{km}{h}\cdot\frac{1000\,m}{1\,km}\cdot\frac{1\,h}{3600\,s}=30\,m/s$$

A pesar de que tenim com a dades una velocitat i un temps, **NO** podem calcular l'espai recorregut mitjançant la fórmula

$$x=vt$$

per obtenir

$$x=30\cdot 15=450\,m$$

ja que la velocitat *no* és constant (ens diuen que parteix del repòs). Necessitem calcular primer l'acceleració. Ho fem amb

$$v=v_0+a\cdot t$$

$$30=0+a\cdot 15$$

d'on obtenim

$$a=2\,m/s^2$$

Ara sí, per calcular l'espai recorregut podem fer

$$x=v_0\cdot t+\frac{1}{2}a\cdot t^2=0\cdot 15+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 15^2=225\,m$$

Finalment, si ara frena fins a aturar-se, per trobar el temps emprat farem

$$v=v_0+a\cdot t$$

$$0=30+(-3)\cdot t$$

$$t=\frac{30}{3}=10\,s$$

Exemple 2
Un vehicle que es movia amb velocitat $v_0 = 20\,m/s$ accelera amb $a = 2\,m/s$ al llarg d'una distància de $300\,m$. Es demana calcular el temps que tarda a recórrer aquesta distància i la velocitat que assoleix.

A partir de les dades del enunciat i la relació

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

podem escriure

$$300 = 20t + \frac{1}{2} \cdot 2t^2$$

d'on

$$t^2 + 20t - 300 = 0$$

amb solucions

$$\begin{aligned} t &= \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-300)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1200}}{2} = \frac{-20 \pm 40}{2} \end{aligned}$$

com que ens interessa l'evolució cap el futur del problema, prenem la solució positiva que és $t = 10\,s$. Ara, amb

$$v = v_0 + at$$

podem trobar

$$v = 20 + 2 \cdot 10 = 40\,m/s$$

Exemple 3
Un vehicle canvia la seva velocitat de $10\,m/s$ a $30\,m/s$ al llarg d'un recorregut de $100\,m$. Calculeu la seva acceleració i el temps que tarda a recórrer aquests $100\,m$.

En aquest cas ens interessa fer servir la relació

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

amb les dades de l'enunciat

$$30^2 = 10^2 + 2a \cdot 100$$

de forma que l'acceleració val

$$a = \frac{30^2 - 10^2}{2 \cdot 100} = \frac{900 - 100}{200} = 4\,m/s^2$$

Finalment, amb $v = v_0 + at$, podem calcular el temps demanat

$$30 = 10 + 4t \to t = \frac{30 - 10}{4} = 5\,s$$

Exemple 4
Un tren que parteix d'una velocitat desconeguda assoleix una velocitat de $v = 25\,m/s$ en un temps de $20\,s$ al llarg d'un espai de $300\,m$. Calculeu l'acceleració del tren i la velocitat inicial.

En aquest cas no tenim més remei que plantejar un sistema d'equacions. Podem fer servir

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad v = v_0 + at$$

amb les dades de l'enunciat tindrem

$$\begin{cases} 300 = v_0 \cdot 20 + \frac{1}{2}a \cdot 20^2 \\ 25 = v_0 + a \cdot 20 \end{cases}$$

que es pot reescriure com

$$\begin{cases} 2v_0 + 20a = 30 \\ v_0 + 20a = 25 \end{cases}$$

ara, multiplicant la segona equació per 2

$$\begin{cases} 2v_0 + 20a = 30 \\ 2v_0 + 40a = 50 \end{cases}$$

i restant (de baix a dalt) per obtenir

$$20a = 20 \to a = 1\,m/s^2$$

i finalment

$$v_0 + 20a = 25 \to v_0 = 25 - 20a = 25 - 20 \cdot 1 = 5\,m/s$$

Exemple 5
Un objecte que té una velocitat $v_0 = 10\,m/s$ accelera al llarg de $100\,m$ en un temps de $5\,s$. Calculeu l'acceleració de l'objecte i la velocitat final.

A partir de l'equació

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

i fent servir les dades de l'enunciat podem escriure

$$100 = 10 \cdot 5 + \frac{1}{2}a \cdot 5^2$$

d'on

$$a = 2 \cdot \frac{100 - 10 \cdot 5}{25} = 4\,m/s^2$$

i finalment

$$v = v_0 + at = 10 + 4 \cdot 5 = 30\,m/s$$

Exemple 6
Un vehicle accelera amb $a = 1\,m/s^2$ des d'una velocitat inicial desconeguda fins a una final $v = 40\,m/s$ en un recorregut de $152\,m$. Calculeu el temps que ha tardat i la velocitat inicial.

En aquest cas podem fer servir l'expressió

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

que, amb les dades de l'enunciat, s'escriu com

$$40^2 = v_0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 152$$

d'on

$$v_0 = \sqrt{40^2 - 304} = \sqrt{1296} = 36\,m/s$$

i el temps demanat es pot trobar a partir de

$$v = v_0 + at$$

i és

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{40 - 36}{1} = 4\,s$$

Exemple 7
Un objecte recorre $\boldsymbol{500\,m}$ en un temps de $\boldsymbol{10\,s}$ amb una acceleració $\boldsymbol{a = 2\,m/s^2}$. Calculeu la velocitat inicial i la final.

Fent servir la relació

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

i amb les dades de l'enunciat

$$500 = v_0 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2$$

d'on

$$v_0 = \frac{500 - 100}{10} = 40\,m/s$$

i la velocitat final es troba directament amb

$$v = v_0 + at = 40 + 2 \cdot 10 = 60\,m/s$$

Exercicis

1. Calculeu l'espai que recorre un vehicle que es mou amb velocitat constant de $\boldsymbol{72\ km/h}$ en un temps d'un minut.

2. Un objecte parteix del repòs i arriba a una velocitat de $\boldsymbol{10\ m/s}$ en 20 segons. Trobeu l'espai que ha recorregut. Compareu el resultat amb el que obtindríem si la velocitat del mòbil hagués estat també de $\boldsymbol{10\ m/s}$ però constant al llarg de tot el moviment.

3. Considereu un cotxe que circula a una velocitat de $\boldsymbol{108\ km/h}$, frena i queda aturat en 5 segons. Es demana:

   (a) Calculeu l'acceleració amb que frena.

   (b) Trobeu l'espai que ha recorregut.

4. Un mòbil es mou amb velocitat $\boldsymbol{72\ km/h}$ i de sobte frena amb una acceleració de $\boldsymbol{2\ m/s^2}$. Trobeu:

   (a) El temps que triga a aturar-se.

   (b) L'espai que ha recorregut.

5. Un cotxe que circula a $\boldsymbol{36\ km/h}$ accelera durant 5 segons fins arribar a una velocitat de $\boldsymbol{108\ km/h}$. Manté aquesta velocitat durant 20 segons i després frena fins aturar-se en 10 segons. Es demana:

   (a) Calculeu l'acceleració en cada tram del moviment.

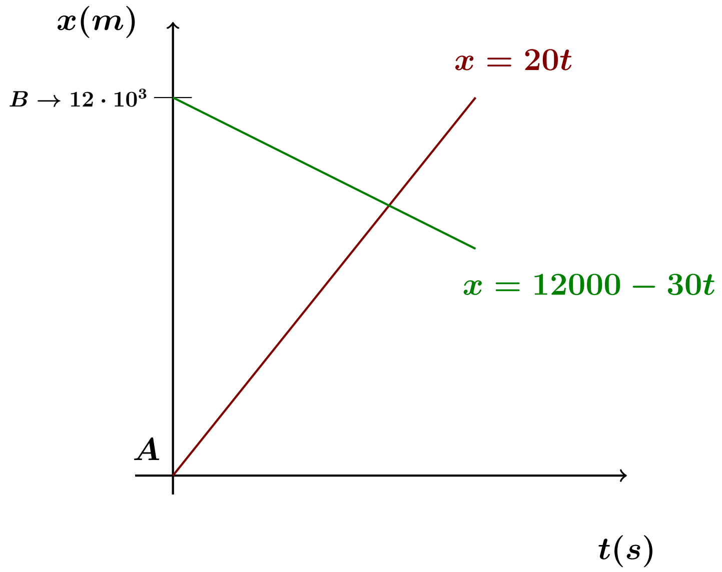
   (b) Calculeu l'espai total recorregut.

3.1.2 Casos amb dos mòbils

En aquestes situacions és recomanable resoldre el problema de forma gràfica i escriure les equacions del moviment dels mòbils. Sempre podrem privilegiar algun dels dos situant-lo en l'origen d'espai i temps de manera que per ell, les equacions del moviment s'escriuran de forma senzilla.

Exemple 1
Dos cotxes surten alhora, en sentit contrari, de dos punts $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, separats una distància de $\mathbf{12}\,\boldsymbol{km}$. Un circula amb una velocitat de $\mathbf{20}\ \boldsymbol{m/s}$ i l'altre amb velocitat $\mathbf{30}\ \boldsymbol{m/s}$. Calculeu el temps que tarden a trobar-se i a quina distància ho fan des del punt d'on va sortir el que surt del punt $\boldsymbol{A}$.

Podem representar la situació amb el gràfic



Les equacions del moviment per cada mòbil s'obtenen a partir de

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Si posem l'origen de coordenades i temps al punt $\boldsymbol{A}$, tindrem

$$\begin{cases} A \to x = 20t \\ B \to x = 12000 - 30t \end{cases}$$

d'on

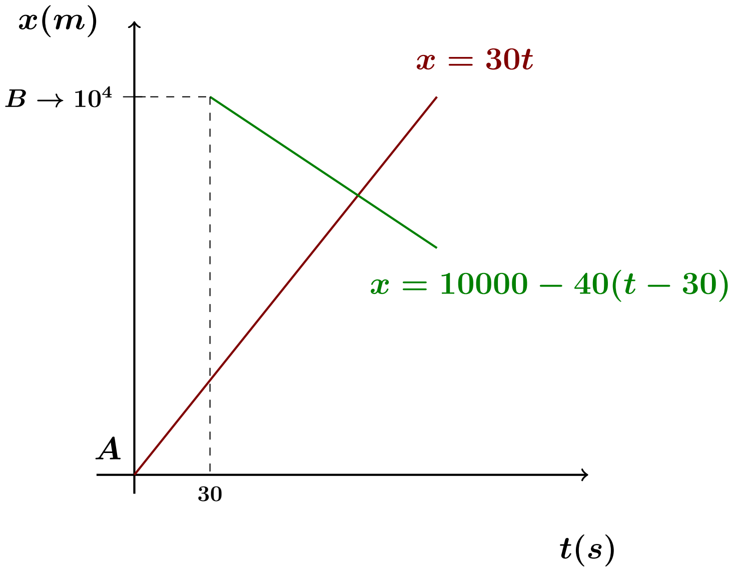
$$20t = 12000 - 30t$$

i finalment,

$$t = 240\,s, \quad x = 4800\,m$$

Exemple 2
Dos cotxes surten de dos punts A i B, separats una distància de $10\,km$. Un circula amb una velocitat de $30\ m/s$ i l'altre (que surt $30\,s$ més tard que l'altre) amb velocitat $40\ m/s$. Suposant que es mouen en sentit contrari, calculeu el temps que tarden a trobar-se i a quina distància ho fan des del punt d'on va sortir el primer.

Podem representar la situació amb el gràfic



Les equacions del moviment per cada mòbil s'obtenen a partir de

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Si posem l'origen de coordenades i temps al punt A, tindrem

$$\begin{cases} A \to x = 30t \\ B \to x = 10000 - 40(t - 30) \end{cases}$$

d'on

$$30t = 10000 - 40t + 1200$$

i finalment,

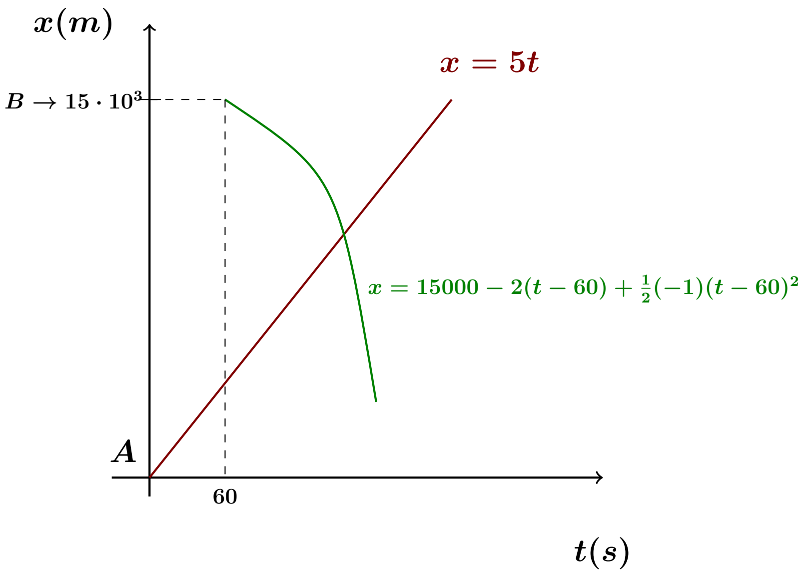
$$t = 160\, s, \quad x = 4800\, m$$

Notem que el temps calculat es mesura respecte al cotxe que surt del punt A, així com l'espai recorregut. Si volem saber el temps que tarden a trobar-se i l'espai recorregut respecte al segon cotxe hauríem de fer

$$t = 160 - 30 = 130\, s \qquad x = 10000 - 4800 = 5200\, m/s$$

També podríem haver resolt el problema posant el cotxe que surt des de B a l'origen d'espai i temps. En aquests tipus d'exercicis sempre podrem triar quin objecte posem en aquest origen.

Exemple 3
Una bicicleta surt d'una ciutat A en direcció a una altra B (separades $15\, km$) amb una velocitat constant de $5\, m/s$. Un minut després, un cotxe que passava per B amb velocitat $2\, m/s$ i amb acceleració $1\, m/s^2$ es dirigeix cap a A. Es demana calcular el temps que tarden a trobar-se i a quina distància de A ho fan.



Si posem a l'origen d'espai i temps la bicicleta, les equacions del moviment per cada mòbil són

$$\begin{cases} A \rightarrow x = x_0 + v(t - t_0) \\ B \rightarrow x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Amb les dades de l'exemple, tindrem

$$\begin{cases} A \to x = 5t \\ B \to x = 15000 - 2(t-60) + \frac{1}{2}(-1)(t-60)^2 \end{cases}$$

d'on

$$5t = 15000 - 2(t-60) + \frac{1}{2}(-1)(t-60)^2$$

fem distributives i desenvolupem el quadrat fent servir

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$5t = 15000 - 2t + 120 + \frac{1}{2}(-1)\left[t^2 - 120t + 3600\right]$$

multipliquem per 2 als dos membres de l'equació per tal de treure denominadors i fem la darrera distributiva pendent

$$10t = 30000 - 4t + 240 + (-1)\left[t^2 - 120t + 3600\right]$$

$$10t = 30000 - 4t + 240 - t^2 + 120t - 3600$$

reordenant termes i fent operacions, obtenim

$$t^2 - 106t - 26640 = 0$$

amb solucions

$$t = \frac{106 \pm \sqrt{106^2 + 4 \cdot 26640}}{2} = \frac{106 \pm 343,21}{2}$$

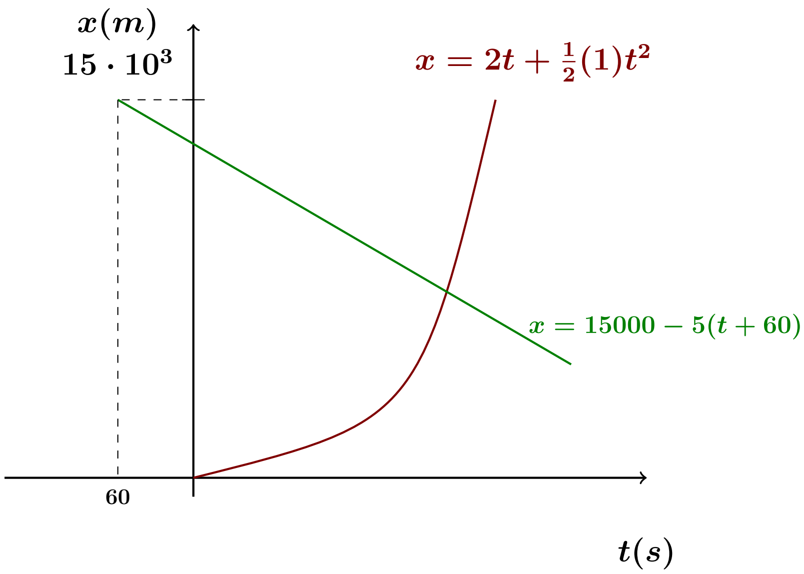
$$t_1 = 224,6\,s, \quad t_2 = -118,6\,s$$

Degut a les condicions del problema, només t_1 té sentit com a solució. L'espai recorregut es pot calcular com

$$x = 5t = 5 \cdot 224,6 = 1123\,m$$

Noteu que l'acceleració del cotxe està afectada d'un signe negatiu perquè va en sentit contrari a la marxa de la bicicleta (que hem posat a l'origen d'espai i temps), no perquè estigui frenant.

Veiem a continuació com podríem resoldre l'exemple posant el mòbil que té acceleració a l'origen d'espai i temps. Això farà que la seva equació sigui molt més senzilla. Naturalment, l'equació del que es mou amb velocitat constant canviarà.



Hem de resoldre el sistema d'equacions.

$$\begin{cases} x = 15000 - 5(t + 60) \\ x = 2t + \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

igualant, fent distributives i multiplicant per dos en tots els termes per treure denominadors, tenim

$$30000 - 10t - 600 = 4t + t^2$$

reordenant

$$t^2 + 14t - 29400 = 0$$

d'on

$$t = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 + 4 \cdot 29600}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{118596}}{2} = \frac{-14 \pm 344,38}{2}$$

$$t_1 = 165,2\,s, \quad t_2 = -179,19\,s$$

ens quedarem amb la solució positiva ja que ens interessa l'evolució cap al futur del problema. En quant al lloc on es troben

$$x = 2t + \frac{1}{2}t^2 = 2 \cdot 165,2 + \frac{1}{2} \cdot 165,2^2 = 13975,92\,m$$

Exercicis

1. Dos vehicles separats inicialment una distància de $\boldsymbol{10\,km}$ es mouen en sentit contrari amb velocitats $\boldsymbol{v_1 = 10\,m/s}$ i $\boldsymbol{v_2 = 18\,m/s}$. Calculeu quant de temps tarden a creuar-se i a quina distància ho fan des del punt on va sortir el primer.

2. Un cotxe circula a una velocitat $\boldsymbol{v = 72\,km/h}$ en una zona escolar. Un cotxe de policia el veu passar pel seu costat i inicia una persecució accelerant amb $\boldsymbol{a = 3\,m/s^2}$. Quan atrapa l'altre cotxe? Quina serà la velocitat del cotxe de policia en aquell moment?

3. Dos cotxes que es trobaven separats $\boldsymbol{500\,m}$ de distància es mouen en sentit contrari, l'un amb velocitat inicial $\boldsymbol{3\,m/s}$ i acceleració $\boldsymbol{2\,m/s^2}$ i l'altre amb velocitat inicial $\boldsymbol{4\,m/s}$ i acceleració $\boldsymbol{5\,m/s^2}$. Es demana

   (a) Calculeu el temps que tarden a trobar-se.

   (b) Suposant ara que el segon té velocitat inicial $\boldsymbol{35\,m/s}$ i frena amb $\boldsymbol{1\,m/s^2}$, calculeu el temps que tarden a trobar-se, abans que s'aturi.

4. Una persona es troba a una distància de $\boldsymbol{30\,m}$ d'una parada de bus quan veu que el que ha d'agafar arrenca amb acceleració $\boldsymbol{a = 2\,m/s^2}$. En el mateix instant, comença a córrer amb velocitat $\boldsymbol{v = 10\,m/s}$. Feu els càlculs necessaris per esbrinar si arribarà a agafar-lo. Repetiu l'exercici suposant ara que el conductor s'ha entretingut $\boldsymbol{2\,s}$.

3.2 Moviment de projectils

3.2.1 Moviment vertical

En els casos en que un objecte es llança o deixa caure verticalment, les equacions a utilitzar són formalment les mateixes que les de la secció anterior. S'ha de tenir present però, que en aquests casos l'acceleració és sempre coneguda, ja que és la de la gravetat terrestre ($\boldsymbol{g = 9,8 m/s^2}$). L'espai l'anomenarem $\boldsymbol{y}$, altura, per comoditat, i hem de tenir en compte que si l'objecte va cap a dalt prendrem la velocitat amb signe positiu i negatiu si va cap abaix. D'acord amb tot això i com l'acceleració de la gravetat va sempre cap abaix, escriurem les equacions de la següent forma:

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \tag{8}$$

$$v = v_0 - g(t - t_0) \tag{9}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \tag{10}$$

Una vegada més, insistir en que, si podem triar les condicions inicials, les equacions a utilitzar es simplifiquen notablement.

Exemple 1
Llancem un objecte cap amunt des del terra amb velocitat inicial $\boldsymbol{10\, m/s}$. Es demana calcular el temps que tarda en arribar a l'altura màxima i el valor d'aquesta altura.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2\,; \quad v = 10 - gt$$

Quan arriba a l'altura màxima la velocitat val zero, llavors

$$0 = 10 - gt; \quad t = \frac{10}{g} = 1,02\, s$$

en quant a l'altura màxima

$$y = 10t - \frac{1}{2}gt^2 = 10 \cdot 1,02 - \frac{1}{2}9,8 \cdot 1,02^2 = 5,102\, m$$

Exemple 2
Es deixa caure un objecte des d'una altura de $40\,m$. Es demana calcular el temps que tarda en arribar al terra i amb quina velocitat ho fa.

Si prenem l'origen d'altura al terra, les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 40 - \frac{1}{2}gt^2\,; \quad v = -gt$$

Quan arribi al terra serà $y = 0$, per tant

$$0 = 40 - \frac{1}{2}gt^2; \quad t = \sqrt{\frac{80}{9,8}} = 2,86\,s$$

Llavors, la velocitat amb que arriba es pot calcular com

$$v = -gt = -9,8 \cdot 2,86 = -28\,m/s$$

Exemple 3
Es llança un objecte cap a dalt des d'una altura de $30\,m$ amb una velocitat $v = 15\,m/s$. Es demana calcular el temps que tarda a arribar a terra i amb quina velocitat ho fa.

Suposant que descrivim el moviment des del terra, les equacions del moviment i la velocitat són

$$y = 30 + 15t - \frac{1}{2}gt^2\,; \quad v = 15 - gt$$

Trobem el temps que tarda en arribar al terra demanant que sigui $y = 0$

$$0 = 30 + 15t - \frac{1}{2}gt^2; \quad gt^2 - 30t - 60 = 0$$

d'on

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 240 \cdot g}}{2g} = 4,44\,s$$

i en quant a la velocitat

$$v = 15 - 9,8 \cdot 4,44 = -28,5\,m/s$$

Exemple 4
Es llança un objecte $\boldsymbol{A}$ cap a dalt des d'una altura de $\boldsymbol{20\,m}$ amb una velocitat $\boldsymbol{v = 15\,m/s}$. Al mateix temps es llança des del terra un altre objecte $\boldsymbol{B}$ amb velocitat $\boldsymbol{25\,m/s}$. Es demana calcular el temps que tarden a trobar-se, a quina alçada ho fan i si en aquell moment pugen o baixen.

Suposant que descrivim el moviment des del terra, les equacions del moviment i la velocitat per cada objecte són

$$\boldsymbol{A \quad y = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2\,; \quad v = 15 - gt}$$

$$\boldsymbol{B \quad y = 25t - \frac{1}{2}gt^2\,; \quad v = 25 - gt}$$

Quan es troben, ho fan a la mateixa altura, de forma que

$$\boldsymbol{20 + 15t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = 25t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2}}$$

d'on

$$\boldsymbol{t = 2\,s}$$

L'altura a la que es troben es pot calcular fent servir, per exemple, l'equació del moviment del segon cos. Així

$$\boldsymbol{y = 25 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 2^2 = 30,4\,m}$$

En quant a la velocitat

$$\boldsymbol{v_A = 15 - 9,8 \cdot 2 = -4,6\,m/s\,; \quad v_B = 25 - 9,8 \cdot 2 = 5,4\,m/s}$$

De manera que $\boldsymbol{A}$ baixava i $\boldsymbol{B}$ pujava quan es troben.

Exemple 5
Es llança un objecte A cap a dalt des d'una altura de $30\,m$ amb una velocitat $v = 10\,m/s$. Al cap d'un segon, llança des del terra un altre objecte B amb velocitat $20\,m/s$. Es demana esbrinar si quan es troben pugen o baixen.

Suposant que descrivim el moviment des del terra, les equacions del moviment i la velocitat per cada objecte són

$$A \quad y = 30 + 10t - \frac{1}{2}gt^2\,; \quad v = 10 - gt$$

$$B \quad y = 20(t-1) - \frac{1}{2}g(t-1)^2\,; \quad v = 20 - g(t-1)$$

Quan es troben, ho fan a la mateixa altura, de forma que

$$30 + 10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20(t-1) - \frac{1}{2}g(t-1)^2$$

llavors, desenvolupant quadrats

$$30 + 10t - \frac{1}{2}gt^2 = 20(t-1) - \frac{1}{2}g(t^2 - 2t + 1)$$

i fent distributives

$$30 + 10t - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} = 20t - 20 - \cancel{\frac{1}{2}gt^2} + gt - \frac{1}{2}g$$

Com veiem queda una equació de primer grau. Multipliquem per 2 els dos membres de l'equació per obtenir

$$60 + 20t = 40t - 40 + 2gt - g$$

d'on

$$(20 + 2g)t = 100 + g$$

i finalment

$$t = \frac{100 + g}{20 + 2g} = 2,77\,s$$

En quant a la velocitat

$$v_A = 10 - 9,8 \cdot 2,77 = -17,15\,m/s\,; \quad v_B = 20 - 9,8 \cdot (2,77 - 1) = 2,65\,m/s$$

De manera que A baixava i B pujava quan es troben.

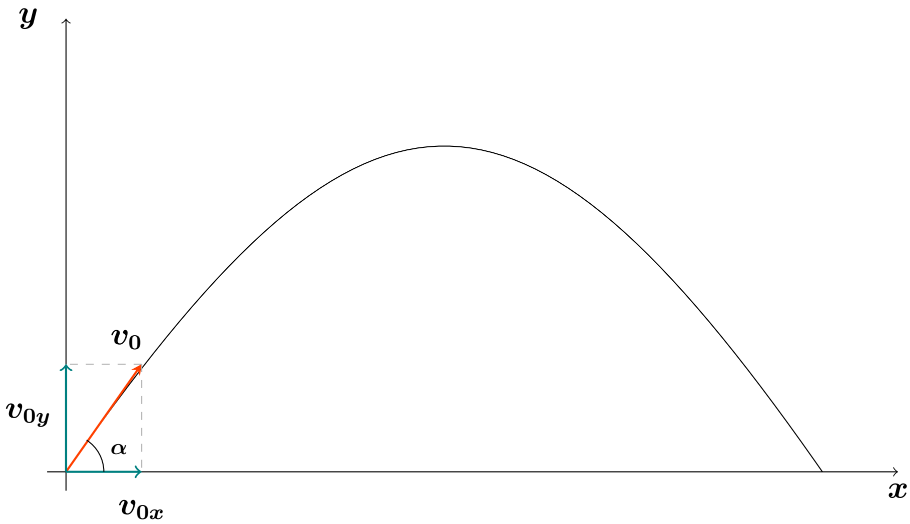
Exercicis

1. Suposem que tenim un objecte a $\mathbf{20}\,\boldsymbol{m}$ d'alçada. Es demana calcular el temps que tarda en arribar al terra i la velocitat amb la que ho fa en els següents casos:
   (a) Es llança cap amunt amb velocitat $\mathbf{15}\,\boldsymbol{m/s}$
   (b) Es deixa caure
   (c) Es llança cap abaix amb velocitat $\mathbf{10}\,\boldsymbol{m/s}$
2. Una càrrega de maons està sent pujada amb una grua a una velocitat de $\mathbf{5}\,\boldsymbol{m/s}$ quan, a sis metres del terra, un maó es desprèn. Descriure el moviment del maó. Quina és l'altura màxima que assoleix respecte el terra? Quant de temps tarda a arribar a terra? Amb quina velocitat ho fa?
3. Es deixa caure una pilota des del terrat d'un edifici. En el mateix instant es llança verticalment i cap a dalt una altra pilota des de terra amb una velocitat $\boldsymbol{v_0} = \mathbf{9}\boldsymbol{m/s}$. Les pilotes xoquen $\mathbf{1,8}$ segons més tard. Trobeu l'alçada de l'edifici.
4. Es deixa caure una pedra al fons d'un pou de profunditat desconeguda i se sent el soroll de l'impacte amb el fons al cap de $\mathbf{5}\,\boldsymbol{s}$. Calculeu la profunditat del pou tenint en compte que la velocitat de so és de $\mathbf{340}\,\boldsymbol{m/s}$.
5. Es llança cap a dalt des d'una altura de $\mathbf{80}\,\boldsymbol{m}$ un objecte amb velocitat $\mathbf{20}\,\boldsymbol{m/s}$. Trobeu la distància recorreguda en els darrers $\mathbf{2}\,\boldsymbol{s}$ de moviment.
6. Calculeu l'acceleració de la gravetat a la lluna sabent que un objecte llançat cap a dalt des del terra amb velocitat $\mathbf{10}\,\boldsymbol{m/s}$ tarda $\mathbf{12,5}\,\boldsymbol{s}$ en tornar al terra.
7. (*Exercici d'ampliació.*) Un alumne que es troba a la seva habitació en una residència d'estudiants veu caure per la finestra un globus ple d'aigua. S'apropa a la finestra i mesura que el temps que un segon globus tarda en recórrer els $\mathbf{1,2}\,\boldsymbol{m}$ de la seva finestra és $\boldsymbol{t} = \mathbf{0,1}\boldsymbol{s}$. Si suposem que els globus s'han deixat caure des del repòs, des de quina altura respecte la part inferior de la seva finestra s'estan llançant?

3.2.2 Tir parabòlic

En aquesta secció treballarem l'anomenat tir parabòlic, l'estudi del qual es fa considerant el moviment com una composició en els eixos horitzontal i vertical. Son necessàries algunes idees de trigonometria, que se suposen conegudes, però que podeu repassar en aquest document.

Suposem doncs que es llança un cos amb una velocitat $\boldsymbol{v_0}$ que forma un angle $\boldsymbol{\alpha}$ respecte l'horitzontal.



L'única acceleració és la gravitatòria en l'eix vertical, per això les equacions del moviment són, per l'eix $\boldsymbol{OX}$:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \tag{11}$$
$$v_x = v_{0x} \tag{12}$$

i per l'eix $\boldsymbol{OY}$:

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \tag{13}$$
$$v_y = v_{0y} - g(t - t_0) \tag{14}$$
$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \tag{15}$$

Tenint en compte que és:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

i suposant que només es llança un objecte, podrem demanar $\boldsymbol{t_0 = 0}$ de forma que les equacions del moviment s'escriuran

$$x = v_0 \cos \alpha t$$
$$y = y_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

i la de la velocitat vertical

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t$$

En el tir parabòlic és típic voler conèixer:

- Temps de vol t_{vol}
- Abast màxim x_{max}
- Altura màxima y_{max}
- Velocitat en qualsevol temps (en particular amb la que arriba a terra)
- Equació de la trajectòria

Suposem primer per simplicitat que $y_0 = 0$.

Temps de vol. Trobarem per quins valors del temps és $y = 0$,

$$0 = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

d'on

$$\begin{cases} t = 0 \\ t_v = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \end{cases}$$

Abast màxim. En tenim prou de substituir el temps de vol que acabem de calcular a l'apartat anterior en l'equació del moviment per la x. Llavors

$$x_{max} = v_0 \cos \alpha t_v = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Altura màxima. Aprofitarem la simetria de la paràbola i calcularem l'altura a la que es troba quan ha transcorregut la meitat del temps de vol, així

$$y_{max} = y\left(\frac{t_v}{2}\right) = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

També podríem haver calculat el temps que tarda en arribar a l'altura màxima amb

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt$$

que era la condició que imposàvem en els exercicis de moviment vertical, de forma que

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

i ara podem substituir aquest valor del temps en l'equació del moviment

$$y = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

per obtenir el mateix resultat

$$y_{max} = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Velocitat per qualsevol temps. Es pot calcular com

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$$

Cal tenir present que tots els resultats anteriors no s'han de prendre com fórmules a aplicar "a cegues" als exercicis si no que pretenen mostrar el procés de càlcul dels paràmetres típics dels exercicis de tir parabòlic en general.

Equació de la trajectòria. Es tracta de trobar l'equació $y = y(x)$ a partir de les equacions conegudes $x = x(t)$, $y = y(t)$. Considerem el sistema

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha t \\ y = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

aïllem el temps de la primera

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

i substituïm a la segona

$$y = \cancel{v_0} \sin\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

que es pot escriure de forma més compacta com

$$y = x \tan\alpha - \frac{g \sec^2\alpha}{2v_0^2} x^2$$

i com es pot veure fàcilment és l'equació d'una paràbola amb les "banyes" cap a baix.

Exemple 1
Es llança des del terra un objecte amb velocitat inicial $v = 16\, m/s$ que forma un angle de $30°$ amb l'horitzontal. Es demana trobar: temps de vol, abast màxim, altura màxima, velocitat total $0,5$ segons abans que arribi al terra i equació de la trajectòria.

Les equacions del moviment i de la velocitat són

$$\begin{cases} x = 16 \cos 30° t \\ y = 16 \sin 30° t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = 16 \sin 30° - g t \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 13,86t \\ y = 8t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = 8 - g t \end{cases}$$

Per trobar el temps de vol demanem $y = 0$

$$0 = 8t - \frac{1}{2} g t^2 = t\left(8 - \frac{1}{2} g t\right)$$

d'on

$$\begin{cases} \boldsymbol{t = 0} \\ 8 - \frac{1}{2}\boldsymbol{gt = 0 \rightarrow t = \frac{16}{g} = \frac{16}{9{,}8} = 1,633\, s} \end{cases}$$

Ara, podem calcular l'abast màxim com

$$\boldsymbol{x = 13,86t = 13,86 \cdot 1,633 = 22,63\, m}$$

Per calcular l'altura màxima trobem el temps que tarda a arribar a dalt de tot, la condició és $\boldsymbol{v_y = 0}$, llavors

$$\boldsymbol{0 = 8 - gt \rightarrow t = \frac{8}{g} = \frac{8}{9,8} = 0,82\, s}$$

ara posem aquest valor del temps a l'equació del moviment que controla la $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{y(0,82) = 8 \cdot 0,82 - \frac{1}{2}9,8 \cdot 0,82^2 = 3,265\, m}$$

Finalment, quan falta $\boldsymbol{0,5\, s}$ per arribar al terra el temps és

$$\boldsymbol{t = 1,633 - 0,5 = 1,133\, s}$$

i la velocitat total en aquest moment

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{(13,86)^2 + (8 - 9,8 \cdot 1,133)^2}} \\ &= \boldsymbol{14,20\, m/s} \end{aligned}$$

Per trobar l'equació de la trajectòria partim de

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 16 \cos 30^\circ t} \\ \boldsymbol{y = 16 \sin 30^\circ t - \frac{1}{2}gt^2} \end{cases}$$

aïllant el temps de la primera equació

$$\boldsymbol{t = \frac{x}{16 \cos 30^\circ}}$$

i substituint en la segona

$$\boldsymbol{y = \cancel{16} \sin 30^\circ \cdot \frac{x}{\cancel{16} \cos 30^\circ} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{16 \cos 30^\circ}\right)^2}$$

que es pot escriure com

$$y = x\tan 30^\circ - \frac{g\sec^2 30^\circ}{512}\cdot x^2$$

o també

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{9,8}{3\cdot 128}x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{9,8}{384}x^2$$

En el cas que l'objecte sotmès al tir parabòlic es llancés des d'una altura arbitrària y_0, les equacions s'escriurien de la següent manera

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha t \\ y = y_0 + v_0\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = v_0\sin\alpha - gt \end{cases}$$

El temps de vol el trobarem demanant novament $y = 0$, la diferència amb el cas d'abans és que ara haurem de resoldre una equació de segon grau completa de la que obtindrem dos valors del temps, un positiu t_+ i un negatiu t_-. El temps de vol coincideix amb t_+. Per calcular l'altura màxima podem seguir explotant la simetria de la paràbola, però ara haurem de fer

$$y_{max} = y\left(\frac{t_+ + t_-}{2}\right)$$

Alternativament, tal com hem vist anteriorment, també podem demanar $v_y = 0$ i fer servir el temps obtingut a l'equació del moviment vertical.

Exemple 2
Es llança un objecte des d'una altura de $20\,m$ amb velocitat inicial $v = 30\,m/s$ que forma un angle de 30° amb l'horitzontal. Es demana trobar: temps de vol, abast màxim, altura màxima i velocitat total 1 segon abans que arribi al terra.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} x = 30\cos 30^\circ t \\ y = 20 + 30\sin 30^\circ t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 30\sin 30^\circ - gt \end{cases}$$

que es poden escriure com

$$\begin{cases} x = 25,98t \\ y = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v_y = 15 - gt \end{cases}$$

Calculem el temps de vol demanant $y = 0$

$$0 = 20 + 15t - \frac{1}{2}gt^2$$

reescrivint l'equació

$$gt^2 - 30t - 40 = 0$$

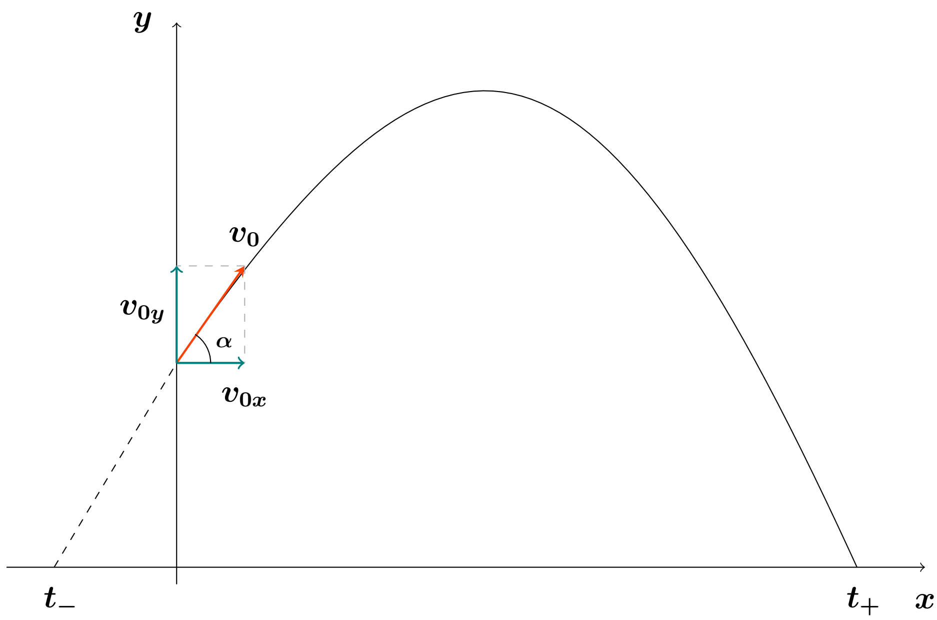
d'on

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 + 4 \cdot g \cdot 40}}{2g}$$

amb solucions $t_+ = 4,065\,s \quad t_- = -1,004\,s$. Com hem dit abans, la solució t_+ correspon al temps de vol, i tot seguit podem calcular l'abast màxim

$$x = 25,98 \cdot 4,065 = 105,61\,m$$

Tal com hem dit abans, per calcular l'altura màxima *no* podem fer servir el temps de vol tal qual dividint per dos com fèiem en el cas que l'objecte es llancés des del terra. Si volem aprofitar la simetria de la paràbola hem de buscar el valor del temps que es troba entre les dues solucions obtingudes.



Aquest valor és

$$\frac{t_+ + t_-}{2} = \frac{4,065 + (-1,004)}{2} = 1,5305\, s$$

llavors

$$y(1,5305) = 20 + 15 \cdot 1,5305 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (1,5305)^2 = 31,48\, m$$

També podíem haver demanat $v_y = 0$

$$0 = 15 - gt \rightarrow t = \frac{15}{g} = \frac{15}{9,8} = 1,5306\, s$$

la discrepància amb el valor obtingut abans es deu a l'arrodoniment. Finalment, com el temps de vol és $t_+ = 4,065\, s$ un segon abans d'arribar a terra correspon a $t = 3,065\, s$ i la velocitat total en aquest moment val

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{(25,98)^2 + (15 - 9,8 \cdot 3,065)^2} \\ &= 30,02\, m/s \end{aligned}$$

Exercicis

1. Suposeu que es llança des d'una altura $\boldsymbol{y_0}$ un objecte amb una velocitat $\boldsymbol{v_0}$ i un angle $\boldsymbol{\alpha}$ respecte l'horitzontal. Es demana trobar l'equació de la trajectòria, és a dir, la relació entre $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{x}$ en funció de $\boldsymbol{v_0}$ i $\boldsymbol{\alpha}$.

2. Es llança un objecte amb velocitat inicial $\boldsymbol{20\,m/s}$ i angle $\boldsymbol{45^o}$ respecte l'horitzontal. Es demana trobar:

   (a) Temps de vol.

   (b) Abast màxim.

   (c) Alçada màxima.

   (d) Velocitat total un segon abans d'arribar al terra.

   (e) Equació de la trajectòria.

3. Es dispara un projectil a l'aire des de la part més alta d'un barranc a $\boldsymbol{200\,m}$ d'alçada. La seva velocitat inicial és de $\boldsymbol{60\,m/s}$ i l'angle $\boldsymbol{60^o}$ respecte l'horitzontal. On caurà el projectil?

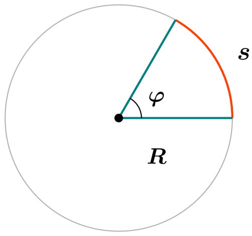
4. Un noi que està a $\boldsymbol{4}$ metres d'una paret vertical tira una pilota contra ella. La pilota surt de la seva mà a dos metres per sobre el terra amb una velocitat inicial $\boldsymbol{v = 10\sqrt{2}m/s}$ i un angle $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{4}\,rad}$. Quan la pilota xoca contra la paret, s'inverteix la component horitzontal de la seva velocitat. Calculeu on caurà la pilota.

5. Una pedra llançada horitzontalment des d'una torre xoca amb el terra a una distància de $\boldsymbol{18\,m}$ respecte la seva base. Sabent que l'altura de la torre es de $\boldsymbol{24\,m}$, trobeu amb quina velocitat es va llançar la pedra i la velocitat que té quan arribi al terra.

6. Un avió que vola a $\boldsymbol{100\,m}$ d'altura amb velocitat $\boldsymbol{300\,m/s}$ deixa caure un paquet, que volem que caigui exactament sobre una camioneta que circula en línia recta per una carretera en sentit contrari amb velocitat $\boldsymbol{20\,m/s}$. Es demana calcular quina ha de ser la separació inicial dels dos, mesurada al terra, per tal d'aconseguir el nostre propòsit.

3.3 Moviment circular

En aquesta secció estudiarem aquells casos en els que el moviment, o part d'aquest, descriu una circumferència. Sigui doncs una circumferència de radi $\boldsymbol{R}$ i un objecte que es pot moure al llarg d'aquesta. Suposem que aquest objecte s'ha mogut de forma que la seva posició i la d'abans descriuen un angle $\boldsymbol{\varphi}$ (*en radians*).



La relació que hi ha entre la longitud de l'arc ($\boldsymbol{s}$) recorregut per l'objecte i aquest angle és:

$$\boldsymbol{s = \varphi R}$$

on $\boldsymbol{R}$ es el radi de la circumferència. La velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$ es relaciona amb la lineal de forma semblant:

$$\boldsymbol{v = \omega R}$$

i l'acceleració angular $\boldsymbol{\alpha}$ amb la lineal (o tangencial):

$$\boldsymbol{a_t = \alpha R}$$

Els problemes de moviment circular es resolen aplicant les equacions (1), (2) i (3) de la secció 3.1 sense més que fer els canvis de magnituds lineals per angulars, és a dir que quedaran:

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0)} \tag{18}$$

Una novetat és que al tractar-se d'una trajectòria no rectilínia, apareix una altra component de l'acceleració, que s'anomena acceleració normal o centrípeta, donat que sempre està dirigida cap al centre de la circumferència. El seu mòdul val :

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} = \omega^2 R}$$

i com veiem és sempre diferent de zero si el cos no es troba aturat.

Exemple 1
Sigui un objecte que descriu un moviment circular de radi $\boldsymbol{R = 2\,m}$, suposem que parteix del repòs i es comença a moure amb acceleració $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}\,rad/s^2}$. Quant valen les velocitats angular i lineal al cap de **5** segons? I l'espai angular i lineal recorregut en aquest temps?

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} \varphi = 0 \cdot t + \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}t^2 \\ \omega = 0 + \frac{\pi}{3}t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}t^2 \\ \omega = \frac{\pi}{3}t \end{cases}$$

de forma que, als 5 segons, les velocitats angular i lineal valen

$$\omega = \frac{\pi}{3} \cdot 5 = \frac{5\pi}{3}\,rad/s; \quad v = \omega R = \frac{5\pi}{3} \cdot 2 = \frac{10\pi}{3}\,m/s = 10,47\,m/s$$

l'espai angular

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}(5)^2 = \frac{25\pi}{6}\,rad$$

i l'espai lineal recorregut

$$s = \varphi R = \frac{25\pi}{6} \cdot 2 = 26,18\,m$$

Exemple 2
Considerem un objecte que descriu un moviment circular de radi $\boldsymbol{R = 3\,m}$ i es mou amb $\boldsymbol{\omega = 10\pi\,rad/s}$. Suposant que frena amb acceleració $\boldsymbol{\alpha = \pi/2\,rad/s^2}$, es demana calcular el temps que tarda a aturar-se, les voltes que ha donat en total i les que dona els darrers quatre segons, així com l'acceleració centrípeta al cap de $\boldsymbol{2\,s}$ de començar a frenar.

Les equacions del moviment i la velocitat són

$$\begin{cases} \varphi = 10\pi t - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}t^2 \\ \omega = 10\pi - \frac{\pi}{2}t \end{cases}$$

quan s'atura és $\boldsymbol{\omega = 0}$, de forma que

$$0 = 10\pi - \frac{\pi}{2}t \rightarrow \frac{\cancel{\pi}}{2}t = 10\cancel{\pi} \rightarrow t = 20\,s$$

llavors, l'espai angular recorregut en aquest temps

$$\varphi = 10\pi \cdot 20 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}(20)^2 = 100\pi\, rad$$

i les voltes es poden calcular com

$$100\cancel{\pi\, rad} \cdot \frac{1\, volta}{2\cancel{\pi\, rad}} = 50\, voltes$$

Quan li falten $4\, s$ per aturar-se l'espai angular recorregut és

$$\varphi = 10\pi \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}(16)^2 = 96\pi\, rad$$

que corresponen a

$$96\cancel{\pi\, rad} \cdot \frac{1\, volta}{2\cancel{\pi\, rad}} = 48\, voltes$$

per tant als darrers $4\, s$ dona $50 - 48 = 2$ voltes. Finalment, per calcular l'acceleració centrípeta demanada farem servir

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

de manera que necessitem calcular abans la velocitat lineal al cap de 2 segons de frenar

$$\omega = 10\pi - \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 9\pi; \quad v = \omega R = 9\pi \cdot 3 = 27\pi = 84,82\, m/s$$

i

$$a_c = \frac{(84,82)^2}{3} = 2398,31\, m/s^2$$

Exemple 3
Sigui un objecte que descriu un moviment circular de radi $R = 1\, m$ i es mou amb velocitat angular $1200\, rpm$. Sabent que triplica la seva velocitat en $20\, s$, calculeu les components instrínseques de l'acceleració al principi i al final del procés, així com la total.

Passem primer la velocitat a rad/s

$$1200\, rpm = 1200\, \frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \frac{2\pi\, rad}{1\cancel{rev}} \cdot \frac{1\cancel{min}}{60\, s} = 40\pi\, rad/s$$

L'acceleració angular ($\boldsymbol{\alpha}$), que tota l'estona és la mateixa, es pot calcular a partir de

$$\boldsymbol{\omega = \omega_0 + \alpha t}$$

d'on

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{3 \cdot 40\pi - 40\pi}{20} = 4\pi \, rad/s^2}$$

i l'acceleració tangencial val

$$\boldsymbol{a = \alpha R \rightarrow a = 4\pi \cdot 1 = 12,57 \, m/s}$$

L'acceleració centrípeta val, a l'inici

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (40\pi)^2 \cdot 1 = 15791,4 \, m/s^2}$$

de forma que la total serà doncs en aquest moment

$$\boldsymbol{a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{12,57^2 + 15791,4^2} = 15791,4 \, m/s^2}$$

Veiem que el valor de l'acceleració centrípeta *domina* sobre el resultat perquè és molt més gran que l'angular.

Quant han passat els **20** $\boldsymbol{s}$, l'acceleració tangencial és la mateixa, ja que no depèn del temps, en canvi, l'acceleració centrípeta val ara

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (120\pi)^2 \cdot 1 = 1,42 \cdot 10^5 \, m/s^2}$$

La total serà doncs en aquest moment

$$\boldsymbol{a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{12,57^2 + (1,42 \cdot 10^5)^2} = 1,42 \cdot 10^5 \, m/s^2}$$

Exercicis

1. Una partícula descriu una moviment circular de 5 metres de radi amb velocitat constant de 15 m/s. Quan val la seva acceleració?

2. Considerem un objecte que descriu un moviment circular de radi $\boldsymbol{R = 10\,m}$. Si parteix del repòs i es mou amb acceleració $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{5}\,rad/s^2}$. Es demana calcular les velocitats angular i lineal al cap de **10** segons i l'espai angular i lineal recorregut en aquest temps.

3. Considerem un objecte que descriu un moviment circular de radi $\boldsymbol{R = 1\,m}$ i es mou amb $\boldsymbol{\omega_0 = 2\pi\,rad/s}$. Suposant que accelera amb $\boldsymbol{\alpha = \pi\,rad/s^2}$, es demana calcular el temps que tarda a fer **100** voltes, així com l'acceleració centrípeta al principi i final del moviment.

4. Considereu un disc de radi $\boldsymbol{R = 2\,m}$ que, partint del repòs, arriba a una velocitat angular de $\boldsymbol{\frac{1356}{71}\,rpm}$ en $\boldsymbol{10\,s}$. Es demana calcular les components intrínseques de l'acceleració i l'acceleració total quan porta $\boldsymbol{8\,s}$ en moviment.

5. Un objecte situat a l'equador té una acceleració dirigida cap al centre de la Terra degut a la rotació terrestre i una acceleració dirigida cap al Sol degut al moviment de la Terra en la seva òrbita. Calculeu els mòduls de les dues acceleracions i expresseu-los com fraccions de l'acceleració de la gravetat $\boldsymbol{g}$.

   Dades: Radi de la Terra= 6740 km. Distància Terra-Sol= 150.000.000 km.

4 Dinàmica del punt

4.1 Lleis de Newton

Així com la cinemàtica s'ocupa de l'estudi del moviment dels cossos sense atendre a les causes que l'han produït, la dinàmica estudia precisament aquestes causes que, habitualment, seran forces i la qüestió fonamental serà relacionar aquestes amb el comportament del cossos sobre els quals s'apliquen. El pilar teòric sobre el qual s'edifica la dinàmica són les anomenades Lleis de Newton.

1ª Llei de Newton (Llei d'inèrcia)

Un cos roman en el seu estat inicial de repòs o moviment amb velocitat uniforme a no ser que pateixi l'acció d'una força externa que el desequilibri.

2ª Llei de Newton *L'acceleració d'un cos és inversament proporcional a la seva massa i directament proporcional a la força externa resultant que actua sobre ell.*

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

3ª Llei de Newton (Llei d'acció i reacció)

Les forces sempre es presenten per parells. Si un cos A exerceix una força sobre un cos B, el cos B exercirà una força igual però oposada sobre el cos A.

La formulació de les lleis és aparentment senzilla, però en realitat tenen molt contingut. Per tal d'evitar confusions, comentarem amb un cert detall cadascuna d'elles.

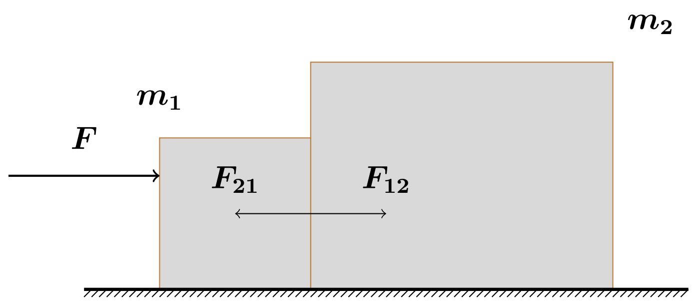
1ª Llei de Newton (comentada) El que ens diu aquesta llei és que si la velocitat d'un cos canvia, necessàriament hi ha alguna força aplicada sobre ell. S'ha de tenir present que la velocitat pot canviar independentment en mòdul, direcció i sentit.

2ª Llei de Newton (comentada) Aquesta llei és la que a la pràctica farem servir, donat que proporciona una relació explícita entre la massa (massa inercial) d'un cos i l'acceleració que adquireix en aplicar-li una força. Cal tenir present, que aquesta força pot ser la resultant (i de fet, sovint serà així) d'un sistema de forces més complex. Al ser les forces objectes vectorials, cal sumar-les com a tals.

3ª Llei de Newton (comentada) Aquesta és potser la que causa més confusions. S'ha de tenir en compte que els parells de forces que esmenta actuen sempre sobre cossos diferents. Per comoditat sovint ignorarem un dels parells de les forces en els problemes, donat que les que ens interessaran són les forces que actuen sobre un cos determinat. S'haurà de tenir molta cura a no considerar parells acció-reacció a forces que no ho són.

Exemple 1
Dos cossos de masses $m_1 = 2\,kg$, $m_2 = 10\,kg$ es troben en contacte sobre una superfície horitzontal sense fregament. Sobre el cos més lleuger fem una força, paral·lela al pla on es troben, de valor $F = 24\,N$ de forma que aquest empeny l'altre. Volem determinar les forces de contacte entre els cossos.

Anomenarem F_{12} la força que fa el cos de massa m_1 sobre l'altre. Llavors, per la tercera llei de Newton, el cos de massa m_2 fa una força sobre l'altre cos amb igual direcció i mòdul però de sentit oposat. Anomenem-la F_{21}.



Apliquem la segona llei de Newton al conjunt per obtenir,

$$F = (m_1 + m_2)a; \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{24}{12} = 2\,m/s^2$$

Ara podem aplicar la segona llei de Newton al segon cos

$$F_{12} = m_2 a = 10 \cdot 2 = 20\,N = F_{21}$$

Alternativament podríem haver aplicar la segona llei de Newton al cos 1 segons

$$F - F_{21} = m_1 a$$

per trobar

$$F_{21} = F - m_1 a = 24 - 2 \cdot 2 = 20\,N = F_{12}$$

És preferible aplicar el primer mètode, sobretot quan hi ha més de dos cossos en contacte. Si, per exemple en tinguéssim tres, el que faríem és, després de trobar l'acceleració, aplicar la segona llei de Newton al més allunyat de la força externa, després al conjunt d'ell i l'anterior i així de forma recursiva.

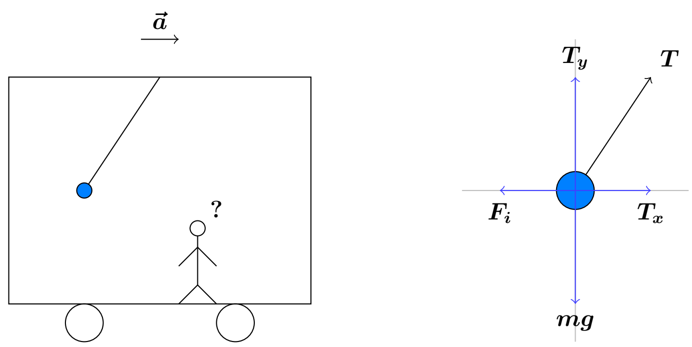
4.2 Forces fictícies

Normalment, per tal d'estudiar el moviment d'un cos, serà convenient referir la seva posició a un sistema de referència. Habitualment, hi ha més d'un possible, i part de la feina al resoldre els exercicis és triar el que sigui més convenient. Sovint n'hi ha algun en el que les equacions del moviment s'escriuen de la forma més simple possible.

Sistemes de referencia inercials i no inercials. Direm que un sistema de referència és *inercial* si no està accelerat. Per contra, un sistema de referència és *no inercial* si està accelerat. La característica principal dels sistemes de referencia no inercials és que en ells les lleis de Newton aparentment no es compleixen. Per tal que es compleixin, cal introduir en el sistema forces que en realitat no existeixen. Per això, aquestes forces s'anomenen *forces fictícies*. Les forces fictícies són:

Força d'inèrcia Aquesta força apareix, per exemple, quan volen descriure el que succeeix amb un pèndol penjat del sostre d'un vehicle quan aquest accelera. Des de l'interior del cotxe, (que no és un sistema de referencia inercial, ja que està accelerat) només podem explicar el fet que el pèndol quedi inclinat amb ajut d'una *força d'inèrcia* que fa que el pèndol es desviï de la vertical.

Sistema no inercial

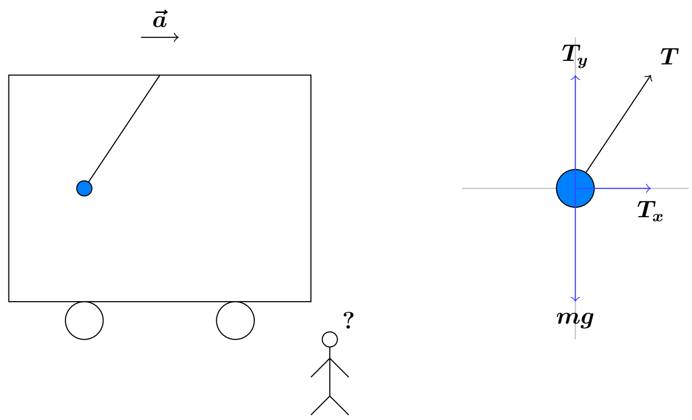


L'observador que es troba dins el vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} \boldsymbol{T_y} = \boldsymbol{mg} \\ \boldsymbol{T_x} = \boldsymbol{F_i} \end{cases}$$

Si descrivim el problema des de fora del cotxe, a terra, quiets, que és un sistema de referencia inercial, (això no és del tot cert, ¿per què?), aleshores el que raonem és que en realitat el pèndol s'inclina per proporcionar l'acceleració necessària per seguir al cotxe. No és necessari introduir cap força estranya.

Sistema inercial

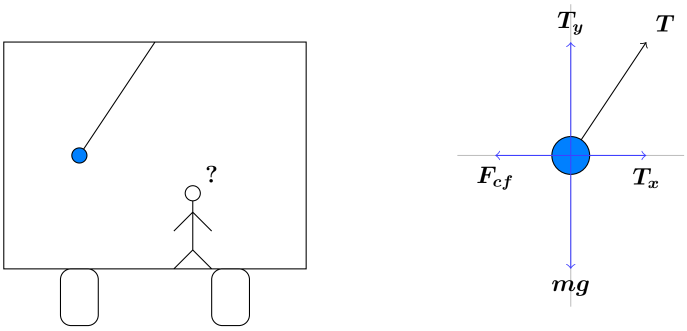


L'observador que es troba a l'exterior del vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} \boldsymbol{T_y} = \boldsymbol{mg} \\ \boldsymbol{T_x} = \boldsymbol{ma} \end{cases}$$

Força centrífuga Aquesta força apareix, per exemple, si volem descriure les sensacions que tenim dins un vehicle quan agafa un revolt. Encara que la seva velocitat sigui constant, com la direcció d'aquesta canvia, necessàriament hi ha d'haver una acceleració (per la primera llei de Newton). Des de dins del vehicle pensem que hi ha una força que ens empeny *cap a fora de la corba*, i l'anomenem força centrífuga. De forma semblant al cas en el que el vehicle accelerava en línia recta, ara un pèndol penjat al sostre es desviarà de la vertical cap a l'exterior de la corba.

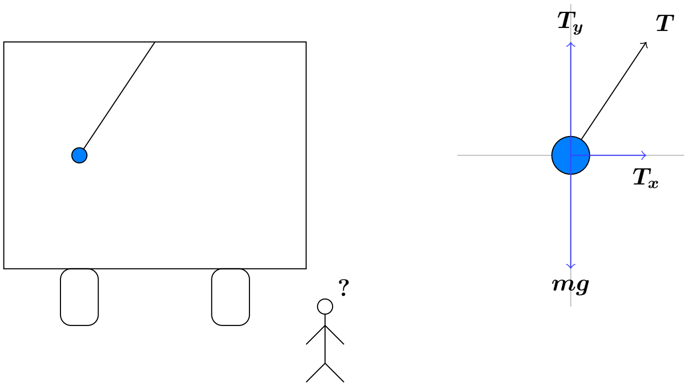
Sistema no inercial



L'observador que es troba a l'interior del vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} T_y = mg \\ T_x = F_{cf} \end{cases}$$

Si ens ho mirem des de l'exterior, el que comprenem és que en realitat hi ha d'haver una força que faci possible que el vehicle descrigui la corba. Normalment aquesta força prové del fregament de les rodes amb el terra, encara que també es pot peraltar la corba, i d'aquesta manera, com veurem més endavant a la secció 4.10, s'aconsegueix que la *normal* la proporcioni. Com aquesta força va dirigida sempre cap el centre de l'arc que descriu el mòbil, s'anomena *força centrípeta*, i aquesta, sí que és real. Tal com vam veure a 2.7, aquesta força proporciona l'acceleració centrípeta necessària per canviar la direcció de la velocitat.



L'observador que es troba a l'exterior del vehicle escriuria les següents equacions

$$\begin{cases} T_y = mg \\ T_x = ma_c \end{cases}$$

Força de Coriolis Aquesta força fictícia sorgeix en sistemes de referencia que giren al voltant d'un eix. Només la comentarem de forma qualitativa.

4.3 La tensió

Convindrem en anomenar *tensió* a qualsevol força que es transmet a través d'un cable o corda. Sovint ignorarem la seva massa i suposarem que són inextensibles.

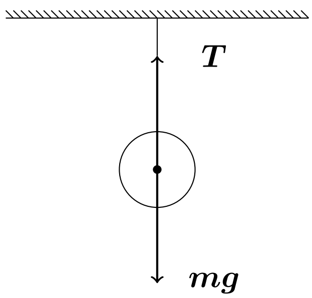
4.4 Diferència entre massa i pes

Al llarg de tot el tema de dinàmica hem de tenir en tot moment present que *massa* i *pes* són magnituds diferents. La relació entre elles és la coneguda expressió

$$\boldsymbol{P = mg}$$

on $\boldsymbol{g}$ és el valor de la gravetat (típicament $\boldsymbol{9,8\, m/s^2}$). La massa és una propietat dels cossos que no depèn del camp gravitatori i que d'alguna manera, mesura la inèrcia d'un cos per ser accelerat. És mesura en **kg**. El pes és la força, (es mesura en **N**), amb que és atreta una determinada massa per un camp gravitatori, per exemple, el terrestre.

Exemple 2
Un llum de massa $\boldsymbol{m = 2\, kg}$ penja del sostre mitjançant un cable. Calculeu el pes del llum i la tensió del cable.



El pes val

$$\boldsymbol{P = mg = 2 \cdot 9,8 = 19,6\ N}$$

i la tensió del cable és

$$\boldsymbol{T = mg = 19,6\ N}$$

ja que el llum està quiet (en el sistema inercial del recinte on es troba penjat).

4.5 La força normal

És habitual tractar situacions en les que un objecte es troba recolzat sobre una superfície o fins i tot sobre un altre objecte en moviment. Si imaginem un objecte de massa $\boldsymbol{m}$ que es troba sobre una taula, hem de pensar que hi ha d'haver alguna força que compensi la de la gravetat, causant del pes ($\boldsymbol{P = mg}$), de l'objecte. Això és conseqüència de la primera llei de Newton, ja que si només hi fos el pes, el cos hauria d'estar movent-se cap abaix. Aquesta força (dirigida perpendicularment a la superfície de suport) rep el nom de *força normal*. El primer que hem de notar és que *pes* i *normal* **no** són un parell acció-reacció, i que la *normal* equilibra al *pes* només si el cos no està accelerat.

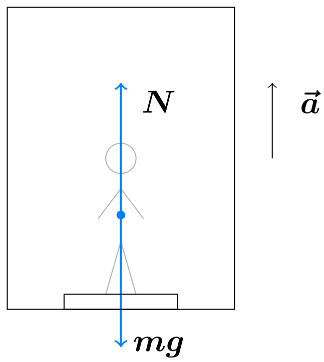
Exemple 3
Suposem que dins un ascensor hi ha una persona de massa $\boldsymbol{m = 75\ kg}$ dalt una balança. Volem conèixer la lectura de la balança en els següents casos:

1. L'ascensor puja amb acceleració $\boldsymbol{a = 2\, m/s^2}$
2. L'ascensor baixa amb acceleració $\boldsymbol{a = 3\, m/s^2}$
3. L'ascensor puja amb velocitat constant

Les úniques forces que hi ha aplicades sobre la persona són: el seu pes i la normal que fa la balança sobre ell. Precisament el que mesura la balança és aquesta darrera força (no el pes ni la massa). En cada cas el sentit de l'acceleració ens proporciona un criteri de signes, és a dir les forces que van en el mateix sentit que l'acceleració es consideren positives, i les que van en sentit contrari, negatives. Aquest detall és important i s'aplicarà en tots els exemples i exercicis de dinàmica.

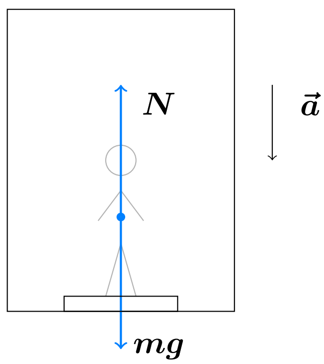
1. Apliquem la segona llei de Newton a la persona per obtenir

$$N - mg = ma; \quad N = ma + mg = 885\,N$$



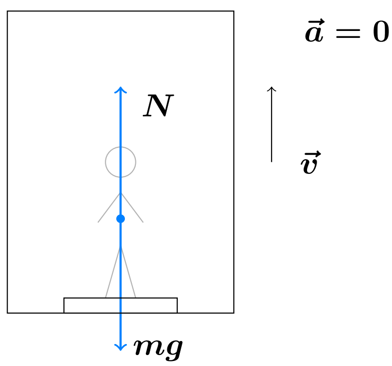
2. De forma semblant a l'apartat anterior

$$mg - N = ma; \quad N = mg - ma = 510\,N$$



3. Finalment,

$$N - mg = m \cdot 0 \quad N = mg = 75 \cdot 9,8 = 735\,N$$



4.6 Forces de fregament

Suposem que tenim una taula de fusta i sobre ella tres cossos que tenen la mateixa massa i superfície de contacte amb la taula però estan fets de diferents materials. Suposem que un està fet de goma, un altre de vidre, i l'altre de fusta. Sembla clar que no serà igual de fàcil arrossegar un o altre. Quin creieu que costa més? I quin menys? El que controla aquestes diferències és la força de fregament, que en cada cas tindrà un valor diferent. La força de fregament apareix en intentar moure objectes en contacte. Té un valor màxim, que depèn de la *normal* i d'un coeficient experimental que es representa amb la lletra $\boldsymbol{\mu}$. En general és $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\mu} \leq \mathbf{1}$. Experimentalment es comprova que és

$$\boldsymbol{F_f = \mu N}$$

La força de fregament és pràcticament independent de la superfície en contacte. A més, hem de distingir entre un coeficient de fregament estàtic $\boldsymbol{\mu_s}$, quan encara no hem aconseguit posar en moviment l'objecte, i un dinàmic $\boldsymbol{\mu_d}$, quan ja està en moviment. En general és $\boldsymbol{\mu_s > \mu_d}$, d'acord amb l'experiència habitual de que costa més posar en moviment un objecte, que seguir-lo movent després. La força de fregament sempre s'oposa al sentit del moviment que pretenem imposar als objectes.

Exemple 4
Sigui un objecte de massa $\boldsymbol{m = 10\,kg}$ que es vol arrossegar empenyent-lo amb una força $\boldsymbol{F}$. Suposem que el coeficient de fregament estàtic $\boldsymbol{\mu_s}$ val $\mathbf{0,9}$ i el dinàmic $\boldsymbol{\mu_d}$ val 0,5. Es demana calcular l'acceleració amb que es mou en els següents casos:

1. El cos està quiet i la força aplicada val $\boldsymbol{F = 87\,N}$
2. El cos està quiet i la força aplicada val $\boldsymbol{F = 90\,N}$
3. El cos es troba en moviment i la força $\boldsymbol{F}$ baixa de $\boldsymbol{90\,N}$ a $\boldsymbol{45\,N}$

1. En aquest cas la força de fregament té com a valor (màxim)

$$\boldsymbol{F_f = \mu_s N = \mu_s mg = 0,9 \cdot 10 \cdot 9,8 = 88,2\,N}$$

Com la força aplicada val $\boldsymbol{F = 87\,N}$, la de fregament s'adaptarà a aquest valor i el cos no es mourà.

2. La força aplicada $\boldsymbol{F = 90\,N}$ supera el valor del fregament estàtic i per tant el cos es començarà a moure. Ara bé, en el moment que comença a moure's la força de fregament canvia (perquè hem de tenir en compte el coeficient de fregament dinàmic) al valor

$$\boldsymbol{F_f = \mu_d N = \mu_d m g = 0,5 \cdot 10 \cdot 9,8 = 49\, N}$$

i per tant, l'acceleració amb que es mourà es pot calcular com

$$\boldsymbol{F - F_f = ma \rightarrow a = \frac{F - F_f}{m} = \frac{90 - 49}{10} = 4,1\, m/s^2}$$

3. Si s'està movent i la força baixa a $\boldsymbol{45\, N}$, com que el fregament dinàmic és més gran, el cos s'aturarà i immediatament el fregament tornarà a pujar al seu valor estàtic fins a $\boldsymbol{88,2\, N}$.

Exercicis introductoris

1. Trobeu les forces de contacte de l'*exemple 1* suposant ara que la força s'aplica al cos més massiu. Discutiu el resultat sorprenent.

2. Suposem que s'estiren tres vagons idèntics de massa $\boldsymbol{m = 100\, kg}$ amb una força de $\boldsymbol{F = 10000\, N}$. Es demana calcular la força que fan les unions entre el primer i el segon vagó, i entre el segon i el tercer.

3. Siguin tres cossos de masses $\boldsymbol{m_1 = 10\, kg}$, $\boldsymbol{m_2 = 11\, kg}$ i $\boldsymbol{m_3 = 12\, kg}$ que es troben en contacte sobre una superfície horitzontal sense fregament. Apliquem sobre el cos 1 una força de $\boldsymbol{200\, N}$ de forma que es mouen tots junts. Es demana trobar les forces de contacte entre tots els cossos.

4. Sobre un cos que té una massa $\boldsymbol{40\, kg}$ i descansa en un pla horitzontal, actua una força horitzontal i constant de $\boldsymbol{100\, N}$. Quina acceleració té el cos? Quant valdrà la velocitat als 2 s?

5. Fem una força de $\boldsymbol{200\, N}$ sobre un cos que descansa en un pla horitzontal. El cos assoleix una acceleració constant de $\boldsymbol{2\, m/s^2}$. Quant val la massa del cos? Quin desplaçament ha fet el cos en 10 s?

6. Un cos que està damunt d'una superfície horitzontal i que inicialment està en repòs, recorre $\boldsymbol{30\, m}$ en $\boldsymbol{20\, s}$. Calculeu la força que ha actuat sobre el cos si aquest té una massa de $\boldsymbol{80\, kg}$

7. Un cotxe, de massa $\boldsymbol{1300\, kg}$, va a $\boldsymbol{72\, km/h}$ i s'atura en $\boldsymbol{60\, m}$. Calculeu la força de frenada, suposada constant, que ha actuat sobre el cotxe.

8. Es fa una força de $\boldsymbol{150\, N}$ sobre un cos de $\boldsymbol{100\, kg}$ de massa. Quina velocitat tindrà al cap de $\boldsymbol{8\, s}$? Si al cap de $\boldsymbol{10\, s}$ d'haver iniciat el moviment deixa d'actuar aquesta força, quin desplaçament farà el cos en els $\boldsymbol{5\, s}$ posteriors?

9. Un muntacàrregues de massa $\boldsymbol{1200\, kg}$ puja amb una acceleració constant d'$\boldsymbol{1\, m/s^2}$. Quant val la força que fa el cable?

Exercicis introductoris

10. Aixequem un cos de $\mathbf{10\,kg}$ de massa mitjançant un fil. Si la tensió de ruptura del fil és de $\mathbf{200\,N}$, quina és la màxima acceleració amb què es pot aixecar el cos sense que es trenqui el fil?

11. Un bomber de $\mathbf{70\,kg}$ baixa lliscant per un pal. Si la seva acceleració és de $\mathbf{3\,m/s^2}$, quina força vertical fa el pal sobre el bomber?

12. Per tal que una caixa de fusta de $\mathbf{120\,kg}$, recolzada sobre el terra, comenci a moure's es necessita una força de $\mathbf{500\,N}$ Calculeu el coeficient estàtic de fricció entre la caixa i el terra.

13. Calculeu el pes d'una caixa sabent que per arrossegar-la per terra s'ha de fer una força de $\mathbf{800\,N}$ i el coeficient estàtic de fricció és $\mathbf{0,8}$.

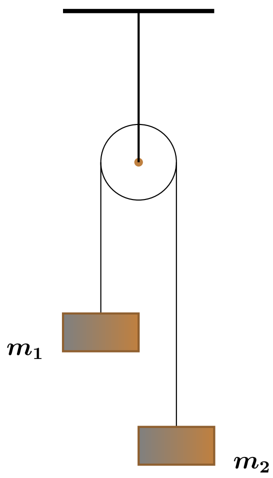
14. Els coeficients estàtic i cinètic de fricció entre un cos i el terra són $\mathbf{0,4}$ i $\mathbf{0,3}$ respectivament. La massa de l'objecte és de $\mathbf{60\,kg}$. Calculeu si amb una força de $\mathbf{300\,N}$ podríem moure'l. En cas afirmatiu, calculeu l'acceleració.

15. Es llança un bloc de gel de $\mathbf{2\,kg}$ sobre una superfície gelada amb una velocitat de $\mathbf{15\,m/s}$ i recorre $\mathbf{97,8\,m}$ abans d'aturar-se. Calculeu el coeficient de fregament i l'acceleració.

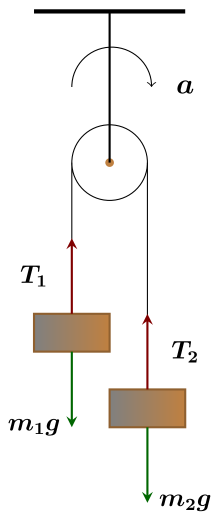
16. Arrosseguem un objecte de massa $\mathbf{10\,kg}$ amb una força de $\mathbf{300\,N}$. Si el coeficient de fregament val $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0,3}$, calculeu la força de fregament i l'acceleració amb que es mou.

4.7 Cossos enllaçats

Un cas inicial senzill per explicar aquesta part del tema és l'anomenada *màquina d'Atwood*, que consisteix en dues masses lligades per una corda que passa per una politja. En tots els casos que segueixen considerarem que les politges no tenen massa ni fregament, i suposarem que les cordes són inextensibles i tampoc tenen massa. Volem trobar l'acceleració del sistema.



Representem les forces que actuen sobre les masses, el seu pes, i la tensió de la corda. Definim un sentit de gir (arbitrari), i llavors podem escriure la segona llei de Newton per cadascuna de les masses.



Amb el criteri de signes donat per l'acceleració, pel cos de l'esquerra tenim

$$\boldsymbol{T_1 - m_1 g = m_1 a}$$

i pel de la dreta

$$\boldsymbol{m_2 g - T_2 = m_2 a}$$

Tenint en compte les suposicions que hem fet abans de que la corda no tenia massa i era inextensible, podem suposar que les dues tensions a banda i banda de la politja valen el mateix, per exemple $\boldsymbol{T}$. Llavors, les equacions anteriors s'escriuen

$$\boldsymbol{T - m_1 g = m_1 a\,;\quad m_2 g - T = m_2 a}$$

i sumant-les obtenim

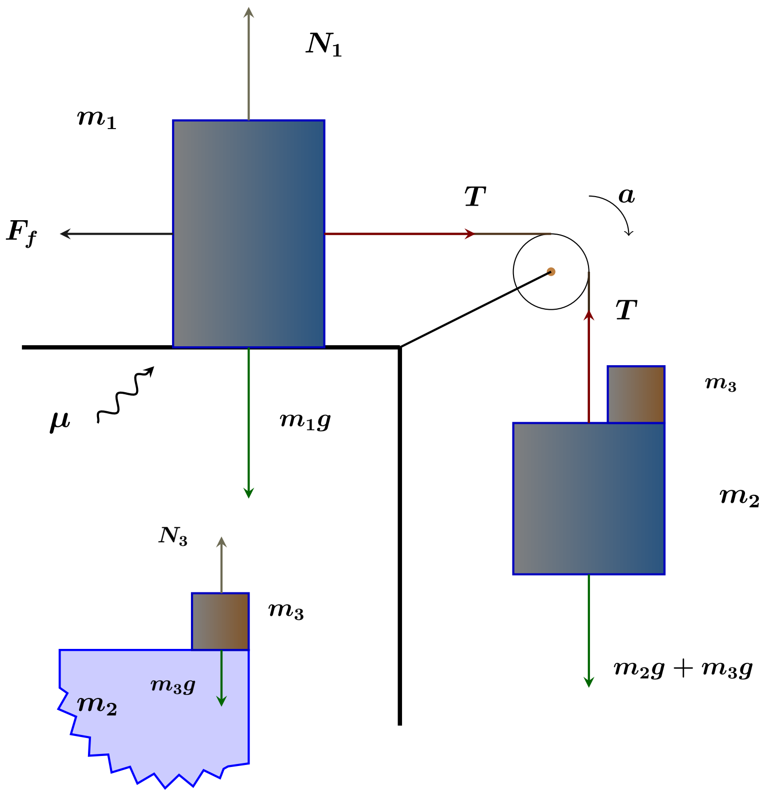
$$\boldsymbol{m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a}$$

d'on

$$\boldsymbol{a = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2} = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}$$

Notem que si al posar els valors de les masses el resultat sortís negatiu, interpretarem que el sistema es mou en sentit contrari, amb la mateixa acceleració obtinguda, en valor absolut.

Considerem ara el següent sistema dinàmic, pel qual volem calcular l'acceleració i la força que fa $\boldsymbol{m_2}$ sobre $\boldsymbol{m_3}$.



És fàcil comprovar que en aquest cas el sentit de moviment del sistema no es pot triar ja que ve determinat per la configuració de les masses. Aplicant la segona llei de Newton a $\boldsymbol{m_1}$ tenim

$$\boldsymbol{N_1 = m_1 g\,; \quad T - F_f = m_1 a}$$

de forma semblant, aplicant-la ara al conjunt $\boldsymbol{m_2}$, $\boldsymbol{m_3}$

$$\boldsymbol{(m_2 + m_3)g - T = (m_2 + m_3)a}$$

Les dues equacions del cos 1 es poden reescriure com una de la forma

$$\boldsymbol{T - \mu N_1 = m_1 a \Rightarrow T - \mu m_1 g = m_1 a}$$

i finalment pel sistema dinàmic hem de resoldre

$$\boldsymbol{\begin{cases} T - \mu m_1 g = m_1 a \\ \\ (m_2 + m_3)g - T = (m_2 + m_3)a \end{cases}}$$

Sumant les equacions tenim

$$\boldsymbol{(m_2 + m_3)g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2 + m_3)a}$$

d'on

$$\boldsymbol{a = g\frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3}}$$

En quant a $\boldsymbol{m_3}$, podem aplicar la segona llei de Newton sobre ell per obtenir

$$\boldsymbol{m_3 g - N_3 = m_3 a}$$

d'on la força ($\boldsymbol{N_3}$) que fa $\boldsymbol{m_2}$ sobre ell val

$$\boldsymbol{N_3 = m_3 g - m_3 a = m_3 g - m_3 g\frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} =}$$

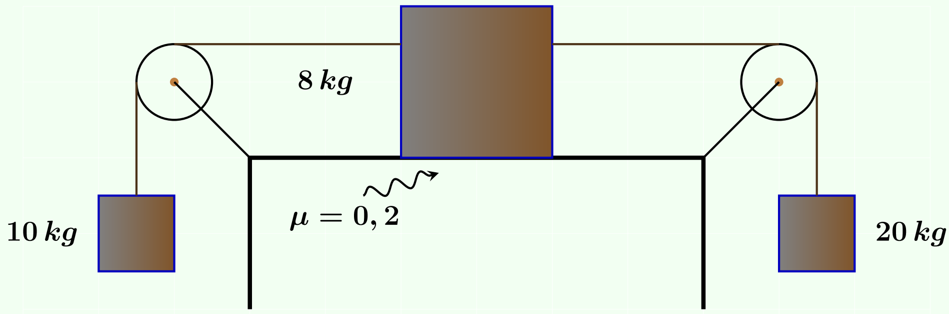
$$\boldsymbol{= m_3 g\left(1 - \frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right) = m_3 g\frac{m_1(1 + \mu)}{m_1 + m_2 + m_3}}$$

Exercicis

1. Resoleu l'exemple de la màquina d'Atwood prenent els següents valors: $\boldsymbol{m_1 = 4\,kg}$, $\boldsymbol{m_2 = 2\,kg}$

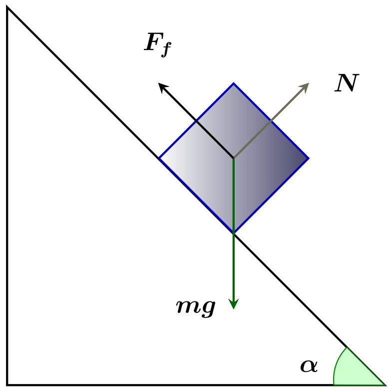
2. Resoleu l'altre exemple de la teoria prenent els següents valors: $\boldsymbol{m_1 = 3\,kg}$, $\boldsymbol{m_2 = 5\,kg}$, $\boldsymbol{m_3 = 1\,kg}$, $\boldsymbol{\mu = 0,2}$

3. Trobeu l'acceleració del següent sistema dinàmic:

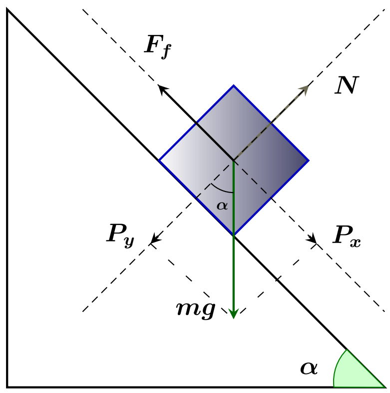


4.8 El pla inclinat

El coneixement del pla inclinat com a sistema dinàmic és fonamental per poder seguir avançant en aquest tema i posteriors. L'estudi que se'n fa depèn d'uns mínims coneixements de trigonometria i de l'aplicació correcta de la segona llei de Newton al conjunt de forces que hi apareixen. En el cas més senzill considerem un objecte de massa $\boldsymbol{m}$ situat sobre un pla inclinat un angle $\boldsymbol{\alpha}$ respecte l'horitzontal. Assumirem que el coeficient de fregament entre el pla i l'objecte val $\boldsymbol{\mu}$.



Per poder resoldre el problema posarem uns eixos coordenats d'acord amb la força normal i la de fregament, de manera que haurem de descomposar la força pes. Llavors podrem aplicar la segona llei de Newton a cada eix independentment.



En l'eix vertical escriurem la condició d'equilibri que correspon a que la força normal equilibra la component vertical del pes

$$\boldsymbol{N = P_y \Rightarrow N = mg\cos\alpha}$$

en l'eix horitzontal, la segona llei de Newton s'escriu

$$\boldsymbol{P_x - F_f = ma \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu N = ma}$$

de forma que finalment tenim

$$\boldsymbol{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma}$$

aquesta expressió no depèn de la massa (suposant que és diferent de zero) i podem escriure

$$\boldsymbol{a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

En el cas que no hi hagi fregament n'hi ha prou de fer $\boldsymbol{\mu = 0}$ a l'expressió anterior per obtenir

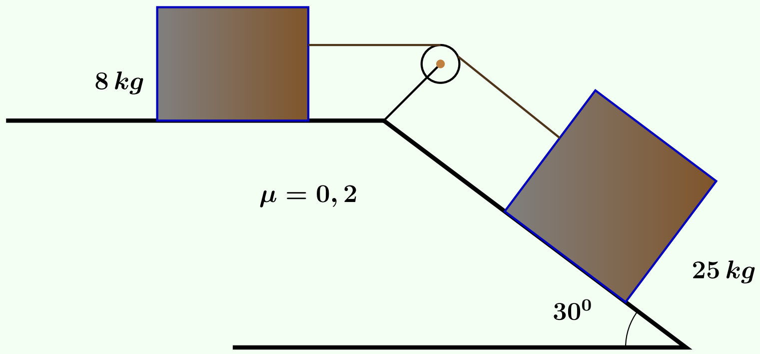
$$\boldsymbol{a = g\sin\alpha}$$

Als exercicis que trobarem a continuació es combinen plans inclinats amb el que hem vist a l'anterior apartat de cossos enllaçats.

Exercicis

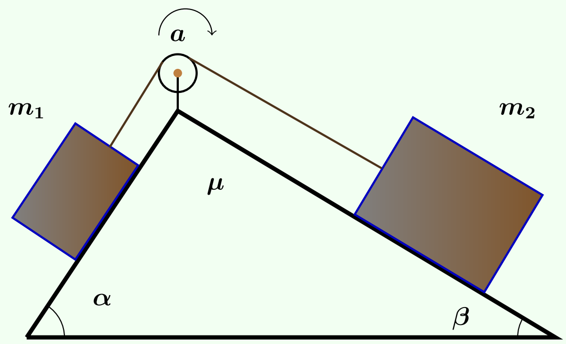
1. Resoleu l'exemple del pla inclinat prenent els següents valors: $\boldsymbol{\alpha = 30^o}$, $\boldsymbol{\mu = 0,2}$.

2. Treballant de forma algebraica i fent servir els valors numèrics exclusivament al final, trobeu l'acceleració del següent sistema dinàmic:



3. Demostreu que l'acceleració del següent sistema dinàmic ve donada per:

$$a = g\frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha - \mu m_2 \cos\beta - \mu m_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}$$



4.9 Dinàmica del moviment circular

Hem de recordar la part final del capítol de cinemàtica en la qual parlàvem de moviment circular. Allà vam veure que en qualsevol moviment que no fos rectilini hi havia una acceleració centrípeta o normal, de valor

$$\boldsymbol{a_c} = \boldsymbol{a_n} = \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{R}$$

on $\boldsymbol{v}$ és la velocitat lineal de l'objecte que es mou, $\boldsymbol{\omega}$ la velocitat angular i $\boldsymbol{R}$ el radi de curvatura, que en principi podria dependre del temps, però que en aquest apartat suposarem constant. És a dir, volem estudiar la dinàmica d'objectes que es mouen descrivint un cercle de radi $\boldsymbol{R}$. En aquest cas, la segona llei de Newton s'escriu

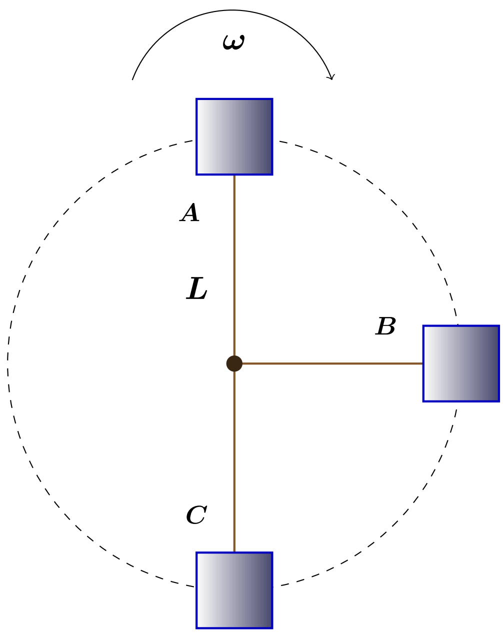
$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{a_c}$$

Prendrem com a sentit positiu les forces que estiguin dirigides cap el centre de gir, i com a sentit negatiu les que estiguin dirigides "cap enfora".

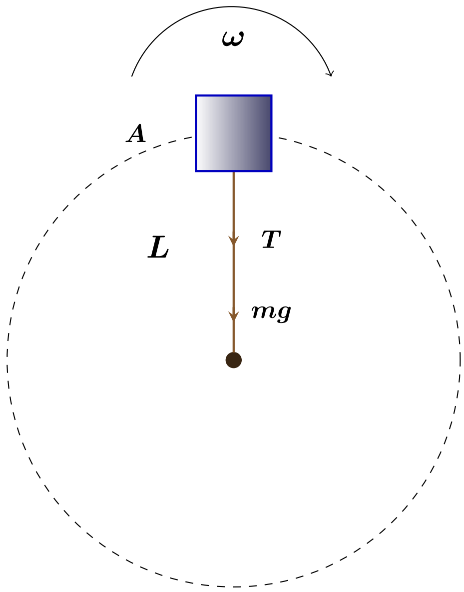
Presentarem un seguit d'exemples per tal de veure com es resolen aquest tipus de problemes.

Exemple 1

Considerem un objecte de massa $\boldsymbol{m}$ que gira en un pla vertical amb velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$, lligat a una corda de longitud $\boldsymbol{L}$. Es vol saber el valor de la tensió de la corda als punt indicats.



En el cas que la massa es troba en el punt $\boldsymbol{A}$, tenim



de forma que la segona llei de Newton $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{m a_c}$, s'escriu

$$\boldsymbol{T + mg = ma_c \Rightarrow T + mg = m\omega^2 L}$$

i llavors, la tensió val

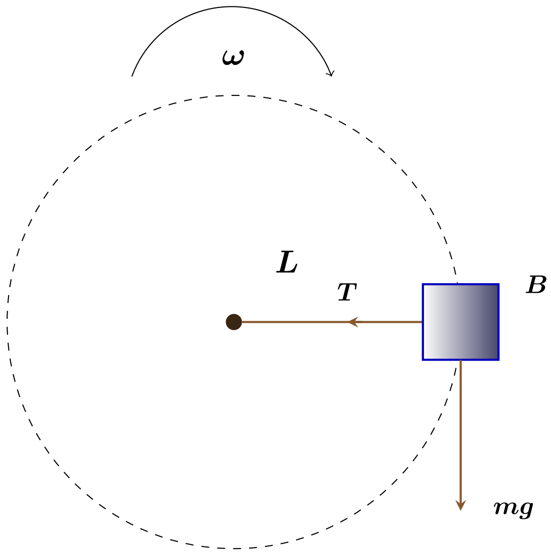
$$\boldsymbol{T = m\omega^2 L - mg}$$

Veiem que, quan la massa es troba dalt de tot, el pes *col·labora* a proporcionar força centrípeta de manera que tenim el valor mínim de la tensió en tot el recorregut circular de la massa.

D'una altra banda, com sabem que és $\boldsymbol{v = \omega L}$, també podem escriure el resultat per la tensió de la corda en funció de la velocitat lineal, de la següent manera

$$\boldsymbol{T = m\frac{v^2}{L} - mg}$$

En el cas que la massa es troba en el punt $\boldsymbol{B}$, tenim



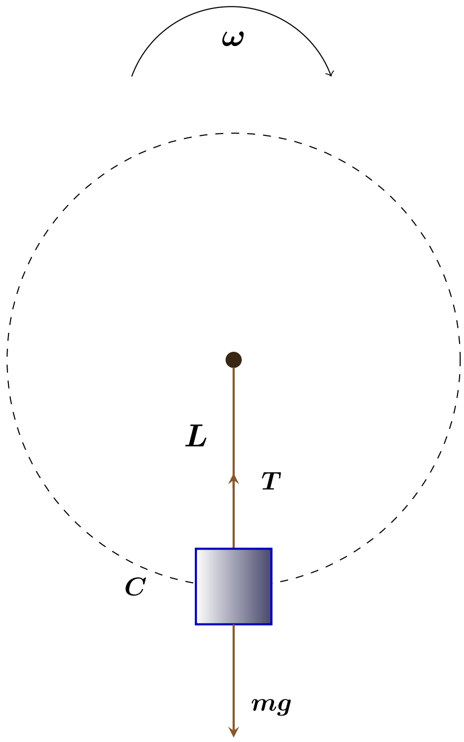
Ara la força pes es tangencial a la trajectòria i per tant, no contribueix a la força centrípeta. Diem que la tensió i el pes estan *desacoblats*. Només la tensió proporciona força centrípeta. Tenim que

$$\boldsymbol{T = ma_c \Rightarrow T = m\omega^2 L}$$

o, en funció de la velocitat lineal de la massa

$$\boldsymbol{T = m\frac{v^2}{L}}$$

En el cas que la massa es troba en el punt $\boldsymbol{C}$, tenim



Ara, la segona llei de Newton $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{m a_c}$, s'escriu

$$\boldsymbol{T - mg = m\omega^2 L}$$

de forma que la tensió de la corda val ara

$$\boldsymbol{T = mg + m\omega^2 L}$$

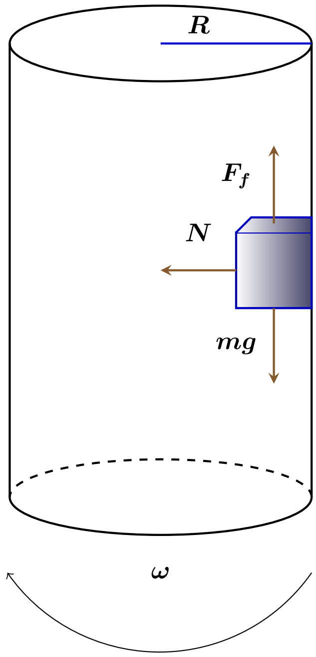
o en funció de la velocitat lineal

$$\boldsymbol{T = mg + m\frac{v^2}{L}}$$

Es comprova que és el valor màxim de la tensió al llarg del recorregut circular de la massa.

Exemple 2

Considerem ara un objecte situat a la part interior d'un cilindre amb fregament, de radi $\boldsymbol{R}$ que gira amb velocitat angular $\boldsymbol{\omega}$. Volem calcular la velocitat angular mínima per tal que l'objecte es mantingui sense caure.



Podem veure que al estar enganxat a la pared apareix una força de fregament cap a dalt en sentit contrari al pes, i la força $\boldsymbol{N}$, que fa la paret sobre l'objecte, és la que proporciona l'acceleració centrípeta (recordeu que la centrífuga és una força fictícia).

Llavors, aplicant la segona llei de Newton als eixos horitzontal i vertical, tenim

$$\boldsymbol{N = m\omega^2 R; \quad F_f = mg}$$

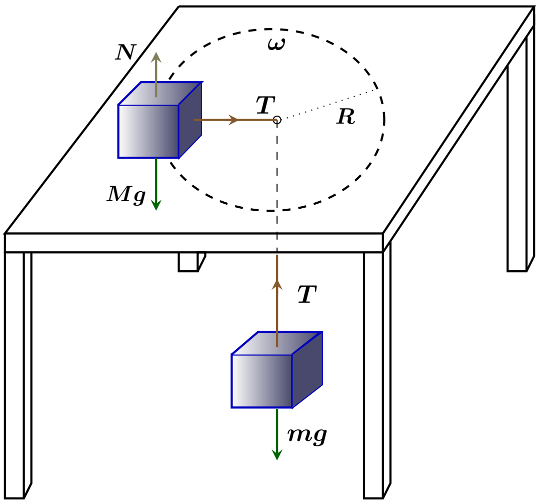
d'on

$$\boldsymbol{\mu N = mg \Rightarrow \mu m\omega^2 R = mg \Rightarrow \mu\omega^2 R = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}}$$

i veiem que no depèn de la massa de l'objecte que es troba dins el cilindre.

Exemple 3

Una massa $\boldsymbol{M}$ col·locada sobre una taula sense fregament, està unida a una massa $\boldsymbol{m}$ penjada mitjançant una corda que passa per un forat practicat a la taula. El cos de massa $\boldsymbol{m}$ està en repòs mentre que el cos de massa $\boldsymbol{M}$ descriu un moviment circular uniforme de radi $\boldsymbol{R}$. Volem calcular la velocitat $\boldsymbol{\omega}$ amb que es mou $\boldsymbol{M}$.



Per la massa $\boldsymbol{M}$ podem escriure

$$\boldsymbol{N = Mg}; \quad \boldsymbol{T = M\omega^2 R}$$

i per la massa $\boldsymbol{m}$

$$\boldsymbol{T = mg}$$

d'on

$$\boldsymbol{mg = M\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mg}{MR}}}$$

Es veu fàcilment que l'equació $\boldsymbol{N = Mg}$ no s'ha utilitzat perquè no hi ha fregament.

Exercicis

1. Resoleu l'exemple 1, prenent els següents valors: $\boldsymbol{m = 5\,kg}$, $\boldsymbol{L = 2\,m}$, $\boldsymbol{\omega = \frac{20\pi}{3}\,rad/s}$.

2. Resoleu l'exemple 2, prenent els valors: $\boldsymbol{R = 2\,m}$, $\boldsymbol{\mu = 0,3}$.

3. Resoleu l'exemple 3, prenent els següents valors: $\boldsymbol{M = 10\,kg}$, $\boldsymbol{m = 15\,kg}$, $\boldsymbol{R = 1\,m}$.

4. Un cotxe circula per una corba de radi $\boldsymbol{R = 25\,m}$. Si el fregament amb la carretera val $\boldsymbol{\mu = 0,3}$, calculeu la velocitat màxima a que pot circular per tal de no sortir de la carretera.

5. Un cos de $\boldsymbol{500\,g}$ lligat a una corda de $\boldsymbol{0,5\,m}$ de longitud dóna voltes amb velocitat constant en un pla horitzontal. El sistema forma un pèndol cònic d'angle constant de $\boldsymbol{60^o}$ amb la vertical. Calculeu:

   (a) La tensió de la corda.

   (b) La velocitat lineal del cos.

   (c) L'angle que formen el vector velocitat i el vector acceleració.

6. Un avió vola a una velocitat de mòdul $\boldsymbol{400\,m/s}$, constant i descriu un cercle en un pla horitzontal. Els límits de seguretat pel pilot permeten experimentar com a màxim una acceleració que és vuit vegades la de la gravetat. En aquestes condicions extremes, calculeu:

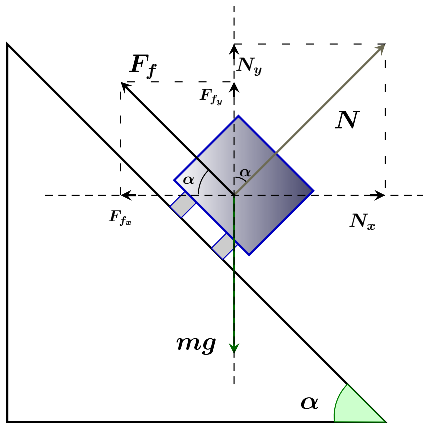
   (a) El radi de la trajectòria circular.

   (b) L'angle d'inclinació de les ales de l'avió respecte de l'horitzontal perquè la força de sustentació (perpendicular al pla definit per les ales) li permeti fer aquest gir.

4.10 La corba peraltada

El propòsit d'aquesta secció és discutir el cas que un vehicle descriu una corba de radi $\boldsymbol{R}$ que està peraltada un cert angle $\boldsymbol{\alpha}$. Suposarem que el fregament amb el terra és $\boldsymbol{\mu}$. Com veurem, la idea de peraltar una corba és aprofitar la força normal que pateix el vehicle per contribuir a la força centrípeta i d'aquesta manera, descriure la trajectòria amb més seguretat. Hem de distingir dos casos, segons el vehicle circuli amb la *velocitat mínima* o *velocitat màxima*.

Velocitat mínima



En aquest cas de velocitat mínima, el vehicle té tendència a caure de costat cap a dins de la corba, llavors la força de fregament va dirigida cap a dalt. A l'eix horitzontal i vertical tenim

$$\begin{cases} N_x - F_{f_x} = m\frac{v_{min}^2}{R} \\ \\ N_y + F_{f_y} = mg \end{cases}$$

incorporant l'angle $\boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{cases} N\sin\alpha - F_f\cos\alpha = m\frac{v_{min}^2}{R} \\ \\ N\cos\alpha + F_f\sin\alpha = mg \end{cases}$$

ara, com és $\boldsymbol{F_f = \mu N}$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{N \sin\alpha - \mu N \cos\alpha = m\frac{v_{min}^2}{R}} \\ \boldsymbol{N \cos\alpha + \mu N \sin\alpha = mg} \end{cases}$$

traiem factor comú

$$\begin{cases} \boldsymbol{N(\sin\alpha - \mu \cos\alpha) = m\frac{v_{min}^2}{R}} \\ \boldsymbol{N(\cos\alpha + \mu \sin\alpha) = mg} \end{cases}$$

i dividint les equacions,

$$\boldsymbol{\frac{\cancel{N}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cancel{N}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = \frac{\cancel{m}\frac{v_{min}^2}{R}}{\cancel{m}g}}$$

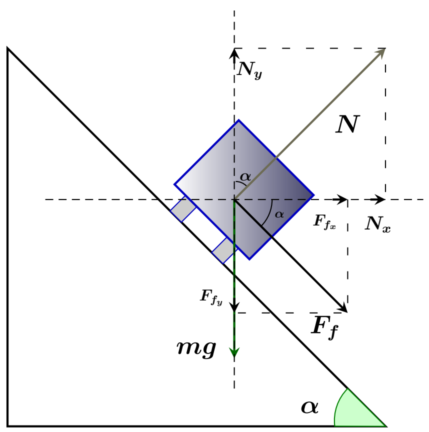
que es pot escriure com

$$\boldsymbol{\frac{v_{min}^2}{Rg} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}$$

i finalment

$$\boldsymbol{v_{min} = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}}$$

Velocitat màxima



Ara la tendència del vehicle és relliscar de costat cap amunt, i les equacions són

$$\begin{cases} \boldsymbol{N_x + F_{f_x} = m\frac{v_{max}^2}{R}} \\ \\ \boldsymbol{N_y = F_{f_y} + mg} \end{cases}$$

de manera que tenim

$$\begin{cases} \boldsymbol{N \sin\alpha + \mu N \cos\alpha = m\frac{v_{max}^2}{R}} \\ \\ \boldsymbol{N \cos\alpha = \mu\, N \sin\alpha + mg} \end{cases}$$

reordenant la segona equació i traient factor comú

$$\begin{cases} \boldsymbol{N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = m\frac{v_{max}^2}{R}} \\ \\ \boldsymbol{N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg} \end{cases}$$

ara dividim les equacions,

$$\boldsymbol{\frac{\cancel{N}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cancel{N}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{\cancel{m}\frac{v_{max}^2}{R}}{\cancel{m}g}}$$

que podem escriure com

$$\boldsymbol{\frac{v_{max}^2}{Rg} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

i, finalment

$$\boldsymbol{v_{max} = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}}$$

Exercicis

1. Interpreteu els casos particulars de les velocitats màxima i mínima per $\boldsymbol{\alpha = 0^o}$ i per $\boldsymbol{\alpha = 90^o}$.

2. Trobeu el rang de velocitats amb què un vehicle pot descriure una corba peraltada un angle $\boldsymbol{\alpha = 30^o}$, de radi $\boldsymbol{R = 25\, m}$ si el fregament amb el terra val $\boldsymbol{\mu = 0,2}$.

3. Raoneu què succeeix amb les velocitats màxima i mínima quan és $\boldsymbol{\mu = 0}$.

5 Treball i energia

5.1 Definició de treball

El treball ($\boldsymbol{W}$) que fa una força $\boldsymbol{F}$ constant aplicada sobre un cos quan aquest recorre una distància $\boldsymbol{x}$ es calcula com:

$$\boldsymbol{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}}$$

o també

$$\boldsymbol{W} = |\vec{\boldsymbol{F}}||\vec{\boldsymbol{x}}| \cos \boldsymbol{\theta}$$

on $\boldsymbol{\theta}$ és l'angle que formen la força i la direcció (amb sentit) del moviment del cos. El treball, en el sistema internacional es mesura en Joule ($\boldsymbol{J}$).

5.1.1 Forces conservatives

Diem que una força es conservativa si el treball total que realitza sobre una partícula és zero quan la partícula recorre una trajectòria tancada i torna a la seva posició inicial. Per exemple, la força gravitatòria té aquesta propietat, ja que per exemple, per elevar un cos de massa $\boldsymbol{m}$ una certa alçada $\boldsymbol{h}$ cal fer una força igual al seu pes ($\boldsymbol{mg}$), i com la distància recorreguda és $\boldsymbol{h}$, el treball realitzat sobre el cos és

$$\boldsymbol{W} = |\vec{\boldsymbol{F}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{x}}| \cos \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{F x} \cos 0^\circ = \boldsymbol{mgh}$$

i si es deixa anar el cos, aquest "torna" el treball que s'havia fet sobre ell. Una altra forma equivalent de descriure una força conservativa és dient que el treball realitzat per una força conservativa és independent de la forma en que la partícula es mou d'un punt a l'altre. Reprenent l'exemple d'abans, és fàcil veure que es faria el mateix treball si pugéssim el cos per un pla inclinat (sense fregament). Una forma d'interpretar les forces conservatives es pensar que d'alguna forma el treball fet sobre un cos "es guarda o conserva en aquest" i per tant, més endevant estarà a disposició. A cada força consevativa se li pot associar una energia potencial. D'aquesta manera, a la força gravitatòria se li associa l'energia potencial gravitatòria $\boldsymbol{mgh}$.

5.1.2 Forces no conservatives

Les forces no conservatives són les que no tenen les propietats abans esmentades. Per exemple, la força de fregament, és no conservativa. Si movem un cos al llarg d'una distància determinada sobre una superfície amb fregament, fem un treball donat pel producte de la força de fregament que hem de vèncer i la distància recorreguda. Si ara tornem el cos enrere, la força de fregament canvia de sentit, (sempre s'oposa al sentit del moviment), i hem de fer més treball. Les forces no conservatives no "guarden"el treball fet sobre el cos, normalment aquest es perd en forma de calor.

5.2 Energia cinètica i potencial

L'energia cinètica d'un cos de massa $\boldsymbol{m}$ que es mou amb velocitat $\boldsymbol{v}$ és:

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

i com veiem és sempre una quantitat no negativa.

L'energia potencial gravitatòria d'un cos que es troba a prop de la superfície terrestre és:

$$\boldsymbol{E_{pg} = mgh}$$

On $\boldsymbol{h}$ és l'alçada del cos mesurada desde un cert sistema de referència. La importancia d'aquestes quantitats és que si definim l'energia mecànica d'un cos com:

$$\boldsymbol{E_M = E_c + E_{pg}}$$

aleshores, si totes les forces que actuen sobre un cos són conservatives, l'energia mecànica es conserva. Aquest resultat es demostra fent servir el teorema següent.

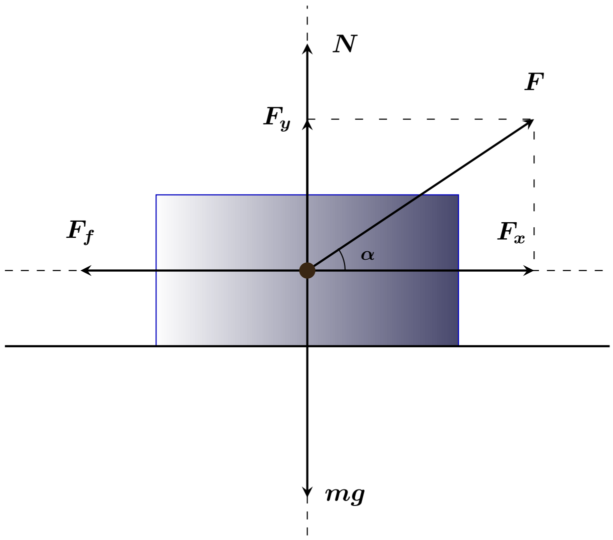
5.3 Teorema (de les forces vives)

Un resultat fonamental que agrupa totes les definicions que hem vist abans és

$$\boldsymbol{W_{net} = \Delta E_c}$$

que ens diu que el treball net fet (per forces conservatives i no conservatives) sobre una partícula s'inverteix en variar l'energia cinètica d'aquesta partícula. És important adonar-se que una possible variació de l'energia potencial gravitatòria del cos, ja està inclosa en el terme de treball fet per les forces conservatives. En la pràctica, el que farem és un balanç d'energia, tenint en compte que hi poden haver forces no conservatives que *s'emportin* treball $\boldsymbol{W_{nc}}$. Del que s'ha vist és evident que les unitats de l'energia en el sistema internacional són també Joule ($\boldsymbol{J}$). De fet, podem pensar en treball i energia com les dues cares d'una mateixa moneda.

Exemple 1
Estirem un objecte de massa $\boldsymbol{m = 10\,kg}$ que es trobava en repòs, amb una força $\boldsymbol{F = 80\,N}$ que forma un angle $\boldsymbol{\alpha = 30^0}$ amb l'horitzontal al llarg d'una distància $\boldsymbol{d = 10\,m}$ sobre una superfície que té un coeficient de fregament $\boldsymbol{\mu = 0,2}$. Es demana calcular l'acceleració amb què es mou, la velocitat final, la força normal que pateix el cos i el treball que fa cada força que actua sobre el cos.



Descomponent la força $\boldsymbol{F}$ tenim, per cada eix coordenat

$$\begin{cases} \boldsymbol{N + F_y = mg} \\ \boldsymbol{F_x - F_f = ma} \end{cases}$$

i escrivint les components en funció de l'angle $\boldsymbol{\alpha}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{N + F\sin\alpha = mg} \\ \boldsymbol{F\cos\alpha - \mu N = ma} \end{cases}$$

Llavors, la força normal val

$$\boldsymbol{N = mg - F\sin\alpha = 10\cdot 9,8 - 80 sin 30^\circ = 58\,N}$$

i finalment

$$\boldsymbol{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma}$$

d'on

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m} = 5,97\,m/s^2$$

La velocitat final es pot calcular amb ajut de l'expressió

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

llavors

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax} = \sqrt{0 + 2\cdot 5,97\cdot 10} = 10,93\,m/s$$

I en quant al treball que fa cada força (en cada cas hem de posar *l'angle* que fa la força amb *el sentit* del moviment)

$$\begin{cases} W_N = (mg - F\sin\alpha)d\cos 90^\circ = 0 \\ W_{F_f} = \mu N d\cos 180^\circ = 0,2\cdot 58\cdot 10(-1) = -116\,J^* \\ W_{F_x} = F_x d\cos 0^\circ = Fcos\alpha\cdot d\cos 0^\circ = 80\cos 30^\circ\cdot 10\cos 0^\circ = 712,8\,J \\ W_{F_y} = F_y d\cos 90^\circ = 0 \\ W_{mg} = mgd\cos 270^\circ = 0 \end{cases}$$

Ara podem comprovar que el teorema del treball-energia cinètica és compleix

$$W_{net} = 712,8 - 116 = 596,8\,J$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}10\cdot 10,93^2 = 597,3\,J$$

Dins el marge d'error degut a les aproximacions fetes, els resultats coincideixen.

*En general considerarem aquest treball amb signe positiu i l'incorporarem a un balanç d'energia.

5.4 Potència

El treball realitzat per una força en la unitat de temps és la *potència* P de la força:

$$\boldsymbol{P = \frac{W}{t} = \frac{Fd}{t} = Fv}$$

i en el sistema internacional es mesura en Watts ($\boldsymbol{W}$).

Exemple 2
Un objecte es troba caient amb velocitat $\boldsymbol{v = 3\,m/s}$ quan es troba a una altura $\boldsymbol{h = 10\,m}$. Es demana calcular la velocitat $\boldsymbol{v'}$ amb que arriba al terra suposant que no hi ha fregament amb l'aire.

Plantegem un balanç d'energia

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v'^2}$$

d'on

$$\boldsymbol{v' = \sqrt{v^2 + gh} = \sqrt{3^2 + 9,8 \cdot 10} = 10,34\,m/s}$$

Exemple 3
Es projecta un bloc al llarg d'una superfície horitzontal amb velocitat inicial $\boldsymbol{v_0 = 10\,m/s}$. El coeficient de fregament entre el bloc i la superfície és $\boldsymbol{\mu = 0,2}$. Quina distància recorre el bloc abans de quedar aturat?

L'energia cinètica del bloc se l'endú el fregament íntegrament. Llavors

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}mv^2 = W_{F_{nc}} = F_f d = \mu N d = \mu m g d}$$

d'on

$$\boldsymbol{d = \frac{v^2}{2\mu g} = 250\,m}$$

Exemple 4
Un objecte de massa $\boldsymbol{m}$ situat a altura $\boldsymbol{h_1}$ sobre un pla inclinat sense fregament, angle $\boldsymbol{\alpha}$ i longitud $\boldsymbol{l}$, rellisca al llarg del pla fins arribar a una superfície horitzontal que presenta coeficient de fregament $\boldsymbol{\mu}$. Després de recórrer una distància $\boldsymbol{d}$ pel pla horitzontal puja per un altre pla inclinat (amb fregament $\boldsymbol{\mu'}$ i angle $\boldsymbol{\beta}$). Es demana calcular la distància $\boldsymbol{l'}$ que recorre l'objecte al llarg d'aquest segon pla inclinat, en funció de les variables presents al problema.

El balanç d'energia que podem plantejar és, primer l'energia potencial gravitatòria de l'objecte s'inverteix en cinètica al arribar al final del primer pla inclinat

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_1^2$$

després, aquesta energia cinètica s'inverteix en fregament al llarg del pla horitzontal i la que li queda, per pujar al segon pla inclinat,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = W_{F_{nc}} + \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu mgd + \frac{1}{2}mv_2^2$$

finalment, l'energia cinètica que li queda s'inverteix en potencial gravitatòria i fregament al pujar per el segon pla inclinat,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = W_{F_{nc}} + mgh_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu' mg\cos\beta\cdot l' + mgl'\sin\beta$$

enllaçant principi i final,

$$\begin{aligned}\mu' mg\cos\beta\cdot l' + mgl'\sin\beta &= \frac{1}{2}mv_2^2\\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \mu mgd\\ &= mgl\sin\alpha - \mu mgd\end{aligned}$$

d'on finalment,

$$l' = \frac{mgl\sin\alpha - \mu mgd}{\mu' mg\cos\beta + mg\sin\beta} = \frac{l\sin\alpha - \mu d}{\mu'\cos\beta + \sin\beta}$$

Exercicis

En tots els exercicis cal treballar algebraicament i només usar els valors numèrics proporcionats al final del càlcul.

1. Calculeu l'alçada màxima a la que arriba un objecte llançat cap amunt amb una velocitat $\boldsymbol{v_0 = 10\,m/s}$.

2. Un nen de massa $\boldsymbol{m = 30\,kg}$ es deixa caure per un tobogan de d'altura $\boldsymbol{h = 2\,m}$ i arriba a terra amb una velocitat $\boldsymbol{v = 4\,m/s}$. Es demana calcular el treball que *s'ha endut* el fregament.

3. Una massa $\boldsymbol{m = 500\,g}$ unida a un fil lleuger i inextensible gira en un pla vertical descrivint una circumferència de radi $\boldsymbol{R = 0,5\,m}$. La velocitat de la massa quan el fil està en posició horitzontal és $\boldsymbol{v = 6\,m/s}$. Es demana calcular la velocitat i la tensió al punt més baix del moviment.

4. Volem pujar un ascensor de massa $\boldsymbol{m = 700\,kg}$ fins a una alçada $\boldsymbol{h = 20\,m}$. Calculeu el treball que cal fer i la potència desenvolupada si el recorregut s'ha fet en $\boldsymbol{t = 28\,s}$.

5. Un cotxe de massa $\boldsymbol{m = 800\,kg}$ arrenca des del repòs i assoleix una velocitat $\boldsymbol{v = 107\,km/h}$ en un temps $\boldsymbol{t = 8\,s}$. Determineu el treball i la potència mitjana desenvolupats pel motor.

Exercicis

6. Un objecte cau des d'un terrat. Quan li falten $\boldsymbol{h = 16,25\,m}$ per arribar a terra la seva velocitat és $\boldsymbol{v = 30\,m/s}$. Es demana calcular amb quina velocitat arribarà al terra i des de quina alçada $\boldsymbol{H}$ es va llançar.

7. Considereu una màquina d'Atwood amb masses $\boldsymbol{m_1 = 15\,kg}$, $\boldsymbol{m_2 = 5\,kg}$. Es demana trobar la velocitat de $\boldsymbol{m_1}$ quan el sistema es deixa moure lliurement i ha recorregut $\boldsymbol{h = 15\,m}$.

8. Llancem verticalment cap amunt una pilota de massa $\boldsymbol{m}$ amb velocitat $\boldsymbol{v_0}$. Si suposem que l'aire fa una força constant $\boldsymbol{F_a}$, trobeu l'altura assolida per la pilota en funció de $\boldsymbol{v_0}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{F_a}$ i $\boldsymbol{g}$. Trobeu després, la velocitat amb que torna al terra en funció de les mateixes variables.

9. Un cos de massa $\boldsymbol{m = 5\,kg}$ es llança cap amunt per un pla inclinat un angle $\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$ amb una velocitat $\boldsymbol{v_0 = 15\,m/s}$. Calculeu quina distància recorre fins aturar-se suposant que el fregament val $\boldsymbol{\mu = 0,1}$.

10. Estem dissenyant una muntanya russa i volem que les vagonetes, de massa $\boldsymbol{m = 80\,kg}$, facin una volta vertical completa de radi $\boldsymbol{R = 10\,m}$. Suposant que no hi ha pèrdues per fregament, calculeu des de quina altura cal deixar anar les vagonetes per tal que passin el *loop*. Calculeu la força que fa el rail sobre la vagoneta al tornar al punt més baix.

5.5 El moment lineal. Xocs

El moment lineal o *quantitat de moviment* d'un cos que té massa $\boldsymbol{m}$ i es mou amb velocitat $\boldsymbol{v}$ es defineix com $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$. Com que en aquest curs només tractarem problemes unidimensionals, el caràcter vectorial de la quantitat de moviment quedarà reduït a un signe, definit a partir d'algun criteri. De la segona llei de Newton (en forma diferencial), es dedueix directament que, en absència de forces externes, el moment lineal és una quantitat conservada. Aquest resultat és molt útil en multitud de situacions. Per exemple, en un xoc de partícules, totes les forces són internes, de manera que es pot aplicar aquesta llei de conservació. El mateix succeeix en una explosió, o també en un avió a reacció, un coet, etc. Quan tinguem un conjunt de cossos, el moment lineal del conjunt es calcula sumant els moments lineals de cadascun d'ells. Si l'energia cinètica no es conserva direm que el xoc és *inelàstic*. En aquestes condicions els cossos patiran deformacions que poden ser permanents. Si els dos cossos queden units després del xoc, direm que aquest és *totalment inelàstic*.

Exemple 1
Un cos amb massa $\boldsymbol{m_1 = 8\,kg}$ té una velocitat $\boldsymbol{v_1 = 10\,m/s}$ i xoca frontalment amb un objecte de massa $\boldsymbol{m_2 = 12\,kg}$ que es troba aturat. Si el xoc és totalment inelàstic, calculeu la velocitat del conjunt després del xoc i l'energia perduda en el procés.

La conservació de la quantitat de moviment abans i després del xoc permet escriure

$$\boldsymbol{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'}$$

com el xoc és totalment inelàstic tenim que $\boldsymbol{v_1' = v_2' = v'}$, ja que els dos cossos queden junts després del xoc. Llavors

$$\boldsymbol{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v' + m_2 v'}$$

d'on

$$\boldsymbol{v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{8 \cdot 10 + 12 \cdot 0}{8 + 12} = \frac{80}{20} = 4\,m/s}$$

En quant a la pèrdua d'energia, podem trobar-la calculant l'energia cinètica *del sistema* abans ($\boldsymbol{E_{inicial}}$) i després ($\boldsymbol{E_{final}}$) del xoc, i restant

$$\boldsymbol{E_{perduda} = E_{inicial} - E_{final}}$$

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}8 \cdot 10^2 + \frac{1}{2}12 \cdot 0^2 = \frac{1}{2}8 \cdot 10^2 = 400\,J$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = \frac{1}{2}(8 + 12)4^2 = 160\,J$$

llavors

$$E_{perduda} = 400 - 160 = 240\,J$$

Si volem saber el *percentatge* d'energia perduda, calcularem

$$\%E_{perduda} = \frac{E_{perduda}}{E_{inicial}} \cdot 100 = \frac{240}{400} \cdot 100 = 60\%$$

Exemple 2
En un xoc unidimensional, una bola de massa $m_1 = 5\,kg$ es dirigeix cap a la dreta a una velocitat $v_1 = 7\,m/s$ i col·lisiona contra una altra bola de massa $m_2 = 8\,kg$ que inicialment està en repòs. Després del xoc, la bola de $5\,kg$ va cap a l'esquerra a una velocitat $v_1' = 1\,m/s$ i la bola de $8\,kg$ va cap a la dreta a una velocitat $v_2' = 5\,m/s$. Es demana:

1. Esbrineu si el xoc és elàstic o inelàstic.
2. Comproveu si es conserva la quantitat de moviment.

Suposarem que els cossos que es mouen cap a la dreta tenen velocitat *positiva* i els que es mouen cap a l'esquerra *negativa*. Per tal de veure si el xoc és elàstic calculem l'energia cinètica del sistema abans i després del xoc,

$$E_{inicial} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 0^2 = 122,5\,J$$

$$E_{final} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5^2 = 102,5\,J$$

es veu que el xoc **no** és elàstic, ja que s'ha perdut energia.

Comprovem ara si es conserva la quantitat de moviment (ho hauria de fer!)

$$m_1v_1 + m_2v_2 \stackrel{?}{=} m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$5 \cdot 7 + 8 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 5 \cdot (-1) + 8 \cdot 5$$

$$35 = 35$$

de forma que es comprova que es conserva la quantitat de moviment.

5.5.1 Coeficient de restitució

Si l'energia cinètica es conserva, direm que el xoc és *elàstic*. Existeix una quantitat molt important que s'anomena *coeficient de restitució*, que codifica el *grau d'elasticitat* del xoc. Veiem com obtenir-la.

Suposem que tenim dues masses m_1, m_2 que patiran un xoc elàstic. Aleshores, de la conservació del moment lineal i l'energia cinètica, podem escriure:

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1^{'} + m_2v_2^{'} \\ \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{'2} \end{cases}$$

ara, traient denominadors i reordenant a cada equació:

$$\begin{cases} m_1v_1 - m_1v_1^{'} = m_2v_2^{'} - m_2v_2 \\ \\ m_1v_1^2 - m_1v_1^{'2} = m_2v_2^{'2} - m_2v_2^2 \end{cases}$$

traient factor comú:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2) \\ \\ m_1(v_1^2 - v_1^{'2}) = m_2(v_2^{'2} - v_2^2) \end{cases}$$

fent servir que suma per diferència és diferència de quadrats:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2) \\ \\ m_1(v_1 + v_1^{'})(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} + v_2)(v_2^{'} - v_2) \end{cases}$$

Fent servir la primera equació en la segona:

$$m_1(v_1 + v_1^{'})\frac{m_2}{m_1}(v_2^{'} - v_2) = m_2(v_2^{'} + v_2)(v_2^{'} - v_2)$$

on, suposant que les masses són diferents de zero i $v_2^{'} \neq v_2$, tenim:

$$v_1 + v_1^{'} = v_2^{'} + v_2$$

o també:

$$v_1 - v_2 = v_2^{'} - v_1^{'}$$

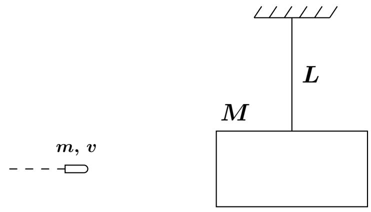
Aquesta expressió només es compleix si es conserva l'energia cinètica, però podem generalitzar-la i definir el *coeficient de restitució*, e com:

$$e = \frac{v_2^{'} - v_1^{'}}{v_1 - v_2}$$

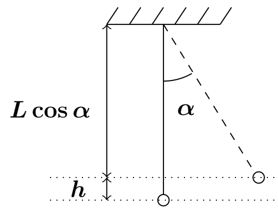
Fixem-nos en que per un xoc elàstic serà $e = 1$, per un inelàstic $0 < e < 1$, i per un totalment inelàstic $e = 0$.

5.5.2 El pèndol balístic

El pèndol balístic és un dispositiu que es fa sevir per mesurar la velocitat de projectils. La idea és disparar un projectil sobre un bloc, per exemple de fusta, suspès a l'aire. A partir de l'angle que es desvia de la vertical el conjunt després de l'impacte, es pot calcular la velocitat original del projectil.



Un cop ha impactat el projectil contra el bloc, i suposant que queda incrustat en ell, el conjunt descriurà un arc elevant-se una certa altura $\boldsymbol{h}$. Per major claredat hem representat aquesta situació de forma simplificada.



Per resoldre el problema plantegem primer la conservació de la quantitat de moviment, ja que al tractar-se d'un xoc, totes les forces són internes.

$$mv + M \cdot 0 = (m + M)v'$$

El bloc es troba inicialment en repòs i el conjunt es començarà a moure amb velocitat $\boldsymbol{v'}$. De moment tenim,

$$v = \frac{m + M}{m} v'$$

Ara, fem un balanç d'energia amb la cinètica que té el conjunt i la potencial gravitatòria que tingui quan arribi a l'altura màxima al descriure l'arc

$$\frac{1}{2}\cancel{(m + M)}v'^2 = \cancel{(m + M)}gh$$

de forma que

$$v' = \sqrt{2gh}$$

Per una altra banda, la relació entre l'altura assolida, la longitud de la corda que lliga el bloc i l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ que forma la corda amb la vertical és

$$\boldsymbol{h = L - L\cos\alpha = L(1 - \cos\alpha)}$$

d'on finalment, la velocitat del projectil val

$$\boldsymbol{v = \frac{m+M}{m}v' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh} = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}}$$

Exercicis. *En tots els exercicis cal treballar algebraicament i només usar els valors numèrics proporcionats al final del càlcul.*

1. Un patinador de massa $m_1 = 45\,kg$ que es troba en repòs al mig d'una pista de gel llança una pilota de massa $m_2 = 3\,kg$ amb una velocitat $v_2 = 6\,m/s$. Quina velocitat tindrà el patinador immediatament després del llançament?

2. Un cos es mou amb una velocitat $v_1 = 5\,m/s$. Si de cop es trenca en dues parts iguals de manera que una d'elles es mou amb una velocitat $v_1' = 2\,m/s$ en la mateixa direcció i sentit que el cos original, quina serà la velocitat (en mòdul, direcció i sentit) de l'altra part?

3. Dos patinadors, A i B, amb la mateixa massa, $m = 40\,kg$, es troben en repòs sobre una pista horitzontal sense fregament apreciable. El patinador A llança amb una velocitat horitzontal $v = 2\,m/s$ una bola de massa $m = 6\,kg$ que recull el patinador B. Trobeu la velocitat final de cada patinador.

4. Dues partícules de massa $m_1 = 4\,kg$ i $m_2 = 6\,kg$ que van en sentits contraris xoquen frontalment amb velocitats $v_1 = 8\,m/s$ i $v_2 = 12\,m/s$ respectivament, i reboten de manera perfectament elàstica. Es demana calcular les velocitats després del xoc.

5. Una bola d'acer xoca elàsticament contra un bloc de massa $m_2 = 1\,kg$ inicialment en repòs sobre una superfície plana horitzontal. En el moment del xoc la bola té una velocitat horitzontal $v_1 = 5\,m/s$. EI coeficient de fricció dinàmic entre la superfície i el bloc té un valor $\mu = 0,2$. Com a conseqüència del xoc, el bloc recorre una distància $d = 2\,m$ abans d'aturar- se. Es demana:

   (a) La velocitat del bloc just després del xoc.

   (b) La massa m_1 de la bola d'acer.

   (c) L'energia cinètica perduda per la bola en el xoc elàstic.

6. Es dispara sobre un pèndol balístic de massa $M = 1,5\,kg$ un projectil de massa $m = 15\,g$. Quan el pèndol està a la seva altura màxima la corda de la qual penja forma una angle $\alpha = 60°$ amb la vertical. La longitud del pèndol és $L = 2\,m$. Trobeu la velocitat del projectil.

5.6 Força elàstica i energia

La força amb que respon una molla quan es comprimeix o s'estira una distància $\boldsymbol{x}$, ve donada per la *Llei de Hooke*

$$\boldsymbol{F = -k \cdot x}$$

on $\boldsymbol{k}$ és l'anomenada constant elàstica de la molla, i no depèn de $\boldsymbol{x}$, (idealment). El signe que apareix és informatiu, és a dir ens diu que la força que fa *la molla* té sentit contrari a la que se li fa per comprimir-la o estirar-la. Per una altra banda, com aquesta força és conservativa, es pot definir una energia potencial associada. En aquest cas s'anomena energia potencial elàstica, i val

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}kx^2}$$

Exemple 1
Pengem un objecte de massa $\boldsymbol{m = 2\,kg}$ d'una molla de longitud natural $\boldsymbol{l_0 = 0,25\,m}$ i observem que la molla s'estira fins a una longitud $\boldsymbol{l = 0,35\,m}$. Es demana calcular la constant elàstica de la molla.

En equilibri tenim que la força que fa la molla és igual al pes del cos,

$$\boldsymbol{mg = ky}$$

on

$$\boldsymbol{y = l - l_0}$$

per tant

$$\boldsymbol{k = \frac{mg}{y} = \frac{mg}{l - l_0} = \frac{2 \cdot 9,8}{0,1} = 196\,N/m}$$

Exemple 2
Calculeu la força que cal per comprimir una molla de constant elàstica $\boldsymbol{k = 10^3\,N/m}$ horitzontalment una distància $\boldsymbol{x = 10\,cm}$.

Tenim

$$\boldsymbol{F = k \cdot x = 10^3 \cdot 0,1 = 100\,N}$$

Exemple 3
Comprimim una massa $m = 2\,kg$ contra una molla de constant elàstica $k = 100\,N/m$, una distància $x = 0,25\,m$. Es demana calcular la velocitat amb que es mourà la massa un cop alliberada.

L'energia potencial elàstica emmagatzemada a la molla es convertirà en cinètica quan s'hagi estirat, llavors

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = \sqrt{\frac{100(0,25)^2}{2}} = 1,77\,m/s$$

Exemple 4
Es deixa caure des d'una altura $h = 4\,m$ un objecte de massa $m = 0,1\,kg$ sobre una molla vertical amb constant elàstica $k = 98\,N/m$. Es demana calcular la compressió màxima de la molla.

Primer resoldrem l'exemple d'una forma simplificada, suposant que la molla es comprimirà poc i que per tant, podem menysprear l'energia potencial que perd la massa mentre comprimeix la molla.

Fem el balanç d'energia potencial gravitatòria a potencial elàstica

$$mgh = \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot 4}{98}} = 0,28\,m$$

La molla s'ha comprimit $28\,cm$, que és poc comparat amb l'altura de la que cau ($4\,m$). Fem-ho ara tenint en compte la pèrdua d'energia potencial gravitatòria al comprimir la molla

$$mg(h+y) = \frac{1}{2}ky^2$$

ara, obtenim una equació de segon grau

$$ky^2 - 2mgy - 2mgh = 0$$

amb solucions

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \frac{\boldsymbol{2mg \pm \sqrt{(2mg)^2 + 8kmgh}}}{\boldsymbol{2k}} \\ &= \frac{\mathbf{2 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \pm \sqrt{(2 \cdot 0,1 \cdot 9,8)^2 + 8 \cdot 98 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \cdot 4}}}{\mathbf{2 \cdot 98}} \\ &= \frac{\mathbf{1,96 \pm \sqrt{3077,12}}}{\mathbf{196}} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{y_1 = 0,29\,m} \qquad \boldsymbol{y_2 = -0,27\,m}$$

Només la solució positiva té sentit en aquest cas. Veiem que la simplificació que havíem fet era molt bona. Si al fer el primer càlcul, fent l'aproximació, haguéssim obtingut com a resultat, per exemple, $\boldsymbol{y = 2\,m}$ ja estaria clar que la simplificació *no* és bona, perquè estem suposant que la molla es comprimeix poc, i aquest valor representa la meitat de l'altura que cau. Per tant, hauríem de donar el resultat fent el càlcul de la manera exacta.

Exercicis

En tots els exercicis cal treballar algebraicament i només usar els valors numèrics proporcionats al final del càlcul.

1. Una massa $\boldsymbol{m_1 = 200\,g}$ es troba en repòs sobre una superfície horitzontal, sense fricció apreciable, unida a l'extrem d'una molla que per l'altre extrem està unida a una paret. Una segona massa $\boldsymbol{m_2 = 600\,g}$ es desplaça sobre la mateixa superfície cap a $\boldsymbol{m_1}$ amb una velocitat $\boldsymbol{v_2 = 4\,m/s}$ i experimenta un xoc frontal, totalment inelàstic, amb $\boldsymbol{m_1}$. La constant elàstica de la molla val $\boldsymbol{k = 500\,N/m}$. Es demana:

   (a) L'energia mecànica perduda en el xoc.

   (b) La compressió màxima de la molla.

2. Una molla de constant elàstica $\boldsymbol{2000\,N/m}$ és comprimida $\boldsymbol{10\,cm}$ per dos blocs de masses $\boldsymbol{5\,kg}$ i $\boldsymbol{2\,kg}$ situats als seus extrems. El sistema es deixa lliure sobre una superfície plana sense fregament. Quina serà la velocitat de cada bloc quan deixin d'estar en contacte amb la molla?

3. Es deixa caure un objecte de massa $\boldsymbol{m = 5\,kg}$ des d'una altura de $\boldsymbol{3\,m}$ sobre una molla de constat elàstica $\boldsymbol{k = 100\,N/m}$. Calculeu quant es comprimeix la molla.

5.7 Força gravitatòria

En aquest apartat tractarem breument les característiques de la força gravitatòria. Aquesta força l'experimenta qualsevol cos que tingui massa i és sempre atractiva. La força amb que s'atrauen dues masses $\boldsymbol{m_1}$ i $\boldsymbol{m_2}$ separades una distància $\boldsymbol{d}$ val, en mòdul

$$\boldsymbol{F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}}$$

La constant $\boldsymbol{G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2}$ s'anomena constant de gravitació universal. La força gravitatòria és de llarg abast, és a dir arriba a l'infinit. Com és que veiem els astronautes de l'Estació Espacial Internacional surar en el seu interior? La raó és que es troben en caiguda lliure. Si no cauen sobre la Terra és perquè a més, l'estació té una certa velocitat horitzontal que fa que mentre cau, descrigui una volta completa a la Terra. si aquesta velocitat fos més petita, l'estació cauria en espiral sobre la superfície terrestre, si fos més gran, s'allunyaria de la Terra cada cop més també amb una trajectòria espiral.

Volem ara calcular la força amb que la Terra atrau un cos de massa $\boldsymbol{m}$ situat sobre la seva superfície. Tenim

$$\boldsymbol{F = G\frac{M_T m}{R_T^2}}$$

si anomenem

$$\boldsymbol{g = G\frac{M_T}{R_T^2}}$$

i hi posem els valors $\boldsymbol{M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\, kg}$, $\boldsymbol{R_T = 6,37 \cdot 10^6\, m}$

obtenim

$$\boldsymbol{g = 9,81\frac{m}{s^2}}$$

de manera que recuperem la coneguda fórmula per calcular el *pes* d'un cos, $\boldsymbol{P = mg}$.

Exemple 1
Sabent que la massa del Sol és $\boldsymbol{M_S = 2\cdot 10^{30}\,kg}$ i el seu radi $\boldsymbol{R_S = 7\cdot 10^{8}\,m}$, calculeu l'acceleració de la gravetat a la seva superfície.

Tenim que

$$g = G\frac{M_S}{R_S^2} = 6,67\cdot 10^{-11}\frac{2\cdot 10^{30}}{(7\cdot 10^{8})^2} = 272,25\,m/s^2$$

Exemple 2
Tal com vem veure, donat que la força gravitatòria és conservativa, podem definir una energia potencial gravitatòria. En aquest exemple donarem la versió més general. Definim l'energia potencial gravitatòria d'un cos de massa $\boldsymbol{m}$ sotmés a l'atracció gravitatòria d'un altre de massa $\boldsymbol{M}$ i separats una distància $\boldsymbol{r}$ com

$$E_{pg} = -G\frac{Mm}{r}$$

Recordant que l'energia mecànica es definia com la suma de cinètica i potencial, calculeu l'energia total d'un satèl·lit de massa $\boldsymbol{m = 80\,kg}$ que orbita al voltant de la Terra amb velocitat $\boldsymbol{v = 10^3\,m/s}$ i es troba a una alçada $\boldsymbol{h = 2R_T}$ sobre la superfície de la Terra.

Fent servir les dades necessàries

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R_T + 2R_T} \\ &= \frac{1}{2}80\left(10^3\right)^2 - 6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5,97\cdot 10^{24}\cdot 80}{3\cdot(6,37\cdot 10^{6})} \\ &= -1,6\cdot 10^{9}\,J \end{aligned}$$

Exemple 3
Calculeu la força d'atracció que fa el Sol sobre la Terra, i la Lluna sobre la Terra. *Dades: Distància Terra-Sol* $= \boldsymbol{1,5 \cdot 10^{11}\, m}$, *Distància Terra-Lluna* $= \boldsymbol{3,8 \cdot 10^{8}\, m}$, *Massa Lluna* $= \boldsymbol{7,35 \cdot 10^{22}\, kg}$

En quant al sistema Terra-Sol, tenim

$$F_{S-T} = G\frac{M_S M_T}{(d_{T-S})^2} = 6,67{\cdot}10^{-11}{\cdot}\frac{2 \cdot 10^{30} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} = 3,54{\cdot}10^{22}\ N$$

i per el sistema Terra-Lluna

$$F_{Ll-T} = G\frac{M_{Ll} M_T}{(d_{T-Ll})^2} = 6,67{\cdot}10^{-11}{\cdot}\frac{7,35 \cdot 10^{22} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{(3,8 \cdot 10^{8})^2} = 2,03{\cdot}10^{20}\ N$$

Exemple 4 (ampliació)
A quina altura sobre la superfície de la Terra l'acceleració de la gravetat es redueix a la meitat?

Com és

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

llavors demanem

$$G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{9,8}{2}$$

per algun valor de h, i teníem que

$$9,8 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

podem escriure

$$G\frac{M_T}{2R_T^2} = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

llavors

$$(R_T + h)^2 = 2R_T^2$$

d'on

$$R_T + h = \pm\sqrt{2}R_T$$

i
$$\boldsymbol{h = \pm\sqrt{2}R_T - R_T = R_T\left(\pm\sqrt{2} - 1\right)}$$
amb solucions
$$\boldsymbol{h_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right) R_T = 2,63 \cdot 10^6\, m}$$
$$\boldsymbol{h_2 = \left(-\sqrt{2} - 1\right) R_T = -1,5 \cdot 10^7\, m}$$
La solució negativa no té sentit aquí.

Exercicis

1. Sabent que la massa de la Lluna és $\boldsymbol{M_{Ll} = 7,35 \cdot 10^{22}\, kg}$ i el seu radi $\boldsymbol{R_{Ll} = 1,74 \cdot 10^6\, m}$, calculeu l'acceleració de la gravetat a la seva superfície.

2. Calculeu l'energia potencial gravitatòria que té la Lluna respecte la Terra.

3. Compareu la força d'atracció neta (deguda al Sol i la Terra) que pateix la Lluna, en un eclipsi total de Sol i un eclipsi total de Lluna.

4. Calculeu a quina altura sobre la superfície terrestre la gravetat es redueix n vegades.

5.8 Força elèctrica

Suposem que ens trobem en el buit. Una càrrega elèctrica $\boldsymbol{Q}$ crea al seu voltant el que anomenarem *camp elèctric*, $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}$. A una distància $\boldsymbol{r}$ de $\boldsymbol{Q}$, aquest camp val

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r}}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Aquest camp elèctric afectarà a altres càrregues elèctriques que puguin estar presents. La força a que està sotmesa una càrrega $\boldsymbol{q}$ en el sí d'un camp elèctric ve donada per l'expresió

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{q}$$

que es pot escriure com

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{Qq}}{\boldsymbol{r}^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

i és la coneguda llei de Coulomb. La constant $\frac{1}{4\pi\epsilon}$ depèn del medi, i en el buit val $\boldsymbol{9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2}$. En mòdul, aquesta força s'escriu com

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{Qq}}{\boldsymbol{r}^2}$$

5.8.1 Potencial elèctric i energia potencial electroestàtica

El camp elècric és un camp conservatiu i això ens permet definir el potencial elèctric que crea una càrrega $\boldsymbol{Q}$ a una distància $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{V(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r}}$$

noteu que és una funció escalar i el signe dependrà del signe de la càrrega $\boldsymbol{Q}$. El potencial es mesura en Volts ($\boldsymbol{V}$).

L'energia potencial d'un sistema de dues càrregues separades una distància $\boldsymbol{r}$ ve donada per

$$\boldsymbol{U(r)} = \boldsymbol{q_0V(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{\boldsymbol{q_0Q}}{\boldsymbol{r}}$$

Aquesta energia es pot interpretar com el treball que cal fer per portar la càrrega $\boldsymbol{q_0}$ des de l'infinit fins al punt que es troba a distància $\boldsymbol{r}$ de $\boldsymbol{Q}$.

Exemple 1
Calculeu la força que pateixen dos protons, $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$ separats una distància $r = 1\,mm$.

Tenim

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qq}{r^2} \\ &= 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(1 \cdot 10^{-3})^2} \\ &= 2,3 \cdot 10^{-22}\,N \end{aligned}$$

Exemple 2
Calculeu el treball que cal fer per dur una càrrega $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$ des de l'infinit fins a una distància de 2 Å d'una altra càrrega $Q = -5 \cdot 10^{-19}\,C$. *Dades:* 1 Å$= 10^{-10}\,m$. Interpeteu el signe del resultat.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_0 Q}{r} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (-5 \cdot 10^{-19})}{2 \cdot 10^{-10}} \\ &= -3,6 \cdot 10^{-18}\,J \end{aligned}$$

el signe negatiu del resultat vol dir que el treball no l'hem de fer nosaltres, el fa el camp elèctric (càrregues de diferent signe s'atrauen).

Exercicis

1. Compareu la força gravitatòria i la força elèctrica que pateixen dues masses $m_1 = 3\,kg$, $m_2 = 5\,kg$ carregades amb $q_1 = 10\,C$ i $q_2 = 50\,C$ que es troben separades $r = 2\,mm$.

6 Llei d'Ohm pel corrent continu

Un corrent elèctric és un flux de càrrega. El corrent es defineix com la quantitat de càrrega que travessa la secció d'un conductor per unitat de temps. Si Q és la càrrega que flueix a través de la secció en el temps t, el corrent és:

$$I = \frac{Q}{t}$$

En el Sistema Internacional, el corrent elèctric es mesura en amperes (A), de forma que és

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

És important tenir en compte que per conveni, es pren com sentit positiu del corrent el contrari al flux d'electrons.

Exemple 1
Es defineix la constant de Faraday, $\mathcal{F}$ com la quantitat de càrrega associada a un mol d'electrons, és a dir

$$\mathcal{F} = q_e \cdot N_A = 96485,335\,C$$

on $q_e = 1.60217662 \cdot 10^{-19}\,C$ i $N_A = 6.022141 \cdot 10^{23}\,mol^{-1}$. Habitualment es pren $\mathcal{F} = 96500\,C$. Calculeu els mols d'electrons que circulen per un conductor si passa una intensitat de $2\,A$ durant 10 hores.

Tenim

$$I = \frac{Q}{t}$$

llavors

$$Q = It = 2 \cdot 10 \cdot 3600 = 72000\,C$$

i

$$72000\,C \cdot \frac{1\,\mathcal{F}}{96500\,C} = 0,746\,\mathcal{F}$$

6.1 Llei d'Ohm i resistència

En aquesta secció considerarem situacions d'equilibri en les quals la càrrega lliure es mou per un conductor. Experimentalment s'obté que en els conductors el corrent que hi circula entre dos punts és proporcional a la diferència de potencial (volts, $\boldsymbol{V}$) i inversament proporcional a la resistència del material. Aquest resultat es coneix com a *Llei d'Ohm*.

$$\boldsymbol{I = \frac{V}{R}}$$

La unitat de resistència en el $\boldsymbol{SI}$ s'anomena ohm ($\boldsymbol{\Omega}$). La resistència d'un conductor depèn de la longitud, de l'àrea de la seva secció transversal, del tipus de material i de la temperatura, però pels materials que obeeixen la llei d'Ohm, no depèn de la intensitat $\boldsymbol{I}$ del corrent que hi circula. Aquests materials, entre els que es troben la majoria dels metalls, s'anomenen *òhmics*. Per altres materials la llei d'Ohm tal com l'hem escrit no és vàlida, això ens fa veure que aquesta no és una llei fonamental com per exemple les lleis de Newton, si no una descripció empírica d'una propietat que és compartida per molts materials. En els materials òhmics, la resistència d'un conductor és proporcional a la longitud del conductor i inversament proporcional a l'àrea de la seva secció transversal.

$$\boldsymbol{R = \rho\frac{L}{A}}$$

La constant de proporcionalitat s'anomena *resistivitat* $\boldsymbol{\rho}$ del conductor i el seu valor depèn de la temperatura.

Exemple 2
Calculeu la intensitat que travessa un cable de coure de $\boldsymbol{5\,m}$ de llarg i $\boldsymbol{6\,mm}$ de diàmetre quan se'l sotmet a una diferència de potencial $\boldsymbol{V = 220\,V}$. Podeu suposar $\boldsymbol{\rho_{Cu} = 0,0171\,\Omega mm^2/m}$

Calculem primer la resistència del cable

$$\boldsymbol{R = \rho\frac{L}{A} = 0,0171\frac{5}{\pi 3^2} = 3,02\cdot 10^{-3}\Omega = 3,02 m\Omega}$$

Ara,

$$\boldsymbol{I = \frac{V}{R} = \frac{220}{3,02\cdot 10^{-3}} = 72752,7\,A = 72,8\,KA}$$

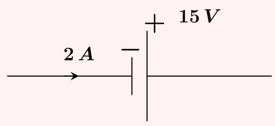
6.2 Energia i potència en els circuits elèctrics

Quan parlem de circuits elèctrics, l'esquema bàsic està format per una font d'alimentació (font de tensió o bateria) connectada a una càrrega (típicament una resistència o una agrupació d'elles) mitjançant uns cables conductors pels que suposarem quasi sempre que no ofereixen resistència elèctrica al pas del corrent. Sota aquestes condicions podem parlar de la *potència que entrega* una font d'alimentació com

$$\boldsymbol{P = VI}$$

on $\boldsymbol{V}$ és la tensió que proporciona la font d'alimentació i $\boldsymbol{I}$ la intensitat que la travessa.

Exemple 3
Calculeu la potència que entrega la font



el càlcul és molt senzill

$$\boldsymbol{P = VI = 15 \cdot 2 = 30\,W}$$

També podem parlar de la potència perduda per efecte Joule en una resistència $\boldsymbol{R}$ i la calcularem com

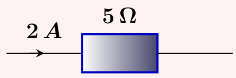
$$\boldsymbol{P = I^2 R}$$

on $\boldsymbol{I}$ és la intensitat que travessa la resistència.

L'efecte Joule és la manifestació macroscòpica de les interaccions que pateixen els electrons entre ells i amb els àtoms fixos del material que forma un conductor. Aquestes interaccions es tradueixen en forma d'energia perduda com a calor, que podem calcular com

$$\boldsymbol{E = Pt = I^2 Rt}$$

Exemple 3
Calculeu la potència que consumeix la resistència i la calor dissipada en dues hores.



hem de fer

$$P = I^2 R = 2^2 \cdot 5 = 20\, W$$

en quant a la calor dissipada

$$E = Pt = 20 \cdot 2 \cdot 3600 = 144000\, J$$

Una altra relació important és la que hi ha entre la potència dissipada per una resistència, el seu valor i la tensió que cau en ella.

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Exemple 4
Les característiques d'una bombeta incandescent són $P = 80\, W$, $V = 220\, V$. Calculeu la resistència que representa aquesta bombeta. Calculeu també la potència que dissiparà si es conecta a $125\, V$

Fent servir

$$P = \frac{V^2}{R}$$

tenim

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{80} = 605\, \Omega$$

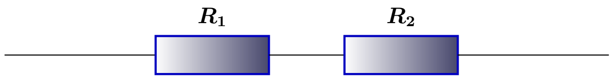
i si es conecta a $125\, V$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{125^2}{605} = 25,83\, W$$

6.3 Associació de resistències

En aquesta secció estudiarem circuits senzills compostos de bateries i resistències connectades segons diverses combinacions.

Dues resistències $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ conectades de forma que circuli la mateixa intensitat per les dues es diu que estan connectades en sèrie.



La caiguda de potencial entre les resistències es

$$\boldsymbol{V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)}$$

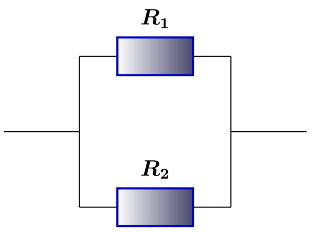
sovint es pot simplificar l'anàlisi d'un circuit que té resistències en sèrie substituint aquestes per una sola resistència equivalent que ens proporcioni la mateixa caiguda de potencial quan circula per ella la mateixa intensitat $\boldsymbol{I}$. La resistència equivalent per les resistències en sèrie és la suma de les resistències originals:

$$\boldsymbol{R_{eq} = R_1 + R_2}$$

Quan existeixin més de dues resistències en série, la resistència equivalent es calcula amb:

$$\boldsymbol{R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots}$$

Dues resistències unides de forma que el corrent es divideixi entre elles es diu que estan unides en paral·lel. Com la càrrega elèctrica es conserva, la suma de les intensitats que circulen per les resistències ha de ser igual a la que hi entrava



$$\boldsymbol{I = I_1 + I_2}$$

el potencial que cau en cadascuna és

$$\boldsymbol{V = I_1R_1 = I_2R_2}$$

de forma que de les dues equacions anteriors s'obté

$$\boldsymbol{I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I}$$
$$\boldsymbol{I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I}$$

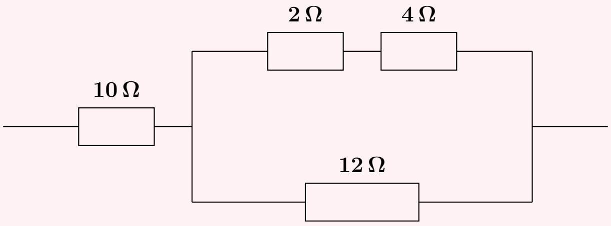
i la resistència equivalent a aquestes dues serà

$$\boldsymbol{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

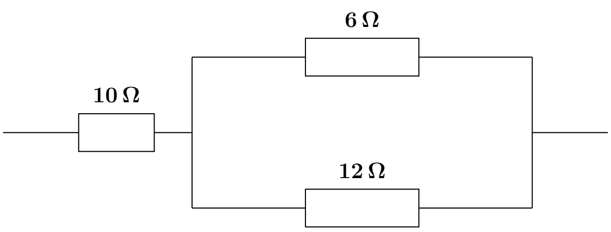
resultat que es pot generalitzar a qualsevol nombre de resistències connectades en paral·lel

$$\boldsymbol{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots}$$

Exemple 5
Trobeu la resistència equivalent de la següent combinació

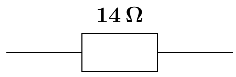


Podem començar sumant les resistències de **2 Ω** i **4 Ω**, que estan en sèrie



Ara, sumem en paral·lel les resistències de **6 Ω** i **12 Ω**

i finalment,



És important tenir en compte que a l'inici, les resistències de **2 Ω** i **12 Ω** no es poden sumar en paral·lel, ja que és prioritari fer l'associació de la de **2 Ω** amb la de **4 Ω** de la mateixa manera que les de **2 Ω** i **10 Ω** no es poden sumar en sèrie perquè hi ha una *derivació* entre elles, i s'ha de reduir primer el grup format per les resistències de **2 Ω**, **12 Ω** i **12 Ω**.

Exercicis

1. Trobeu la intensitat que travessa una resistència de $\boldsymbol{30\,\Omega}$ quan se sotmet a una diferència de potencial $\boldsymbol{V = 90\,V}$.

2. Calculeu la potència que entrega una font d'alimentació de $\boldsymbol{15\,V}$ quan la travessa una intensitat $\boldsymbol{I = 3\,A}$.

3. Una bombeta desenvolupa una potència de $\boldsymbol{80\,W}$ quan es connecta a $\boldsymbol{220\,V}$. Calculeu la resistència que representa i la potència que desenvolupa si es connecta a $\boldsymbol{125\,V}$.

4. Una resistència $\boldsymbol{R = 20\,\Omega}$ es connecta a una diferència de potencial de $\boldsymbol{100\,V}$. Calculeu la intensitat que la travessa i la calor dissipada per efecte Joule al llarg de $\boldsymbol{10}$ hores de funcionament.

5. Proveu que en el cas de tres resistències $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ i $\boldsymbol{R_3}$ en paral·lel, la resistència equivalent es pot acabar escrivint com
$$\boldsymbol{R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}}$$
Deduïu l'expressió de la resistència equivalent pel cas de 5 resistències en paral·lel.

6. Les característiques de tres bombetes són $\boldsymbol{P_1 = 20\,W}$, $\boldsymbol{V_1 = 220\,V}$; $\boldsymbol{P_2 = 50\,W}$, $\boldsymbol{V_2 = 220\,V}$ i $\boldsymbol{P_3 = 100\,W}$, $\boldsymbol{V_3 = 220\,V}$. Calculeu la resistència que representen cadascuna i la resistència equivalent de les tres quan es connecten en sèrie i quan es connecten en paral·lel.

7. Tres resistències $\boldsymbol{R_1 = 10\,\Omega}$, $\boldsymbol{R_2 = 20\,\Omega}$ i $\boldsymbol{R_3 = 30\,\Omega}$, es poden connectar alhora entre elles de $\boldsymbol{8}$ formes diferents. Representeu cadascuna d'aquestes possibilitats en un dibuix i calculeu-ne la resistència equivalent en cada cas.

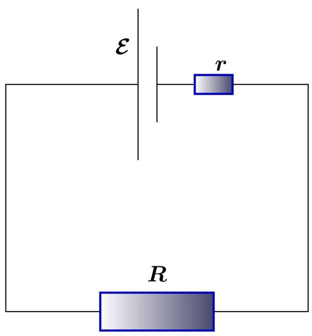
8. Quatre resistències *iguals*, $\boldsymbol{R = 10\,\Omega}$, es poden connectar alhora entre elles de $\boldsymbol{10}$ formes diferents. Representeu cadascuna d'aquestes possibilitats en un dibuix i calculeu-ne la resistència equivalent en cada cas.

7 Circuits de corrent continu

7.1 Fonts d'alimentació reals

Una bateria real és més complicada que una font d'alimentació ideal. Les reals tenen una certa resistència interna que fa que la diferència de potencial que proporcionen *en borns* no sigui la mateixa que la que indiquen, a aquesta darrera li direm *força electromotriu*, o *fem*. Una font de *fem* ideal manté una diferència de potencial constant independentment de la intensitat que hi circula per ella. En una bateria real la tensió en borns disminueix al augmentar la intensitat. La resistència interna es modela suposant que es troba connectada en sèrie amb la font.

Vegem el cas d'un circuit senzill.



Hem de pensar que la tensió que tenim en borns, V_b, no és $\mathcal{E}$, ja que la resistència r és a *dins* de la font d'alimentació. Calculem la intensitat que passa per el circuit

$$\mathcal{E} = I(r+R) \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$$

llavors, la tensió en *borns* és la que proporciona la font *menys* la que cau en ella mateixa per causa de la resistència interna que té, r

$$\begin{aligned} V_b &= \mathcal{E} - Ir \\ &= \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r+R}r \\ &= \mathcal{E}\left(1 - \frac{r}{r+R}\right) \\ &= \mathcal{E}\frac{R}{r+R} \end{aligned}$$

En general sabrem si ens parlen d'una font d'alimentació real perquè ens donaran com a dades la seva *fem*, $\mathcal{E}$ i la seva resistència interna. Si es tracta d'una font ideal, ens donaran com a dada la *tensió*, V que proporciona.

Exemple 1
Una font d'alimentació de *fem* $\mathcal{E} = 12\,V$ es connecta a un circuit. Si quan hi circula una intensitat de $10\,A$ la tensió entre el borns V_b, del generador és de $11,2\,V$, quina és la resistència interna r, de la font?

La caiguda de tensió a la resistència interna de la font val

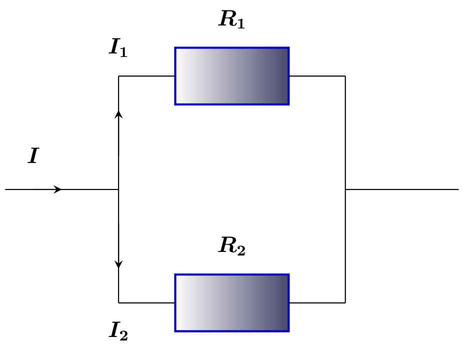
$$\mathcal{E} - V_b = 12 - 11,2 = 0,8\,V$$

Llavors, aplicant la llei d'Ohm

$$V = Ir \Rightarrow 0,8 = 10r \Rightarrow r = 0,08\,\Omega$$

7.2 Divisor de intensitat

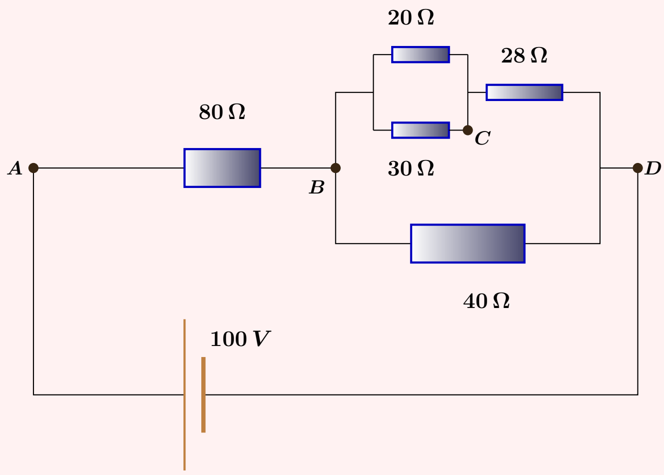
En l'anàlisi que haurem de fer en molts dels exemples i exercicis posteriors, trobarem una situació que es repeteix sovint. És el cas d'una derivació com la de la figura



tal com vam veure quan parlàvem de l'associació de resistències en paral·lel, les intensitats I_1, I_2 a la derivació es poden calcular en funció de la intensitat entrant I i de les resistències R_1, R_2 amb les fórmules

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Exemple 2
Calculeu la tensió que cau en cada resistència.



El primer que fem és calcular la resistència equivalent per tal de trobar la intensitat total que passa pel circuit.

Les resistències de $20\,\Omega$ i $30\,\Omega$ estan en paral·lel, de manera que les assimilem a una de valor

$$\frac{20 \cdot 30}{20+30} = \frac{600}{50} = 12\,\Omega$$

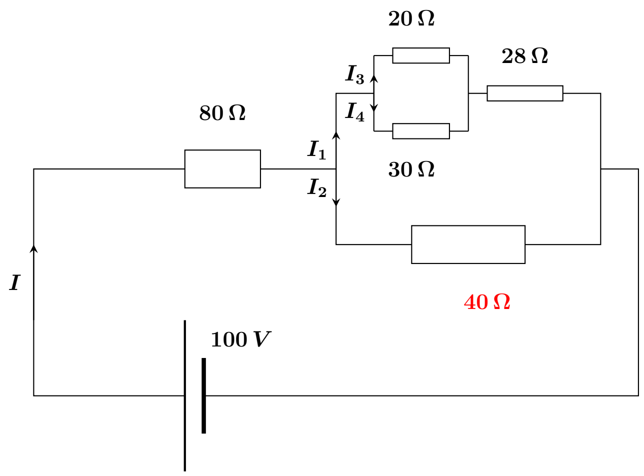
ara, aquesta es troba en sèrie amb la de $28\,\Omega$ i juntes queden com una de valor $12 + 28 = 40\,\Omega$.

Aquesta darrera al seu torn es troba en paral·lel amb la de $40\,\Omega$ i juntes equivalen a una de $20\,\Omega$.

Finalment, queda sumar la de $80\,\Omega$ en sèrie per donar $20+80 = 100\,\Omega$. Llavors, la intensitat total val

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{100} = 1\,A$$

Ara aplicarem les fórmules del divisor de intensitat per anar trobant les intensitats a cada branca.



A la primera derivació tenim

$$I_1 = 1 \cdot \frac{40}{40+40} = 0,5\, A$$

$$I_2 = 1 \cdot \frac{40}{40+40} = 0,5\, A$$

i a la segona derivació

$$I_3 = 0,5 \cdot \frac{30}{30+20} = 0,3\, A$$

$$I_4 = 0,5 \cdot \frac{20}{30+20} = 0,2\, A$$

Llavors, les caigudes de tensió són

$$V_{80\,\Omega} = I \cdot 80 = 1 \cdot 80 = 80\, V$$

$$V_{40\,\Omega} = I_2 \cdot 40 = 0,5 \cdot 40 = 20\, V$$

$$V_{20\,\Omega} = I_3 \cdot 20 = 0,3 \cdot 20 = 6\, V$$

$$V_{30\,\Omega} = I_4 \cdot 30 = 0,2 \cdot 30 = 6\, V$$

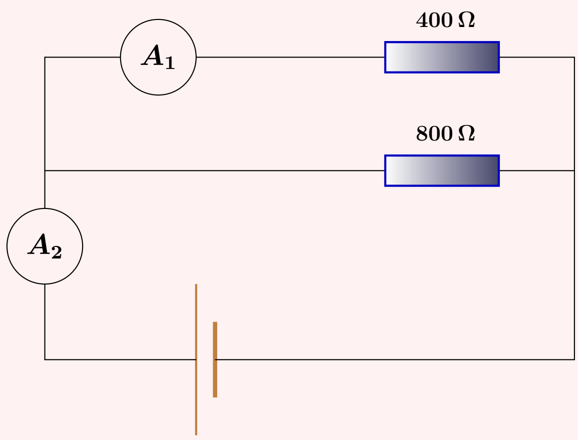
$$V_{28\,\Omega} = I_1 \cdot 28 = 0,5 \cdot 28 = 14\, V$$

7.3 Instruments de mesura

7.3.1 Amperímetre

Al laboratori, per tal de mesurar la intensitat que circula per un conductor es fa servir un *amperímetre*. Els amperímetres s'han de connectar en sèrie a l'element pel qual es vol mesurar la intensitat que el travessa. Els amperímetres presenten una certa resistència interna, que idealment ha de ser propera a zero. En cas contrari, la seva sola presència al circuit alteraria la intensitat que hi circula, donant una lectura errònia.

Exemple 3
Si a l'amperímetre $\boldsymbol{A_2}$ de la figura es llegeix $\mathbf{60}\,\boldsymbol{mA}$, quina serà la lectura de l'amperímetre $\boldsymbol{A_1}$?



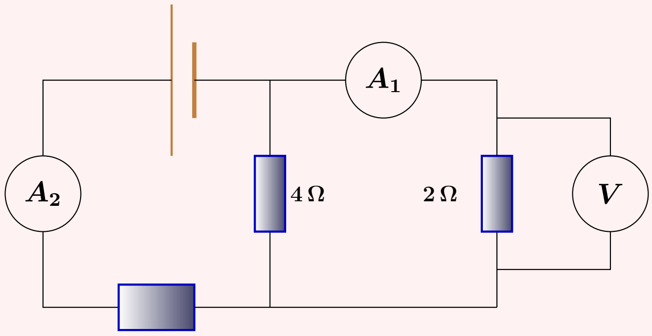
Si anomenem $\boldsymbol{I}$ el corrent que marca $\boldsymbol{A_2}$ i $\boldsymbol{I'}$ el que marca $\boldsymbol{A_1}$, llavors aplicant el divisor d'intensitat

$$I' = I \cdot \frac{800}{800+400} = 60 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{800}{800+400} = 40\,mA$$

7.3.2 Voltímetre

Per mesurar la caiguda de tensió en elements passius com resistències, fem servir un *voltímetre*. Els voltímetres s'han de connectar en paral·lel al circuit, abans i després de l'element pel qual es vol mesurar la tensió que hi cau. Idealment han de tenir resistència infinita, per tal que no es derivi intensitat cap a ells i, per tant s'alteri la mesura de la tensió que es vol calcular.

Exemple 4
El voltímetre del circuit següent senyala $\boldsymbol{2,5\,V}$. Què indiquen els amperímetres?



Anomenant $\boldsymbol{I_1}$ la intensitat que marca $\boldsymbol{A_1}$ i aplicant la llei d'Ohm a la resistència de $\boldsymbol{2\,\Omega}$ tenim,

$$V = I_1 R \Rightarrow 2,5 = I_1 \cdot 2 \Rightarrow I_1 = 1,25\,A$$

Ara, com les resistències de $\boldsymbol{2}$ i $\boldsymbol{4\,\Omega}$ es troben en paral·lel, cau la mateixa tensió en elles, de manera que podem aplicar la llei d'Ohm a la resistència de $\boldsymbol{4\,\Omega}$ per obtenir la intensitat $\boldsymbol{I_{4\,\Omega}}$ que la travessa (aquesta intensitat no està assenyalada al dibuix)

$$V = I_{4\,\Omega} R \Rightarrow 2,5 = I_{4\,\Omega} \cdot 4 \Rightarrow I_{4\,\Omega} = 0,625\,A$$

Les intensitats $\boldsymbol{I_{4\,\Omega}}$ i $\boldsymbol{I_1}$ se sumen a la derivació per donar la intensitat $\boldsymbol{I_2}$ que marcarà l'amperímetre $\boldsymbol{A_2}$, de forma que finalment tenim

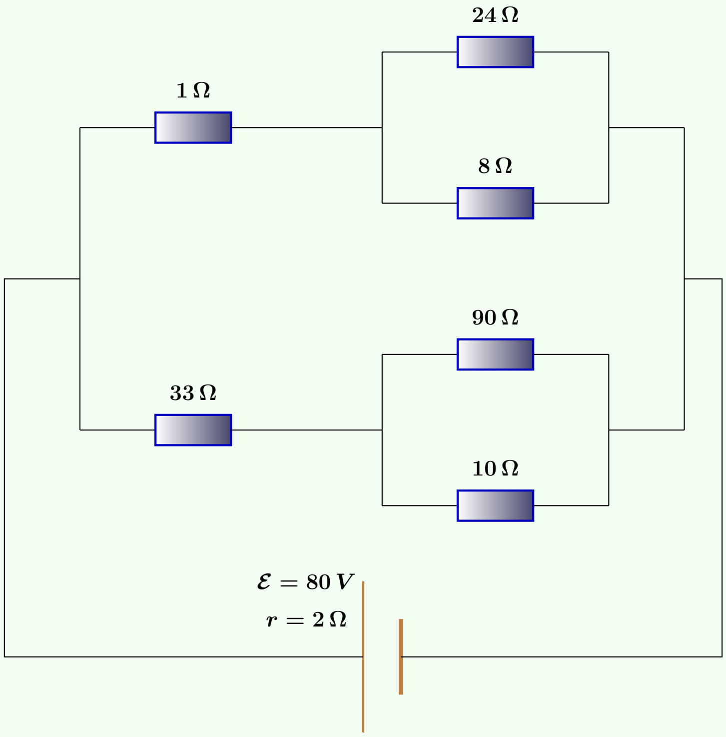
$$I_2 = I_{4\,\Omega} + I_1 = 1,875\,A$$

Exercicis

1. Disposem d'una pila de $\boldsymbol{\mathcal{E} = 4,5\,V}$ i $\boldsymbol{r = 0,5\,\Omega}$. Calculeu la intensitat que passa pel circuit i la tensió en borns $\boldsymbol{V_b}$, quan alimenta una resistència de:
   (a) $\boldsymbol{R = 220\,\Omega}$
   (b) $\boldsymbol{R = 1\,\Omega}$
2. Quan connecten una bateria a una resistència externa $\boldsymbol{R = 3\,\Omega}$ la tensió en borns és $\boldsymbol{V_b = 9\,V}$. Quan es connecta a una $\boldsymbol{R = 7\,\Omega}$ llavors val $\boldsymbol{V_b = 14\,V}$. Plantegeu un sistema d'equacions per trobar la *fem* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, de la font i la seva resistència interna.
3. Unim tres resistències de $\boldsymbol{10\,\Omega}$ formant un triangle. Entre dos vèrtexs d'aquest triangle establim una diferència de potencial de $\boldsymbol{20V}$. Quina intensitat circularà per cada resistència?
4. Dues bombetes iguals, de tensió nominal $\boldsymbol{3\,V}$ i potència $\boldsymbol{\frac{9}{20}\,W}$, es connecten en paral·lel a una font de tensió de $\boldsymbol{6\,V}$. Per tal que les bombetes funcionin a la seva tensió nominal, intercalem una resistència $\boldsymbol{R}$, en sèrie entre les bombetes i la font d'alimentació. Calculeu el valor de $\boldsymbol{R}$.
5. El símbol ⊪ representa una presa de terra, quan es connecta a qualsevol punt d'un circuit elèctric, aquell punt queda a $\boldsymbol{0}$ de potencial. Les bateries *eleven* el potencial elèctric, mentre que a les resistències, el potencial elèctric *cau*. Fent servir els resultats de l'exemple 2, poseu una presa de terra al punt $\boldsymbol{A}$ i calculeu el potencial que hi ha en els altres punts $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$. Canvieu després la presa de terra al punt $\boldsymbol{B}$ i repetiu el càlcul pels altres. Feu això per tots els punts assenyalats.

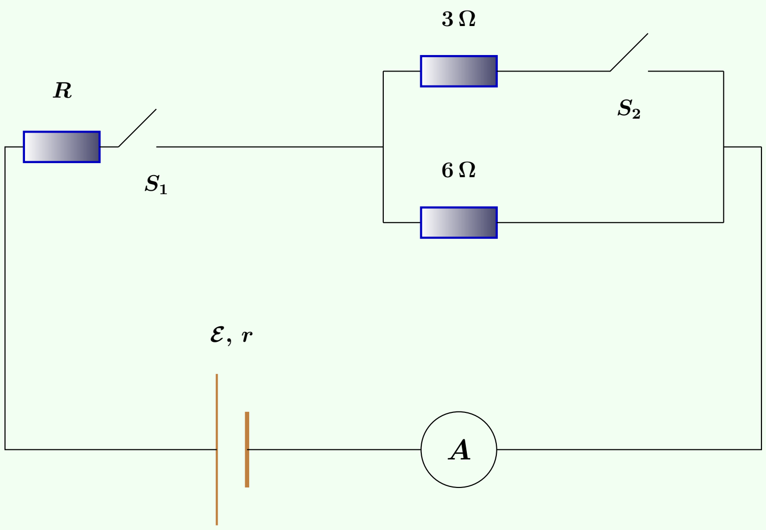
Exercicis

6. Per cada resistència del circuit, calculeu la intensitat que la travessa i la caiguda de tensió.



Exercicis

7. En el circuit de la figura, quan l'interruptor $\boldsymbol{S_1}$ està tancat i el $\boldsymbol{S_2}$ obert, l'amperímetre $\boldsymbol{A}$ marca $\boldsymbol{0,75\,A}$. Sabent que $\boldsymbol{\mathcal{E} = 12\,V}$ i $\boldsymbol{r = 1\,\Omega}$,



   (a) Quin és el valor de la resistència $\boldsymbol{R}$?

   (b) Quina és la potència dissipada en forma de calor dins la font d'alimentació?

   (c) Què marcarà l'amperímetre si mantenim tancats simultàniament els dos interruptors $\boldsymbol{S_1}$ i $\boldsymbol{S_2}$?

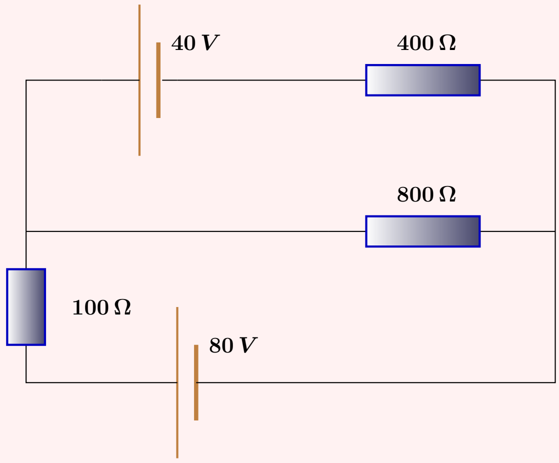
   (d) Què marcarà l'amperímetre si l'interruptor $\boldsymbol{S_1}$ està obert?

8 Mètode de Maxwell

8.1 Introducció i exemples

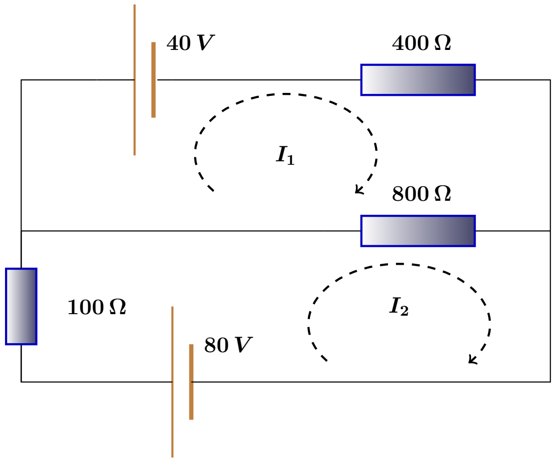
Comencem amb un exemple senzill

Exemple 1
Volem calcular la tensió que cau en cadascuna de les resistències de la figura.



El circuit no es pot resoldre reduint les resistències a una sola, com fèiem en el tema anterior. La presència de fonts d'alimentació intercalades amb les derivacions ho fa impossible. Existeix un mètode, degut a *Kirchhoff* que permet permet resoldre el circuit plantejant un sistema d'equacions. Aquí farem servir l'anomenat *mètode de Maxwell* què millora l'eficàcia del que va plantejar Kirchhoff en el seu moment. El mètode de Maxwell consisteix a construir el sistema d'equacions a partir d'unes *intensitats de malla* que s'hauran de trobar aplicant la llei d'Ohm a cada malla del circuit.

El primer que farem és establir unes intensitats a cada malla del circuit. Les malles d'un circuit son les *cel·les* tancades que es poden diferenciar. En el nostre exemple hi ha tres malles diferents. N'hem de triar dues, i per simplicitat ens quedarem amb les més petites sempre. Si no ens diuen el contrari, el sentit de circulació de les intensitats és arbitrari. Si al resoldre el sistema d'equacions alguna de les intensitats fos negativa, voldria dir que en realitat circula en sentit contrari al suposat per nosaltres.



Un cop establertes les intensitats de malla, escriurem la llei d'Ohm per cadascuna d'elles, tenint en compte les fonts d'alimentació que trobem (i la seva orientació) i les caigudes de tensió a cada resistència. D'aquesta manera

$$\begin{cases} -40 = I_1 \cdot 400 + (I_1 - I_2) \cdot 800 \\ 80 = I_2 \cdot 100 + (I_2 - I_1) \cdot 800 \end{cases}$$

La primera equació correspon a la malla superior. La tensió apareix amb signe negatiu perquè l'orientació de la font d'alimentació *és contrària* al pas de la intensitat. Per una altra banda, observem que a la resistència de $\mathbf{800\,\Omega}$ hem de tenir en compte que hi passen intensitats en sentit contrari. Com estem escrivint l'equació per la malla superior, assignem signe positiu a la intensitat I_1.

La segona equació correspon a la malla inferior. Ara la tensió apareix positiva perquè la font es troba *ben orientada* respecte la intensitat que la travessa. De forma semblant al cas anterior, en la resistència de $\mathbf{800\,\Omega}$ hem de escriure amb signe positiu la intensitat I_2.

Reordenant els termes de les equacions

$$\begin{cases} 1200 I_1 - 800 I_2 = -40 \\ -800 I_1 + 900 I_2 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30 I_1 - 20 I_2 = -1 \\ -40 I_1 + 45 I_2 = 4 \end{cases}$$

Aquest sistema té com a solucions $I_1 = \frac{7}{110}\,A$, $I_2 = \frac{8}{55}\,A$. Ara podem calcular les tensions que cauen a cada resistència.

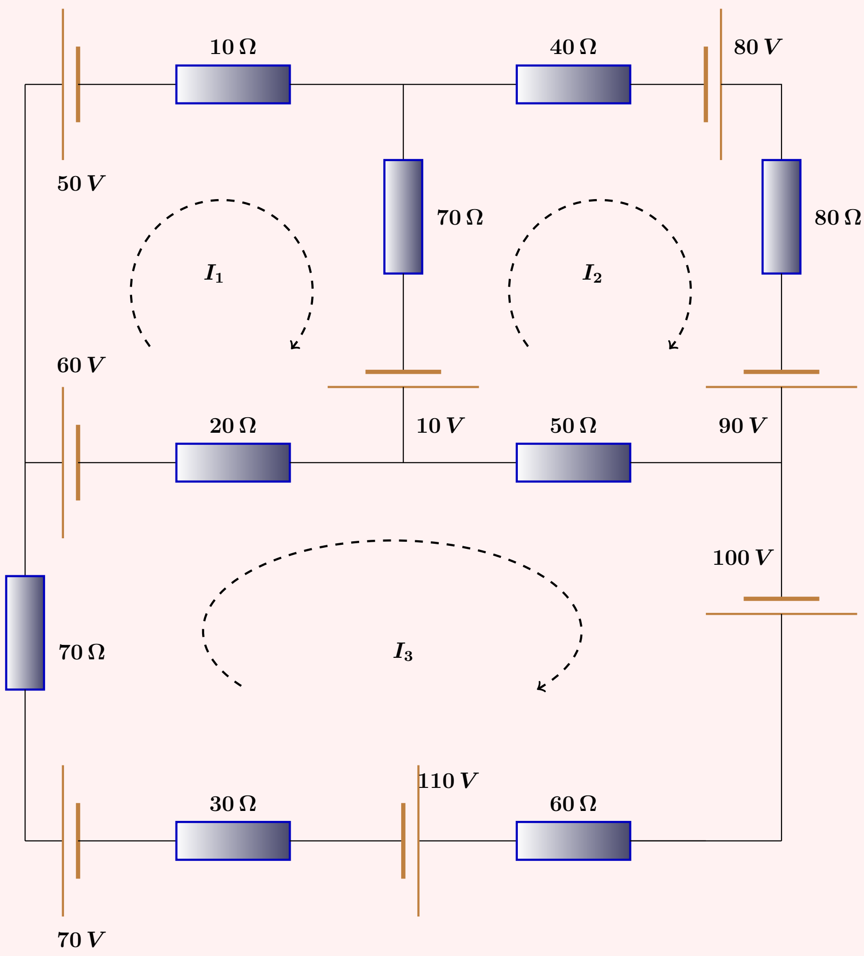
$$V_{400\,\Omega} = I_1 \cdot 400 = \frac{7}{110} \cdot 400 = 25,45\,V$$

$$V_{800\,\Omega} = (I_2 - I_1) \cdot 800 = \left(\frac{8}{55} - \frac{7}{110}\right) \cdot 800 = 65,45\,V$$

$$\boldsymbol{V_{100\,\Omega} = I_2 \cdot 100 = \frac{8}{55} \cdot 100 = 14,55\,V}$$

Fixem-nos que per calcular la tensió que cau en la resistència de **800 Ω** restem les intensitats en l'ordre que fa que el resultat sigui positiu. L'exemple que segueix és més complicat perquè tindrem un circuit amb tres malles, s'haurà de resoldre un sistema de tres equacions amb tres incògnites.

Exemple 2
Volem calcular les intensitats de malla en el següent circuit



Les equacions per cada malla són ara

$$\begin{aligned}
-50+10+60 &= I_1\cdot 10 + (I_1 - I_2)70 + (I_1 - I_3)20\\
80+90-10 &= I_2\cdot 40 + I_2\cdot 80 + (I_2 - I_3)50 + (I_2 - I_1)70\\
100-110+70-60 &= I_3\cdot 60 + I_3\cdot 30 + I_3\cdot 70 + (I_3 - I_1)20\\
&\quad + (I_3 - I_2)50
\end{aligned}$$

simplificant i reordenant

$$\begin{cases} 100I_1 - 70I_2 - 20I_3 = 20\\ -70I_1 + 240I_2 - 50I_3 = 160\\ -20I_1 - 50I_2 + 230I_3 = 0\end{cases}$$

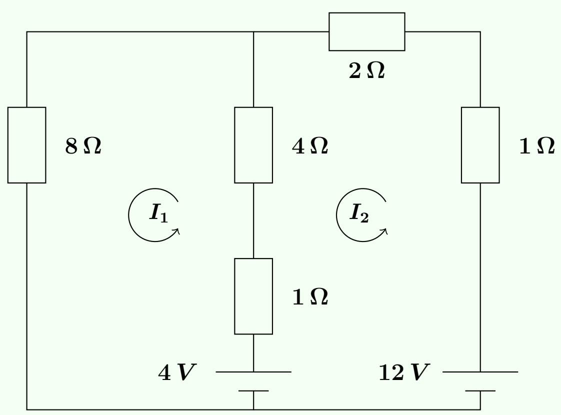
amb solucions $I_1 = \frac{3790}{3907}$, $I_2 = \frac{3958}{3907}$ i $I_3 = \frac{1190}{3907}$

Repetim que en el cas que mai qualsevol valor de la intensitat surti amb signe negatiu, voldrà dir que la circulació tenia sentit contrari al que havíem suposat però no té més transcendència, és a dir, no s'ha de tornar a resoldre el problema especificant els sentits de gir *correctes* de les intensitats de malla.

Exercicis

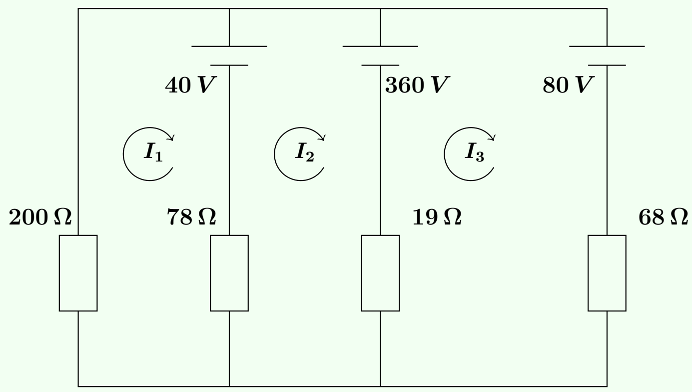
1. Trobeu les intensitats de malla al següents circuits, suposant el sentit que s'indica en cada cas.

   (a)

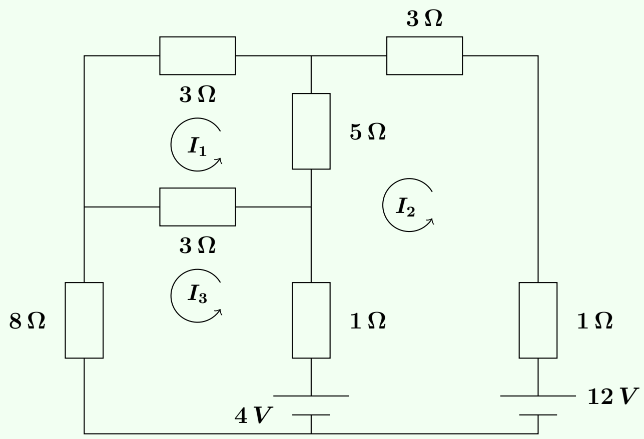


Exercicis

(b)



(c)



9 La llum

9.1 Naturalesa de la llum

Al llarg de la història s'ha debatut sobre si la llum estava formada per corpuscles diminuts o es tractava d'una ona. Algunes experiències, reflexió i refracció, per exemple, es van poder explicar mitjançant un model corpuscular, mentre que altres; interferències, difracció, només es podien entendre si es considerava la llum com una ona. Actualment parlem de **dualitat ona-partícula** per referir-nos a que els fenòmens relacionats amb la **propagació de la llum** s'expliquen mitjançant la **teoria ondulatòria**, mentre que els relacionats amb la **interacció de la llum amb la matèria** s'expliquen a través de la **teoria corpuscular**.

9.1.1 Classificació de les ones

Segons si necessiten o no un medi per a propagar-se, Les ones es poden classificar com:

- **Mecàniques**

  Necessiten un medi material per a propagar-se. Per exemple, el so. La velocitat de propagació depèn, entre d'altres paràmetres, de la densitat del medi i en general, augmenta amb aquesta. Així, la velocitat del so en l'aire és d'uns $\mathbf{340\,m/s}$, a l'aigua de $\mathbf{1600\,m/s}$ i a l'acer de $\mathbf{6100\,m/s}$.

- **Electromagnètiques**

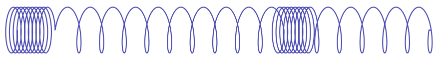
  No necessiten cap medi material per tal de propagar-se. Per exemple, la llum. Totes les ones electromagnètiques es mouen a la mateixa velocitat en el buit, $\mathbf{3 \cdot 10^8 m/s}$.

En ambdós casos, aquesta velocitat de la que es parla s'anomena velocitat de fase o de grup. Més endavant la relacionarem amb altres paràmetres de les ones.

Les ones també es poden classificar segons el seu mode de vibració en:

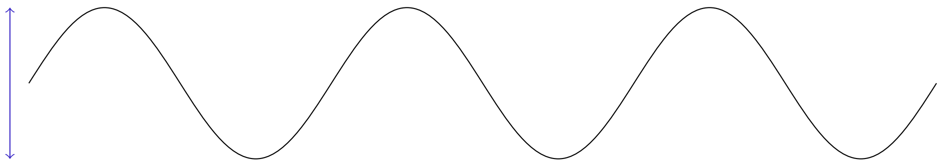
- **Longitudinals**

  La direcció de la pertorbació és la mateixa que la de la propagació de l'ona. Per exemple, una pertorbació que es propagui en una molla elàstica, el so, que correspon a variacions de la pressió de l'aire, o una ona sísmica de tipus $\boldsymbol{P}$.



- **Transversals**

  La direcció de la pertorbació és perpendicular a la direcció de la propagació de l'ona. Per exemple, la pertorbació que resulta al sacsejar una corda (o un fuet), les ones electromagnètiques o les ones sísmiques de tipus $\boldsymbol{S}$.



Tant per les longitudinals com per les transversals, les ones que es propaguen en una única direcció s'anomenen ones **unidimensionals**, per exemple les generades en una corda (que en realitat vibra en un pla). Les ones **bidimensionals** es propaguen al llarg d'un pla, com per exemple l'aigua en un estany quan hi llancem una pedra (s'ha de notar que el moviment vibratori es dona en una dimensió extra) i finalment les ones **tridimensionals**, que es propaguen a l'espai, com per exemple el so que produeix un instrument musical.

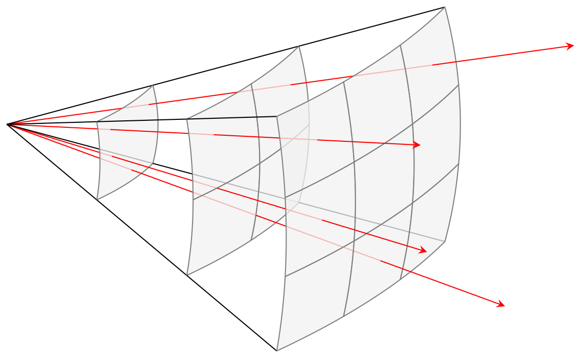
9.2 Conceptes importants associats a una ona

Els següents conceptes i definicions formen part del vocabulari del tema i s'han de conèixer bé per comprendre'l.

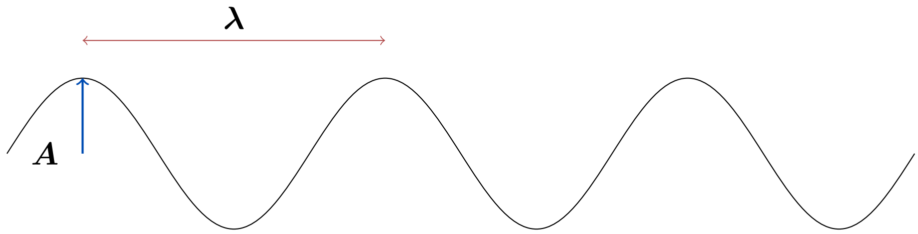
- **Amplitud** ($\boldsymbol{A}$). Valor màxim de la magnitud física que representa l'ona. Definim la **intensitat** de l'ona com l'energia per unitat de temps i de superfície transportada per l'ona ($\boldsymbol{W/m^2}$). La intensitat és proporcional al quadrat de l'amplitud de l'ona.

- **Front d'ona**. Lloc geomètric dels punts de l'espai que estan en el mateix estat de vibració.

- **Raig**. Direccions perpendiculars als fronts d'ona.



- **Longitud d'ona** ($\boldsymbol{\lambda}$). És la *mínima* distància que hi ha entre dos punts que estan en el mateix estat de vibració. Es diu que els punts que estan separats un nombre enter de longituds d'ona **es troben en fase.**



- **Freqüència** ($\boldsymbol{f}$ o $\boldsymbol{\nu}$). És el nombre d'oscil·lacions que fa un punt que vibra, per unitat de temps. La freqüència es mesura en hertz ($\boldsymbol{Hz}$) amb $\boldsymbol{1\,Hz = 1\,s^{-1}}$

- **Període** ($\boldsymbol{T}$). És el temps necessari perquè un punt de l'ona faci una oscil·lació completa. Es compleix que

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{f}}$$

- **Velocitat de grup o de fase** ($\boldsymbol{v}$). És la velocitat a la que es desplaça l'ona. No és la mateixa que la velocitat amb que vibren els seus punts. Es compleix

$$\boldsymbol{\lambda = v \cdot T}$$

Exemple 1
Una emissora de ràdio emet en la freqüència $\boldsymbol{106,4\,MHz}$. Trobeu el seu període i longitud d'ona. Calculeu també el temps que triga a arribar el senyal des de l'emissora fins un receptor que es troba a $\boldsymbol{700\,km}$. *Dada: velocitat de la llum en el buit* $\boldsymbol{c = 3\cdot 10^8\,m/s}$

En quant al període, tenim

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{106,4\cdot 10^6} = 9,4\cdot 10^{-9}\,s$$

per la longitud d'ona

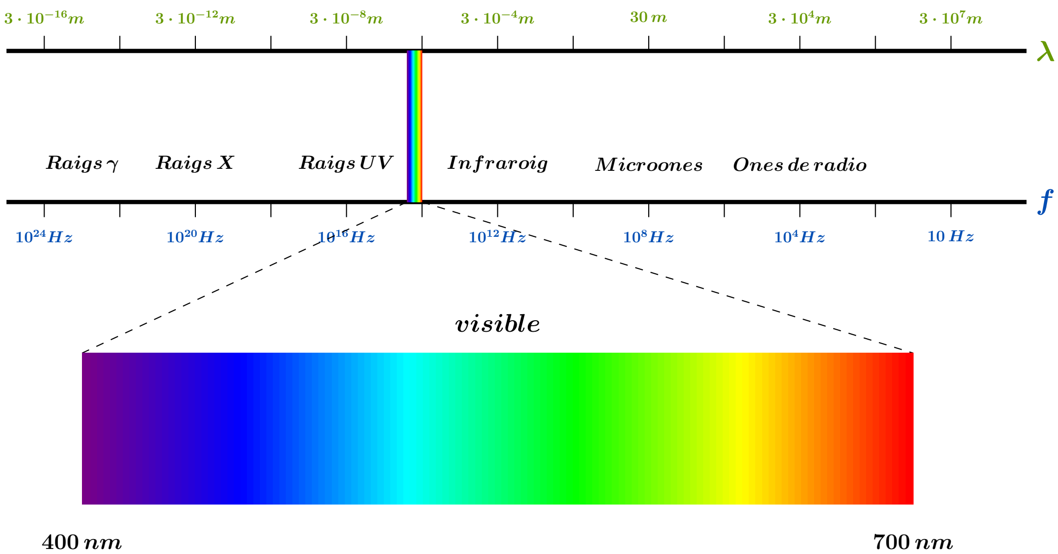
$$\lambda = cT = 2,82\,m$$

i respecte al temps demanat

$$e = vt \Rightarrow t = \frac{e}{v} = \frac{700\cdot 10^3}{3\cdot 10^8} = 2,33\cdot 10^{-3}\,s = 2,33\,ms$$

9.3 L'espectre electromagnètic

Segons la teoria ondulatòria, la llum és una ona electromagnètica transversal que consisteix en la propagació d'un camp elèctric i un camp magnètic variables perpendiculars entre sí i a la direcció de propagació. De tota manera, hi ha altres tipus d'ones electromagnètiques que recollim en l'anomenat espectre electromagnètic.



9.4 Propagació de la llum. Fenòmens ondulatoris.

9.4.1 Índex de refracció

La velocitat ($\boldsymbol{v}$) de la llum depèn del medi en el que es troba. Definim l'índex de refracció $\boldsymbol{n}$, com

$$\boldsymbol{n = \frac{c}{v}}$$

on $\boldsymbol{c = 3 \cdot 10^8\, m/s}$ és la velocitat de la llum en el buit. Aquesta velocitat és una cota superior per qualsevol partícula. En el context de la Teoria de la relativitat d'Einstein es pot demostrar que la massa d'un objecte qualsevol depèn de la seva velocitat com

$$\boldsymbol{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

on $\boldsymbol{m_0}$ és la massa en repòs.

Exemple 2
Per tal que un projectil llançat verticalment cap amunt no retorni a la Terra se li ha de comunicar una velocitat d'uns $\boldsymbol{11,2\, km/s}$ anomenada *velocitat d'escapament*. Si suposem que la seva massa és de $\boldsymbol{1\, kg}$ i tenim en compte efectes relativistes, calculeu la seva massa quan es llança a l'esmentada velocitat. *Dada: velocitat de la llum en el buit* $\boldsymbol{c = 3 \cdot 10^8\, m/s}$

Es comprova fàcilment que $\boldsymbol{11,2\, km/s = 11200\, m/s}$, i fent servir un resultat anterior

$$\boldsymbol{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{11200}{3\cdot 10^8}\right)^2}} = 1,000000001\, kg}$$

Aquest augment de la massa no sembla molt significatiu, però si observem amb detall l'expressió anterior es veu que quan la velocitat d'un mòbil s'acosti a $\boldsymbol{c}$, la seva massa tendeix a infinit. Per aquesta raó només es poden moure a la velocitat de la llum partícules que no tinguin massa. (Comentar l'aparent paradoxa de la radiació Čerenkov).

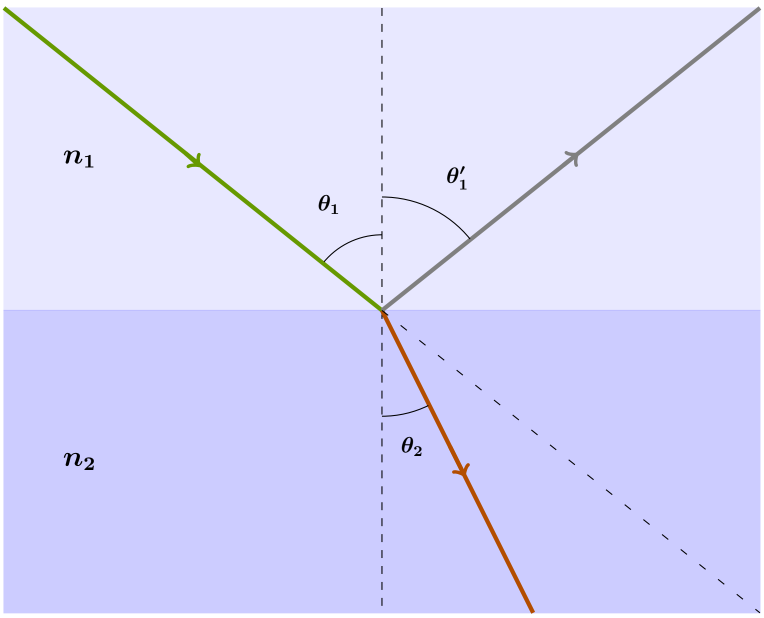
9.4.2 Reflexió i refracció

Quan un feix de llum troba una superfície de separació entre dos medis amb índexs de refracció $\boldsymbol{n_1}$, $\boldsymbol{n_2}$ com ara una superfície aire-vidre o aire-aigua, part de la llum es reflecteix i part es refracta.

- Experimentalment es veu que l'angle d'incidència $\boldsymbol{\theta_1}$ és igual que l'angle de reflexió $\boldsymbol{\theta_1'}$.
- Els tres raigs es troben en el mateix pla.
- La relació entre l'angle d'incidència $\boldsymbol{\theta_1}$ i el refractat $\boldsymbol{\theta_2}$ ve donada per la llei d'**Snell**

$$\boldsymbol{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2}$$

Si suposem $\boldsymbol{n_1 < n_2}$



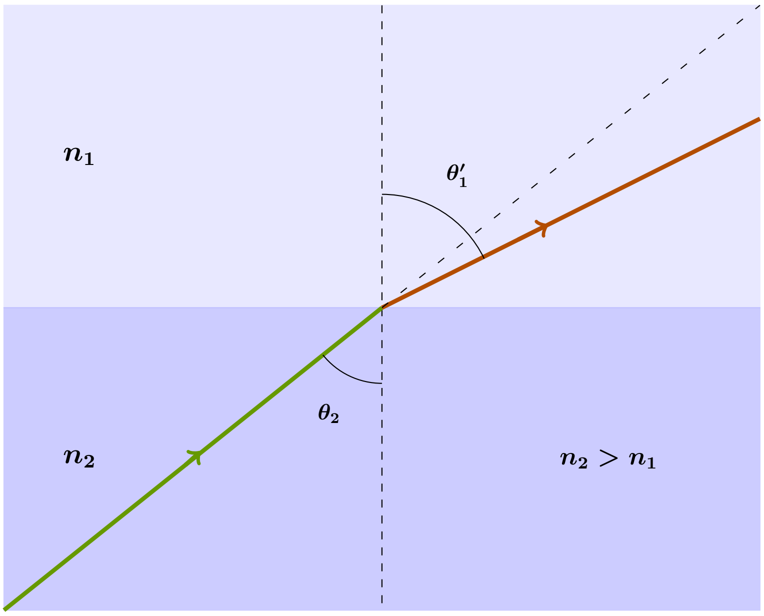
Exemple 3
Un raig lluminós incideix sobre una superfície de vidre amb un angle d'incidència de **50°**. Quin serà l'angle de refracció si l'índex de refracció del vidre és 1,5 i el de l'aire, 1?

Aplicant la tercera llei d'Snell

$$\boldsymbol{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2}$$

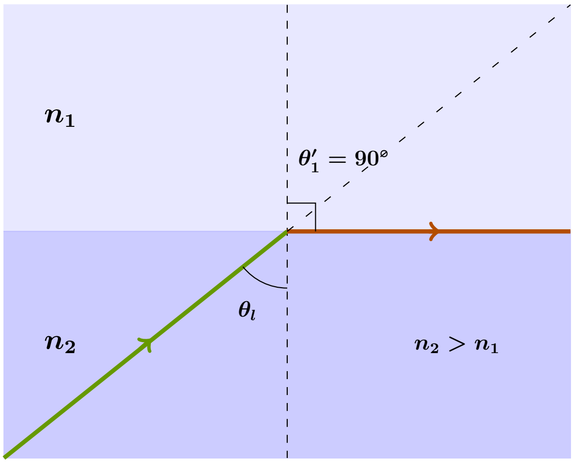
$$\mathbf{1 \sin 50^\circ = 1,5 \sin \boldsymbol{\theta_2} \Rightarrow \boldsymbol{\theta_2} = \arcsin \left(\frac{1 \sin 50^\circ}{1,5} \right) = 30,71^\circ}$$

Angle límit. Acabem de veure que quan un raig de llum passa d'un medi amb $\boldsymbol{n_1}$ a un altre amb $\boldsymbol{n_2}$, sent $\boldsymbol{n_1 < n_2}$, el raig refractat *s'acosta* a la normal. Si la llum passes del medi 2 al 1 la situació seria la següent



És a dir, ara el raig refractat *s'allunya* de la normal ja que la trajectòria de la llum és reversible i fa el mateix camí de sortida que faria d'entrada si el raig vermellós fos l'incident i el verd el refractat.

En les condicions de la figura, es veu que si $\boldsymbol{\theta_2}$ augmenta progressivament arribarà abans a l'horitzontal el raig refractat que l'incident. L'angle d'incidència pel qual es dona aquesta situació s'anomena *angle límit* ($\boldsymbol{\theta_l}$) o *angle crític* ($\boldsymbol{\theta_c}$).



En aquesta situació tota la llum queda confinada en l'interfície de separació dels dos medis de forma que la superfície es veu brillant com si fos un mirall. En aquesta situació, si l'angle d'incidència continua augmentant llavors es produeix el fenomen anomenat *reflexió total*, segons el qual la llum es reflecteix a la superfície de separació i només una petita fracció en surt. Això s'aprofita, per exemple, en la fibra òptica on es pot transportar a gran distància un senyal electromagnètic o lluminós gràcies a les reflexions totals que aquest senyal pateix en les parets interior del *cable* de fibra.

Exemple 4
Trobeu l'angle límit del diamant sabent que el seu índex de refracció és $\mathbf{2,5}$.

Tenim

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

llavors, considerant el diamant el medi 2 i l'aire el 1,

$$1 \sin 90° = 2,5 \sin\theta_c$$

i l'angle val

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1 \sin 90°}{2,5}\right) = 23,58°$$

9.4.3 Dispersió

L'índex de refracció dels materials depèn en realitat de la longitud d'ona de la llum incident, així, les longituds d'ona curtes, (color blau) tenen índex de refracció més gran que les llargues (color vermell), d'aquesta manera, al travessar la llum blanca un material, aquesta se separa en els seus components originals. L'arc de sant Martí és un exemple de dispersió a través de les gotes d'aigua que es troben a l'atmosfera quan plou.

9.5 La llum segons el model corpuscular

El model corpuscular de la llum suposa que aquesta està formada per corpuscles o *quanta* de llum anomenats fotons. L'energia de cada fotó ve donada per

$$\boldsymbol{E = h \cdot f = h \cdot \nu}$$

on $\boldsymbol{h = 6,626 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}$ és l'anomenada **constant de Planck**, i $\boldsymbol{f}$ és la freqüència de la llum.

Quan la llum canvia de medi, l'energia (i freqüència) dels fotons es manté constant. Llavors, com que la velocitat varia, tal com hem vist quan hem parlat de l'index de refracció, resulta que la longitud d'ona varia,

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{v}{f}}$$

això fa que no sigui la millor elecció caracteritzar una certa radiació amb la longitud d'ona, ja que aquesta canvia en funció de el medi on es propaga l'ona.

Exemple 5
Quina energia té un fotó de longitud d'ona de **6000** Å? Doneu el resultat en $\boldsymbol{eV}$.

Calculem la freqüència amb

$$\boldsymbol{f = \frac{c}{\lambda}}$$

$$\boldsymbol{f = \frac{3 \cdot 10^8}{6000 \cdot 10^{-10}} = 5 \cdot 10^{14}\, Hz}$$

i ara fem servir

$$\boldsymbol{E = h \cdot f}$$

per calcular

$$\boldsymbol{E = 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 3,31 \cdot 10^{-19}\, J}$$

i finalment

$$\mathbf{3,31\cdot 10^{-19}}\,\boldsymbol{J}\times\frac{\mathbf{1}\,\boldsymbol{eV}}{\mathbf{1,602\cdot 10^{-19}}\,\boldsymbol{J}}=\mathbf{2,07}\,\boldsymbol{eV}$$

Exercicis

1. Una emissora de FM transmet amb una potència d'$\mathbf{1\,kW}$ a una freqüència de $\mathbf{98\,MHz}$. Quants fotons emet durant un minut?

2. Determineu la longitud d'ona i la freqüència d'un fotó de $\mathbf{200\,MeV}$ d'energia i indiqueu en quina zona de l'espectre es troba.

3. Un experiment consisteix a fer penetrar un raig làser de llum vermella des de l'aire fins a l'interior d'un material que té un índex de refracció desconegut. Hem mesurat l'angle d'incidència, que és de $\mathbf{20^\circ}$ respecte de la normal, i l'angle de refracció, que és de $\mathbf{14,90^\circ}$. Determineu l'índex de refracció d'aquest material.

4. Els índexs de refracció de l'aigua i d'un vidre són $\mathbf{1,33}$ i $\mathbf{1,54}$ respectivament. Calculeu l'angle límit entre el vidre i l'aigua.

5. Quan l'angle d'incidència d'un raig sobre un material és de $\mathbf{30^\circ}$, l'angle que formen els raigs reflectit i refractat és de $\mathbf{135^\circ}$. Calculeu l'índex de refracció d'aquest medi.

6. Un raig de llum travessa una làmina de vidre $\mathbf{(n = 1,5)}$ de cares planoparal·leles, amb un angle d'incidència de $\mathbf{45^\circ}$. El raig emergent després de travessar el vidre s'ha desplaçat paral·lelament a l'incident una distància de $\mathbf{0,18\,cm}$. Quin és el gruix de la làmina?

7. Per la llum groga del sodi, que té longitud d'ona en el buit de **5890**Å, els índexs de refracció de l'alcohol i el benzè són $\mathbf{1,36}$ i $\mathbf{1,50}$, respectivament. Calculeu la velocitat de propagació i la longitud d'ona en ambdós mitjans.

8. Quant val l'angle límit per la llum que passa d'un vidre amb $\mathbf{n_{vidre} = 1,52}$ a oli amb $\mathbf{n_{oli} = 1,45}$?

9. Un vidre presenta un índex de refracció per el color vermell de $\mathbf{1,61}$ i per el violat de $\mathbf{1,67}$. Calculeu l'angle que formen els dos raigs després de refractar-se, si hi incideix llum blanca amb un angle de $\mathbf{30^\circ}$

10 Imatges

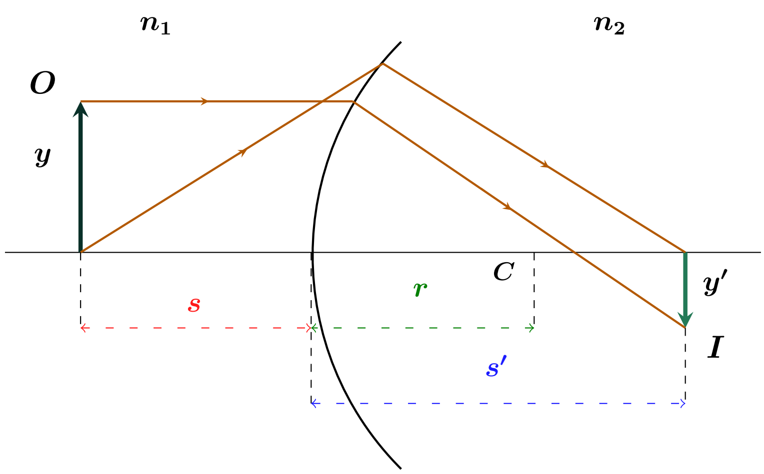
10.1 Òptica geomètrica

10.1.1 Conceptes. Conveni de signes.

Anomenem *sistema òptic* a un conjunt de superfícies que separen medis amb índexs de refracció diferents. Si les superfícies són de revolució, i els seus centres es troben alineats, la recta que els uneix s'anomena *eix òptic*. El punt emissor del qual surten els raigs s'anomena *objecte* ($\boldsymbol{O}$); el punt on es troben els raigs, un cop travessat el sistema òptic, s'anomena *imatge* ($\boldsymbol{I}$). Si els raigs passen físicament per un punt, aquest s'anomena *real*. El punt és *virtual* si hi arriben o en surten les prolongacions dels raigs. El conjunt de punts objecte forma *l'espai objecte* mentre que el conjunt de punts imatge conforma *l'espai imatge*.

Diem que un sistema òptic es comporta *estigmàticament* entre dos punts quan tots els raigs que surten d'un punt objecte va a parar un punt imatge (real o virtual). En tot el que segueix suposarem que la condició d'estigmatisme es compleix.

És important tenir en compte el següent *conveni de signes* (suposant que la llum viatja d'esquerra a dreta)



Les distàncies *al llarg* de l'eix $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ es consideren negatives si es troben a l'esquerra de la superfície i positives si es troben a la dreta. Les distàncies *normals* a l'eix $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y'}$ es consideren positives si es troben per sobre de l'eix òptic i negatives si es troben per sota. Els radis de curvatura $\boldsymbol{r}$ es consideren positius si el seu centre es troba a la dreta de la superfície i negatius si es troba a l'esquerra. Anomenem *augment lateral* a $\boldsymbol{\beta'} = \frac{y'}{y}$.

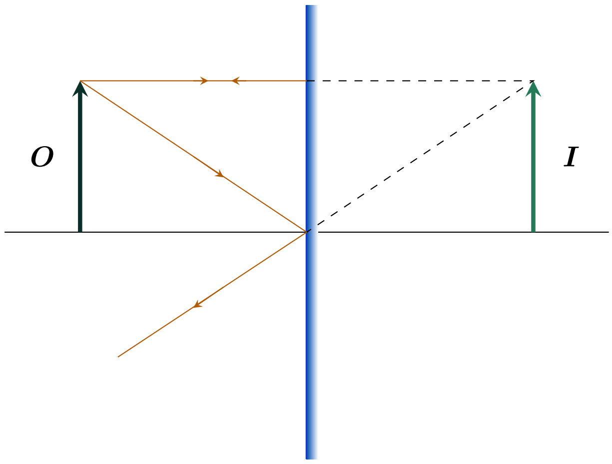
10.2 Miralls

En tots els resultats que segueixen, suposarem que els angles que hi apareixen són petits. en aquestes condicions, es diu que ens trobem en l'aproximació *paraxial*. Els detalls quantitatius d'aquesta aproximació, excedeixen els objectius d'aquest curs.

En els miralls, plans i esfèrics, ens interessa saber si la imatge formada és real o virtual, dreta o invertida i si és més gran o més petita que l'objecte. L'equació que relaciona la posició de l'objecte amb la de la imatge i el radi de curvatura del mirall és

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

10.2.1 Miralls plans



En aquest cas la imatge I formada és virtual (es forma a partir de la prolongació virtual dels raigs de llum), dreta i d'igual tamany.

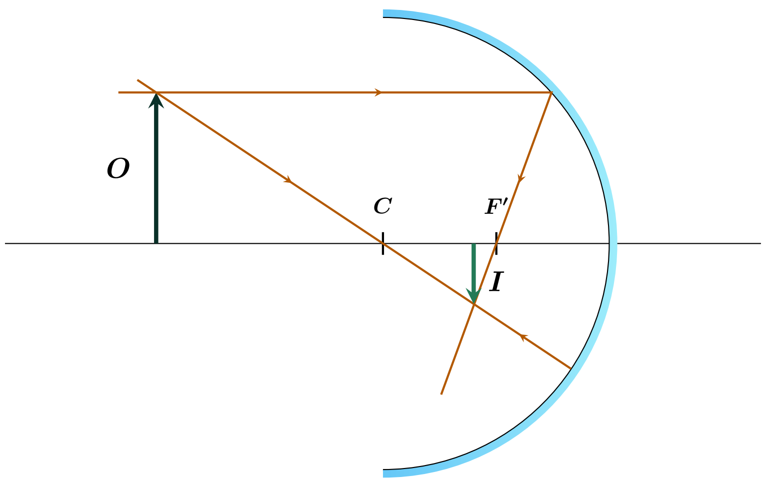
10.2.2 Miralls esfèrics

Considerem un feix de raigs paral·lels a l'eix òptic que venen de l'infinit. Aquests raigs, després de reflectir-se al mirall, convergiran (real o virtualment) en un punt de l'eix òptic que anomenem *punt focal imatge*, F'. La intersecció del mirall amb l'eix òptic s'anomena *vèrtex* del mirall. La distància entre el punt focal imatge i el vèrtex s'anomena *distància focal imatge*, f'. Es compleix que $r = 2f'$. Noteu l'ús de majúscules i minúscules per distingir els punts focals de les distàncies focals. En els miralls esfèrics, l'augment lateral es pot calcular com $\beta' = -\frac{s'}{s}$.

Per trobar la imatge en els miralls esfèrics farem servir dos raigs auxiliars. Un paral·lel a l'eix òptic que, passant per l'extrem de l'objecte i després de reflectir-se al mirall, es dirigirà (real o virtualment) al punt focal $\boldsymbol{F'}$, i un altre que, passant pel mateix punt de l'objecte i pel centre de curvatura del mirall (real o virtualment), no es desviarà després de reflectir-se. La intersecció d'aquests dos raigs ens donarà la imatge del punt.

Miralls còncaus Tenim tres possibilitats essencialment diferents en funció d'on es troba l'objecte.

1. **Objecte a l'esquerra del centre de curvatura**



En aquest cas la imatge és real, invertida i més petita.

Exemple 1
Un objecte de $\boldsymbol{2\,cm}$ d'altura se situa a $\boldsymbol{10\,cm}$ d'un mirall còncau de radi $\boldsymbol{r = 5\,cm}$. Trobeu la posició i mida de la seva imatge.

Recordem l'equació dels miralls

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

llavors, tenint en compte el conveni de signes

$$\frac{1}{-10} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-5}$$

d'on

$$\frac{1}{s'} = \frac{-2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{-4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{-3}{10}$$

$$s' = -10/3\,cm$$

i, finalment

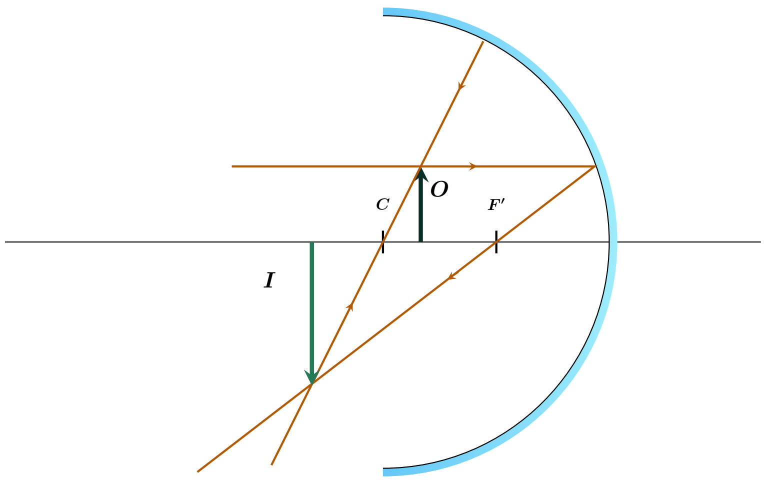
$$\beta' = -\frac{s'}{s} = -\frac{\frac{-10}{3}}{-10} = -1/3$$

El signe de l'augment lateral ens diu que la imatge és invertida. En quant a la seva mida

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

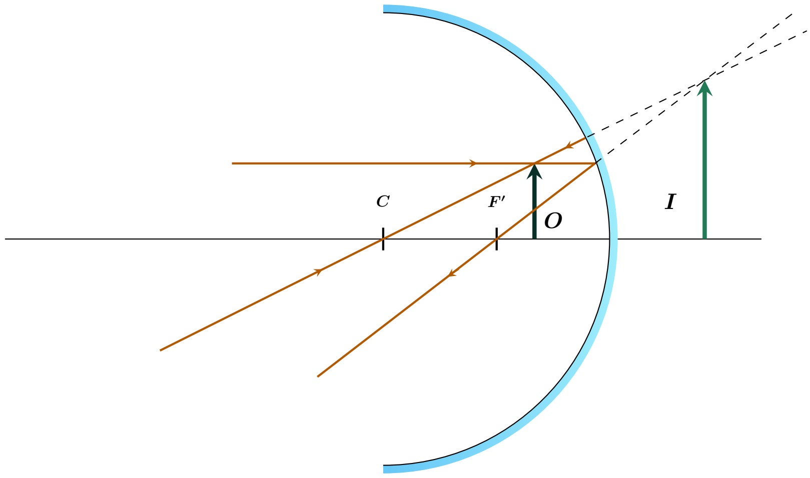
$$y' = y\beta' = 2 \cdot \frac{-1}{3} = -\frac{2}{3}\,cm = -0,67\,cm$$

2. Objecte entre el centre de curvatura i el punt focal



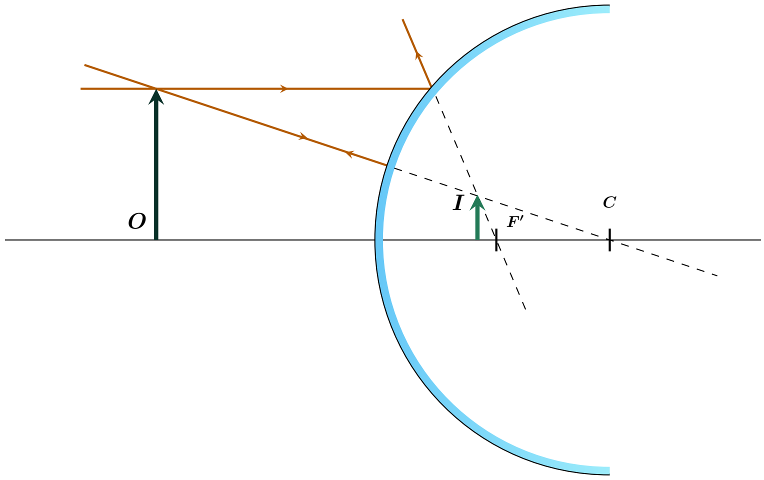
En aquest cas la imatge és real, invertida i més gran.

3. Objecte entre el punt focal i el vèrtex



En aquest cas la imatge és virtual, dreta i més gran.

Miralls convexos Ara només s'ha de discutir una possibilitat.



En aquest cas la imatge és virtual, dreta i més petita.

Exercicis

1. Considereu un mirall esfèric còncau de radi $r = 6\,cm$ (alternativament, un mirall esfèric de radi $r = -6\,cm$). Trobeu de forma analítica i gràfica la posició de la imatge. Calculeu també l'altura de la imatge suposant que l'objecte té una altura de $3\,cm$,
   (a) $s = -8\,cm$
   (b) $s = -4\,cm$
   (c) $s = -2\,cm$
2. Respecte a l'exercici anterior, discutiu de forma gràfica i analítica les qualitats de la imatge en els casos degenerats $s = -6\,cm$ i $s = -3\,cm$.
3. Considereu un mirall convex de radi $r = 4\,cm$. Trobeu de forma analítica i gràfica la posició de la imatge d'un objecte situat a $s = -6\,cm$.

10.3 Lents primes

Les lents són la base dels instruments òptics. Estan formades per dues superfícies refractives (que suposarem esfèriques de radis r_1 i r_2), separades una distància e, que tanquen un medi d'índex de refracció n. Amb l'aproximació de lents primes que farem servir en tot el capítol, l'equació que relaciona la posició de l'objecte, de la imatge i la focal de la lent s'escriu de forma simplificada com

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

En les lents primes, l'augment lateral es calcula com

$$\beta' = \frac{s'}{s}$$

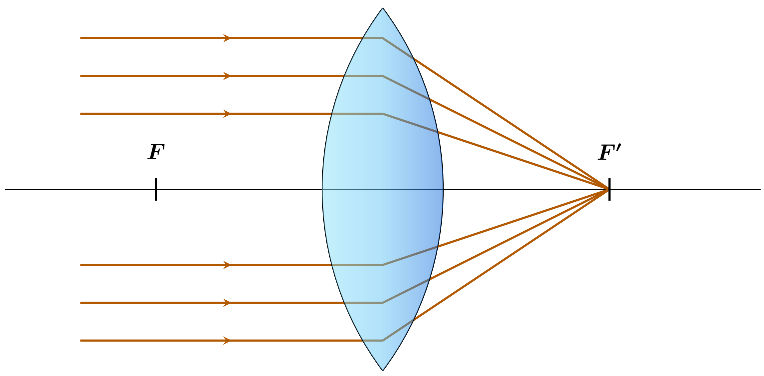
Es defineix la *potència* d'una lent com l'invers de la distància focal, quan aquesta s'expressa en metres

$$P = \frac{1}{f'}$$

les unitats de la potència d'una lent són les *diòptries* ($D \equiv m^{-1}$).

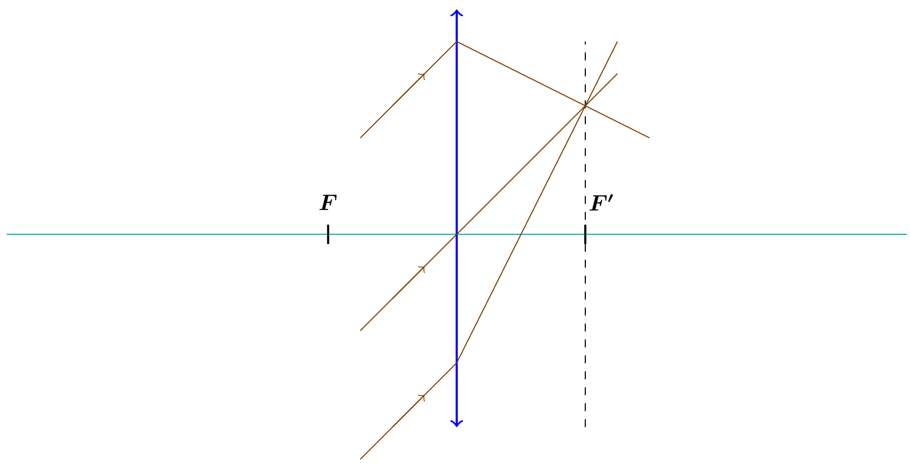
10.3.1 Lents convergents

Les lents convergents es caracteritzen per tenir una distància focal positiva, és a dir, raigs paral·lels a l'eix òptic provinents de l'infinit es troben al mateix punt $\boldsymbol{F'}$, anomenat punt focal imatge, i aquest punt es troba a la dreta de la lent.

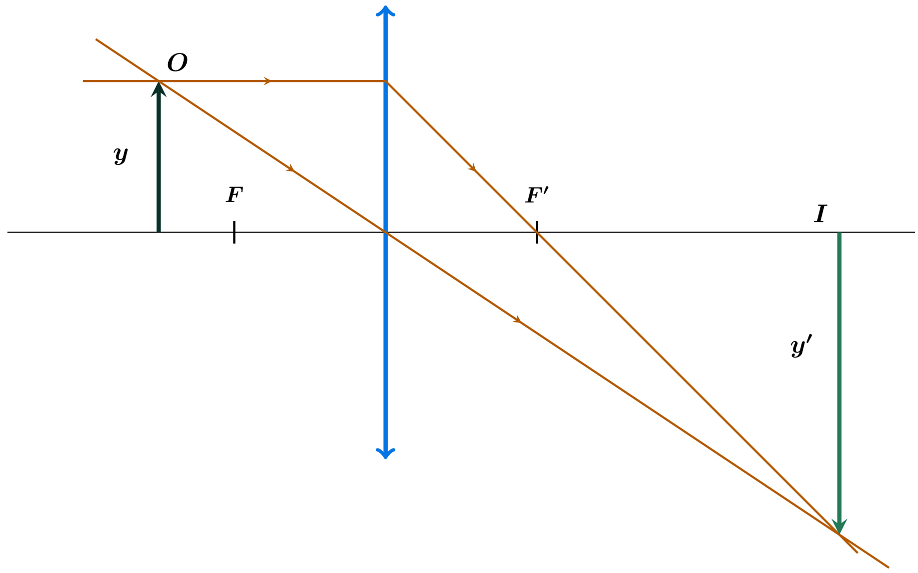


A l'esquerra de la lent i a la mateixa distància, trobem el punt focal objecte $\boldsymbol{F}$. Els raigs de llum que, partint d'aquest punt, passessin per la lent, sortirien paral·lels a l'eix òptic després de travessar-la. És important assenyalar que s'ha simplificat en la figura anterior el traçat real dels raigs dins la lent.

Més en general podem definir el *pla focal* com el pla perpendicular a l'eix òptic que conté el punt focal. Raigs paral·lels que provenen de l'infinit formant un cert angle amb l'eix òptic, convergiran després de travessar la lent en el mateix punt, al pla focal imatge.



Formació d'imatges a través de lents convergents Per tal de trobar la imatge d'un objecte a través d'una lent convergent farem servir dos raigs auxiliars. Un que passant per un punt de l'objecte i sent paral·lel a l'eix òptic, es dirigirà al punt focal imatge de la lent despres de travessar-la, i un altre que, passant per el mateix punt de l'objecte i, travessant la lent pel seu vèrtex, no es desviarà. La intersecció d'aquests dos raigs determinarà la posició de la imatge. Representem el cas $2f > s > f$. Noteu la representació simplificada de la lent.



La imatge formada és real, invertida i més gran. Recordem que en els miralls la imatge era virtual quan es formava a partir de al menys un raig virtual. En el cas de les lents, la situació és la mateixa. Si els raigs que formen la imatge són reals, aquesta ho és. Si al menys un dels raigs que forma la imatge és virtual, la imatge serà virtual. El mateix podem dir en el cas de l'objecte.

Exemple 2
Un problema quantitatiu associat podria ser, trobar el tamany i posició de la imatge d'un objecte a través d'una lent convergent donats $y = 2\,cm$, $s = -3\,cm$ i $f' = 2\,cm$.

Fent servir l'equació de les lents primes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

llavors

$$-\frac{1}{-3}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{2}$$

i

$$\frac{1}{s'}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{6}\Rightarrow s'=6\,cm$$

i fent servir l'augment lateral per trobar y'

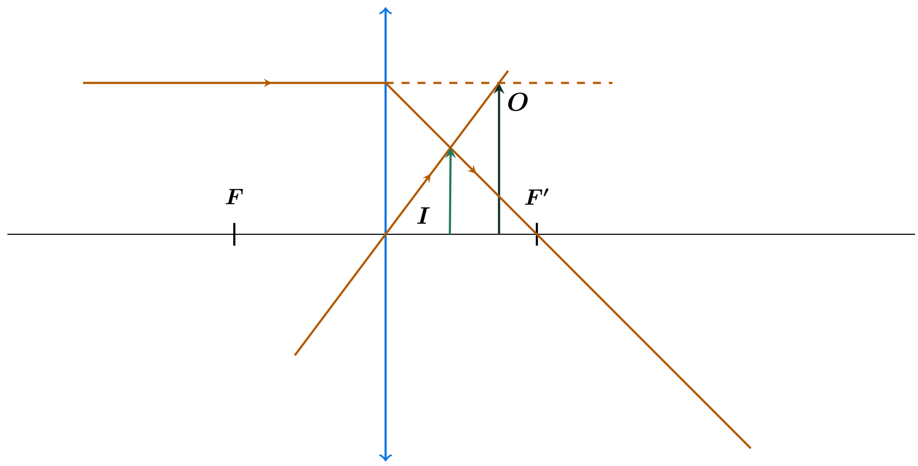
$$\beta'=\frac{y'}{y}\Rightarrow y'=y\beta=2\cdot(-2)=-4\,cm$$

ja que és

$$\beta'=\frac{s'}{s}=\frac{6}{-3}=-2$$

* * *

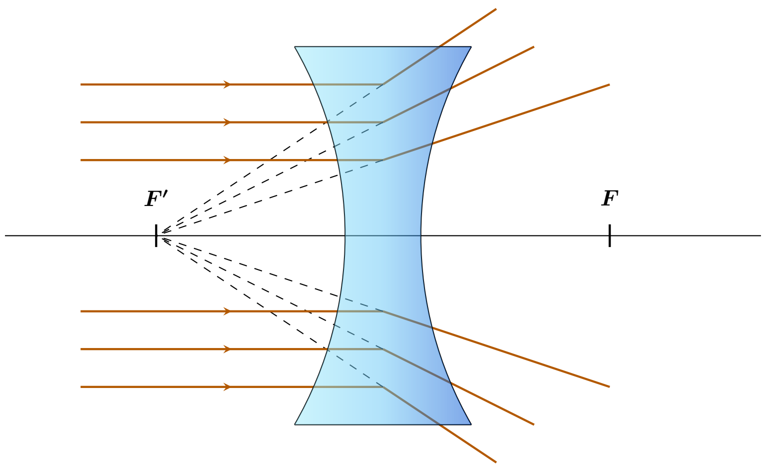
Una altra possibilitat és que l'objecte sigui virtual



En aquest cas concret veiem que la imatge resultant és real, dreta i més petita.

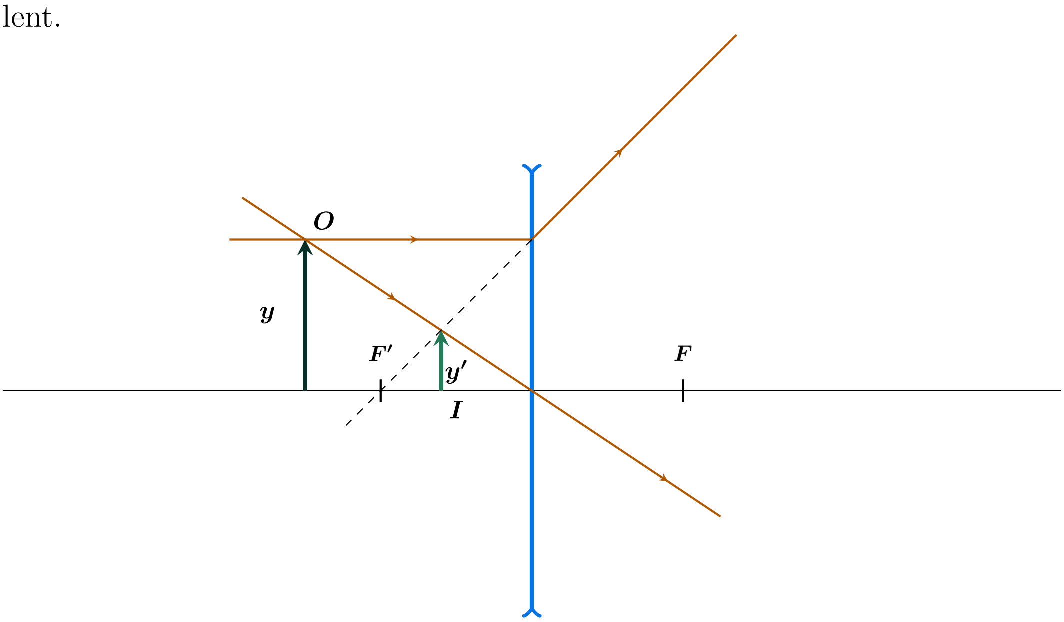
10.3.2 Lents divergents

En el cas de les lents divergents, la seva distància focal és negativa, és a dir tenen el punt focal imatge a l'esquerra de la lent.



Com es pot veure, raigs paral·lels a l'eix òptic divergeixen després de travessar la lent però les seves prolongacions convergeixen virtualment en el punt focal imatge $\boldsymbol{F'}$, que com hem dit, es troba a l'esquerra de la lent.

Formació d'imatges a través de lents divergents De forma semblant al cas de les lents convergents, per trobar la imatge d'un objecte a través d'una lent divergent farem servir dos raigs auxiliars. Un, viatjant paral·lelament a l'eix òptic i passant per un determinat punt de l'objecte, es dirigirà virtualment al punt focal imatge de la lent, després de travessar-la. L'altre, passant pel mateix punt de l'objecte i dirigit al vèrtex de la lent, no es desviarà. La intersecció dels dos raigs ajudarà a trobar la posició de la imatge. Representem el cas $\boldsymbol{2f' > s > f'}$. Noteu la representació simplificada de la lent.



Veiem que la imatge és virtual, dreta i de menor tamany que l'objecte.

Exercicis

4. Siguin una lent de focal $\boldsymbol{f' = 3\,cm}$ i un objecte de tamany $\boldsymbol{y = 3\,cm}$. Trobeu de forma analítica i gràfica la posició i tamany de la imatge en els següents casos.
   (a) $\boldsymbol{s = -7\,cm}$
   (b) $\boldsymbol{s = -2\,cm}$

5. Suposant que tenim una lent convergent de focal $\boldsymbol{f'}$, discutiu de forma gràfica i analítica les qualitats de la imatge en els casos degenerats $\boldsymbol{s = -2f'}$ i $\boldsymbol{s = -f'}$.

6. En el cas d'una lent divergent i un objecte virtual, trobeu les qualitats de la imatge
   (a) de forma gràfica en el cas que sigui $\boldsymbol{s < f'}$
   (b) de forma gràfica en el cas que sigui $\boldsymbol{s = 2f'}$
   (c) analíticament, quan sigui $\boldsymbol{f' = -3\,cm}$, $\boldsymbol{s = 5\,cm}$
   (d) analíticament, quan sigui $\boldsymbol{f' = -3\,cm}$, $\boldsymbol{s = 15\,cm}$

7. Siguin una lent de potència $\boldsymbol{P = -25\,D}$ i un objecte de tamany $\boldsymbol{y = 3\,cm}$. Trobeu de forma analítica i gràfica la posició i tamany de la imatge en els següents casos.
   (a) $\boldsymbol{s = -9\,cm}$
   (b) $\boldsymbol{s = -6\,cm}$
   (c) $\boldsymbol{s = -2\,cm}$

10.4 Plans principals d'un sistema òptic compost

10.4.1 Motivació

Al treballar amb un sistema òptic compost la determinació de la imatge pot ser molt feixuga. A més, si l'objecte canvia de posició, s'han de tornar a calcular totes les imatges i objectes intermedis.

Exemple 3
Considereu un sistema òptic format per una lent prima de focal $f_1' = 30\,cm$ separada d'una altra lent de focal $f_2' = -75\,cm$ una distància $e = 15\,cm$. Volem calcular les qualitats de la imatge intermèdia i la final, d'un objecte de mida $y = 10\,cm$, en els següents casos:

1. $s_1 = -17\,cm$
2. $s_1 = -35\,cm$

1. Apliquem l'equació de les lents primes

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1'}$$

per trobar

$$-\frac{1}{-17} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{30} \rightarrow \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{30} - \frac{1}{17} = -\frac{13}{510} \rightarrow s_1' = -39,23\,cm$$

L'augment lateral val

$$\beta_1' = \frac{s_1'}{s_1} = \frac{-39,23}{-17} = 2,31$$

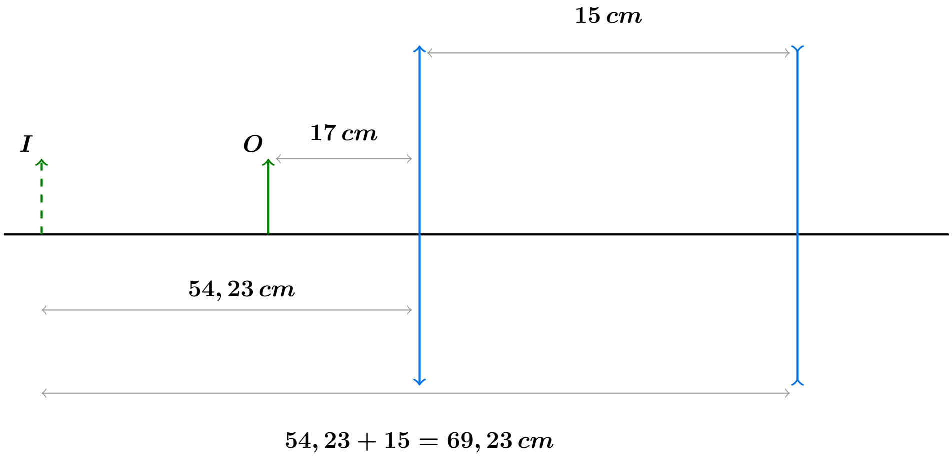
de forma que la imatge, respecte *la primera lent* és: virtual (es troba a l'esquerra de la lent), dreta (β_1' és positiu) i més gran (β_1' és > 1). La seva altura serà

$$y_1' = y_1\beta_1' = 10 \cdot 2,31 = 23,1\,cm$$

Per trobar la imatge a través de la segona lent, necessitem calcular s_2. És clar que serà

$$s_2 = -39,23 - 15 = -54,23\,cm$$

El següent diagrama (que **no** està a escala) intenta aclarir l'anterior càlcul. Noteu que tampoc s'ha representat la imatge intermèdia fidelment, l'esquema només pretén ajudar a situar aquesta imatge respecte la segona lent, ja que es comportarà com el seu objecte per formar la imatge final.



aplicant l'equació de les lents primes ara a la segona lent

$$-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f'_2}$$

d'on

$$-\frac{1}{-69,23}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{-75}\rightarrow\frac{1}{s'_2}=\frac{-1}{75}-\frac{1}{69,23}=-\frac{144,23}{5192,25}$$

llavors

$$s'_2=-\frac{5192,25}{144,23}=-36\,cm$$

i

$$\beta'_2=\frac{s'_2}{s_2}=\frac{-36}{-69,23}=0,52$$

el tamany de la imatge final serà

$$y'_2=y'_1\beta'_2=23,1\cdot 0,52=12,012\,cm$$

de forma que la imatge final segueix sent dreta, ara és més petita que la intermèdia i respecte la segona lent, virtual. Es pot provar que l'augment lateral total d'aquest sistema es pot calcular com

$$\beta'=\beta'_1\beta'_2=2,31\cdot 0,52=1,2012$$

2. Fem els mateixos càlculs que en l'apartat anterior. Fent servir l'equació de les lents primes

$$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{f'_1}$$

trobem

$$-\frac{1}{-35}+\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{30}\rightarrow\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{35}=\frac{5}{1050}\rightarrow s'_1=210\,cm$$

L'augment lateral val

$$\beta'_1=\frac{s'_1}{s_1}=\frac{210}{-30}=-7$$

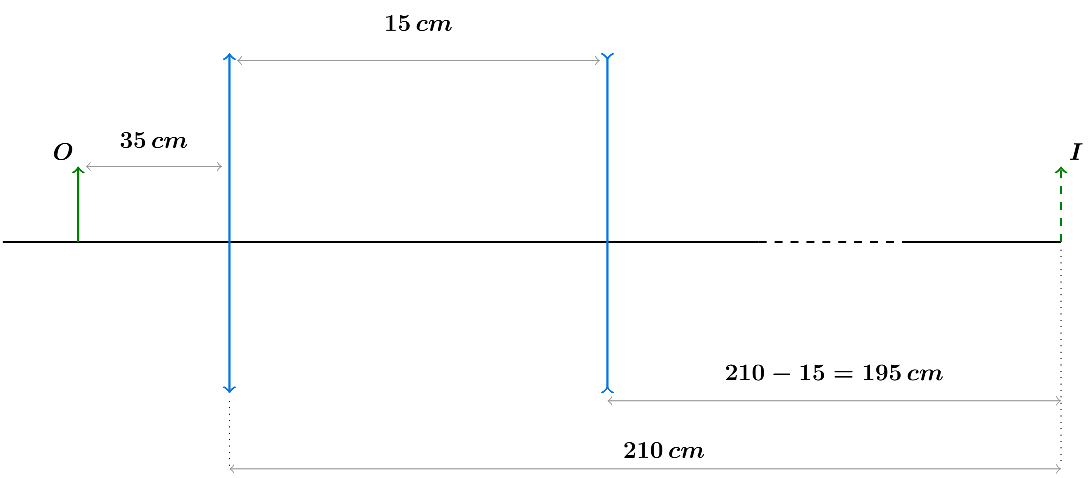
de forma que la imatge, respecte *la primera lent* és: real (es troba a la dreta de la lent), invertida (β'_1 és negatiu) i més gran ($|\beta'_1|$ és >1). La seva altura serà

$$y'_1=y_1\beta'_1=10\cdot(-7)=-70\,cm$$

Per trobar la imatge a través de la segona lent, necessitem calcular s_2. És clar que serà

$$s_2=210-15=195\,cm$$

Fem un esquema gràfic com abans (remarquem que **no** està a escala)



aplicant l'equació de les lents primes ara a la segona lent

$$-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f'_2}$$

d'on

$$-\frac{1}{195}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{-75}\rightarrow\frac{1}{s_2'}=\frac{-1}{75}+\frac{1}{195}=-\frac{120}{14625}$$

llavors

$$s_2'=-\frac{14625}{120}=-121,875\,cm$$

i

$$\beta_2'=\frac{s_2'}{s_2}=\frac{-121,875}{195}=-0,625$$

el tamany de la imatge final serà

$$y_2'=y_1'\beta_2'=(-70)\cdot(-0,625)=43,75\,cm$$

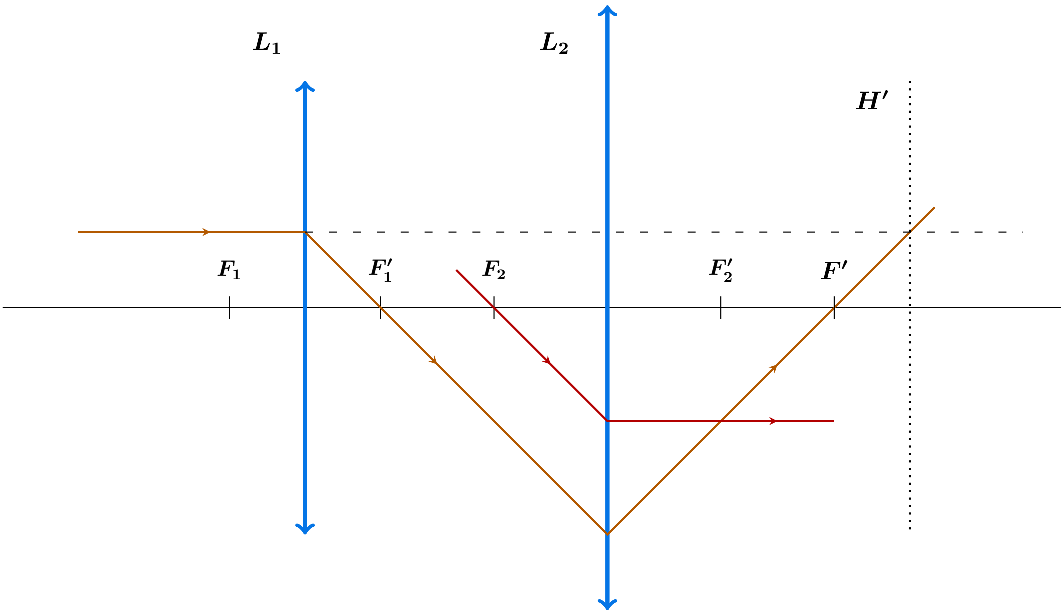
de forma que la imatge final es invertida respecte la imatge intermèdia, però dreta respecte l'objecte original. És més petita que la intermèdia però més gran que la original. Respecte la segona lent, la imatge és real, ja que es forma *a l'altra banda* de la lent, però virtual respecte la primera lent. Es pot provar que l'augment lateral total d'aquest sistema es pot calcular com

$$\beta'=\beta_1'\beta_2'=(-7)\cdot(-0,625)=4,375$$

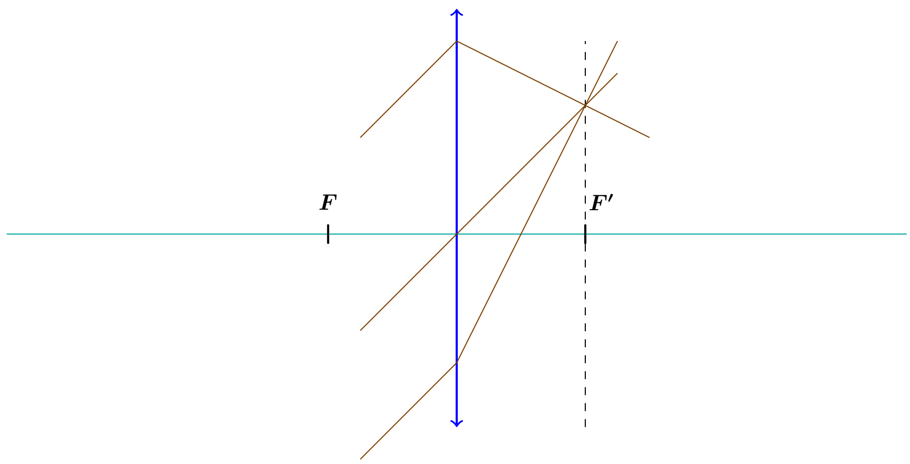
Com veiem, si canviem l'objecte de lloc hem de tornar a fer tots els càlculs. En aquest exemple només hi havia dues lents, però a mesura que el nombre de lents augmenta, les dificultats de càlcul també ho fan.

10.4.2 Mètode gràfic

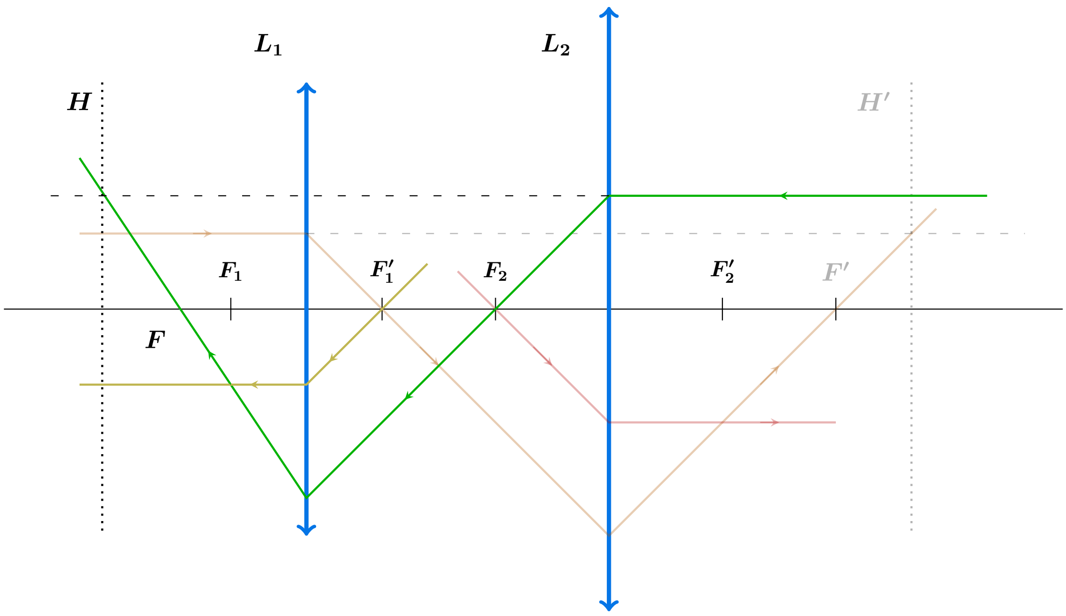
Per tal de simplificar l'estudi de sistemes òptics compostos es fan servir els *plans principals* del sistema. El coneixement dels plans principals i els punt focals associats ens proporciona tota la informació necessària per l'estudi d'un sistema òptic independentment de la seva complexitat. Anomenem *plans principals* a dos plans conjugats perpendiculars a l'eix òptic amb augment lateral $\boldsymbol{\beta = 1}$ entre ells. El punt d'intersecció entre les prolongacions d'un raig procedent de l'infinit, i paral·lel a l'eix òptic, i d'un raig que a la sortida passi pel punt focal del sistema, assenyala la posició del pla principal imatge. El pla principal objecte es pot trobar de forma semblant considerant que la llum viatja ara de dreta a esquerra. Per simplicitat considerarem un sistema òptic compost de dues lents primes. En el cas d'una lent prima, els seus plans principals es confonen amb la seva pròpia superfície.



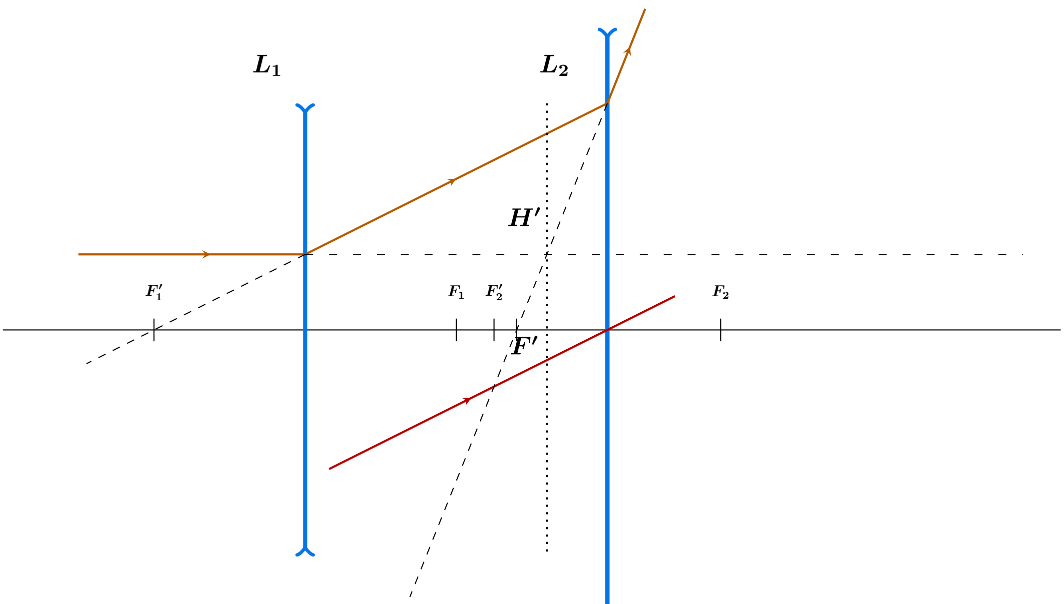
Un raig paral·lel a l'eix òptic es dirigirà al punt focal $\boldsymbol{F_1'}$ de la primera lent $\boldsymbol{L_1}$ després de travessar-la. Per saber la direcció d'aquest raig després de travessar la segona lent $\boldsymbol{L_2}$, dibuixem un altre raig que passant per $\boldsymbol{F_2}$, sortirà paral·lel a l'eix òptic després de travessar la segona lent. Aquests dos raigs, per ser paral·lels abans de travessar $\boldsymbol{L_2}$, s'han de trobar al mateix punt del *pla focal*. Recordem que aquesta és una propietat general de tots els raigs paral·lels, per exemple



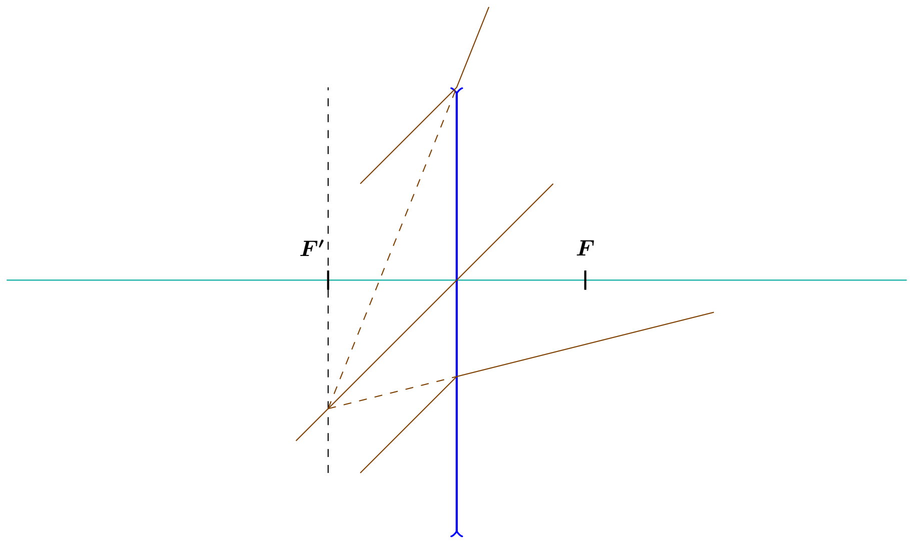
Finalment, la intersecció del raig emergent amb la prolongació del raig incident original, ens donarà la posició del pla principal imatge $\boldsymbol{H'}$. El punt focal imatge $\boldsymbol{F'}$ del sistema compost, el dona la intersecció del raig emergent amb l'eix òptic. De forma semblant, per trobar el pla principal $\boldsymbol{H}$ i punt focal objecte del sistema, fem una anàlisi semblant considerant que la llum va de dreta a esquerra.



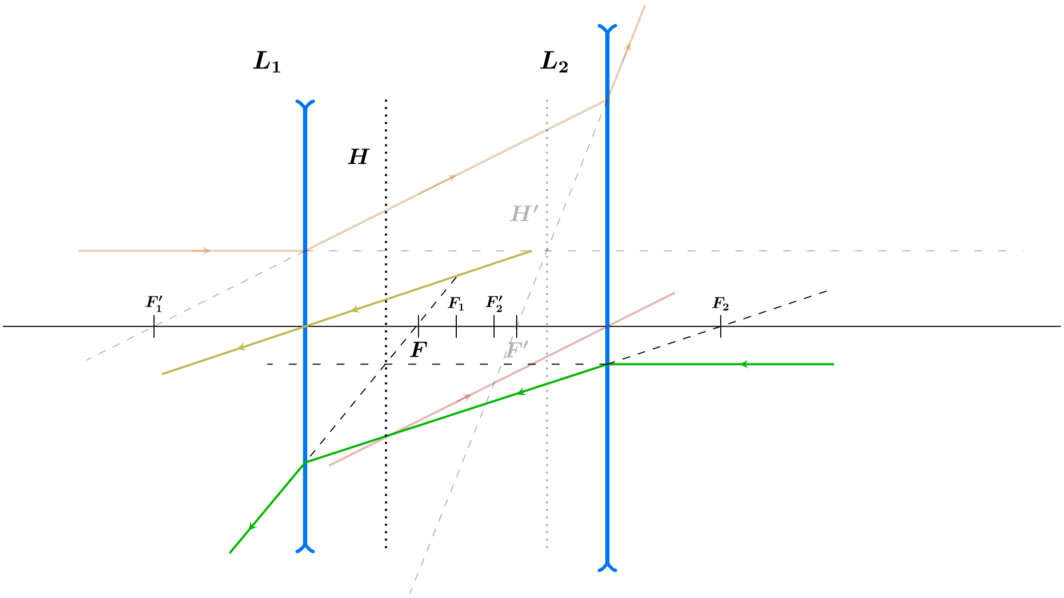
Veiem un altre cas, ara amb dues lents divergents.



Un raig paral·lel a l'eix òptic es dirigirà (virtualment) al punt focal $\boldsymbol{F_1'}$ de la primera lent $\boldsymbol{L_1}$ després de travessar-la. Per saber la direcció d'aquest raig després de travessar la segona lent $\boldsymbol{L_2}$, dibuixem un altre raig que passant per el vèrtex de la segona lent, no es desviarà. Aquests dos raigs, per ser paral·lels abans de travessar $\boldsymbol{L_2}$, s'han de trobar (virtualment) al mateix punt del *pla focal imatge*. Recordem, un cop més, que aquesta és una propietat general de tots els raigs paral·lels, per exemple

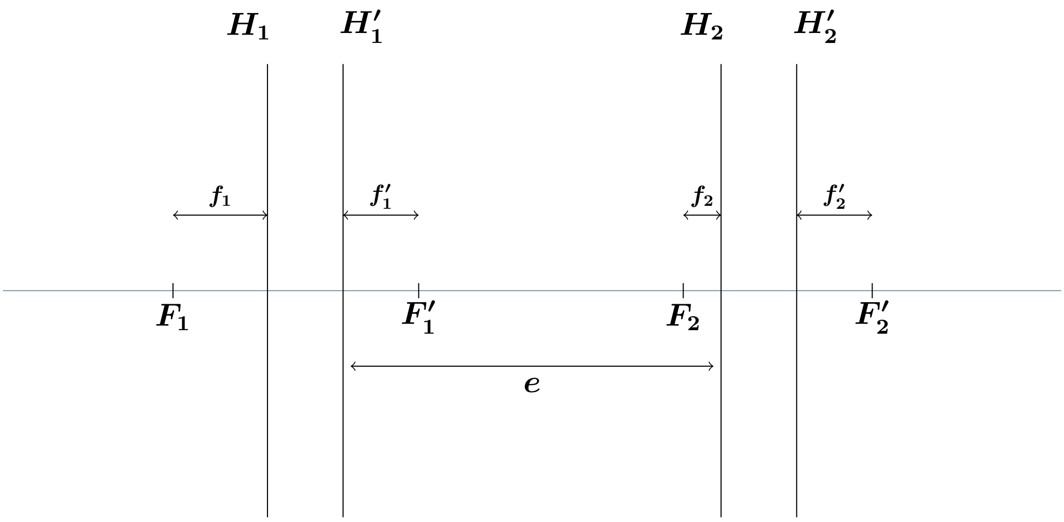


Finalment, la intersecció (virtual) del raig emergent amb la prolongació del raig incident original, ens donarà la posició del pla principal imatge $\boldsymbol{H'}$. El punt focal imatge $\boldsymbol{F'}$ del sistema compost, el dona la intersecció del raig emergent amb l'eix òptic. Novament, per trobar $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{F}$ fem l'anàlisi considerant que la llum va de dreta a esquerra.



10.4.3 Fórmules d'acoblament de sistemes òptics

En un cas on tinguem un sistema òptic compost més general



Valen les següents fórmules d'acoblament que permeten trobar la focal conjunta del sistema compost així com la posició dels plans principals

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

$$H_1H = \frac{ef'_1}{f'_1 + f'_2 - e} \qquad H'_2H' = -\frac{ef'_2}{f'_1 + f'_2 - e}$$

on hem de tenir en compte que si el resultat del càlcul H_1H és positiu vol dir que H es troba a la dreta de H_1 i si el resultat del càlcul H'_2H' és negatiu vol dir que H' es troba a l'esquerra de H'_2. Si tots els índexs de refracció presents son iguals es compleix $f' = f$, on la igualtat s'ha d'entendre en valor absolut.

Exemple 4
Considereu un sistema òptic format per una lent prima de focal $f'_1 = 20\,cm$ separada d'una altra lent, de focal $f'_2 = -50\,cm$, una distància $e = 5\,cm$. Volem calcular la posició de la imatge (respecte la segona lent) d'un objecte a través del sistema, en els casos

1. $s_1 = -2\,cm$

2. $s_1 = -5\,cm$

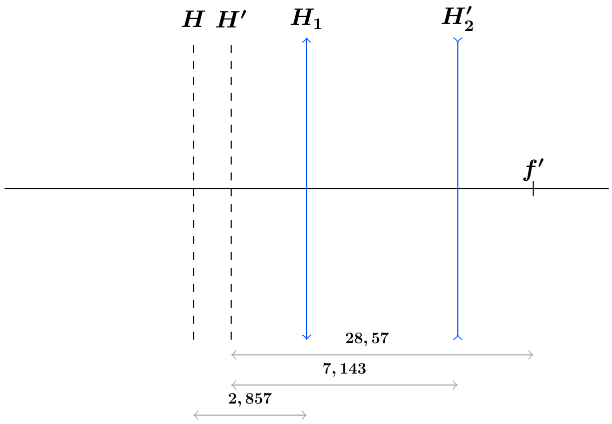
Farem servir les fórmules d'acoblament per trobar la posició dels plans principals i els punts focals i després aplicarem l'equació de les lents primes al sistema compost. Apliquem directament

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = \frac{20 \cdot (-50)}{20 - 50 - 5} = 28,57\,cm$$

$$H_1H = \frac{ef'_1}{f'_1 + f'_2 - e} = \frac{5 \cdot 20}{20 - 50 - 5} = -2,857\,cm$$

$$H'_2H' = -\frac{ef'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = -\frac{5 \cdot (-50)}{20 - 50 - 5} = -7,143\,cm$$

Podem resumir els resultats obtinguts amb un esquema (no fet a escala)



Ara, pel primer cas, on $s_1 = -2\,cm$, podem aplicar l'equació de les lents primes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'}$$

tenint en compte que s serà la distància de l'objecte al pla principal objecte (H) del sistema, és a dir

$$s = 2,857 - 2 = 0,857\,cm$$

llavors escrivim

$$-\frac{1}{0,857} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{28,57} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{28,57} + \frac{1}{0,857} = \frac{29,427}{24,48449}$$

i finalment

$$s' = 1,2019\,cm$$

aquesta distància està referida al pla principal imatge H' de forma que la distància respecte la segona lent serà

$$s_2' = -7,143 + 1,2019 = -5,9411\,cm$$

i es troba a l'esquerra de la lent.

En el segon cas, on $s_1 = -5\,cm$, procedim de forma semblant tenint en compte ara que s serà

$$s = 2,857 - 5 = -2,143\,cm$$

llavors escrivim

$$-\frac{1}{-2,143} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{28,57} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{28,57} + \frac{1}{2,143} = \frac{30,713}{61,2255}$$

i finalment

$$\boldsymbol{s' = 0,5016\,cm}$$

aquesta distància està referida al pla principal imatge $\boldsymbol{H'}$ de forma que la distància respecte la segona lent serà

$$\boldsymbol{s'_2 = -7,143 + 0,5016 = -6,6414\,cm}$$

i es troba a l'esquerra de la lent.

Exercicis

8. Trobeu *gràficament* els plans principals i punts focals dels sistemes compostos següents ($\boldsymbol{e}$ indica la separació entre les lents)

   (a) $\boldsymbol{f'_1 = 3\,cm}$, $\boldsymbol{f'_2 = 4\,cm}$, $\boldsymbol{e = 6\,cm}$

   (b) $\boldsymbol{f'_1 = -3\,cm}$, $\boldsymbol{f'_2 = -4\,cm}$, $\boldsymbol{e = 5\,cm}$

   (c) $\boldsymbol{f'_1 = 3\,cm}$, $\boldsymbol{f'_2 = -2\,cm}$, $\boldsymbol{e = 7\,cm}$

   (d) $\boldsymbol{f'_1 = -4\,cm}$, $\boldsymbol{f'_2 = 3\,cm}$, $\boldsymbol{e = 5\,cm}$

9. Considereu un sistema òptic format per una lent prima de focal $\boldsymbol{f'_1 = 2\,cm}$ separada d'una altra lent de focal $\boldsymbol{f'_2 = 3\,cm}$ una distància $\boldsymbol{e = 5\,cm}$. Volem calcular analíticament les qualitats de la imatge intermèdia i la final, d'un objecte de mida $\boldsymbol{y = 20\,cm}$, en els següents casos:

   (a) $\boldsymbol{s_1 = -4\,cm}$

   (b) $\boldsymbol{s_1 = -1\,cm}$

10. Considereu un sistema òptic format per tres lents primes de focals $\boldsymbol{f'_1 = -3\,cm}$, $\boldsymbol{f'_2 = 5\,cm}$ i $\boldsymbol{f'_3 = -2\,cm}$. La separació entre la primera i la segona val $\boldsymbol{e_{1-2} = 6\,cm}$ i entre la segona i la tercera $\boldsymbol{e_{2-3} = 7\,cm}$. Volem calcular les qualitats de les imatges intermèdies i la final d'un objecte de mida $\boldsymbol{y = 5\,cm}$ suposant que és $\boldsymbol{s_1 = -10\,cm}$

11. Considereu un sistema òptic format per una lent prima de focal $\boldsymbol{f'_1 = -10\,cm}$ separada d'una altra lent, de focal $\boldsymbol{f'_2 = -30\,cm}$, una distància $\boldsymbol{e = 10\,cm}$. Volem calcular la posició de la imatge (respecte la segona lent) d'un objecte a través del sistema, en els casos

    (a) $\boldsymbol{s_1 = -12\,cm}$

    (b) $\boldsymbol{s_1 = 5\,cm}$