A.Arroyo (aarroyo+batx@stjosep.org)

1. (*a*) Com es tracta d'un moviment circular podem escriure

$$2\pi(R+h) = vT$$

i amb la segona llei de Newton

$$F = ma_c \rightarrow \frac{GM_P\cancel{m}}{(R_P+h)^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{R_P+h}}$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{GM_P}{R_P+h}}$$

llavors

$$2\pi(R+h) = \sqrt{\frac{GM_P}{R_P+h}} \cdot T \rightarrow 4\pi^2 \left(R_P+h\right)^2 = \frac{GM_P}{R_P+h}T^2$$

finalment

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_P+h)^3}{GM_P}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(2\cdot 10^7 + 800\cdot 10^3\right)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5\cdot 10^{25}}} = 1,032\cdot 10^4\, s = 2,87\, h$$

(*b*) Per calcular l'energia mecànica fem

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Pm}{R_P+h} = -\frac{1}{2}\frac{GM_Pm}{R_P+h} = -6,67\cdot 10^{11}\, J$$

on hem fet servir l'expressió de la velocitat per les òrbites circulars estables trobada anteriorment.

(*c*) Calculem directament

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5\cdot 10^{25}}{\left(2\cdot 10^7\right)^2} = 8,34\, m/s^2$$

2. (a) Podem calcular la velocitat amb

$$v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\oplus^2}{R_\oplus + h}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 6,67 \cdot 10^6}{6,67 \cdot 10^6 + 0,30 \cdot 10^6}} = 7,91 \cdot 10^3 \, m/s$$

A partir de

$$2\pi r = vT$$

tenim

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \left(6,67 \cdot 10^6 + 0,3 \cdot 10^6\right)}{7,91 \cdot 10^3} = 5,54 \cdot 10^3 \, s = 1,54 \, h$$

(b) El valor de l'acceleració demanat es pot calcular com

$$g(R_\oplus + h) = \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} = \frac{g_0 R_\oplus^2}{(R_\oplus + h)^2} = \frac{9,8 \cdot \left(6,67 \cdot 10^6\right)^2}{\left(6,67 \cdot 10^6 + 0,3 \cdot 10^6\right)^2} = 8,97 \, m/s^2$$

(c) El treball demanat es pot calcular com la diferència entre l'energia mecànica final i la inicial, amb les suposicions habituals fetes als exercicis de classe

$$W = -\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus + h} - \left(-\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus}\right) = GM_\oplus m \left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{2(R_\oplus + h)}\right)$$

$$= GM_\oplus m \frac{R_\oplus + 2h}{2R_\oplus(R_\oplus + h)} = g_0 R_\oplus^2 m \frac{R_\oplus + 2h}{2R_\oplus(R_\oplus + h)}$$

$$= 9,8 \cdot \left(6,67 \cdot 10^6\right)^2 \cdot 500 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^6 + 2 \cdot 0,30 \cdot 10^6}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^6 \cdot \left(6,67 \cdot 10^6 + 0,30 \cdot 10^6\right)} = 1,7 \cdot 10^{10} \, J$$

3. (*a*) A partir de

$$g = \frac{GM_P}{R_P^2} \rightarrow R_P^2 = \frac{GM_P}{g} = \frac{G \cdot 2500 M_\oplus}{g}$$

d'on

$$R_P = \sqrt{\frac{2500 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{49,05}} = 1,42 \cdot 10^8 \, m$$

(*b*) No fem aquí la de deducció de l'expressió necessària per simplicitat

$$v = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2G \cdot 2500 \cdot M_\oplus}{R_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{1,42 \cdot 10^8}} = 2,37 \cdot 10^3 \, m/s$$

4. (*a*) A partir de la tercera llei de Kepler aplicada a Io i tenint en compte que Júpiter (♃) és el centre de forces,

$$T_{Io}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{♃}} r_{Io}^3 \rightarrow M_{♃} = \frac{4\pi^2 r_{Io}^3}{T_{Io}^2 G}$$

tenim

$$M_{♃} = \frac{4\pi^2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 10^7)^3}{(1,8 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 8,85 \cdot 10^{30} \, kg$$

(*b*) Escrivim la tercera llei de Kepler per cada satèl·lit

$$T_{Io}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{♃}} r_{Io}^3$$

$$T_{Cal}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{♃}} r_{Cal}^3$$

dividint les equacions obtenim

$$\frac{T_{Io}^2}{T_{Cal}^2} = \frac{r_{Io}^3}{r_{Cal}^3}$$

d'on

$$r_{Cal} = r_{Io} \sqrt[3]{\frac{T_{Cal}^2}{T_{Io}^2}} = 3 \cdot 2 \cdot 7,5 \cdot 10^7 \sqrt[3]{\frac{(16,7)^2}{(1,8)^2}} = 1,99 \cdot 10^9 \, m$$