

1. (a) En aquesta resolució prenem un sistema de coordenades amb l'origen (O) situat al centre del quadrat. D'aquesta manera, les càrregues queden situades en els punts

$$q_1 \rightarrow P_1 = (-2, 2)$$

$$q_2 \rightarrow P_2 = (2, 2)$$

$$q_3 \rightarrow P_3 = (-2, -2)$$

i el vèrtex D té coordenades $D = (2, -2)$, de forma que els vectors que van de cada càrrega a ell són

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1 D} = (4, -4)$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2 D} = (0, -4)$$

$$\vec{r}_3 = \overrightarrow{P_3 D} = (4, 0)$$

Noteu que les components d'aquests vectors no depenen de la tria feta per la posició de l'origen de coordenades. Els seus mòduls valen

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$|\vec{r}_2| = r_2 = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2} = 4$$

$$|\vec{r}_3| = r_3 = \sqrt{(4)^2 + 0^2} = 4$$

de forma que el camp elèctric que crea cada càrrega al vèrtex D serà

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{(4\sqrt{2})^3} \cdot (4, -4)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{(4)^3} \cdot (0, -4)$$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3^3} \vec{r}_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{7 \cdot 10^{-9}}{(4)^3} \cdot (4, 0)$$

i la seva suma,

$$\vec{E}_{total} = \left(\frac{27}{4^2 \cdot (\sqrt{2})^3} + \frac{63}{4^2}, \frac{-27}{4^2 \cdot (\sqrt{2})^3} + \frac{36}{4^2} \right) = (4.534, 1.653) \text{ N/C}$$

(b) El potencial que crea cada càrrega al vèrtex D és

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\sqrt{2}}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{4}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r_3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{7 \cdot 10^{-9}}{4}$$

i el potencial total serà

$$V_D = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{27}{4\sqrt{2}} - 9 + \frac{63}{4} = 11,523 \text{ V}$$

(c) Per calcular aquest treball necessitem saber el potencial que crea cada càrrega al centre del quadrat, i per això necessitem els vectors

$$\vec{r}'_1 = \overrightarrow{P_1O} = (2, -2)$$

$$\vec{r}'_2 = \overrightarrow{P_2O} = (-2, -2)$$

$$\vec{r}'_3 = \overrightarrow{P_3O} = (2, 2)$$

amb mòduls

$$|\vec{r}'_1| = r_1 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{r}'_2| = r_2 = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{r}'_3| = r_3 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

d'aquesta manera, els potencials seran

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r'_1} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{2\sqrt{2}}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r'_2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{2\sqrt{2}}$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3}{r'_3} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{7 \cdot 10^{-9}}{2\sqrt{2}}$$

i el potencial total al centre val

$$V_O = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot [27 - 36 + 63] = 19,092 \text{ V}$$

Ara podem calcular el treball demanat com

$$W_{O \rightarrow D} = Q(V_D - V_O) = 5 \cdot 10^{-9} \cdot (11,523 - 19,092) = -3,785 \cdot 10^{-8} J$$

com que aquest resultat és negatiu veiem que en realitat el treball el fa el camp elèctric.

2. Calculem el treball que cal fer per portar cada càrrega des de l'infinit fins al punt de destinació de cadascuna.

Per la primera càrrega aquest treball val

$$W_1 = W_{\infty \rightarrow P_1} = q_1(V_{P_1} - V_{\infty}) = 3 \cdot 10^{-9} \cdot (0 - 0) = 0 J$$

ja que abans que q_1 arribi al seu punt de destí, no hi ha cap altre càrrega present i per tant, el potencial electrostàtic al punt P_1 val zero. Recordem que $V_{\infty} = 0$ per definició.

En quant a la segona càrrega, quan aquesta arribi a P_2 , sí sentirà els efectes del potencial que crea q_1 en aquest punt, perquè q_1 ja està al seu lloc quan q_2 arriba a P_2 . Llavors

$$W_2 = W_{\infty \rightarrow P_2} = q_2(V_{P_2} - V_{\infty})$$

Necessitem doncs calcular el potencial que crea q_1 en P_2 , que anomenarem $V_{P_2}^{q_1}$.

Comencem calculant $\overrightarrow{P_1 P_2} = (4, 0)$, amb mòdul $|\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$, aleshores

$$V_{P_2}^{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4} = \frac{27}{4} V$$

i

$$W_2 = -4 \cdot 10^{-9} \left(\frac{27}{4} - 0 \right) = -2,7 \cdot 10^{-8} J$$

Ara hem de portar q_3 fins a la seva destinació. Per calcular el treball que cal per fer-ho, hem de calcular el potencial electrostàtic present en P_3 i creat ara tant per q_1 com per q_2 .

Necessitem els vectors $\overrightarrow{P_1 P_3} = (2, 4)$ i $\overrightarrow{P_2 P_3} = (-2, 4)$, amb mòduls $|\overrightarrow{P_1 P_3}| = \sqrt{20}$ i $|\overrightarrow{P_2 P_3}| = \sqrt{20}$. Amb la mateixa notació que abans tenim

$$W_3 = W_{\infty \rightarrow P_3} = q_3(V_{P_3} - V_{\infty})$$

a banda, ara V_{P_3} té dues contribucions, tal com hem dit abans, i és

$$V_{P_3} = V_{P_3}^{q_1} + V_{P_3}^{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{P_2P_3}|} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}} - 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{20}}$$

$$V_{P_3} = -2,012 \text{ V}$$

finalment

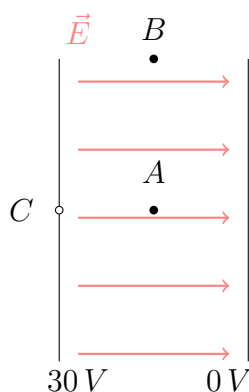
$$W_3 = W_{\infty \rightarrow P_3} = q_3(V_{P_3} - V_{\infty}) = 7 \cdot 10^{-9} \cdot (-2,012 - 0) = -1,409 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

El treball total doncs serà

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 0 - 2,7 \cdot 10^{-8} - 1,409 \cdot 10^{-8} = -4,109 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

i correspon a l'energia de configuració del sistema de càrregues.

3. A partir de l'enunciat



(a) El sentit del camp elèctric és l'indicat.

(b) Fent servir

$$E \cdot d = V \rightarrow E = \frac{V}{d} = \frac{30}{10 \cdot 10^{-3}} = 3000 \text{ N/C}$$

(c) Al punt A el potencial val exactament el valor mig dels extrems, és a dir

$$\frac{30 + 0}{2} = 15 \text{ V}$$

- (d) El camp elèctric val el mateix en tots els punts interiors del condensador, (es tracta d'un camp uniforme). D'aquesta manera, la relació

$$E = \frac{V}{d}$$

es compleix.

- (e) Un electró que entri pel punt B patirà una desviació en la seva trajectòria de forma que de rectilínia passarà a parabòlica, ja que hi ha una força (que provocarà una acceleració) en la direcció horitzontal. Sabem que les càrregues negatives es mouen cap a potencials més alts (vam fer el símil amb una pilota que pujaria espontàniament pel pendent d'una muntanya), per tant, es desvia cap a l'esquerra.
- (f) El protó es mourà cap a la dreta, ja que les càrregues positives es mouen cap a potencials més baixos. El seu moviment serà rectilini amb acceleració uniforme.