

# FÍSICA 2N BATXILLERAT

Artur Arroyo i Pascual<sup>§</sup>

<https://artur-sjo.github.io/index.html>

*Col·legi Sant Josep Obrer*

*C. Covadonga, s/n 08906 L'Hospitalet del Llobregat*

Darrera revisió 8/12/2024

## Resum

En aquest curs es presenten tot un seguit de temes nous que corresponen a la culminació del currículum de Batxillerat. En qualsevol cas, cal tenir una bona fonamentació dels continguts relatius al curs anterior de 1r de Batxillerat.

---

<sup>§</sup> [aaarroyo+batx@stjosep.org](mailto:aaarroyo+batx@stjosep.org)

# Índex

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>El moviment harmònic simple</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1      | Introducció . . . . .   | 6         |
| 1.2      | Cinemàtica del moviment harmònic simple . . . . .                                 | 6         |
| 1.2.1    | Deducció de l'equació del moviment . . . . .                                      | 6         |
| 1.2.2    | Velocitat en el moviment harmònic simple . . . . .                                | 8         |
| 1.2.3    | Acceleració en el moviment harmònic simple . . . . .                              | 9         |
| 1.2.4    | Espai de fases per l'oscil·lador harmònic simple . . . . .                        | 10        |
| 1.2.5    | Valors màxims i mínims de les quantitats cinemàtiques associades al MHS . . . . . | 11        |
| 1.3      | Dinàmica del moviment harmònic simple . . . . .                                   | 12        |
| 1.4      | Energia en el moviment harmònic simple . . . . .                                  | 13        |
| 1.5      | Recordatori de derivades . . . . .  | 14        |
| <b>2</b> | <b>Ones</b>   | <b>16</b> |
| 2.1      | Introducció . . . . .   | 16        |
| 2.2      | Tipus d'ones . . . . .  | 16        |
| 2.2.1    | Ones electromagnètiques . . . . .   | 16        |
| 2.2.2    | Ones mecàniques . . . . .   | 16        |
| 2.2.3    | Ones transversals . . . . .   | 16        |
| 2.2.4    | Ones longitudinals . . . . .  | 17        |
| 2.3      | Equació d'una ona harmònica. Magnituds que caracteritzen una ona . . . . .        | 17        |
| 2.4      | Diferència de fase . . . . .  | 19        |
| 2.4.1    | Velocitat i acceleració en ones transversals . . . . .                            | 20        |
| 2.4.2    | Velocitat de fase . . . . .   | 20        |
| 2.5      | Propagació de l'energia en el moviment ondulatori . . . . .                       | 21        |
| 2.5.1    | Front d'ona i raig . . . . .  | 21        |
| 2.5.2    | Potència i intensitat d'una ona . . . . .   | 21        |
| 2.6      | Atenuació i absorció . . . . .  | 23        |
| 2.7      | Lleis d'Snell . . . . .   | 23        |
| 2.8      | Interferències i difracció . . . . .  | 25        |
| 2.9      | Ones estacionàries . . . . .  | 27        |
| 2.9.1    | Corda lligada pels extrems. Tub obert pels dos extrems . . . . .                  | 28        |
| 2.9.2    | Corda lligada per un extrem. Tub obert per un extrem . . . . .                    | 30        |
| 2.10     | El so . . . . .   | 32        |
| 2.10.1   | Qualitats del so . . . . .  | 32        |
| 2.10.2   | Efecte Doppler . . . . .  | 34        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>3</b> | <b>Camp gravitatori</b>                                    | <b>39</b> |
| 3.1      | Introducció  | 39        |
| 3.2      | El concepte de camp gravitatori. Potencial gravitatori     | 39        |
| 3.3      | Principi de superposició                                   | 40        |
| 3.4      | El moviment dels cossos celestes                           | 41        |
| 3.4.1    | Pes d'un cos   | 41        |
| 3.4.2    | Energia cinètica, potencial gravitatòria i mecànica        | 43        |
| 3.4.3    | Òrbites circulars estables                                 | 44        |
| 3.4.4    | Òrbites geoestacionàries                                   | 46        |
| 3.4.5    | Canvis d'òrbita  | 48        |
| 3.4.6    | Velocitat d'escapament                                     | 49        |
| 3.4.7    | Tipus d'òrbita segons l'energia total                      | 51        |
| 3.4.8    | Caiguda lliure   | 51        |
| 3.5      | Les lleis de Kepler  | 53        |
| <b>4</b> | <b>Camp elèctric</b>                                       | <b>55</b> |
| 4.1      | Introducció  | 55        |
| 4.2      | Camp elèctric creat per una càrrega puntual                | 55        |
| 4.3      | Principi de superposició                                   | 56        |
| 4.4      | Potencial electrostàtic                                    | 57        |
| 4.4.1    | Pous de potencial  | 58        |
| 4.5      | Energia potencial electrostàtica                           | 60        |
| 4.6      | Energia de configuració d'un sistema de càrregues          | 60        |
| 4.7      | Camps elèctrics uniformes                                  | 62        |
| 4.8      | Moviment de càrregues en condensadors                      | 63        |
| 4.8.1    | Moviment paral·lel al camp elèctric                        | 63        |
| 4.8.2    | Moviment perpendicular al camp elèctric                    | 64        |
| <b>5</b> | <b>Camp magnètic</b>                                       | <b>66</b> |
| 5.1      | Introducció  | 66        |
| 5.1.1    | Comportament de la matèria davant el magnetisme            | 66        |
| 5.2      | Llei de Lorentz  | 67        |
| 5.3      | Moviment de partícules carregades al sí d'un camp magnètic | 69        |
| 5.4      | Aplicacions (I). El selector de velocitats                 | 72        |
| 5.5      | Aplicacions (II). L'espectròmetre de masses                | 74        |
| 5.6      | Efecte d'un camp magnètic sobre un fil de corrent          | 75        |
| 5.7      | Camp magnètic creat per càrregues i corrents               | 76        |
| 5.7.1    | Camp creat per una càrrega puntual en moviment             | 76        |
| 5.7.2    | Camp creat per un fil de corrent. Llei de Biot-Savart      | 77        |
| 5.7.3    | Camp creat per un fil infinit de corrent                   | 78        |
| 5.7.4    | Camp creat per una espira circular                         | 79        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.8      | Camp magnètic creat per agrupacions de corrents . . . . . | 80         |
| 5.8.1    | Camp magnètic creat per un solenoide . . . . .            | 80         |
| 5.8.2    | Camp magnètic creat per un toroide . . . . .              | 80         |
| <b>6</b> | <b>Inducció electromagnètica</b>                          | <b>81</b>  |
| 6.1      | Introducció . . . . .                                     | 81         |
| 6.2      | El flux magnètic. . . . .                                 | 82         |
| 6.3      | Lleis de la inducció electromagnètica . . . . .           | 83         |
| 6.3.1    | Llei de Lenz . . . . .                                    | 83         |
| 6.3.2    | Llei de Faraday . . . . .                                 | 86         |
| 6.3.3    | L'experiència de Henry . . . . .                          | 86         |
| 6.4      | Aplicacions de la inducció electromagnètica . . . . .     | 88         |
| 6.4.1    | Generadors elèctrics . . . . .                            | 88         |
| 6.4.2    | Funcionament d'un transformador . . . . .                 | 90         |
| <b>7</b> | <b>Física quàntica</b>                                    | <b>92</b>  |
| 7.1      | Els fets que no explica la física clàssica . . . . .      | 92         |
| 7.1.1    | La radiació del cos negre . . . . .                       | 92         |
| 7.1.2    | L'efecte fotoelèctric . . . . .                           | 95         |
| 7.2      | La mecànica quàntica . . . . .                            | 101        |
| 7.2.1    | La dualitat ona-corpúscle . . . . .                       | 101        |
| 7.2.2    | El principi d'indeterminació de Heisenberg . . . . .      | 102        |
| <b>8</b> | <b>Física de partícules</b>                               | <b>105</b> |
| 8.1      | Del començament fins avui . . . . .                       | 105        |
| 8.1.1    | El paradigma de la física antiga . . . . .                | 105        |
| 8.1.2    | El paradigma de la física clàssica . . . . .              | 106        |
| 8.1.3    | El paradigma de la física moderna . . . . .               | 107        |
| 8.1.4    | El paradigma de la física actual . . . . .                | 108        |
| 8.2      | Descobriments de partícules . . . . .                     | 109        |
| 8.3      | Les interaccions fonamentals . . . . .                    | 109        |
| 8.4      | Un zoo de partícules . . . . .                            | 110        |
| 8.4.1    | Els leptons . . . . .                                     | 112        |
| 8.4.2    | Els hadrons . . . . .                                     | 113        |
| 8.5      | El model de quarks . . . . .                              | 114        |
| 8.5.1    | Paritat i moment angular . . . . .                        | 115        |
| 8.5.2    | L'octava via . . . . .                                    | 116        |
| <b>9</b> | <b>Física nuclear</b>                                     | <b>120</b> |
| 9.1      | Propietats dels nuclis . . . . .                          | 120        |
| 9.1.1    | Càrrega i massa . . . . .                                 | 120        |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 9.1.2 | El tamany i l'estructura dels nuclis . . . . .     | 121 |
| 9.1.3 | Energia d'enllaç nuclear . . . . .                 | 122 |
| 9.1.4 | Corba d'estabilitat nuclear . . . . .              | 123 |
| 9.2   | Radioactivitat . . . . .                           | 124 |
| 9.2.1 | Mecanismes de desintegració radioactiva . . . . .  | 124 |
| 9.2.2 | Desintegració alfa . . . . .                       | 124 |
| 9.2.3 | Desintegració beta . . . . .                       | 125 |
| 9.2.4 | Desintegració gamma . . . . .                      | 125 |
| 9.3   | Cinètica de la desintegració radioactiva . . . . . | 126 |
| 9.4   | Reaccions nuclears de fissió i fusió . . . . .     | 128 |
| 9.4.1 | Fissió . . . . .                                   | 128 |
| 9.4.2 | Fusió . . . . .                                    | 128 |
| 9.5   | Aprofitament de l'energia nuclear . . . . .        | 128 |
| 9.5.1 | Aplicacions en indústria . . . . .                 | 128 |
| 9.5.2 | Aplicacions en medicina . . . . .                  | 128 |
| 9.5.3 | Aplicacions en datació geològica . . . . .         | 129 |

# 1 El moviment harmònic simple

## 1.1 Introducció

La importància del moviment harmònic simple (o *MHS*), rau en que és un dels pocs sistemes dinàmics a Física, no trivials, que es pot resoldre exactament. En cursos posteriors es fa ús d'aquesta característica per aproximar el comportament de sistemes dinàmics més complexos al d'un oscil·lador i poder així obtenir solucions aproximades que poden suposar un punt de partida.

## 1.2 Cinemàtica del moviment harmònic simple

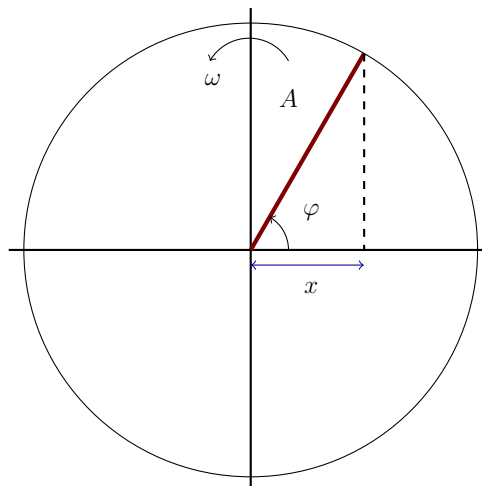
### 1.2.1 Deducció de l'equació del moviment

Considerem un punt que descriu un moviment circular de radi  $A$  amb velocitat angular constant  $\omega$ . Llavors, la projecció sobre un eix horitzontal en un instant qualsevol del temps val

$$x = A \cos \varphi$$

on  $\varphi$  és l'angle que forma el radi vector que assenyalava la posició del punt que es mou i l'eix horitzontal. Com és  $\varphi = \omega t$ , podem escriure

$$x(t) = A \cos \omega t$$



Podem presentar un resultat més general que permetrà fixar les condicions inicials, i tenim finalment, que l'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

on  $A$  s'anomena *amplitud* del moviment i es mesura en metres ( $m$ ),  $\omega$  s'anomena *pulsació o freqüència angular*, i es mesura en  $rad/s$  i  $\varphi_0$  és l'anomenada *fase inicial*, mesurada en  $rad$ .

És important destacar que en la deducció anterior de l'equació de l'oscil·lador, el que segueix el moviment harmònic simple és *la projecció* del punt que es mou amb moviment circular sobre l'eix horitzontal. Alternativament, podríem haver considerat la projecció sobre un eix vertical, d'aquesta manera l'equació s'escriuria en funció del sinus enlloc del cosinus. En qualsevol cas, aquest detall és irrellevant, ja que ambdues funcions estan relacionades per una fase de valor  $\pi/2$ .

En tot el que seguirà a continuació en aquest tema, és fonamental recordar les relacions  $\omega = 2\pi f$  i  $T = \frac{1}{f}$ , on  $f$  (Hertz) és la freqüència i  $T$  (segons) el període del moviment.

### Exemple 1

Trobeu l'equació d'un oscil·lador que té una amplitud de  $2m$ , un període de  $10s$  i a l'instant inicial es troba en la posició d'equilibri ( $x = 0$ ).

De l'enunciat sabem que  $A = 2m$ , i com  $T = 10s$ , tenim que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} rad/s$$

. Amb aquesta informació podem escriure

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}t + \varphi_0\right)$$

Per una altra banda ha de ser  $x(0) = 0$  de forma que tenim

$$0 = 2 \cos(\varphi_0)$$

d'on

$$\cos(\varphi_0) = 0 \longrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

llavors l'equació demanada és

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Notem que l'equació

$$\cos(\varphi_0) = 0$$

té en realitat dues solucions, el *valor principal*<sup>†</sup>  $\frac{\pi}{2}$ , i  $\frac{3\pi}{2}$ . Amb les condicions inicials donades no podem fixar de forma única el valor de  $\varphi_0$ . Sovint aquest serà el cas i prendrem el valor principal com a solució.

### 1.2.2 Velocitat en el moviment harmònic simple

Comencem amb un recordatori de les derivades de funcions circulars. Donada la funció circular  $y = \sin f(x)$ , la seva derivada val

$$y' = f'(x) \cos f(x)$$

i per  $y = \cos f(x)$  tenim,

$$y' = -f'(x) \sin f(x)$$

.

#### Exemple 2

Calculeu les derivades de les següents funcions:

1.  $y = \sin(x^3 - 7x^2 + 11)$

2.  $y = \cos(\sin(x))$

3.  $y = \sin(\sin(x^3))$

Pel primer cas tenim,

$$y' = (3x^2 - 14x) \sin(x^3 - 7x^2 + 11)$$

pel segon

$$y' = -\cos \sin(\sin(x))$$

i pel tercer

$$y' = 3x^2 \cos(x^3) \cos(\sin(x^3))$$

L'equació de la velocitat es pot obtenir a partir de la relació

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

de forma que tenim

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

<sup>†</sup>El valor principal del sinus és l'angle  $\alpha$  tal que  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  i el del cosinus, l'angle  $\alpha$  tal que  $0 \leq \alpha \leq \pi$



**Exemple 2**

Trobeu l'equació d'un oscil·lador harmònic simple sabent que la seva amplitud és de 10 metres, la seva pulsació val  $\pi \text{ rad/s}$  i per  $t = 0$  la seva elongació val  $x = 5 \text{ m}$  i s'està movent cap a la dreta.

De les dades de l'enunciat es pot escriure

$$x(t) = 10 \cos(\pi t + \varphi_0)$$

imposant les condicions inicials

$$5 = 10 \cos \varphi_0$$

d'on

$$\varphi_0 = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

com a valor principal, però també és solució de l'equació anterior

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

a diferència de l'exemple 1, ara podem triar entre aquestes dues solucions.

L'equació de la velocitat és

$$v(t) = -10\pi \sin(\pi t + \varphi_0)$$

i per  $t = 0$ , tenim

$$v(0) = -10\pi \sin(\varphi_0)$$

resultat que només és positiu si  $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$ .

**1.2.3 Acceleració en el moviment harmònic simple**

A partir de la definició d'acceleració

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

tenim

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

**Exemple 3**

El moviment d'un determinat objecte obeeix l'equació

$$\ddot{x}(t) + 169x(t) = 0$$

Es demana mostrar que es tracta d'un oscil·lador harmònic simple i calcular el període del moviment.

Ja que  $\ddot{x}(t) = a(t)$ , l'equació es pot escriure com

$$a(t) + 169x(t) = 0 \longrightarrow a(t) = -169x(t) \longrightarrow a(t) = -13^2x(t)$$

que és clarament l'equació que relaciona l'acceleració i l'elongació d'un oscil·lador harmònic simple de freqüència  $\omega = 13 \text{ rad/s}$  i per tant, amb període

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{13} \text{ s}$$

**1.2.4 Espai de fases per l'oscil·lador harmònic simple**

L'espai de fases d'un sistema dinàmic és una eina molt útil que relaciona la posició d'un objecte o partícula amb el seu moment lineal, en general o amb la seva velocitat, en particular. La relació entre l'elongació i la velocitat d'un oscil·lador harmònic simple es pot trobar de la següent manera, partint de les equacions de l'elongació i la velocitat i ignorant les dependències temporals per no sobrecarregar la notació

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \frac{v}{-A\omega} = \sin(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

elevem al quadrat

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ \left(\frac{v}{-A\omega}\right)^2 = \sin^2(\omega t + \varphi_0) \end{cases}$$

d'on

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse de semieixos  $A$  i  $A\omega$  a l'espai de fases. Precisament el fet que la corba resultant sigui tancada ens diu que l'energia del sistema es conserva.

#### Exemple 4

Trobeu, en funció de  $A$ ,  $\omega$  la velocitat d'un oscil·lador harmònic simple quan la seva elongació val  $x = A/2$  i es troba movent-se cap a l'esquerra.

A partir de

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

tenim

$$\frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

d'on simplificant

$$\frac{\frac{A^2}{4}}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1 \longrightarrow \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1 - \frac{1}{4} \longrightarrow v^2 = \frac{3}{4}(A\omega)^2 \longrightarrow v = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}A\omega$$

tenint en compte les condicions de l'enunciat, ens hem de quedar amb la solució negativa.

#### 1.2.5 Valors màxims i mínims de les quantitats cinemàtiques associades al MHS

Els valors màxims de l'elongació, velocitat i acceleració al *MHS* es troben molt fàcilment, ja que tant el sinus com el cosinus són funcions acotades, és a dir

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1, \quad \forall \alpha$$

- L'elongació màxima  $x_{max} = \pm A$  es dona als extrems del moviment. La mínima,  $x_{min} = 0$  al punt d'equilibri.
- La velocitat màxima  $v_{max} = \pm A\omega$  és dona al punt d'equilibri mentre que la mínima  $v_{min} = 0$  es dona als extrems del moviment.
- L'acceleració màxima es dona quan l'elongació és màxima, i val  $a_{max} = \pm A\omega^2$  i la mínima es dona al punt d'equilibri, i val  $a_{min} = 0$

**Exemple 5**

Trobeu la distància total recorreguda per un oscil·lador harmònic simple d'amplitud  $A$  al llarg d'un període.

Si suposem que l'oscil·lador comença a l'esquerra de tot, és a dir a  $x = -A$ , ha de recórrer una distància  $2A$  per arribar a l'altre extrem del moviment, a  $x = A$  i després tornar a la posició inicial per completar un període, de forma que en total ha recorregut una distància  $4A$ .

**Exemple 6**

L'agulla d'una màquina de cosir oscil·la entre dos punts separats una distància vertical de  $20\text{ mm}$ . Suposant que descriu un moviment harmònic simple de freqüència  $30\text{ Hz}$ , quina és la seva acceleració màxima?

Com el recorregut complet és de  $20\text{ mm}$ , deduïm que l'amplitud val  $A = 10\text{ mm}$ . Llavors, a partir de  $a_{\max} = \pm A\omega^2$  i recordant que  $\omega = 2\pi f$ , podem escriure

$$a_{\max} = \pm A\omega^2 = \pm 10 \cdot 10^{-3} (2\pi \cdot 30)^2 = \pm 3,553\text{ m/s}^2$$

### 1.3 Dinàmica del moviment harmònic simple

Un exemple de *MHS* és el d'un objecte de massa  $m$  lligat a una molla de constant elàstica  $k$ . Recordem que la llei de Hooke relaciona la força que fa la molla amb l'elongació segons

$$F = -kx$$

aplicant la segona llei de Newton i recordant que  $a = -\omega^2 x$ , podem escriure

$$F = ma \longrightarrow -kx = -m\omega^2 x$$

d'on es pot deduir

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Amb un raonament semblant es pot provar que per un pèndol de longitud  $l$  en un lloc on la gravetat val  $g$  es té

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

**Exemple 7**

Trobeu la constant elàstica d'una molla sabent que quan se li acobla una massa de  $1,00\text{ kg}$  i es fa oscil·lar, ho fa amb pulsació  $\omega = \sqrt{2\pi}\text{ rad/s}$

A partir de

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow k = m\omega^2$$

és fàcil calcular

$$k = 1 \cdot 2\pi = 2\pi = 6,28\text{ N/m}$$

## 1.4 Energia en el moviment harmònic simple

En el cas d'un objecte de massa  $m$  unit a una molla de constant elàstica  $k$  tenim per l'energia cinètica

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

i per l'energia potencial elàstica

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

L'energia total d'aquest sistema serà

$$E = E_c + E_p$$

El valor de l'energia total es pot deduir fàcilment, ja que per exemple, al punt d'equilibri, l'energia potencial elàstica val zero, mentre que la cinètica és màxima i val

$$E_{c_{max}} = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

de forma que tenim

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2$$

alternativament podem fer servir que als extrems la velocitat és zero i l'energia potencial elàstica és màxima, de forma que podem escriure

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

**Exemple 8**

L'amplitud en un moviment harmònic simple originat per una molla de constant recuperadora  $k = 500 \text{ N/m}$  és de  $40,0 \text{ cm}$ . Quina serà l'energia total de l'oscil·lador? Quant val la seva energia cinètica a l'instant en què l'elongació és de  $30,0 \text{ cm}$ ?

Podem expressar l'energia total en funció de la potencial elàstica com

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

de forma que tenim

$$E_c + E_{pel} = \frac{1}{2}kA^2$$

i llavors, quan  $x = 30 \text{ cm}$

$$E_c = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A+x)(A-x) = \frac{1}{2}500(0,700)(0,100) = 17,5 \text{ J}$$

## 1.5 Recordatori de derivades

En aquesta secció volem recordar el càlcul de derivades de les funcions circulars sinus i cosinus, ja que són les que es fan servir en el context de l'oscil·lador harmònic i ones. En aquest sentit, recordem que en l'àmbit de les funcions reals de variable real en matemàtiques és

$$f(x) = \sin g(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cos g(x)$$

i

$$f(x) = \cos g(x) \rightarrow f'(x) = -g'(x) \sin g(x)$$

on s'ha fet servir la regla de la cadena per les funcions compostes i la derivada respecte de  $x$  s'indica amb una prima ( $'$ ). Veiem alguns exemples:

1.

$$f(x) = 2 \sin x \rightarrow f'(x) = 2 \cos x$$

2.

$$f(x) = (a + b^2) \sin x \rightarrow f'(x) = (a + b^2) \cos x$$

3.

$$f(x) = a \sin 3x \rightarrow f'(x) = 3a \cos 3x$$

4.

$$f(x) = \cos x^4 \rightarrow f'(x) = -4x^3 \sin x^4$$

5.

$$f(x) = a \sin(x^3 - 4x + 5) \rightarrow f'(x) = a(3x^2 - 4) \cos(x^3 - 4x + 5)$$

6.

$$f(x) = a \cos(bx + c^2 + d) \rightarrow f'(x) = -ab \sin(bx + c^2 + d)$$

Per una altra banda, en el context de la física, les nostres funcions dependran típicament del temps, o del temps i la posició en el cas de les ones, llavors les expressions que farem servir seran

$$f(t) = \sin g(t) \rightarrow \dot{f}(t) = \dot{g}(t) \cos g(t)$$

i

$$f(t) = \cos g(t) \rightarrow \dot{f}(t) = -\dot{g}(t) \sin g(t)$$

On indiquem la derivada respecte el temps amb un punt sobre la lletra de la funció. Veiem alguns exemples:

1.

$$f(t) = 2 \sin t \rightarrow \dot{f}(t) = 2 \cos t$$

2.

$$f(t) = a \sin(3x + 4t) \rightarrow \dot{f}(t) = 4a \cos(3x + 4t)$$

3.

$$f(t) = \cos xt^4 \rightarrow \dot{f}(t) = -4xt^3 \sin xt^4$$

4.

$$f(t) = a \sin(t^3 - 4x + 5) \rightarrow \dot{f}(t) = 3at^2 \cos(t^3 - 4x + 5)$$

5.

$$f(t) = x \cos(tx + t^2 + d) \rightarrow \dot{f}(t) = -(x + 2t)x \sin(tx + t^2 + d)$$



## 2 Ones

### 2.1 Introducció

La principal característica de les ones és que engloben fenòmens en els que hi ha transport d'energia i quantitat de moviment però no de matèria. Per exemple, si prenem una corda per un extrem i la sacsegem de forma continua es formaran pertorbacions que arribaran a l'altre extrem de la corda i poden ser percebudes per una altra persona que estigui en contacte amb aquest extrem lliure. La corda no es trasllada, només està vibrant amunt i avall, però és clar que alguna cosa es transmet al llarg d'ella.

### 2.2 Tipus d'ones

#### 2.2.1 Ones electromagnètiques

No necessiten cap medi material per a propagar-se. En el buit ho fan a la velocitat de la llum  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . La descripció clàssica considera aquestes ones formades per un camp elèctric i un camp magnètic que oscil·len perpendicularment. Només el camp elèctric condiciona les propietats òptiques en la interacció entre ones electromagnètiques i la matèria, amb

$$\frac{|\vec{E}_{max}|}{|\vec{B}_{max}|} = c$$

on  $c$  és la velocitat de la llum en el buit. Per una altra banda, la teoria quàntica (que tractarem de forma molt introductòria al Tema 8) considera que les ones electromagnètiques, i en particular la llum, es troben “empaquetades” en partícules anomenades fotons amb energia  $E = h\nu$  on  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  és la constant de Planck, i  $\nu (\equiv f)$ , la freqüència.

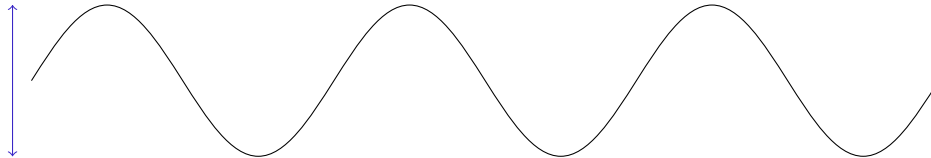
#### 2.2.2 Ones mecàniques

Necessiten un medi material per a propagar-se. La seva velocitat de propagació depèn de les característiques físiques del medi, i en general, disminueix amb la densitat d'aquest però per altra banda, és proporcional al *grau de cohesió* de les molècules del medi. Un exemple d'ona mecànica és el so, que més endavant tractarem amb més detall.

#### 2.2.3 Ones transversals

La direcció de la vibració és perpendicular a la direcció de propagació. Per exemple, les ones electromagnètiques, ones estacionàries en una corda de

guitarra, etc.



### 2.2.4 Ones longitudinals

La direcció de propagació i vibració és la mateixa. Per exemple si estirem una molla sobre una superfície horitzontal i li donem un impuls en un extrem, observarem que la pertorbació es trasllada al llarg de la molla fins arribar a l'altre extrem. Si aquest extrem es troba lligat en algun suport que pugui proporcionar prou quantitat de moviment, veurem com la pertorbació es reflecteix i torna al llarg de la molla.



Un altre exemple d'ona longitudinal és el so, que consisteix en variacions periòdiques de la pressió de l'aire.

## 2.3 Equació d'una ona harmònica. Magnituds que caracteritzen una ona

L'equació d'una ona harmònica transversal unidimensional que es desplaça cap a la dreta es pot escriure com

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

on  $A$  és l'amplitud de l'ona (en metres),  $k = 2\pi/\lambda$  és el nombre d'ona (en  $\text{rad/m}$ ),  $\lambda$  la longitud d'ona o *mínima distància entre dos punts que es troben al mateix estat de vibració* (en metres) i  $\varphi_0$  la fase inicial (en radians), que es fixa amb les condicions inicials. És habitual considerar per simplicitat  $\varphi_0 = 0$  i així ho farem sovint en aquests apunts. Noteu que, fent servir relacions conegudes, podem escriure l'equació com

$$y(x, t) = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

ja que  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  i  $k = 2\pi/\lambda$ .

També podem trobar escrita l'equació de l'ona com

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

aquesta equació també descriu una ona que es mou cap a la dreta. En el cas que la situació requereixi que ho faci cap a l'esquerra hauríem d'escriure

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t + \varphi_0) = A \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$$

o fins i tot, d'una manera una mica artificial

$$y(x, t) = A \sin(-kx - \omega t + \varphi_0) = A \sin(-\omega t - kx + \varphi_0)$$

És a dir, sempre que  $kx$ ,  $\omega t$  tinguin diferent signe, l'ona es mou cap a la dreta, si tenen el mateix signe, llavors l'ona es mou cap a l'esquerra. A banda de totes aquestes consideracions és evident que també es pot escriure l'equació d'ona fent servir *cosinus* enlloc de *sinus*, ja que la diferència entre aquestes dues funcions és només una fase de  $\pi/2$ .

### Exemple 1

L'equació d'una ona harmònica és

$$y(x, t) = 15 \sin \pi(3x - 10t)$$

es demana trobar: amplitud, longitud d'ona i període.

Si reescrivim l'equació

$$y(x, t) = 15 \sin 2\pi \left( \frac{3x}{2} - \frac{10t}{2} \right) = 15 \sin 2\pi \left( \frac{x}{\frac{2}{3}} - \frac{t}{\frac{2}{10}} \right)$$

podem identificar directament

$$A = 15 \text{ m} \quad \lambda = \frac{2}{3} \text{ m} \quad T = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ s}$$

. Alternativament podríem haver fet, a partir de l'equació proporcionada

$$y(x, t) = 15 \sin \pi(3x - 10t) = 15 \sin(3\pi x - 10\pi t)$$

d'on s'obté directament  $A = 15 \text{ m}$ ,  $k = 3\pi \text{ rad/m}$  i  $\omega = 10\pi \text{ rad/s}$  i indirectament, els valors trobats anteriorment de  $\lambda$  i  $T$ .

## 2.4 Diferència de fase

Anomenarem *fase*,  $\varphi$  a l'expressió  $kx - \omega t + \varphi_0$ . En general, la *diferència de fase*  $\Delta\varphi$  entre dos punts  $x_1, x_2$  i dos temps  $t_1, t_2$  es calcula com

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = kx_2 - \omega t_2 + \varphi_0 - (kx_1 - \omega t_1 + \varphi_0) = k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1)$$

De manera que si volem calcular  $\Delta\varphi$  entre dos punts diferents en el mateix instant del temps tindrem

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1) = k(x_2 - x_1)$$

de forma que, en particular, si els punts estan separats un nombre  $n$  enter de longituds d'ona, direm que es troben *en fase*, ja que

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = kn\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}n\lambda = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

i si ho estan un nombre semisenar de longituds d'ona,  $\frac{2n+1}{2}$  direm que es troben *en oposició de fase*, ja que

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = k\frac{2n+1}{2}\lambda = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{2n+1}{2}\lambda = (2n+1)\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Un raonament semblant permet discutir els casos en que volem calcular  $\Delta\varphi$  per un punt determinat en dos instants de temps diferents, quan aquests corresponen a múltiples enters o semisenars del període  $T$  de l'ona.

### Exemple 2

L'equació d'una ona harmònica és

$$y(x, t) = 10 \sin 2\pi \left( \frac{x}{4} - \frac{t}{20} \right)$$

es demana trobar la diferència de fase entre dos punts separats  $2m$  en el mateix instant del temps.

Com que és  $\lambda = 4m$ , per punts separats  $2m$  és trivial veure que la diferència de fase és  $\pi$ , és a dir es troben en oposició de fase. Amb més detall

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (2) = \pi \text{ rad}$$

**Exemple 3**

A partir de l'equació d'ona de l'exemple anterior, trobeu la diferència de fase entre dos punts separats  $3,5\text{ m}$  en el mateix instant del temps.

Calculem directament,

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{4} \cdot 3,5 = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$$

**2.4.1 Velocitat i acceleració en ones transversals**

A partir de l'equació d'una ona transversal

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

es pot escriure la de la velocitat<sup>†</sup> dels seus punts

$$v_y = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -A\omega \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

i la de l'acceleració com

$$a_y = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial v_y(x, t)}{\partial t} = -A\omega^2 \sin(kx - \omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(x, t)$$

**2.4.2 Velocitat de fase**

En les ones harmòniques, anomenem la *velocitat de fase* o *de grup*,  $v$  a la velocitat amb que es desplaça l'ona, que no és la mateixa que la velocitat amb que vibra cada punt de l'ona.

$$\lambda = vT$$

també pot ser útil el resultat

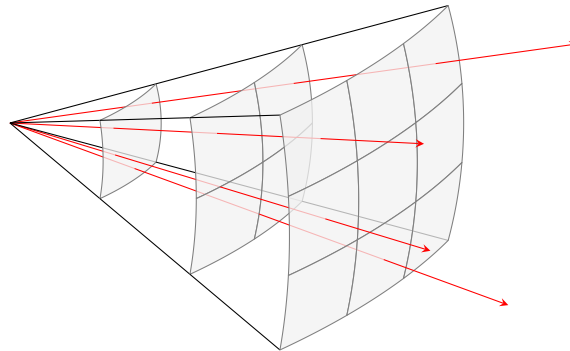
$$\omega = vk$$

<sup>†</sup>El símbol  $\partial t$  denota la derivada parcial respecte el temps, que aquí cal especificar ja que  $y(x, t)$  és una funció de dues variables.

## 2.5 Propagació de l'energia en el moviment ondulatori

### 2.5.1 Front d'ona i raig

Anomenem **front d'ona** el lloc geomètric dels punts de l'espai que estan en el mateix estat de vibració. Els **raigs** són línies vectorials perpendiculars als fronts d'ona i apunten en el sentit en què avança la pertorbació.



En una ona unidimensional (una corda vibrant, per exemple) el front d'ona és un punt, mentre que a una ona bidimensional (pertorbació en un estany al llençar una pedra, per exemple), el front d'ona és una corba (un cercle), i en una ona tridimensional (ona de xoc que es propaga en una explosió), el front d'ona és una superfície (una esfera).

### 2.5.2 Potència i intensitat d'una ona

Anomenem **potència**  $P$ , d'una ona a l'energia que transporta per unitat de temps. En el *SI*, la potència es mesura en watt (**W**). Definim **intensitat** d'una ona  $I$ , com la potència per unitat de la magnitud que defineix el front d'ona (punt, corba, superfície).

$$I = \frac{P}{L^d}$$

on  $d$  és la dimensió del front d'ona. Segons aquesta definició, i suposant que la potència es manté al llarg de la propagació (no hi ha pèrdues d'energia) tenim

1. Ones unidimensionals

$$I = \frac{P}{L^0} = \frac{P}{1} = P$$

llavors per dos punts 1 i 2 diferents

$$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 = I_2$$

## 2. Ones bidimensionals

$$I = \frac{P}{L^1} = \frac{P}{L} \longrightarrow P = IL = I \cdot 2\pi R$$

de forma que per dos punts 1 i 2 diferents

$$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 2\pi R_1 = I_2 2\pi R_2 \longrightarrow I_1 R_1 = I_2 R_2$$

## 3. Ones tridimensionals

$$I = \frac{P}{L^2} = \frac{P}{S} \longrightarrow P = IS = I \cdot 4\pi R^2$$

per dos punts 1 i 2 diferents

$$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 4\pi R_1^2 = I_2 4\pi R_2^2 \longrightarrow I_1 R_1^2 = I_2 R_2^2$$

Per una altra banda, es pot comprovar que per qualsevol dels tres tipus d'ona es compleix que la intensitat és proporcional al quadrat de l'amplitud

$$I \propto A^2$$

de forma que podem afegir les relacions

$$I_1 = I_2 \longrightarrow A_1^2 = A_2^2 \longrightarrow A_1 = A_2$$

per ones unidimensionals, i

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \longrightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{R_2}{R_1} \longrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

per ones bidimensionals. Finalment, per ones tridimensionals tenim

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \longrightarrow \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \longrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

**Exemple 4**

Una font sonora emet un so tal que a 1 m de l'emissor la intensitat és  $I_1 = 10^4 \text{ W/m}^2$ . A quina distància de la font aquesta intensitat s'haurà reduït fins a  $I_2 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ ?

Tenim

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

llavors

$$R_2 = R_1 \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = 1 \cdot \sqrt{\frac{10^4}{10^{-12}}} = 10^8 \text{ m}$$

## 2.6 Atenuació i absorció

Com a conclusió fonamental del final de l'apartat anterior podem veure que en les ones bidimensionals i tridimensionals es produeix una disminució de l'amplitud de la pertorbació a mesura que el front d'ona s'allunya del focus. Aquest fenomen s'anomena **atenuació**. A banda, quan les ones travessen la superfície de separació entre dos medis diferents es produeix una pèrdua d'energia que fa disminuir encara més la seva intensitat, ho anomenem **absorció**. L'absorció depèn de les característiques del medi i de la freqüència de l'ona. Es pot demostrar la relació

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta x}$$

on  $I_0$  és la intensitat que té l'ona abans d'entrar al medi,  $\beta$  l'anomenat *coeficient d'absorció del medi*, i  $x$  la distància recorregida dins el medi. Anomenem **gruix de semiabsorció** a la distància que ha de recórrer l'ona per tal que la intensitat es redueixi a la meitat

$$D_{1/2} = \frac{\ln 2}{\beta}$$

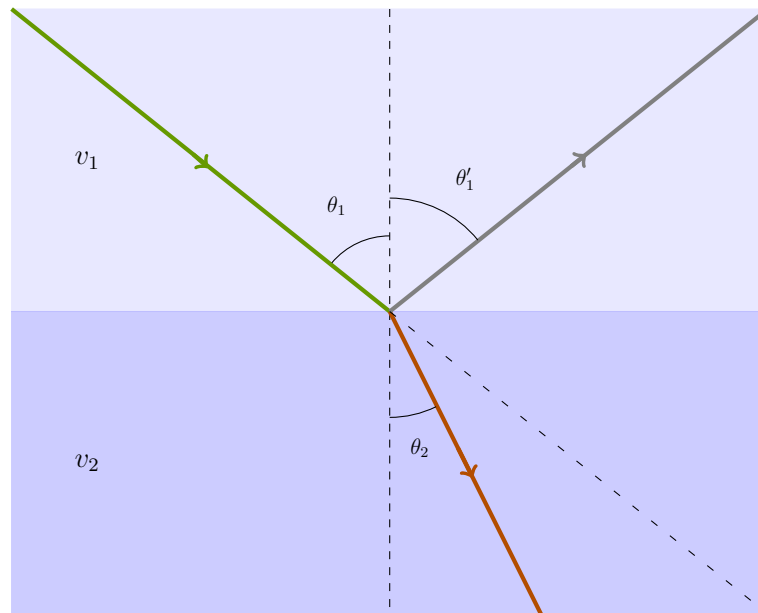
## 2.7 Lleis d'Snell

Diem que hi ha **reflexió** quan una ona arriba a la superfície que separa dos medis diferents i es desvia avançant pel medi original. La **refracció** es produeix quan una ona arriba a la superfície que separa dos medis diferents i avança pel segon medi. En cadascun dels medis l'ona es mou amb velocitat diferent i la direcció de propagació canvia. És important constatar que la freqüència de l'ona no varia.

Les lleis d'Snell ens diuen com es comporta una ona al arribar a la interfície de separació de dos medis diferents. El curs passat es va tractar aquest tema en el context de les ones electromagnètiques, en particular per la llum. Aquest any, hem de parlar d'ones en general, i això fa que no podem usar l'índex de refracció, ja que aquest es definia només per les ones electromagnètiques.

Sigui doncs una ona que incideix sobre la interfície de dos medis diferents. Si per les velocitats de propagació en cada medi suposem  $v_1 > v_2$





En qualsevol cas, segueixen sent vàlides les següents lleis:

- El raig incident, el reflectit i la normal estan continguts al mateix pla.
- L'angle que forma el raig incident ( $\theta_1$ ) amb la normal és igual al que forma el raig reflectit ( $\theta'_1$ ) amb la normal.
- El raig incident, el refractat i la normal estan continguts en el mateix pla.
- Quant el raig incident es propaga a més velocitat que el refractat, l'angle d'incidència  $\theta_1$  és més gran que l'angle de refracció  $\theta_2$ , en altres paraules, el raig refractat *s'acosta a la normal*.

Tenim que

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

És important establir que, quan una ona travessa la interfície de separació de dos medis, la freqüència no varia, i com la velocitat (en principi) sí que ho fa, llavors es conclou que la longitud d'ona també varia.

**Exemple 5**

La velocitat del so en l'aire és d'uns  $340\text{ m/s}$  mentre que en aigua, és de  $1600\text{ m/s}$  aproximadament. Si una ona sonora incideix sobre la superfície d'un estany des de dins de l'aigua amb un angle de  $45^\circ$ , amb quin angle es refractarà un cop surti de l'aigua?

A partir de

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

tenim

$$\sin \theta_2 = v_2 \frac{\sin \theta_1}{v_1} = 340 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{1600} = 0,15$$

d'on

$$\theta_2 = \arcsin 0,15 = 8,64^\circ$$

és a dir que el raig surt pràcticament vertical (fregant la normal a la superfície).

## 2.8 Interferències i difracció

Farem un estudi molt qualitatiu dels fenòmens de interferències i difracció d'ones. En quant a les interferències, ens interessa conèixer el que succeeix quan en un punt determinat es troben dues ones harmòniques. Per simplicitat suposarem que aquestes ones tenen la mateixa amplitud i freqüència. Considerem doncs que un punt  $P$  rep la interferència de dues ones originades en punts  $S_1$  i  $S_2$ , tots dos a una distància  $x_1$  i  $x_2$  de  $P$ , respectivament. Llavors, anomenant  $x_2 - x_1$  la diferència de camí, tindrem interferència constructiva quan

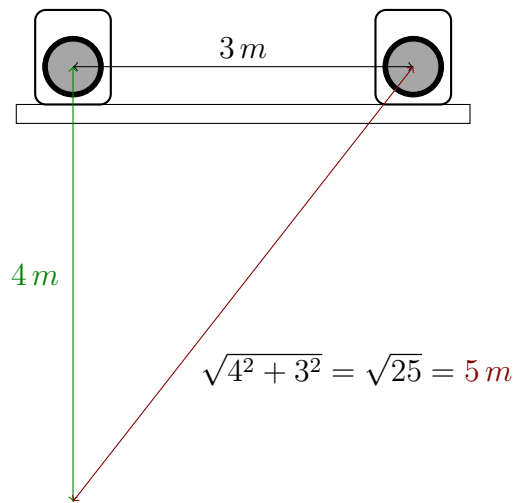
$$x_2 - x_1 = n\lambda$$

i interferència destructiva quan

$$x_2 - x_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

**Exemple 6**

Sobre una taula tenim dos altaveus separats  $3\text{ m}$  que generen un so pur de freqüència  $f = 170\text{ Hz}$ . Si ens situem davant d'un d'ells a una distància de  $4\text{ m}$  observem una interferència. Es demana decidir si és constructiva o destructiva suposant que la velocitat del so és  $340\text{ m/s}$ .

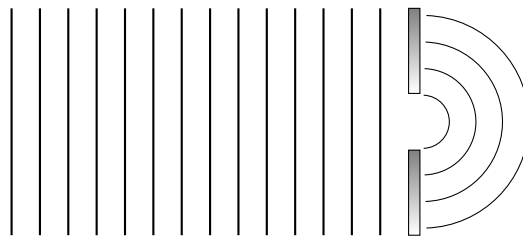


Per una banda la diferència de camí val  $5 - 4 = 1\text{ m}$  i la longitud d'ona

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{170} = 2\text{ m}$$

com que la diferència de camí val la meitat de la longitud d'ona es produirà una interferència destructiva. Llavors, en principi, al punt considerat no s'hauria de sentir res, al marge del volum inicial dels altaveus.

la difracció és un fenomen que pateixen les ones, consistent en que quan una ona passa per una escletxa, aquesta es comporta com un emissor puntual.



El fenomen de difracció és màxim quan el tamany de l'escletxa és de l'ordre de magnitud de la longitud d'ona.

No tindrem ocasió de tractar exercicis numèrics sobre aquest fenomen.

## 2.9 Ones estacionàries

Per l'estudi de les ones estacionàries suposarem que resulten de la superposició de dues ones idèntiques que es propaguen en el mateix medi en sentits oposats.



Llavors la seva suma

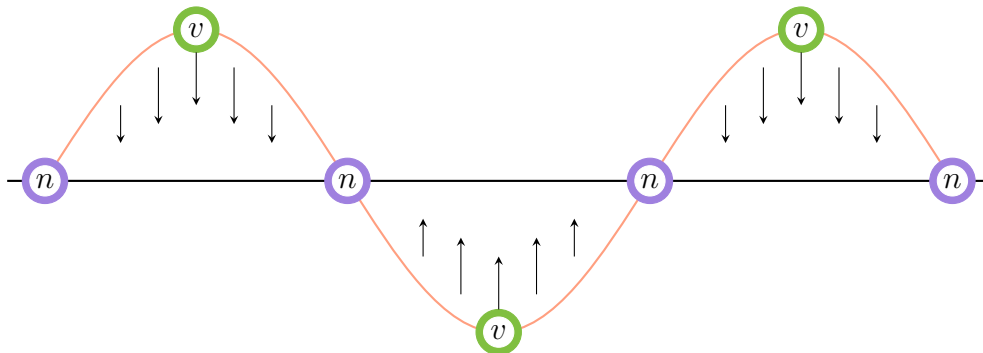
$$y = A \sin(kx + \omega t) + A \sin(kx - \omega t)$$

es pot reescriure fent ús de la relació trigonomètrica

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

per obtenir

$$y = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$



El terme  $2A \sin(kx)$  s'anomena *amplitud efectiva*, ja que en les ones estacionàries l'amplitud depèn de la posició, no només del temps. Els punts pels quals l'amplitud val zero per qualsevol temps s'anomenen *nodes*. Els punts que assolixen l'amplitud màxima de l'ona estacionària ( $\pm 2A$ ) s'anomenen *ventres*.

Per localitzar els nodes demanem

$$2A \sin(kx) = 0$$

d'on

$$kx = n\pi \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \longrightarrow x = n\frac{\lambda}{2}$$

Per localitzar els ventres, ha de ser

$$\sin(kx) = \pm 1$$

d'on

$$kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \longrightarrow x = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

En quant a la velocitat de fase de les ones estacionàries, l'expressió

$$\lambda = vT$$

segueix sent vàlida, però ara cal tenir present que la aquesta velocitat depèn de paràmetres físics del suport de l'ona i per tant, és constant. Llavors, al canviar la longitud d'ona, la freqüència canvia d'acord amb el la fórmula anterior. Noteu el contrast amb la situació que teníem quan una ona travessava la interfície de dos medis diferents.

### Exemple 7

L'equació d'una ona estacionària és

$$y(x, t) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin(100\pi t)$$

es demana trobar: amplitud de les ones components, longitud d'ona i període.

L'amplitud de les ones components és  $A = 3\text{ m}$ . Com és  $k = \pi/2\text{ rad/m}$  es dedueix que  $\lambda = 4\text{ m}$  i finalment, com és  $\omega = 100\pi\text{ rad/s}$  es veu que  $T = 0,02\text{ s}$ .

#### 2.9.1 Corda lligada pels extrems. Tub obert pels dos extrems

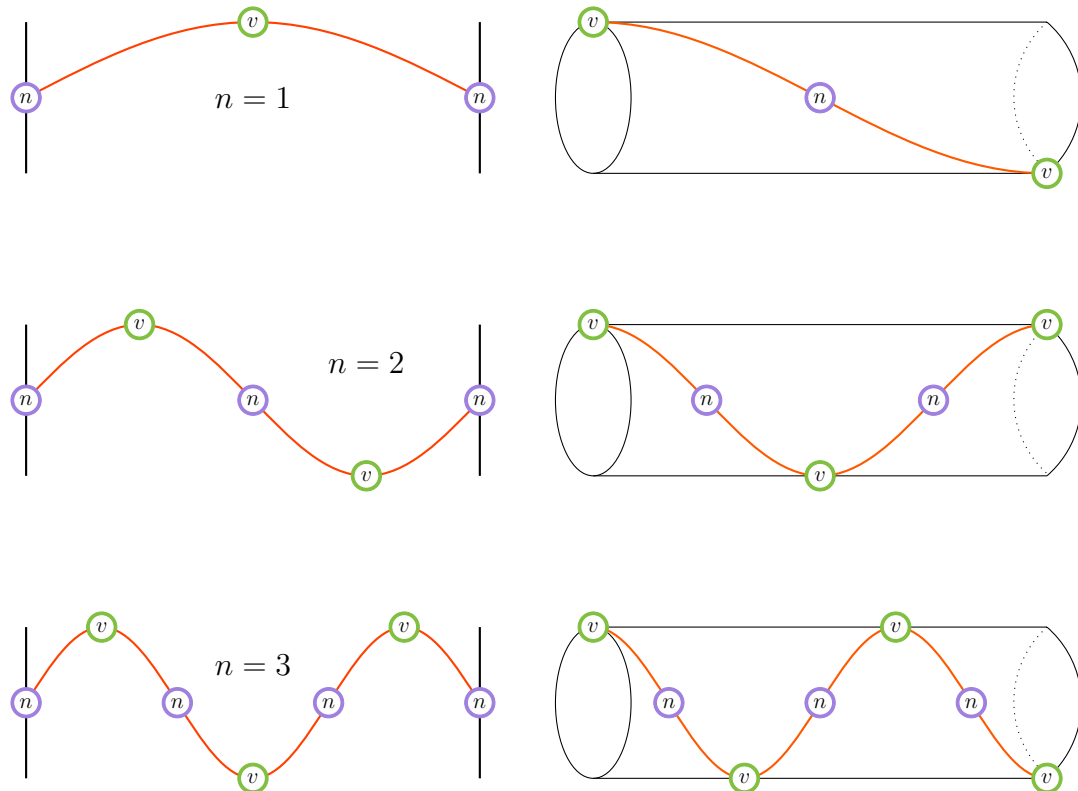
Els dos casos són semblants. La condició perquè es formi una ona estacionària és que en la longitud (de la corda o el tub) hi hagi un nombre semienter de longituds d'ona.

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

de forma que les diferents longituds d'ona que es poden donar són

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Expressió que genera els diferents *harmònics*. Per  $n = 1$ , l'harmònic corresponent rep el nom de *fonamental*.



Podem trobar les freqüències generades pels diferents harmònics fent servir la relació

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

així

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{2L}{n}} = n \cdot \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

La relació entre les freqüències dels diferents harmònics generats és

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad f_2 = 2 \cdot \frac{v}{2L} = 2f_1 \quad f_3 = 3 \cdot \frac{v}{2L} = 3f_1 \quad \dots$$

noteu que en aquests casos, a partir d'una freqüència fonamental determinada, es poden generar tots els harmònics corresponents als seus múltiples. A la secció següent veurem que en el cas de cordes lligades per un extrem o tubs semi-oberts això no és possible, i no podrem obtenir els harmònics parells, múltiples d'una freqüència fonamental.

**Exemple 8**

Una corda de longitud  $2m$  lligada pels extrems vibra en el segon harmònic amb una freqüència  $f = 440 \text{ Hz}$ . Es demana calcular amb quina freqüència vibra el tercer harmònic i la velocitat de les ones estacionàries en aquesta corda.

Com que el segon harmònic *omple* amb una longitud d'ona la separació entre els punts de suport de la corda vibrant, podem deduir que  $\lambda = 2m$ . Ara, fent servir les dades de l'enunciat

$$\lambda = vT = v/f \longrightarrow v = \lambda f = 2 \cdot 440 = 880 \text{ m/s}$$

El tercer harmònic omple la separació entre extrems amb una longitud d'ona i mitja (d'on  $\lambda = 2L/3 = 4/3$ ), i com la velocitat és la mateixa per tots els harmònics, la nova freqüència serà

$$f = v/\lambda = \frac{880}{4/3} = 660 \text{ Hz}$$

**2.9.2 Corda lligada per un extrem. Tub obert per un extrem**

Els dos casos són semblants, ara la condició sobre la longitud (del tub o corda) per tal que s'estableixin ones estacionàries és

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$$

d'on les longituds d'ona possibles són

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n - 1} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

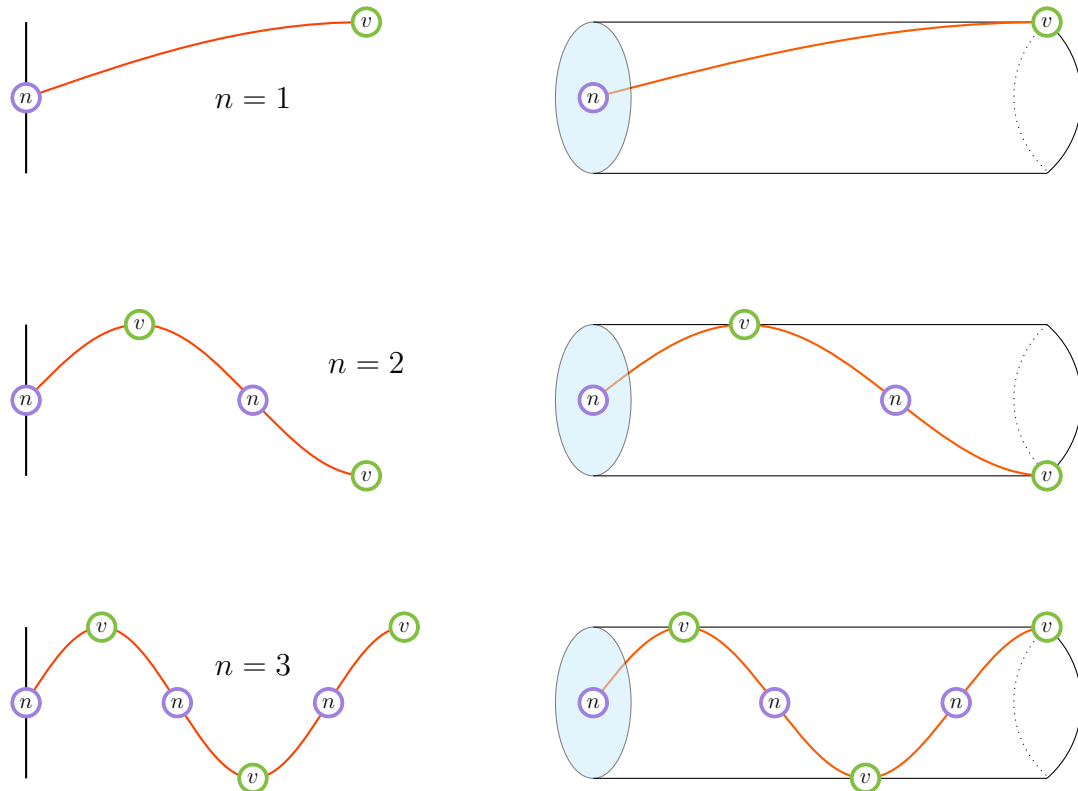
Les freqüències corresponents que es poden obtenir són

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\frac{4L}{2n-1}} = (2n - 1) \frac{v}{4L} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

i tenim, pels primers harmònics

$$f_1 = \frac{v}{4L} \quad f_2 = 3 \cdot \frac{v}{4L} = 3f_1 \quad f_3 = 5 \cdot \frac{v}{4L} = 5f_1 \quad \dots$$

tal com hem comentat abans, en aquests casos no s'obtenen els harmònics múltiples parells de la freqüència fonamental.



Noteu que en el cas dels tubs, al costat tancat hi ha suport material perquè s'estableixi un node, mentre que a l'altre extrem obert hi tenim un ventre.

### Exemple 9

Calculeu la freqüència que tindrà l'aire vibrant en el segon harmònic en un tub semiobert de 3 metres de longitud. Podeu considerar que la velocitat del so és de  $340 \text{ m/s}$ .

En un tub semiobert, el segon harmònic (que correspon al tercer de la sèrie natural) omple el tub amb  $\frac{3}{4}\lambda$ , de forma que serà

$$\frac{3}{4}\lambda = L \longrightarrow \frac{3}{4}\lambda = 3 \longrightarrow \lambda = 4 \text{ m}$$

i

$$f = \frac{v}{\lambda} = 85 \text{ Hz}$$



## 2.10 El so

El **so** és una pertorbació que apareix quan es fan vibrar les partícules d'un medi elàstic de manera que s'hi produeixen variacions en la densitat o en la pressió i es propaga a través del medi en forma d'ones. El so és una ona mecànica longitudinal de caràcter tridimensional.

### 2.10.1 Qualitats del so

El **to** és la qualitat del so que permet distingir els sons aguts dels greus. Està relacionat amb la freqüència de l'ona sonora: els sons aguts corresponen a freqüències altes i els sons greus, a baixes. El **timbre** és la qualitat del so que permet distingir sons de la mateixa freqüència i amplitud produïts per instruments musicals diferents. La **intensitat** és la qualitat del so que permet identificar-lo com fort o feble. Està relacionada amb l'amplitud de l'ona: els sons forts es corresponen amb amplituds elevades i els febles, amb baixes.

La resposta de l'oïda humana a la intensitat sonora és logarítmica, és a dir, per percebre un so el doble de fort, la seva intensitat s'ha de multiplicar per deu. Aquesta característica es fa servir per definir una magnitud anomenada **nivell d'intensitat sonora** o **sonoritat** d'un so:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

que es mesura en *decibels* (dB) i on  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  és l'anomenada *intensitat llindar*. Per recordar la definició i propietats dels logaritmes podeu consultar el darrer tema del següent [arxiu](#).

#### Exemple 10

Suposant que una persona cridant pot arribar a produir una sonoritat de  $70 \text{ dB}$ , calculeu la sonoritat d'un conjunt de 100 000 persones cridant en un estadi de futbol.

Per una sola persona podem escriure

$$70 = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

si anomenem  $I' = 10^5 I$  la intensitat del conjunt de l'estadi cridant, tenim

$$\beta' = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{10^5 I}{I_0} = 10 \log 10^5 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 50 + 70 = 120 \text{ dB}$$

**Exemple 11**

S'ha mesurat el nivell d'intensitat sonora a  $2\text{ m}$  d'un petard que explota i s'han obtingut  $120\text{ dB}$ , quin nivell d'intensitat sonora es mesurarà a  $100\text{ m}$ ?

A partir de la informació de l'enunciat podem escriure

$$120 = \beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

si suposem que el so és una ona tridimensional tenim que

$$I_1 R_1^2 = I_2 R_2^2$$

expressió que relaciona les intensitats (no el nivell d'intensitat sonora) de l'ona en punts a distàncies diferents. Recordem que aquest fenomen s'anomena *atenuació* i no té a veure amb possibles pèrdues d'energia si no amb la forma de propagació en sí.

Llavors, a  $200\text{ m}$  tindrem

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{\frac{I_1 R_1^2}{R_2^2}}{I_0} \\ &= 10 \log \frac{I_1 R_1^2}{I_0 R_2^2} = 10 \left[ \log \frac{I_1}{I_0} + \log \frac{R_1^2}{R_2^2} \right] \\ &= 10 \left[ \log \frac{I_1}{I_0} + \log \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] = 10 \left[ \log \frac{I_1}{I_0} + 2 \log \frac{R_1}{R_2} \right] \\ &= 10 \log \frac{I_1}{I_0} + 10 \cdot 2 \log \frac{R_1}{R_2} = 120 + 10 \cdot 2 \log \frac{2}{100} = 86,02\text{ dB} \end{aligned}$$

### 2.10.2 Efecte Doppler

Anomenem *efecte Doppler* el canvi que en la freqüència observada per un receptor com a conseqüència del moviment de l'emissor, el receptor o tots dos. Podem resumir la casuística amb la següent fórmula (suposem que la velocitat de l'ona en el medi és  $v$ , la freqüència de l'emissor és  $f_e$  i la freqüència observada pel receptor és  $f_r$ )

$$f_r = f_e \frac{v \pm v_r}{v \pm v_e}$$

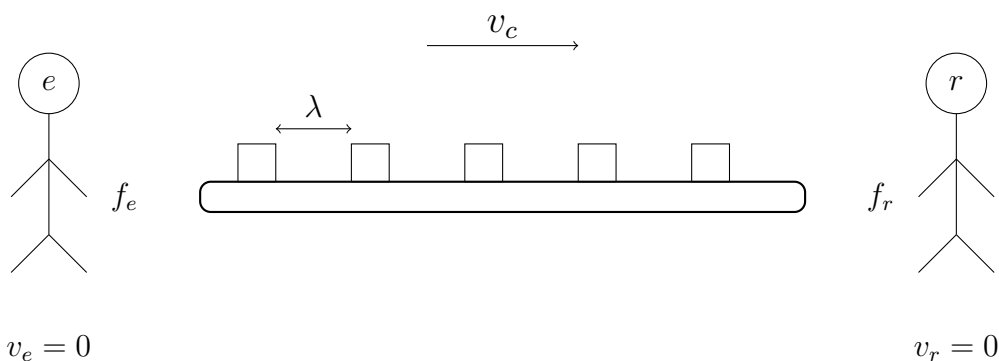
Si el receptor **s'acosta o allunya** o l'emissor **s'allunya o acosta** amb velocitats  $v_r$ ,  $v_e$  respectivament.

#### Exemple 12

Un pastisser (que es pot moure endavant i endarrere amb velocitat  $v_e$ ), va fabricant pastissos que va posant amb freqüència  $f_e$  sobre una cinta transportadora que es mou amb velocitat  $v_c$ . A l'altre extrem de la cinta, una persona (que es pot moure endavant i endarrere amb velocitat  $v_r$ ), es va menjant tots els pastissos que li arriben. Trobeu la freqüència  $f_r$  amb que aquesta darrera persona es menja els pastissos en funció dels paràmetres del problema. Supposeu en tots els casos  $|v_e|, |v_r| < v_c$

Considerem els diferents casos possibles. Adoptem el següent conveni: la velocitat és positiva si va dirigida cap a la dreta i negativa cap a l'esquerra.

a)  $v_e = v_r = 0$



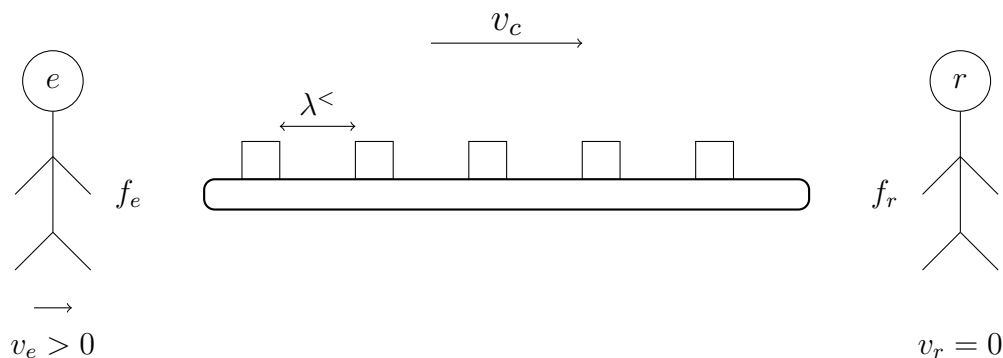
El pastisser (emissor) va posant pastissos amb freqüència  $f_e$ . Al moure's la cinta queden disposats amb una separació determinada. Aquesta separació (que anomenarem longitud d'ona), que veurà ell (i el que se'ls menja) val

$$\lambda = \frac{v_c}{f_e}$$

i la freqüència que veu el receptor val

$$f_r = \frac{v_c}{\lambda} = \frac{v_c}{\frac{v_c}{f_e}} = \frac{\cancel{v_c} f_e}{\cancel{v_c}} = f_e$$

**b)**  $v_e > 0$ ,  $v_r = 0$



El pastisser va posant pastissos amb freqüència  $f_e$ . Ara la longitud d'ona que veuen els dos és més petita que abans, ja que el pastisser es va avançant. Si es moguéss amb una velocitat  $v_e = v_c$ , els pastissos quedarien amuntegats un sobre l'altre. Tenim doncs

$$\lambda^< = \frac{v_c - v_e}{f_e}$$

La freqüència que veu el receptor val

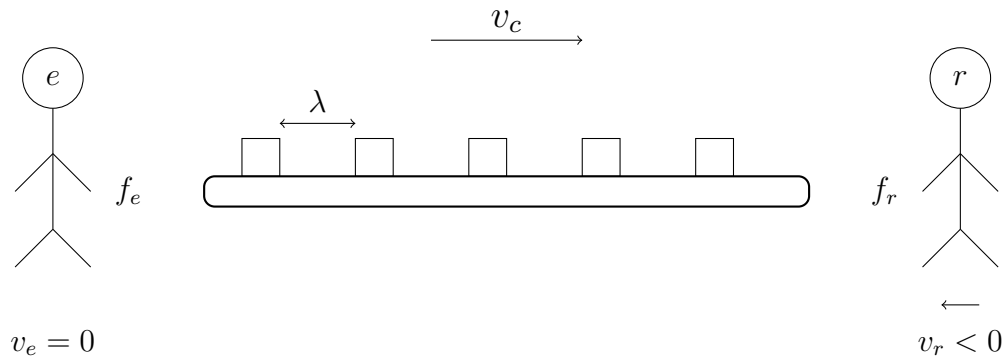
$$f_r = \frac{v_c}{\lambda^<} = \frac{v_c}{\frac{v_c - v_e}{f_e}} = \frac{v_c f_e}{v_c - v_e}$$

com és sempre

$$\frac{v_c}{v_c - v_e} > 1$$

la freqüència observada és més gran que l'emesa.

c)  $v_e = 0, v_r < 0$



El pastisser va posant pastissos amb freqüència  $f_e$ . La longitud d'ona que veuen els dos és la mateixa. De tota manera, el receptor s'acosta als pastissos amb una velocitat més gran que amb la que la cinta els trasllada. Tenim doncs, per l'emissor

$$\lambda = \frac{v_c}{f_e}$$

La freqüència que veu el receptor val

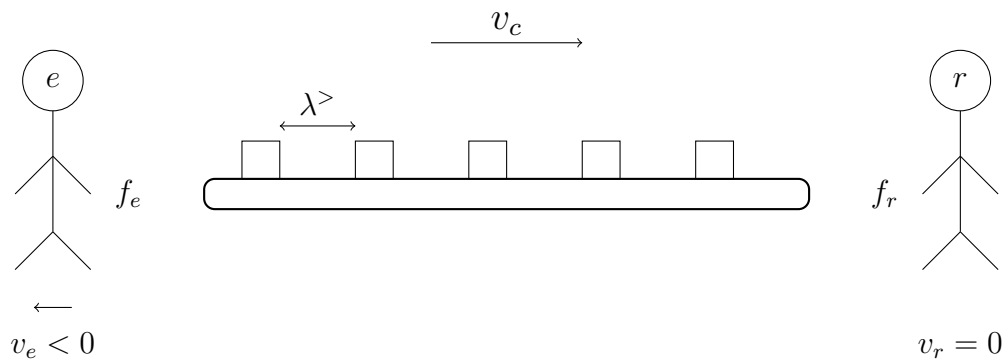
$$f_r = \frac{v_c + v_r}{\lambda} = \frac{v_c + v_r}{\frac{v_c}{f_e}} = \frac{(v_c + v_r)f_e}{v_c}$$

i com és sempre

$$\frac{v_c + v_r}{v_c} > 1$$

es conclou que la freqüència observada és més gran que l'emesa. Noteu però, que tot i que en el cas anterior la freqüència observada era també més gran, en els dos casos ho és de forma *essencialment* diferent.

d)  $v_e < 0, v_r = 0$



El pastisser va posant pastissos amb freqüència  $f_e$ . Ara la longitud d'ona que veuen els dos és més gran que abans, ja que el pastisser es mou en sentit contrari. Tenim doncs

$$\lambda^> = \frac{v_c + v_e}{f_e}$$

La freqüència que veu el receptor val

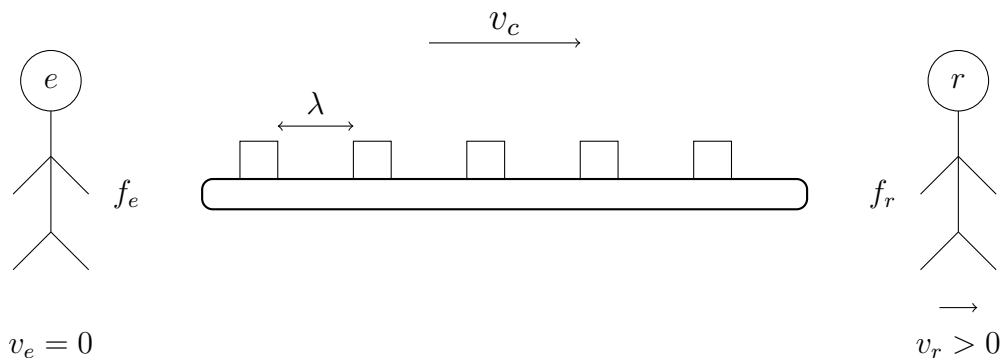
$$f_r = \frac{v_c}{\lambda^>} = \frac{v_c}{\frac{v_c + v_e}{f_e}} = \frac{v_c f_e}{v_c + v_e}$$

com és sempre

$$\frac{v_c}{v_c + v_e} < 1$$

la freqüència observada és més petita que l'emesa.

e)  $v_e = 0$ ,  $v_r > 0$



El pastisser va posant pastissos amb freqüència  $f_e$ . La longitud d'ona que veuen els dos és la mateixa. Tenim doncs, per l'emissor

$$\lambda = \frac{v_c}{f_e}$$

La freqüència que veu el receptor val

$$f_r = \frac{v_c - v_r}{\lambda} = \frac{v_c - v_r}{\frac{v_c}{f_e}} = \frac{(v_c - v_r)f_e}{v_c}$$

com és sempre

$$\frac{v_c - v_r}{v_c} < 1$$

la freqüència observada és més petita que l'emesa. Noteu però, que tot i que en el cas anterior la freqüència observada era també més petita, en els dos casos ho és de forma *essencialment* diferent.

\*   \*   \*

Els dos casos no trivials que queden per discutir

$$v_e < 0, v_r > 0$$

i

$$v_e > 0, v_r < 0$$

es poden analitzar de forma semblant i es deixa com a exercici per el lector trobar les corresponents relacions entre  $f_e$  i  $f_r$  en tots dos casos.

## 3 Camp gravitatori

### 3.1 Introducció

La coneguda anècdota que va protagonitzar Newton amb la poma va servir perquè s'adonés de quelcom que potser a nosaltres ens sembla trivial, però que llavors ningú havia pensat, que la força que governa la dinàmica de l'univers i la que atrau els objectes cap al centre de la Terra són la mateixa. Així, Newton va escriure la que es coneix com llei de gravitació universal

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

que descriu com calcular la força amb que s'atrauen dos objectes de masses  $M$  i  $m$  separats una distància  $r$ . La constant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$  es coneix com a constant de gravitació universal.

### 3.2 El concepte de camp gravitatori. Potencial gravitatori

L'expressió de l'apartat anterior presenta un problema conceptual que és l'anomenat *acció a distància*, ja que se suposa que la força apareix de forma instantània entre dues masses independentment de la distància que les separa. Per tal de superar aquest detall incòmode, es va proposar descriure el concepte de **camp**, com una condició que crea un objecte, pel sol fet de tenir massa, al seu voltant i que després afecta a altres objectes fent que aparegui una força entre ell i els altres (cada objecte crea el seu propi camp gravitatori).

D'aquesta manera, el camp gravitatori (vectorial) que crea un objecte de massa  $M$  al seu voltant a una distància  $r$  es calcula com

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r} = -G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

amb mòdul

$$|\vec{g}| = G \frac{M}{r^2}$$

i la força amb que s'atrauran  $M$  i una altra massa  $m$  situades a distància  $r$  val

$$\vec{F} = m\vec{g} = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r}$$

amb mòdul

$$F = |\vec{F}| = mg = G \frac{Mm}{r^2}$$



Per una altra banda, definim el potencial gravitatori (escalar) que crea un objecte de massa  $M$  a una distància  $r$  d'ell com

$$V = -G \frac{M}{r}$$

on hem suposat que el potencial gravitatori val zero a l'infinit.

### 3.3 Principi de superposició

Si tenim  $n$  masses situades en punts diferents, llavors el camp total que creen sobre un determinat punt el calcularem com la suma **vectorial** dels camps gravitatoris individuals, és a dir

$$\vec{g}_{total} = \sum_{i=1}^n \vec{g}_i$$

Cal notar que al ser el camp gravitatori un vector, no es pot aplicar el principi de superposició amb els mòduls dels camps gravitatoris creats per cada massa individual.

#### Exemple 1

Considereu una massa  $M_1 = 3 \cdot 10^{12} \text{ kg}$  situada al punt  $P_1 = (2, 4)$  i una altra de valor  $M_2 = 7 \cdot 10^{12} \text{ kg}$  situada al punt  $P_2 = (1, 5)$ . Es demana calcular el camp gravitatori que creen al punt  $Q = (5, 8)$ . Considereu tots els valors en metres. Podeu suposar coneguda la dada  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

Per calcular el camp total  $\vec{g}_Q$  farem

$$\vec{g}_Q = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -G \frac{M_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - G \frac{M_2}{r_2^3} \vec{r}_2$$

on  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1Q} = (3, 4)$  i  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2Q} = (4, 3)$ , llavors

$$r_1 \equiv |\vec{r}_1| = |\overrightarrow{P_1Q}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

i de forma semblant

$$r_2 \equiv |\vec{r}_2| = |\overrightarrow{P_2Q}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ m}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\vec{g}_Q &= \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3 \cdot 10^{12}}{5^3} (3, 4) - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7 \cdot 10^{12}}{5^3} (4, 3) \\ &= \frac{-6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{12}}{5^3} \left( 3(3, 4) + 7(4, 3) \right) \\ &= (-19.74, -17.6) \text{ N/kg}\end{aligned}$$

### Exemple 2

Feu servir les dades de l'exemple anterior per calcular el potencial gravitatori que creen les masses  $M_1$ ,  $M_2$  en el punt Q.

Ara és

$$\begin{aligned}V_Q &= V_1 + V_2 = -G \frac{M_1}{r_1} - G \frac{M_2}{r_2} \\ &= -6,67 \cdot 10^{-11} \frac{3 \cdot 10^{12}}{5} - 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{7 \cdot 10^{12}}{5} \\ &= -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{12}}{5} (3 + 7) \\ &= -133,4 \text{ J/kg}\end{aligned}$$

## 3.4 El moviment dels cossos celestes

### 3.4.1 Pes d'un cos

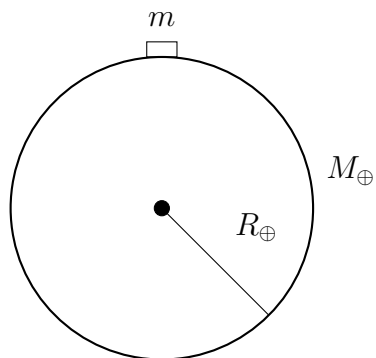
Considerem ara un objecte de massa  $m$  situat sobre la superfície de la Terra. Amb quina força és atret tal objecte? El resultat de l'apartat anterior ens diu que hem d'aplicar la fórmula

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

a on, com a valor de  $r$  hem de considerar el radi de la Terra i no zero, ja que encara que l'objecte es trobi a la superfície (a distància “zero” de la Terra) hem de pensar-ho com si la Terra fos un objecte puntual (amb la mateixa massa), que crea el mateix camp. Així

$$F = G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}^2}$$

on  $R_{\oplus}$  és la distància de  $m$  al centre de la Terra i  $M_{\oplus}$  la massa de la Terra.



Si avaluem la quantitat

$$G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{(6,37 \cdot 10^6)^2} = 9,81 \text{ m/s}^2 \equiv g_0$$

llavors tenim

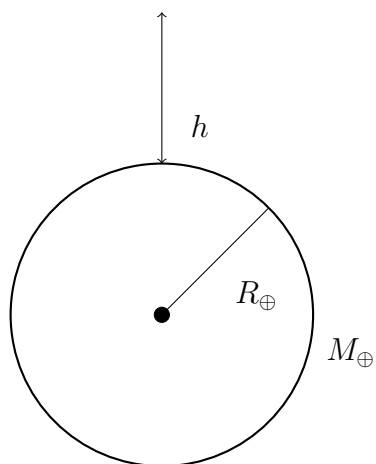
$$F = mg_0 = P$$

És a dir, la força amb que la Terra atrau un objecte de massa  $m$  coincideix amb el seu pes. Del resultat anterior se'n deriva una relació útil entre les constants que hi apareixen

$$GM_{\oplus} = g_0 R_{\oplus}^2$$

Per una altra banda, la variació de  $g$  amb l'altura sobre la superfície de la Terra es caracteritza per

$$g(h) = G \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2}$$



**Exemple 3**

Trobeu a quina altura sobre la superfície terrestre el camp gravitatori s'ha reduït  $n$  vegades,  $n \in \mathbb{N}$ .

Hem de resoldre l'equació

$$\frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} = \frac{g_0}{n}$$

d'on

$$\frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} = \frac{GM_{\oplus}}{nR_{\oplus}^2}$$

i

$$nR_{\oplus}^2 = (R_{\oplus} + h)^2$$

fent l'arrel quadrada a banda i banda

$$\pm\sqrt{n}R_{\oplus} = R_{\oplus} + h$$

finalment

$$h = \pm\sqrt{n}R_{\oplus} - R_{\oplus} = R_{\oplus}(\pm\sqrt{n} - 1)$$

on, per les condicions del problema, és clar que les solucions admissibles són

$$h = R_{\oplus}(\sqrt{n} - 1)$$

**3.4.2 Energia cinètica, potencial gravitatòria i mecànica**

Sigui un objecte de massa  $m$  que es troba en un tipus d'òrbita **qualsevol** al voltant d'un altre objecte de massa  $M$ . Definim l'energia cinètica de  $m$  com

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

i l'energia potencial gravitatòria com

$$E_{pg} = mV = -G\frac{Mm}{r}$$

L'energia mecànica és doncs

$$E_M = E_c + E_{pg} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$$

**Exemple 4**

Considereu un objecte de massa  $m = 300 \text{ kg}$  que es troba en un moment donat a una altura sobre la superfície terrestre  $h = 2 R_{\oplus}$ , allunyant-se en direcció radial amb velocitat  $v = 200 \text{ m/s}$ . Suposant conegudes les dades:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ,  $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ; es demana calcular per aquest instant:

1. La seva energia cinètica.
2. La seva energia potencial gravitatòria.
3. La seva energia mecànica.

En quant a l'energia cinètica, tenim

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}300 \cdot 200^2 = 6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

L'energia potencial gravitatòria es calcula com

$$E_{pg} = -\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 300}{6,37 \cdot 10^6 + 2 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = -6,25 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Llavors, l'energia mecànica val

$$E_M = E_c + E_{pg} = 6 \cdot 10^6 - 6,25 \cdot 10^6 = -2,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

**3.4.3 Òrbites circulars estables**

Les òrbites circulars estables d'un objecte de massa  $m$  al voltant d'un cos celeste de massa  $M$  i radi  $R$ , a una alçada  $h$  sobre la superfície d'aquest es poden trobar per aplicació de la *segona llei de Newton*

$$F = ma_c$$

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h}$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

És important destacar que aquesta velocitat no depèn de la massa de l'objecte en òrbita i que **disminueix** amb la distància al centre de forces.

Al calcular l'energia mecànica d'un objecte en una òrbita d'aquestes característiques tenim

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$$

Noteu que l'energia mecànica és negativa, com correspon als sistemes lligats. Cal insistir en que l'expressió obtinguda només és vàlida per les òrbites circulars estables. En qualsevol altre situació, caldrà usar l'expressió més general de l'apartat **3.4.2**

Noteu les relacions

$$E_M = -E_c$$

i

$$E_c = -\frac{1}{2}E_{pg} \quad (\text{Teorema del virial})$$

### Exemple 5

Considereu un objecte de massa  $m = 100 \text{ kg}$  que es troba en una òrbita circular estable a una altura sobre la superfície de la Terra  $h = 15R_\oplus$ . Es demana calcular l'energia cinètica, potencial gravitatòria i mecànica. Dades:  $R_\oplus = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Tenim

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + 15R_\oplus}} \right)^2 = \frac{100}{32} \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = \frac{100}{32} \frac{g_0 R_\oplus^2}{R_\oplus} = 1,95 \cdot 10^8 \text{ J}$$

En quant a l'energia potencial gravitatòria, del teorema del virial sabem que és

$$E_{pg} = -2E_c = -3,90 \cdot 10^8 \text{ J}$$

i finalment, per l'energia mecànica tenim

$$E_M = -E_c = -1,95 \cdot 10^8 \text{ J}$$

**Exemple 6**

Raoneu què passarà amb l'objecte de l'exemple anterior si la seva velocitat es redueix un 1%.

Tant és quina sigui la disminució de la velocitat. Si aquesta disminueix, l'òrbita circular estable que correspon a aquell valor estarà *per sobre* de l'òrbita actual, i per accedir-hi, hauria d'augmentar la seva energia potencial gravitatòria. Si no té mitjans autònoms per fer-ho, llavors caurà cap a la Terra seguint una trajectòria en espiral.

**3.4.4 Òrbites geoestacionàries**

Per determinats usos civils, comercials, científics o fins i tot militars, cal tenir un satèl·lit en una òrbita tal que estigui permanentment sobre un punt de la superfície terrestre. Aquestes òrbites s'anomenen geoestacionàries. Per poder caracteritzar-les hem de demanar que el període de translació del satèl·lit sigui el mateix que el de rotació terrestre, 24 hores. (En realitat aquestes òrbites només poden ser equatorials, tot i que es poden considerar òrbites que, tot i tenir el mateix període de revolució que la Terra, es trobin en un pla no equatorial. Aquestes òrbites s'anomenen *geosíncrones*). Com que les òrbites estacionàries són circulars, la relació entre l'espai recorregut en una volta, el temps i la velocitat s'escriu com

$$2\pi r = vT$$

on  $r = R_{\oplus} + h$  és el radi de l'òrbita,  $v$  la velocitat i  $T$  el període del moviment. Llavors, fent servir el resultat de l'apartat **3.3.3** per la velocitat de les òrbites circulars estables tenim,

$$2\pi(R_{\oplus} + h) = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} \cdot T$$

d'on

$$4\pi^2(R_{\oplus} + h)^2 = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} T^2$$

reordenant termes

$$(R_{\oplus} + h)^3 = \frac{GM_{\oplus} T^2}{4\pi^2}$$

i finalment

$$h = \sqrt[3]{\frac{GM_{\oplus} T^2}{4\pi^2}} - R_{\oplus}$$

Es deixa com a exercici calcular el valor numèric amb les dades proporcionades al llarg del tema.

És important adonar-se que les òrbites circulars estables que estiguin *per sota* de les geoestacionàries tindran una velocitat de translació més gran que la de la rotació terrestre, i que les que estan *per sobre*, tindran una velocitat menor que la de la rotació terrestre.

### Exemple 7

Ens trobem a la vora del mar i volem llançar una pedra horitzontalment a un metre sobre la superfície de l'aigua de forma que descrigui una òrbita circular estable al voltant de la Terra. Es demana calcular la velocitat a la que cal llançar-la. Compareu-la amb la velocitat de rotació terrestre.

Podeu suposar conegudes les dades:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ,  $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$

A partir de la fórmula

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

tenim

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 1}} = 7,91 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Per una altra banda, la velocitat de rotació terrestre es pot calcular a partir de  $2\pi R_{\oplus} = vT_{\oplus}$  d'on

$$v = \frac{2\pi R_{\oplus}}{T_{\oplus}} = \frac{2\pi \cdot 6,37 \cdot 10^6}{24 \cdot 3600} = 463,24 \text{ m/s}$$

de manera que la velocitat de l'òrbita és

$$\frac{7,91 \cdot 10^3}{463,24} \approx 17$$

vegades més gran que la de la rotació terrestre.



### 3.4.5 Canvis d'òrbita

En qualsevol exercici de canvi d'òrbita és convenient treballar mitjançant balanços d'energia. Vegem uns quants exemples.

#### Exemple 8

Calculeu el treball que s'ha de proporcionar a un satèl·lit de massa  $m$  que es troba en una òrbita circular estable a distància  $h_1$  sobre la superfície terrestre si el volem situar en una altra òrbita més llunyana a altura  $h_2$ .

El treball demanat coincideix amb la diferència d'energia mecànica del satèl·lit al canviar d'òrbita. Així

$$\begin{aligned}
 W_{h_1 \rightarrow h_2} &= -\frac{1}{2}G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h_2} - \left( -\frac{1}{2}G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h_1} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}GM_{\oplus} m \left( \frac{1}{R_{\oplus} + h_2} - \frac{1}{R_{\oplus} + h_1} \right) \\
 &= -\frac{1}{2}GM_{\oplus} m \frac{R_{\oplus} + h_1 - R_{\oplus} - h_2}{(R_{\oplus} + h_2)(R_{\oplus} + h_1)} \\
 &= -\frac{1}{2}GM_{\oplus} m \frac{h_1 - h_2}{(R_{\oplus} + h_2)(R_{\oplus} + h_1)} \\
 &= \frac{1}{2}GM_{\oplus} m \frac{h_2 - h_1}{(R_{\oplus} + h_2)(R_{\oplus} + h_1)}
 \end{aligned}$$

que com es pot veure fàcilment, és una quantitat positiva sempre que  $h_2 > h_1$ . És a dir, encara que l'energia potencial gravitatòria sempre pren valors negatius, quan ens allunyem del centre de forces, l'energia potencial gravitatòria augmenta. Recordem que el zero és a l'infinit.

**Exemple 9**

Calculeu el treball que cal fer per tal de posar en òrbita un satèl·lit des de la superfície terrestre fins a una altura  $h$ .

Suposarem sempre, si no es diu el contrari, que els objectes quan es llencen des de la superfície d'un planeta, només tenen energia potencial gravitatòria. És a dir, ignorarem l'energia cinètica que poguessin tenir per efecte de la rotació del planeta. Aquesta energia cinètica que estem ignorant depèn de la latitud del lloc de llançament, ja que a l'equador la velocitat de rotació és màxima, i als pols, zero. Així, per calcular el treball demanat calcularem la diferència d'energia mecànica entre el punt de destinació del satèl·lit, i el de partida. S'ha de tenir present que la destinació del satèl·lit **no** té perquè ser en general una òrbita circular estable, (en aquest exemple sí ho és). En definitiva, en el cas que ens ocupa podem escriure

$$\begin{aligned}
 W_{R_{\oplus} \rightarrow h} &= -\frac{1}{2}G \frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} - \left( -G \frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \right) \\
 &= -GM_{\oplus}m \left( \frac{1}{2(R_{\oplus} + h)} - \frac{1}{R_{\oplus}} \right) \\
 &= -GM_{\oplus}m \frac{R_{\oplus} - 2(R_{\oplus} + h)}{2(R_{\oplus} + h)R_{\oplus}} \\
 &= GM_{\oplus}m \frac{2(R_{\oplus} + h) - R_{\oplus}}{2(R_{\oplus} + h)R_{\oplus}} \\
 &= GM_{\oplus}m \frac{R_{\oplus} + 2h}{2(R_{\oplus} + h)R_{\oplus}}
 \end{aligned}$$

**3.4.6 Velocitat d'escapament**

Suposem que volem llançar un objecte de massa  $m$  des d'una altura  $h$  sobre la superfície terrestre amb prou velocitat perquè no torni mai més. Per calcular aquesta velocitat, anomenada velocitat d'escapament  $v_e$ , demanarem que l'energia mecànica valgui zero, que és la condició perquè deixi d'estar lligat a la terra mitjançant la interacció gravitatòria

$$0 = E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h}$$

d'on sobté fàcilment

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}}$$

En el cas que la velocitat d'escapament d'un objecte estelar arribi a assolir un valor tant gran com  $v_e = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \equiv c$ , llavors ni tan sols la llum pot sortir de la seva superfície i podem identificar-lo com un forat negre. Anomenem radi d'Schwarzschild ( $R_S$ ) d'un cos celest, al radi que hauria de tenir per tal que la seva velocitat d'escapament fos la de la llum, suposant que la seva massa no varia.

### Exemple 10

Calculeu el radi d'Schwarzschild de la Terra. Podeu considerar coneguda les dades:  $R_{\oplus} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ,  $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

Del resultat

$$c = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_S}}$$

tenim

$$R_S = \frac{2GM_{\oplus}}{c^2} = \frac{2g_0 R_{\oplus}^2}{c^2} = \frac{2 \cdot 9,81 \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2}{(3 \cdot 10^8)^2} = 8,884 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 9 \text{ mm}$$

Noteu que estem parlant de que tota la massa de la Terra estigui concentrada en una esfera de  $9 \text{ mm}$  de radi. Com es veu, els valors de la densitat que s'assoleixen en els forats negres són elevadíssims. La distorsió que produeixen al seu voltant en l'espai-temps és tant gran que, de l'estructura espai-temporal habitual que tenim a l'univers, tres dimensions espacials i una temporal, es passa a tres temporals i una espacial, un cop travessat l'horitzó d'esdeveniments del forat negre.

### 3.4.7 Tipus d'òrbita segons l'energia total

El valor de l'energia total d'un cos respecte un altre, que considerem el centre de forces, condiciona els diferents tipus d'òrbites que aquell pot descriure. Així, si  $E_M < 0$ , llavors el sistema està lligat mitjançant la interacció gravitatòria i les òrbites poden ser circulars, o el·líptiques. Si  $E_M = 0$  el sistema no està lligat i les òrbites són paràboles (aquest, *no* és el cas de trajectòries parabòliques estudiades a primer de batxillerat). Finalment, si  $E_M > 0$ , llavors el sistema tampoc està lligat mitjançant la interacció gravitatòria i ara les òrbites són hipèrboles.

### 3.4.8 Caiguda lliure

Els problemes de moviment vertical no es poden resoldre, tal i com s'ha vist al llarg del capítol, amb els resultats del curs de Física de primer de batxillerat. La raó fonamental és que per variacions d'altura prou grans, el fet que la  $g$  no sigui constant s'ha de tenir en compte. Aquest advertiment ha de quedar molt clar, especialment en els exercicis de caiguda lliure. De tota manera s'ha de fer servir el sentit comú, ja que és possible trobar exercicis en els que sí puguem fer servir la coneguda relació

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

#### Exemple 11

Un objecte de massa  $m$  cau amb velocitat  $v$  des d'una altura  $h$  sobre la superfície terrestre. Calculeu amb quina velocitat arriba al terra.

Suposem que la velocitat amb que arriba és  $v'$  i plantegem un balanç d'energia per resoldre la qüestió,

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} = \frac{1}{2}mv'^2 - G \frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus}}$$

d'on

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus} + h} + G \frac{M_{\oplus}m}{R_{\oplus}}$$

simplificant la massa  $m$  i aïllant  $v'$  tenim

$$mv'^2 = mv^2 - 2G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h} + 2G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus}}$$

$$v' = \sqrt{v^2 - 2GM_{\oplus} \left( \frac{1}{R_{\oplus} + h} - \frac{1}{R_{\oplus}} \right)}$$

$$v' = \sqrt{v^2 - 2GM_{\oplus} \frac{R_{\oplus} - R_{\oplus} - h}{(R_{\oplus} + h)R_{\oplus}}}$$

$$v' = \sqrt{v^2 + 2GM_{\oplus} \frac{h}{(R_{\oplus} + h)R_{\oplus}}}$$

### Exemple 12

Un objecte de massa  $m$  cau amb velocitat  $v = 10 \text{ m/s}$  des d'una altura  $h = 100 \text{ m}$  sobre la superfície terrestre. Calculeu amb quina velocitat arriba al terra.

Ara plantegem el balanç

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv'^2$$

d'on s'arriba fàcilment a un resultat conegut en cursos anteriors (estem suposant  $g = g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

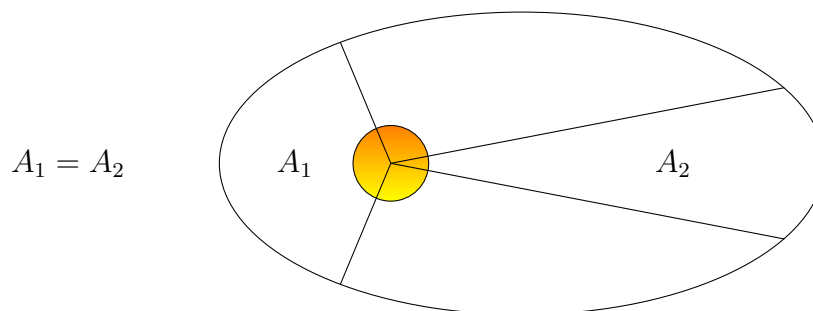
$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 100} = 45,39 \text{ m/s}$$

### 3.5 Les lleis de Kepler

Les lleis de Kepler van ser obtingudes *experimentalment* per *Johannes Kepler* uns 80 anys abans que *Newton* formulés la llei de gravitació universal i les seves lleis del moviment. Les lleis de Kepler milloren radicalment el model *heliocentrista* òrbites circulars de *Copèrnic*, vigent fins llavors i que presentava nombroses complicacions degut a que bàsicament, era incorrecte. Aquí convé recordar el criteri d'Occam "Pluralitas non est ponenda sine neccesitate".

Les tres lleis de Kepler són

1. Els planetes es mouen en òrbites el·líptiques al voltant del Sol amb aquest situat en un dels focus de l'el·lipse.
2. Les òrbites dels planetes són planes i la corda que uneix la posició d'un planeta i el Sol escombra àrees iguals en temps iguals.



3. La relació entre el període de translació dels planetes al voltant del Sol i la longitud del semieix major de l'el·lipse que descriu és

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}} r^3$$

on  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$  és l'anomenada constant universal de gravitació.

- **Conseqüència important** de la segona és que la velocitat dels planetes és més gran al *periheli* (punt de l'òrbita més proper al Sol) que l'*afeli* (punt més llunyà).
- La tercera llei es pot aplicar a qualsevol parell d'objectes de l'univers sotmesos a la força gravitatòria, només cal posar a l'expressió la massa del que es considera el centre de forces. Sovint considerarem les òrbites circulars i llavors  $r$  serà senzillament el radi de l'òrbita. Quan ens parlin de distàncies entre astres típicament pensarem en la distància entre els seus centres.

**Exemple 13**

Sabent que el període orbital de Júpiter ( $T_J$ ) és de 12 anys (terrestres), trobeu a quina distància del Sol es troba, en funció de la distància Terra-Sol ( $r_\oplus$ ).

Escrivim la tercera llei de Kepler per les parelles Terra-Sol, Júpiter-Sol, ja que en aquest cas el Sol és el centre de forces i considerem que la Terra i Júpiter orbiten al seu voltant

$$T_\oplus^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r_\oplus^3$$

$$T_J^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r_J^3$$

dividim les equacions d'abaix a dalt

$$\frac{T_J^2}{T_\oplus^2} = \frac{r_J^3}{r_\oplus^3}$$

d'on

$$r_J = r_\oplus \sqrt[3]{\frac{T_J^2}{T_\oplus^2}} = r_\oplus \sqrt[3]{\left(\frac{T_J}{T_\oplus}\right)^2} = r_\oplus \sqrt[3]{12^2} \approx 5,24 r_\oplus$$

Aquesta idea de dividir les equacions que representen la tercera llei de Kepler aplicada a dos objectes diferents (per exemple planetes), es fa servir molt. Cal però, tenir cura de no confondre la distància dels planetes al centre de forces amb el seu radi. També cal tenir clar *qui és* el centre de forces en cada exercici.

## 4 Camp elèctric

### 4.1 Introducció

La càrrega elèctrica és una propietat fonamental i característica de les partícules elementals que formen la matèria. De fet, tot matèria està formada fonamentalment de protons, neutrons i electrons i dues d'aquestes partícules tenen càrrega elèctrica. Molts objectes macroscòpics són elèctricament neutres i tenen càrrega total neta igual a zero. Si hi ha un excés d'electrons o de protons, llavors tindran càrrega negativa o positiva respectivament. Al sistema internacional la unitat de càrrega elèctrica és el *Coulomb*  $C$ , que es defineix com la quantitat de càrrega que transporta un corrent d'un ampere en un segon.

$$I = \frac{Q}{t}$$

Les càrregues elèctriques creen a l'espai del seu voltant una condició que anomenem *camp elèctric* i que es manifesta quan situem una altra càrrega de forma que apareix una força entre elles.

### 4.2 Camp elèctric creat per una càrrega puntual

Sigui una càrrega  $q$  situada en un punt  $P$  del pla cartesià, llavors, el camp que crea en un altre punt  $P'$  es pot calcular com

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

amb  $\vec{r} = \overrightarrow{PP'}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$ , la permitivitat o *constant dielèctrica* del buit i  $\epsilon_r$  permitivitat relativa del medi. Per calcular el mòdul del camp elèctric fem

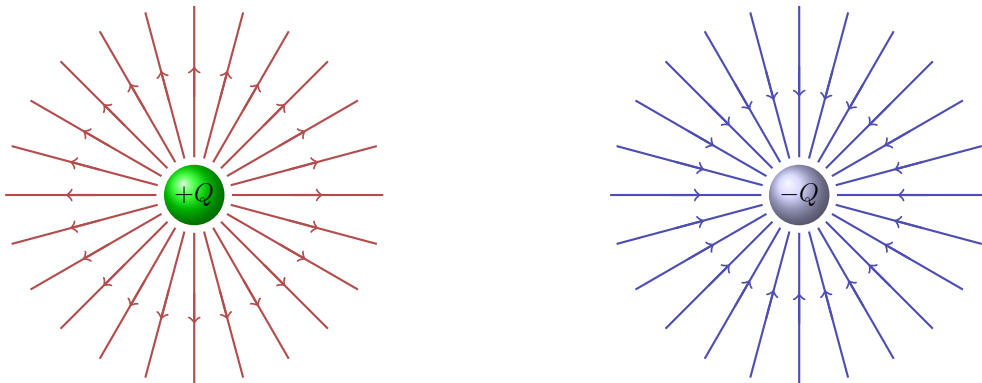
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

de forma que queda

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2} |\hat{r}|$$

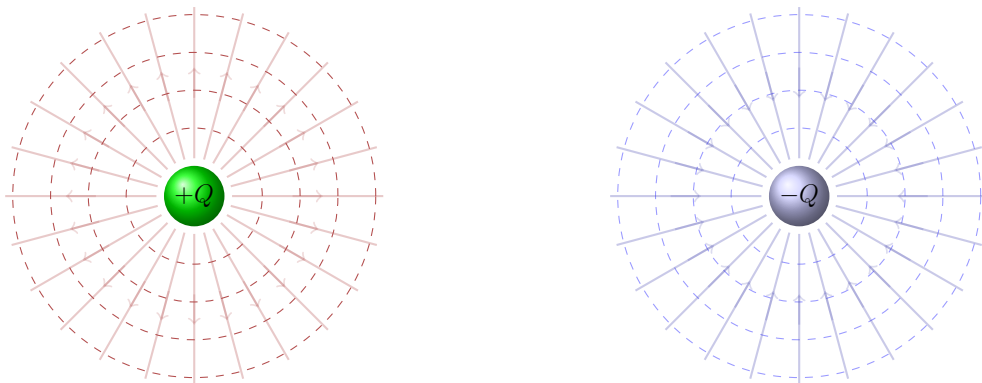
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r^2}$$





El camp elèctric és d'abast infinit, *surt* de les càrregues positives i *entra* en les negatives. Les línies de camp no es poden tallar mai, ja que llavors en aquell punt hi hauria dos valors diferents del camp elèctric, cosa que és impossible.

Les *superfícies equipotencials* tallen perpendicularment les línies de camp en tot punt. En dues dimensions són corbes tancades similars a les *corbes de nivell* d'un mapa topogràfic. Les superfícies equipotencials tampoc es poden tallar en cap punt per la mateixa raó que les línies de camp elèctric no ho podien fer.



### 4.3 Principi de superposició

Si tenim  $n$  càrregues situades en punts diferents, llavors el camp total que creen sobre un determinat punt el calcularem com la suma **vectorial** dels camps elèctrics individuals, és a dir

$$\vec{E}_{total} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Cal notar que al ser el camp elèctric un vector, no es pot aplicar el principi de superposició amb els mòduls dels camps elèctric creats per cada càrrega individual.

### Exemple 1

Calculeu el camp elèctric que creen al punt  $A = (6, 15)$  dues càrregues  $q_1 = 2 \text{ nC}$  i  $q_2 = -5 \text{ nC}$ , situades als punts  $P_1 = (1, 3)$  i  $P_2 = (-6, 10)$ .

Per calcular el camp total  $\vec{E}_A$  farem

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^3} \vec{r}_2$$

on  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1A} = (5, 12)$  i  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2A} = (12, 5)$ , llavors

$$r_1 \equiv |\vec{r}_1| = |\overrightarrow{P_1A}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

i de forma semblant

$$r_2 \equiv |\vec{r}_2| = |\overrightarrow{P_2A}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \vec{E}_A &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{13^3} (5, 12) - 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{13^3} (12, 5) \\ &= \frac{9}{13^3} \left( 2(5, 12) - 5(12, 5) \right) \\ &= (-0.205, -0.004) \text{ N/C} \end{aligned}$$

## 4.4 Potencial electrostàtic

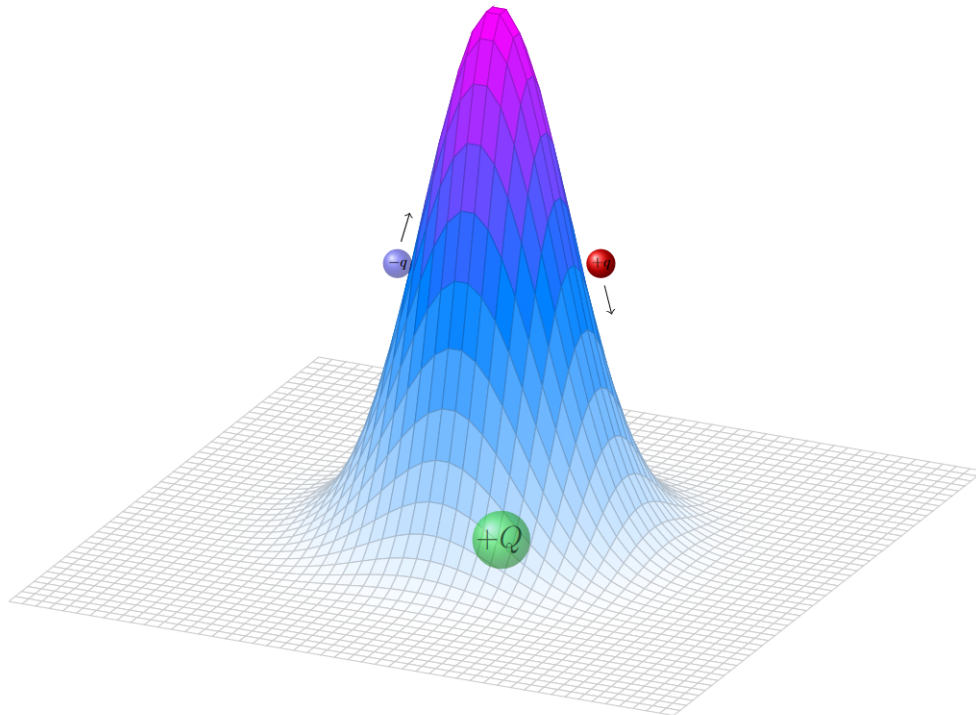
Per calcular el potencial que crea una càrrega  $q$  situada en un punt  $P$  del pla cartesià sobre un altre punt  $P'$ , farem servir el següent resultat

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q}{r}$$

on s'ha triat l'origen de potencial a infinit ( $V_\infty = 0$ ) i  $\vec{r} = \overrightarrow{PP'}$ . Notem que el potencial hereta el signe de la càrrega que el crea i que es tracta d'un escalar. D'aquesta manera, per calcular el potencial que crea un sistema de càrregues en un cert punt, n'hi haurà prou de sumar els potencials (escalars) que crea cadascuna individualment.

#### 4.4.1 Pous de potencial

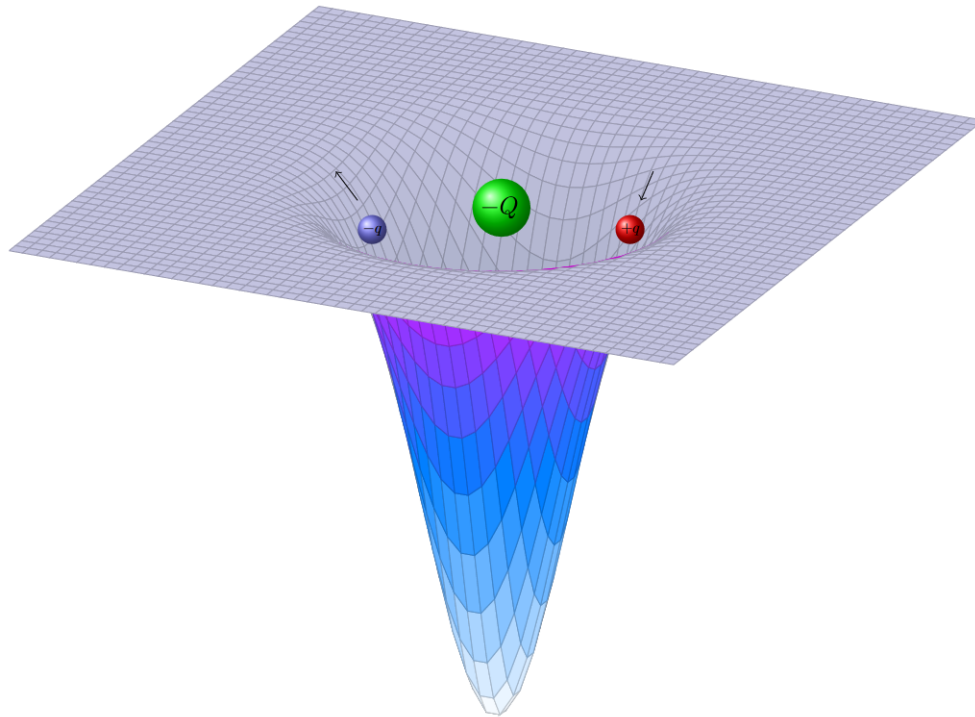
Podem representar el potencial electrostàtic que crea una càrrega positiva  $+Q$  amb ajut de la següent figura, on s'ha representat la càrrega que crea el potencial en color verd.



El potencial val  $+\infty$  al punt de l'espai on és la càrrega  $+Q$  i disminueix cap a zero al seu voltant. Una càrrega de prova<sup>†</sup> positiva  $+q$  (assenyalada en color vermell) que estigués a prop, es mouria espontàniament cap a potencials més baixos, allunyant-se de  $+Q$ . És com si una pilota estigués en el pendent d'una muntanya, cauria cap avall. Una altra càrrega de prova negativa  $-q$  (representada en color blau) es mouria espontàniament *pendent amunt*, acostant-se a  $+Q$ . En els dos casos l'energia potencial del parell de càrregues  $+Q/+q$  i  $+Q/-q$  disminueix.

<sup>†</sup>Anomenem *càrrega de prova* a una càrrega que té un valor massa petit per alterar el camp i potencial que crea una altra.

En el cas d'una càrrega negativa  $-Q$ , el perfil del potencial que crea es pot representar de la següent manera.



És infinit ( $-\infty$ ) al punt on es troba  $-Q$  i tendeix a zero al allunyar-se d'ella. Una càrrega de prova  $+q$  *cauria* al pou de potencial, cap a potencials més baixos. Una càrrega de prova  $-q$  *pujaria* per les parets del pou allunyant-se de la càrrega  $-Q$ .

Amb això veiem que independentment del signe de la càrrega que crea el potencial electrostàtic, les càrregues de prova positives es comporten com ho faria una pilota de massa  $m$  rodolant per un pendent o pou avall, sempre movent-se cap a potencials més baixos. En aquest sentit, el comportament de les càrregues de prova negatives trenquen aquest paral·lelisme amb el camp gravitatori, ja que sempre es mouen *pendent amunt* cap a potencials més elevats.

**Exemple 2**

Calculeu el potencial electrostàtic que creen les càrregues de l'exemple anterior en el punt  $A$ .

Ara és

$$\begin{aligned} V_A = V_1 + V_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{13} - 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{13} \\ &= \frac{9}{13}(2 - 5) \\ &= -2,077 \text{ J/C} \end{aligned}$$

**4.5 Energia potencial electrostàtica**

L'energia potencial electrostàtica que adquireix una càrrega  $Q$  situada en un punt on existeix un potencial  $V$  es calcula com

$$E_p = Q \cdot V$$

i coincideix amb el treball que s'ha de fer per dur-la des de l'infinit fins el punt en qüestió. En general, per calcular el treball que cal fer per moure una càrrega  $Q$  d'un punt  $A$  a un punt  $B$  en el si d'un camp elèctric farem

$$W_{A \rightarrow B} = Q(V_B - V_A)$$

**4.6 Energia de configuració d'un sistema de càrregues**

Per calcular el treball que cal fer per obtenir una determinada configuració de càrregues el que farem és calcular el treball necessari per portar-les d'una en una des de l'infinit fins el seu lloc de destí. Aquest treball no depèn de l'ordre escollit.

**Exemple 3**

Suposem que tenim tres càrregues elèctriques  $q_1 = 2 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -3 \text{ nC}$  i  $q_3 = 5 \text{ nC}$  situades als punts  $P_1 = (1, 2)$ ,  $P_2 = (4, 7)$  i  $P_3 = (-5, 8)$  respectivament. Es demana calcular l'energia associada a tal configuració.

Calculem el treball que cal fer per portar cada càrrega des de l'infinit fins al punt de destinació de cadascuna.

Per la primera càrrega aquest treball val

$$W_1 = W_{\infty \rightarrow P_1} = q_1(V_{P_1} - V_{\infty}) = 2 \cdot 10^{-9}(0 - 0) = 0 \text{ J}$$

ja que abans que  $q_1$  arribi al seu punt de destí, no hi ha cap altre càrrega present i per tant, el potencial electrostàtic al punt  $P_1$  val zero. Noteu que estem ignorant expressament el potencial electrostàtic que la mateixa  $q_1$  pogués crear a  $P_1$  durant el seu viatge des de l'infinit fins a  $P_1$ . Si el volguéssim tenir en compte hauríem de resoldre l'exercici en el context de *l'electrodinàmica*, tema que queda fora de l'abast d'aquest curs. També, recordem que  $V_{\infty} = 0$  per definició.

En quant a la segona càrrega, quan aquesta arribi a  $P_2$ , sí sentirà els efectes del potencial que crea  $q_1$  en aquest punt, perquè  $q_1$  ja està al seu lloc quan  $q_2$  arriba a  $P_2$ . Llavors

$$W_2 = W_{\infty \rightarrow P_2} = q_2(V_{P_2} - V_{\infty})$$

Necessitem doncs calcular el potencial que crea  $q_1$  en  $P_2$ , que anomenarem  $V_{P_2}^{q_1}$ . Comencem calculant  $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, 5)$ , amb mòdul  $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ , aleshores

$$V_{P_2}^{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{18}{\sqrt{34}} \text{ V}$$

i

$$W_2 = -3 \cdot 10^{-9} \left( \frac{18}{\sqrt{34}} - 0 \right) = -9,261 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Ara hem de portar  $q_3$  fins a la seva destinació. Per calcular el treball que cal fer-ho, hem de calcular el potencial electrostàtic present en  $P_3$  i creat ara tant per  $q_1$  com per  $q_2$ .

Necessitem els vectors  $\overrightarrow{P_1P_3} = (-6, 6)$  i  $\overrightarrow{P_2P_3} = (-9, 1)$ , amb mòduls  $|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{72}$  i  $|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{82}$ . Amb la mateixa notació que abans tenim

$$W_3 = W_{\infty \rightarrow P_3} = q_3(V_{P_3} - V_{\infty})$$

a banda, ara  $V_{P_3}$  té dues contribucions, tal com hem dit abans, i és

$$V_{P_3} = V_{P_3}^{q_1} + V_{P_3}^{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{72}} - 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-9}}{\sqrt{82}}$$

$$V_{P_3} = -0,86 \text{ V}$$

i finalment

$$W_3 = W_{\infty \rightarrow P_3} = q_3(V_{P_3} - V_{\infty}) = 5 \cdot 10^{-9}(-0,86 - 0) = -4,3 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

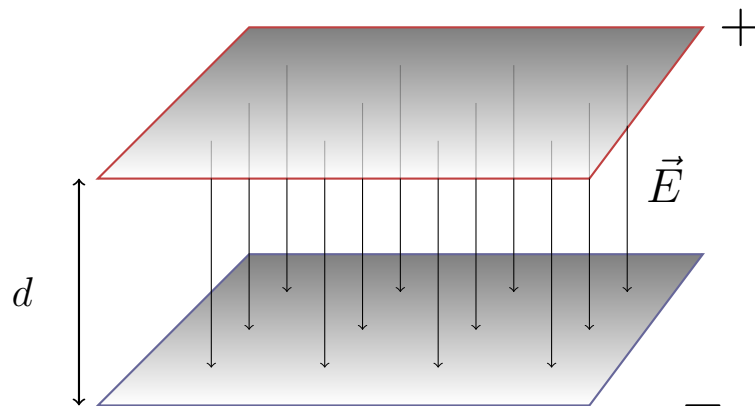
El treball total doncs serà

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 0 - 9,261 \cdot 10^{-9} - 4,3 \cdot 10^{-9} = -1,3561 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

i correspon a l'energia de configuració del sistema de càrregues.

## 4.7 Camps elèctrics uniformes

Fins ara hem descrit el camp que creen càrregues puntuals. Aquest camp tenia direcció radial i sortia de les càrregues positives i entrava en les negatives. Els camps elèctrics uniformes són una idealització on suposarem que les línies de camp elèctric són paral·leles i a més, el camp val el mateix en tots els punts. Això es pot aconseguir en part, per exemple, disposant dues plaques conductores paral·leles. Si la distància entre plaques és prou petita comparada amb l'àrea de les plaques, es pot considerar que el camp que es crea entre elles (un cop polaritzades adequadament) és un camp uniforme.



Hi ha efectes frontera a les vores de les plaques, perquè en aquestes zones el camp es radial, però en els exercicis s'ignora aquest fet habitualment.

En aquestes condicions la relació entre el potencial que polaritza les plaques ( $V$ ), el mòdul del camp elèctric uniforme creat ( $E$ ) i la distància entre les plaques ( $d$ ) s'escriu com

$$V = Ed$$

## 4.8 Moviment de càrregues en condensadors

La disposició de dues plaques conductores paral·leles constitueix el que s'anomena condensador, i constitueix un dispositiu capaç d'emmagatzemar càrrega elèctrica. El moviment de càrregues al seu interior es pot descriure amb dues situacions diferents.

### 4.8.1 Moviment paral·lel al camp elèctric

En aquest cas el moviment és perpendicular a les plaques i les qüestions plantejades al voltant d'aquesta situació s'acostumen a resoldre mitjançant balanços d'energia.

#### Exemple 4

Es deixa anar un electró des de la placa negativa d'un condensador polaritzat amb  $15\text{ V}$ . Es demana calcular la velocitat amb que arriba a la placa positiva si aquesta es troba a una distància de  $10^{-5}\text{ m}$  de la negativa. Raoneu què succeeix si la distància entre plaques es duplica. Podeu suposar coneguts  $m_{e^-} = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$  i  $q_{e^-} = -1,602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$ .

Plantejarem un balanç d'energia entre el treball que fa el camp elèctric present al condensador sobre el electró i l'energia cinètica que guanya (noteu que escriurem el valor absolut de la càrrega al balanç)

$$q_e V = \frac{1}{2} m v^2$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{2q_e V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 15}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 2,3 \cdot 10^6\text{ m/s}.$$

Com es veu, la distància no influeix en el càlcul de la velocitat. Sí que té influència en l'acceleració, ja que el camp depèn de la distància entre plaques. Per tant, si la distància es duplica, la velocitat d'arribada seria la mateixa però ho faria amb la meitat d'acceleració.



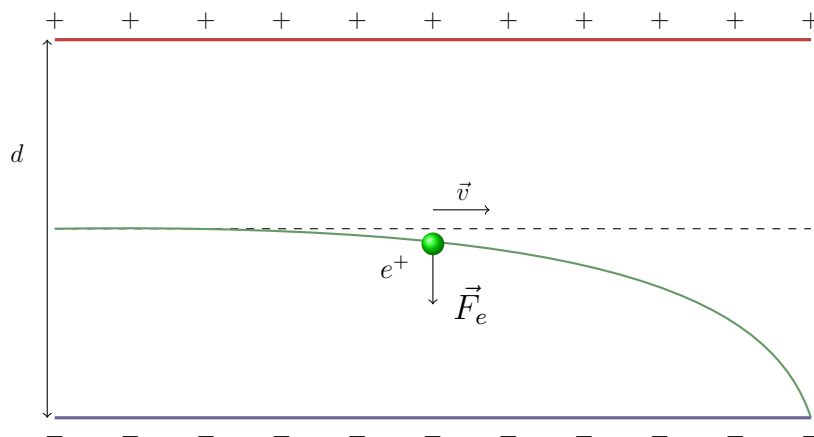
### 4.8.2 Moviment perpendicular al camp elèctric

Ara la trajectòria de les càrregues és parabòlica. Vegem un exemple.

#### Exemple 4

Un positró entra amb velocitat  $v = 10^3 \text{ m/s}$  en un condensador en direcció paral·lela a les plaques i per la seva línia mitja. Es demana trobar les equacions del moviment i l'equació de la trajectòria sabent que les plaques estan connectades a una bateria de  $20 \text{ V}$  i es troben separades una distància  $d = 1 \text{ mm}$ . Considereu conegudes les dades  $m_{e^+} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  i  $q_{e^+} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Si suposem que la placa superior és positiva i la inferior negativa, podem representar la situació com



Prenent l'origen d'altura a la placa negativa les equacions del moviment s'escriuen

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

amb

$$a = \frac{F_e}{m_{e^+}} = \frac{Eq_{e^+}}{m_{e^+}} = \frac{Vq_{e^+}}{dm_{e^+}}$$

ara, podem reescriure les equacions del moviment com

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{Vq_{e^+}}{dm_{e^+}} t^2 \end{cases}$$

i aïllant el temps de les dues equacions, obtenim l'equació de la trajectòria

$$y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{Vq_{e+}}{dm_{e+}} \left(\frac{x}{v}\right)^2$$

o també

$$y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{Vq_{e+}}{dm_{e+}v^2} x^2$$

finalment, fent servir els valors de l'enunciat

$$y = 5 \cdot 10^{-4} - 1,76 \cdot 10^9 x^2$$

que és l'equació d'una paràbola amb les *banyes* cap avall.

#### Exemple 4

A partir de l'exemple anterior, calculeu el temps que tarda la càrrega a arribar a l'altura de la placa negativa. Raoneu a més si impactarà amb ella sabent que la longitud de les plaques és de 20 mm.

Demanarem que sigui  $y = 0$  a l'equació

$$y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{Vq_{e+}}{dm_{e+}} t^2$$

per obtenir

$$t = \sqrt{\frac{\frac{d}{2}}{\frac{Vq_{e+}}{2dm_{e+}}}} = \sqrt{\frac{d^2 m_{e+}}{Vq_{e+}}} = 5,33 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

en aquest temps, el positró recorre una distància

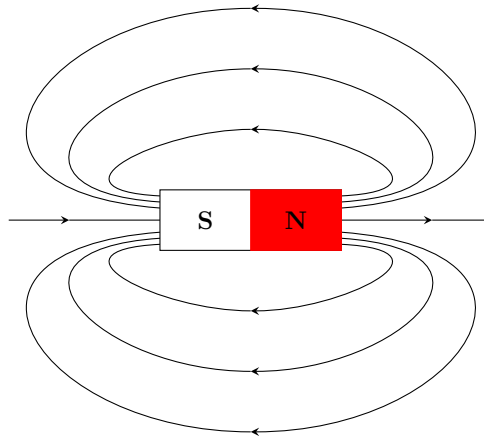
$$x = vt = 10^3 \cdot 5,33 \cdot 10^{-10} = 5,33 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

és a dir que impactarà a la placa negativa encara dins el condensador.

## 5 Camp magnètic

### 5.1 Introducció

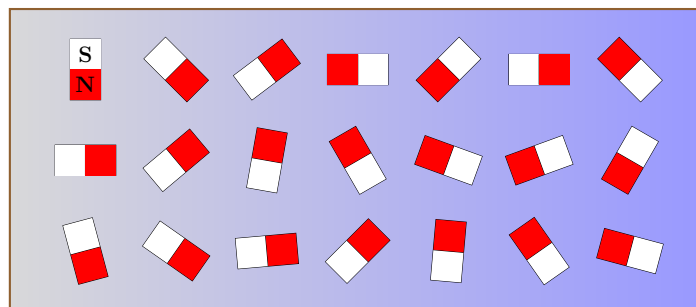
L'origen dels camps magnètics es troba en el moviment de càrregues. És a dir, tota càrrega en moviment genera un camp magnètic al seu voltant. La representació típica del camp magnètic al voltant d'un imant és



Per conveni acceptem que les línies de camp surten del pol nord i entren en el pol sud. El camp magnètic  $\vec{B}$  és sempre tangent a les línies de camp representades. Les línies de camp magnètic sempre es tanquen, a diferència de les línies de camp elèctric. Això és degut a que no existeixen monopols magnètics, és a dir, si dividim l'imant per la meitat, amb la idea d'obtenir un pol nord i un pol sud, ens trobarem que cada pol es converteix en un altre imant amb pols nord i sud.

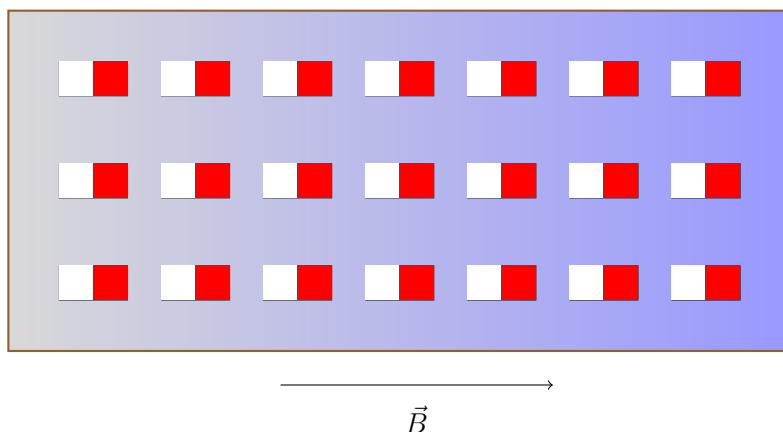
#### 5.1.1 Comportament de la matèria davant el magnetisme

Tots els materials es poden considerar compostos de petits imants, que en absència de camps magnètics externs, en general estan orientats a l'atzar



i la majoria d'ells responen a l'aplicació d'un camp magnètic  $\vec{B}$  extern produint la seva pròpia magnetització, i per tant, el seu propi camp magnètic al seu interior. Segons el seu comportament magnètic els materials es poden classificar en:

**Ferromagnètics:** produeixen una magnetització, (que pot romandre al desactivar el camp extern), en el mateix sentit que el camp extern, de forma que fan augmentar el valor total del camp en el seu interior. Per exemple, el  $\mu$ -metall pot multiplicar per un factor  $10^5$  el camp aplicat. Això es degut a la seva alta *permeabilitat magnètica* i el fa molt útil com a *escut magnètic* ja que condueix el camp extern pel seu interior, aconseguint així un efecte d'apantallament.



**Paramagnètics:** produeixen una magnetització lleu en el seu interior en el mateix sentit que el camp aplicat. A diferència dels materials ferromagnètics, perden la magnetització al eliminar el camp extern. El moviment tèrmic interior és suficient per desordenar els àtoms que s'haguessin alineat amb el camp extern.

**Diamagnètics:** produeixen una magnetització en el seu interior que s'oposa al camp aplicat extern. Tots els materials són diamagnètics. Aquesta propietat queda "amagada" quan un material és paramagnètic o ferromagnètic, ja que aquests efectes són més potents que el diamagnetisme i dominen sobre aquest.

## 5.2 Llei de Lorentz

La llei de Lorentz dona idea de la força que sent una partícula amb càrrega  $q$  que es mou amb velocitat  $\vec{v}$  en el si d'un camp magnètic  $\vec{B}$

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

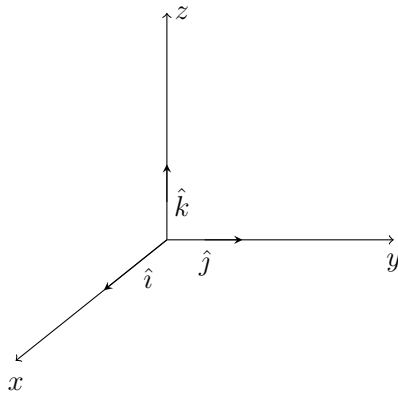
amb mòdul

$$|\vec{F}| = |q||\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$$

$$F = |q|vB \sin \alpha$$

on  $|q|$  és el valor absolut de la càrrega elèctrica, i  $\alpha$  l'angle que formen la velocitat i el camp magnètic. La direcció de la força és perpendicular al pla que formen  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  i el sentit es pot trobar recordant les relacions de commutació dels vectors unitaris de la base canònica a  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{cases}$$



També cal recordar que el producte vectorial de dos vectors *anticommuta*, és a dir

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}$$

Conseqüència de la forma que adopta la Llei de Lorentz és que la força que actua sobre la càrrega elèctrica és sempre perpendicular a la seva velocitat i per tant, el camp magnètic *no fa treball*.

De l'expressió de la llei de Lorentz es pot definir la unitat de camp magnètic, Tesla

$$[B] = \frac{[F]}{[q] \cdot [v]} = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} \equiv T$$

una altra unitat que no és del Sistema Internacional però que s'utilitza sovint és el Gauss,  $G$

$$1 T = 10^4 G$$

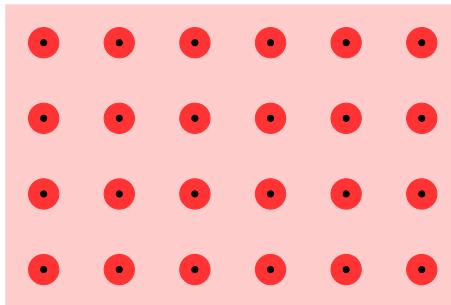
La expressió més general de la llei de Lorentz quan hi ha presència de camps magnètics i elèctrics al mateix temps és

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

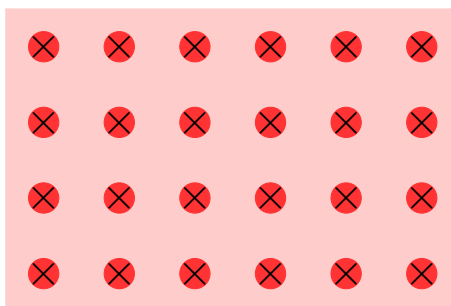
### 5.3 Moviment de partícules carregades al sí d'un camp magnètic

Al ser la força que apareix sobre una càrrega en presència d'un camp magnètic resultat del producte vectorial de dos vectors, necessitaríem una representació en tres dimensions en la majoria de situacions. Sovint, per simplificar aquesta situació, es pren el camp magnètic perpendicular al paper, de forma que la velocitat de les partícules carregades en sigui perpendicular. Sota aquestes condicions, la trajectòria de les càrregues queda confinada al pla del paper, i la seva descripció és més senzilla.

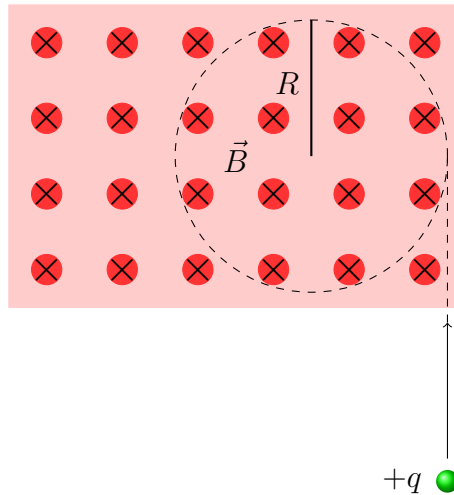
Així, per conveni, si el camp magnètic (per extensió, qualsevol camp vectorial) surt del paper, el representarem de la següent manera



i si és entrant al paper, ho representarem així



Ara, considerem una càrrega que es dirigeix amb velocitat  $v$  cap a una regió on existeix un camp magnètic  $\vec{B}$ , perpendicular a la velocitat de la càrrega i entrant al paper tal com es representa a la figura



Si escrivim la segona llei de Newton

$$F = ma$$

El mòdul de la força es pot calcular a partir de la llei de Lorentz

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

que en mòdul s'escriu

$$F = |q|vB \sin \alpha$$

i finalment

$$F = qvB$$

ja que  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  són perpendiculars.

Llavors

$$F = ma \longrightarrow qvb = ma$$

d'on

$$qvb = m \frac{v^2}{R}$$

i

$$R = \frac{mv}{qB}$$

El sentit de la força magnètica sobre la càrrega es troba considerant el producte vectorial  $\vec{v} \times \vec{B}$  i les relacions de commutació dels vectors de la base

canònica. Pot ser interessant trobar el temps que tarda a donar cada volta, és a dir el període. Tenim per una banda

$$2\pi R = vT$$

d'on

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cancel{R}}{\frac{\cancel{R}qB}{m}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

En el cas que la velocitat de la partícula i el camp magnètic formessin un angle no perpendicular, el moviment d'aquesta seria helicoidal, ja que podem descompondre la velocitat en una component paral·lela al camp (que no es veu afectada) i una perpendicular (que obliga la càrrega a descriure cercles).

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

La combinació d'ambdues defineix la trajectòria abans descrita. Aquesta situació s'aprofita, per exemple, en les anomenades ampolles magnètiques, que fan servir un camp magnètic deformat adequadament per tal de confinar un plasma<sup>†</sup> al seu interior i poder tenir-lo a temperatures que no suportarien les parets d'un recipient convencional.

---

<sup>†</sup>Un plasma és un gas ionitzat i per tant, sensible a camps elèctrics i magnètics degut a les càrregues que conté.

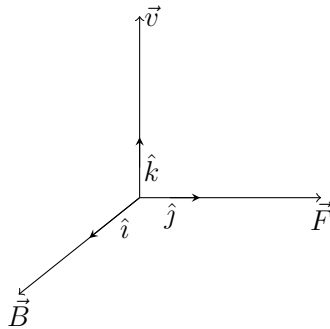


**Exemple 1**

Un positró es mou amb velocitat  $\vec{v} = 100 \hat{k} \text{ m/s}$  quan s'endinsa en una regió de l'espai sotmesa a un camp magnètic  $\vec{B} = 200 \hat{i} \text{ T}$ . Es demana calcular la força que sent i el radi del moviment circular que descriurà. Discutiu a més, què canviaria en el cas que fos un electró enlloc d'un positró. I si fos un protó? Podeu considerar conegudes les dades:  $m_{e^+} = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  i  $q_{e^+} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

De la llei de Lorentz tenim

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 1,602 \cdot 10^{-19} (100 \hat{k}) \times (200 \hat{i}) = 3,2 \cdot 10^{-15} (\hat{k} \times \hat{i}) = 3,2 \cdot 10^{-15} \hat{j} \text{ N}$$



i en quant al radi de la trajectòria

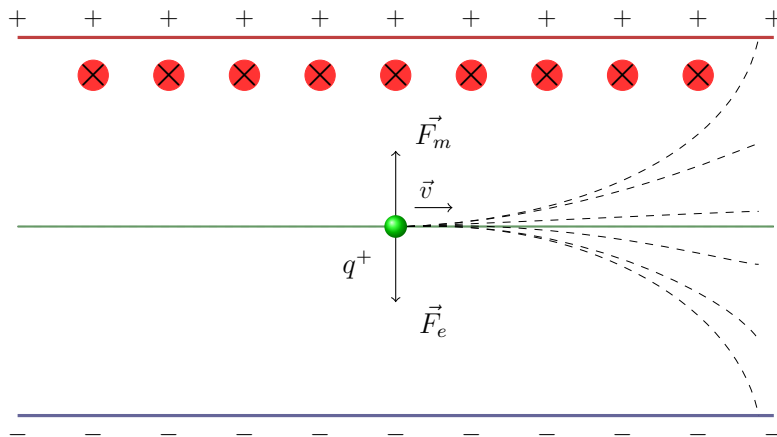
$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 100}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 200} = 2,84 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Donat que electró i positró tenen la mateixa massa i càrregues iguals però de diferent signe, per un electró el valor de la força seria el mateix però el sentit el donat pel vector  $-\hat{j}$ . El radi de gir seria el mateix que el del positró.

En el cas del protó, la força seria exactament la mateixa que la calculada pel positró, ja que protó i positró tenen la mateixa càrrega, en canvi el radi seria més gran, ja que la massa del protó és aproximadament 1800 vegades la del positró i electró.

## 5.4 Aplicacions (I). El selector de velocitats

Per determinades aplicacions es necessita obtenir un feix d'ions tal que tots ells tinguin la mateixa velocitat. Per tal d'aconseguir-ho es fa servir l'anomenat *selector de velocitats*. Aquest dispositiu consisteix en un camp magnètic i un elèctric creuats, de forma que les forces sobre els ions són oposades.



Només les partícules del feix que pateixen la mateixa força elèctrica i magnètica, passen el selector sense desviar-se. És a dir, aquelles per les quals es compleix

$$F_e = F_m \longrightarrow qE = qvB \longrightarrow v = \frac{E}{B}$$

Com  $E$  i  $B$  es poden controlar externament, podem “triar” la velocitat que volem de les partícules emergents. Cal tenir en compte que aquestes partícules segurament tindran masses diferents. Per poder destriar-les posteriorment es pot fer servir l’anomenat espectròmetre de masses, que s’explica en la següent secció.

### Exemple 2

Un selector de velocitats deixa passar ions de  $He^+$  amb una velocitat de  $3,00 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ , que no es desvien de la trajectòria rectilínia inicial. El camp elèctric té un mòdul de  $2,00 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ . Sabent que el camp magnètic és perpendicular al pla del paper i entra en ell, indiqueu, d’una manera justificada, la direcció i el sentit del camp elèctric i de la força magnètica que actua sobre un ió  $He^+$  amb una càrrega d’ $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Calculeu també el mòdul del camp magnètic en aquest dispositiu.

Si suposem que les partícules entren d’esquerra a dreta, llavors el camp magnètic fa una força cap a dalt (es comprova) i el camp elèctric l’ha de fer cap a baix. Com que les càrregues que entren al selector són positives, voldrem que la placa superior tingui càrrega positiva i la inferior, negativa.

Per les partícules que no es desvien, es compleix

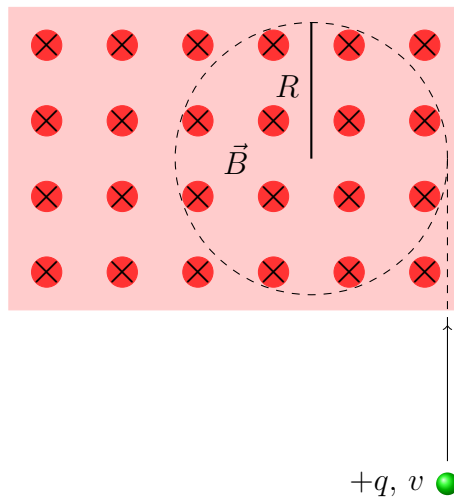
$$F_e = F_m \longrightarrow qE = qvB$$

llavors

$$B = \frac{E}{v} = \frac{2,00 \cdot 10^5}{3,00 \cdot 10^5} = 0,67 \text{ T}$$

## 5.5 Aplicacions (II). L'espectròmetre de masses

Tal com hem vist abans, podem arribar a obtenir un feix d'ions amb la mateixa càrrega i velocitat. Per poder separar-los en funció de la seva massa, farem passar el feix per un espectròmetre de masses.



Recordem que d'aquesta situació es podia deduir que

$$R = \frac{mv}{qB}$$

llavors, fixats els valor de  $q$ ,  $v$ ,  $B$ , resulta que el radi que descriuen les partícules que entren en el selector depèn només de la seva massa, de manera que podem separar-les per aquest criteri.

**Exemple 3**

Els ions  $He^+$  de l'exemple anterior entren en un espectròmetre de masses que fa servir un camp magnètic de mòdul  $B = 2\text{ T}$ . Calculeu el radi de l'òrbita que descriuen aquests ions. Supposeu que la seva massa és de  $6,68 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ .

La força magnètica sobre els ions els farà descriure una trajectòria circular. Aplicant la segona llei de Newton, tenim

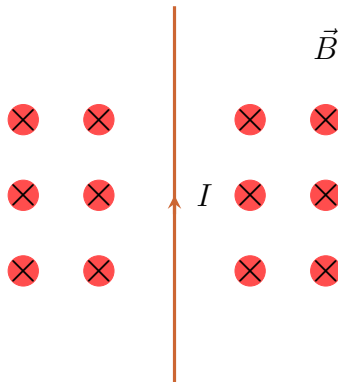
$$F_c = ma_c \longrightarrow qvB = m \frac{v^2}{R}$$

d'on

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{6,68 \cdot 10^{-27} \cdot 3,20 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2} = 6,7 \cdot 10^{-3}\text{ m}$$

**5.6 Efecte d'un camp magnètic sobre un fil de corrent**

Considerem la següent situació



en la que un fil de corrent es troba sotmès a un camp magnètic. El mòdul de la força que el camp fa sobre les càrregues que es mouen al llarg del fil val

$$F = qvB = ItvB = IlB$$

on s'ha considerat que en un temps  $t$  les càrregues han recorregut una distància  $l$  movent-se a velocitat  $v$ . La direcció i sentit de la força es poden trobar fent servir consideracions ja conegudes i resulta ser perpendicular al fil i al camp i dirigida cap a l'esquerra.

Podem reescriure el resultat anterior com

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

#### Exemple 4

Considereu un fil de corrent de longitud  $\vec{l} = 50 \hat{j} \text{ cm}$  i massa  $m = 100 \text{ g}$  pel qual passa una intensitat  $I = 2 \text{ A}$  i es troba sotmés a l'acció d'un camp magnètic  $\vec{B} = -9,8 \hat{i} \text{ T}$ . Es demana calcular la massa  $M$  extra que pot suportar el fil mantenint-se en equilibri.

Com hem vist, la força que actua sobre un fil de corrent sotmés a un camp magnètic val

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} = 2 \cdot (0,5 \hat{j}) \times (-9,8 \hat{i}) = -2 \cdot 0,5 \cdot 9,8 (\hat{j} \times \hat{i}) = 9,8 \hat{k} \text{ N}$$

ja que és

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$

llavors, la força magnètica va dirigida cap adalt, equilibrant el pes del fil i finalment

$$(m + M)g = IlB \longrightarrow M = \frac{IlB}{g} - m = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 9,8}{9,8} - 0,1 = 0,9 \text{ kg}$$

## 5.7 Camp magnètic creat per càrregues i corrents

### 5.7.1 Camp creat per una càrrega puntual en moviment

Les càrregues en moviment creen un camp magnètic. Sigui una càrrega situada en el punt  $P_1$ , que es mou amb velocitat  $\vec{v}$ . El camp magnètic que crea aquesta càrrega en un punt  $P_2$  es calcula com

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{v} \times \overrightarrow{P_1 P_2}}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|^3} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

amb  $\vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}$  i  $\mu$  la *permeabilitat magnètica* del medi que s'expressa en funció de la permeabilitat en el buit  $\mu_0$  i  $\mu_r$  la *permeabilitat relativa* del medi. És a dir

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

amb

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

Si no es diu res, en la resolució dels exemples suposarem  $\mu_r = 1$ .

### Exemple 5

Calculeu el camp magnètic que crea en el punt  $P_2 = (2, 3, -4)$  un electró que es mou amb velocitat  $\vec{v} = 3 \cdot 10^6 \hat{i} \text{ m/s}$  quan es troba al punt  $P_1 = (-1, 2, 7)$ .

Fent servir l'expressió que acabem de presentar

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

trobem primer

$$\vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (3, 1, -11) \longrightarrow |\vec{r}| = \sqrt{131} \text{ m}$$

ara podem calcular

$$\vec{v} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -11 \end{vmatrix} = 33 \cdot 10^6 \hat{j} + 3 \cdot 10^6 \hat{k} = (0, 33 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6)$$

i finalment

$$\vec{B} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{4\pi} \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} (0, 33 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^6)}{(\sqrt{131})^3} = (0, -3.52 \cdot 10^{-22}, -3.20 \cdot 10^{-23})$$

### 5.7.2 Camp creat per un fil de corrent. Llei de Biot-Savart

En el cas d'un fil de corrent, no tenim una única càrrega sinó que es tracta d'una distribució contínua, el que obliga a escriure una equació diferencial (llei de Biot-Savart) que s'haurà d'integrar per tal d'obtenir el camp magnètic en cada cas (per geometries del fil diferents). Com que no es coneixen els detalls del càlcul integral ens limitarem a presentar l'expressió de la llei de Biot-Savart i els diferents resultats.

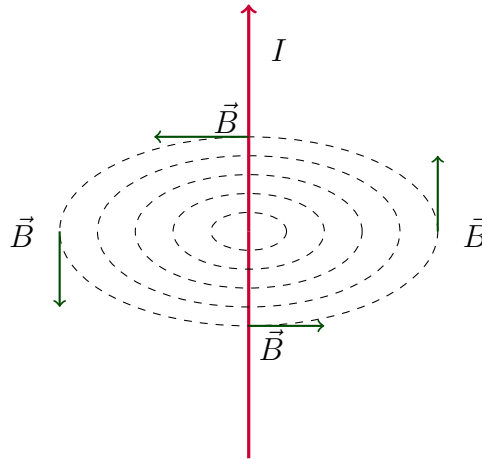
$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

### 5.7.3 Camp creat per un fil infinit de corrent

En aquest cas el resultat que s'obté pel mòdul del camp magnètic creat és

$$|\vec{B}| = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

L'anomenada *regla de la mà dreta* ens proporciona el sentit del camp magnètic.



#### Exemple 6

Calculeu el mòdul del camp que crea a 1 metre de distància un fil infinit pel qual passa una intensitat  $I = 2 \text{ A}$ .

De l'expressió

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

calculem

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 1} = 10^{-7} \text{ T}$$

#### Exemple 7

Dos fils infinits separats una distància  $d$  s'atrauen quan passen per ells intensitats paral·leles;  $I_1, I_2$ . Demostreu que aquesta força (per unitat de longitud) val

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Calculeu després la força amb que es repelleixen dos fils separats  $d = 2 \text{ m}$ , sobre una part de  $1 \text{ cm}$  de la seva longitud pels quals passen intensitats *antiparal·leles*  $I_1 = 3 \text{ A}$  i  $I_2 = 5 \text{ A}$ .

El camp que crea el fil que transporta  $I_1$  en un punt del fil que transporta  $I_2$  val

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

ara, la força deguda a aquest camp sobre un segment de longitud  $l$  del fil que transporta  $I_2$  es pot calcular com

$$F = I_2 l B = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \longrightarrow \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Ara, quan les intensitats són antiparal·leles els fils es repel·leixen (es comprova) i la força valdrà

$$F = l \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = 0,01 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 2}{2\pi \cdot 2} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

#### 5.7.4 Camp creat per una espira circular

Sigui una espira circular de radi  $R$  per la qual circula una intensitat  $I$ . Suposem que l'eix de l'espira es troba alineat amb l'eix  $OX$ , llavors, la llei de Biot-Savart proporciona com a resultat pel mòdul del camp magnètic creat per aquesta espira en els punts del seu eix

$$B = \frac{\mu I}{2} \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}$$

En el cas que ens interressi exclusivament el valor del camp al *centre* de l'espira, l'expressió anterior queda reduïda a

$$B = \frac{\mu I}{2R}$$

El sentit del camp s'obté com una versió *dual* de la regla de la mà dreta que permetia obtenir el sentit del camp magnètic creat per un fil infinit de corrent.

#### Exemple 8

Per una espira circular de radi  $R = 0,50 \text{ m}$  que es troba en el pla del paper, circula una intensitat de valor  $I = 3,0 \text{ A}$ , en sentit horari. Calculeu el mòdul, direcció i sentit del camp magnètic que crea en el seu centre.

El càlcul és directe

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{2 \cdot 0,5} = 3,8 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$



## 5.8 Camp magnètic creat per agrupacions de corrents

Un resultat, la demostració del qual queda fora de l'abast d'aquest curs, és l'anomenada llei d'Ampère que s'expressa com

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \sum_i I_i$$

i ens diu d'entrada, que el camp magnètic no és conservatiu, i per tant no es podrà definir un *potencial magnètic*, i el treball necessari per desplaçar una càrrega en un camp magnètic dependrà del camí escollit (en comparació amb els camps gravitatori i elèctric que sí són conservatius). Per una altra banda, la llei d'Ampère permet calcular el camp magnètic creat per agrupacions de corrents, per exemple el solenoide i el toroide.

### 5.8.1 Camp magnètic creat per un solenoide

Un solenoide o bobina, està format per un fil de corrent enrotllat en espiral. Quan per el solenoide passa un corrent  $I$ , cada espira crea el seu camp magnètic i l'efecte combinat de totes es pot calcular amb la llei d'Ampère per donar

$$B = \mu \frac{N \cdot I}{l} = \mu \cdot n \cdot I$$

on  $N$  és el nombre d'espires i  $l$  la longitud del solenoide. També es fa servir  $n$ , el nombre d'espires per unitat de longitud.

### 5.8.2 Camp magnètic creat per un toroide

Un toroide és un solenoide curvat de forma que el seu eix forma una circumferència. La llei d'Ampère permet calcular el camp magnètic al centre del toroide com

$$B = \mu \frac{N \cdot I}{2\pi \cdot R}$$

on  $N$  és el nombre d'espires,  $I$  la intensitat que circula pel fil de corrent i  $R$  el radi del toroide.

## 6 Inducció electromagnètica

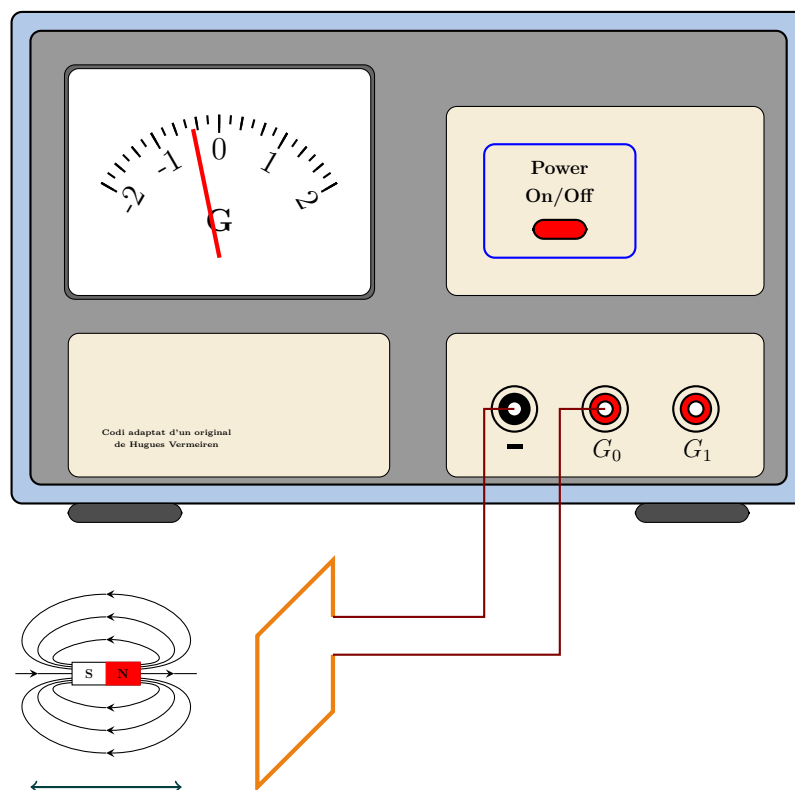
### 6.1 Introducció

#### Les experiències de Faraday

Anomenem *inducció electromagnètica* la producció de corrent elèctric a partir de la interacció d'un camp magnètic i un conductor. Fins els nostres dies, la generació de corrent elèctric a nivell industrial es basa en aquest fenomen. En el seu afany per produir corrent a partir d'un camp magnètic, Faraday va fer un sèrie d'experiments que es poden resumir en els següents.

#### 1a experiència

Faraday va disposar una espira conductora connectada a un galvanòmetre. Com que no hi ha cap generador al circuit, el galvanòmetre no marca pas de corrent. Ara bé, al acostar o allunyar un imant a l'espira, llavors l'agulla del galvanòmetre es desvia, assenyalant el pas de corrent per l'espira.



## 2a experiència

Ara Faraday va usar un solenoide en lloc d'un imant, amb resultats semblants (ja que el solenoide crea un camp magnètic con l'imant.)

## 3a experiència

En aquesta experiència, Faraday va col·locar dues espires enfrontades, una connectada a un galvanòmetre i l'altra connectada a una bateria amb un interruptor. Al accionar l'interruptor el galvanòmetre marcava pas de corrent per l'espira.

Faraday es va adonar que el que hi havia en comú era que sempre que apareixia corrent induït hi havia una variació de flux del camp magnètic. Va utilitzar l'expressió *corrent induït* per referir-se al corrent que apareixia en l'espira que estava connectada al galvanòmetre. Va anomenar *inductor* l'element que provoca l'aparició del corrent. L'inductor pot ser una espira per la qual passar corrent o un imant permanent. Va anomenar *induit* l'element en el qual es genera el corrent. En aquest cas, l'espira connectada al galvanòmetre.

De les experiències anteriors es dedueix:

- Apareix corrent induït quan l'inductor i l'induit tenen moviment relatiu. Quan el moviment és en un sentit, l'agulla del galvanòmetre és mou en un sentit, quan el moviment és en sentit contrari, l'agulla es desvia cap a l'altre.
- La intensitat del corrent induït és més gran com més ràpid és el moviment relatiu entre inductor i induït.
- També apareix corrent induït quan es connecta o desconnecta un interruptor que dona pas al corrent en l'inductor.

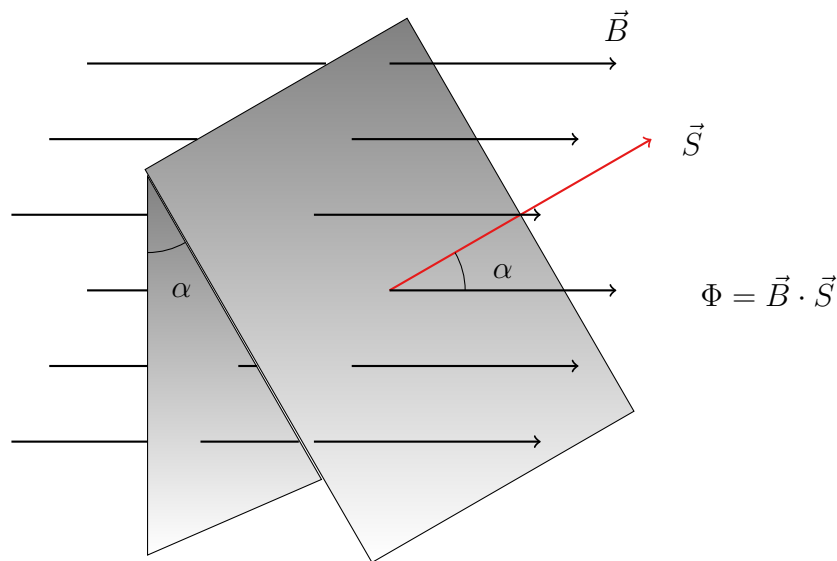
## 6.2 El flux magnètic.

Donat un camp magnètic  $\vec{B}$  i una superfície, es defineix el flux magnètic  $\Phi_B$  que travessa la superfície, com

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \theta$$

on  $\vec{S}$  és un vector normal a la superfície i  $\theta$ , l'angle que formen  $\vec{B}$  i  $\vec{S}$ . El mòdul de  $\vec{S}$  és l'àrea de la superfície. La unitat del flux magnètic és tesla per metre quadrat, i s'anomena **weber** (**Wb**, pronunciat "béber"),

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot 1 \text{ m}^2$$



De la definició i l'esquema és clar que el flux és màxim quan  $\vec{B}$  i  $\vec{S}$  són paral·lels, o dit d'una altra manera, quan  $\vec{B}$  és perpendicular a la superfície. Per una altra banda, el flux és zero quan  $\vec{B}$  i  $\vec{S}$  són perpendiculars, o dit de forma equivalent, quan  $\vec{B}$  i el pla són paral·lels.

### Exemple 1

Una espira circular de  $50\text{ cm}$  de radi es troba en el sí d'un camp magnètic uniforme  $B = 2,0\text{ T}$  de manera que el pla de l'espira forma un angle  $\alpha = 30^\circ$  amb les línies de camp. Es demana calcular el flux magnètic que travessa l'espira.

Per definició tenim

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \theta = 2 \cdot \pi(0,50)^2 \cdot \cos 60^\circ = 0,78\text{ Wb}$$

on hem tingut en compte que  $\theta = 90^\circ - \alpha$  perquè l'angle que ens interessa és el que forma el camp amb el vector  $\vec{S}$ .

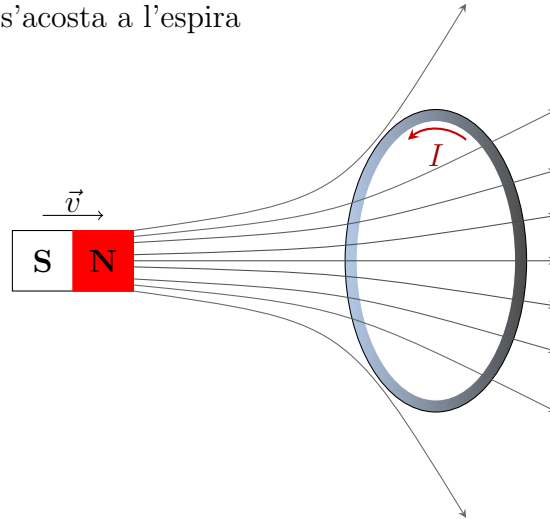
## 6.3 Lleis de la inducció electromagnètica

### 6.3.1 Llei de Lenz

(Indica el sentit del corrent induït): el sentit de la intensitat que s'indueix en els experiments de Farady és tal que crea un camp magnètic que s'oposa a l'aplicat externament.

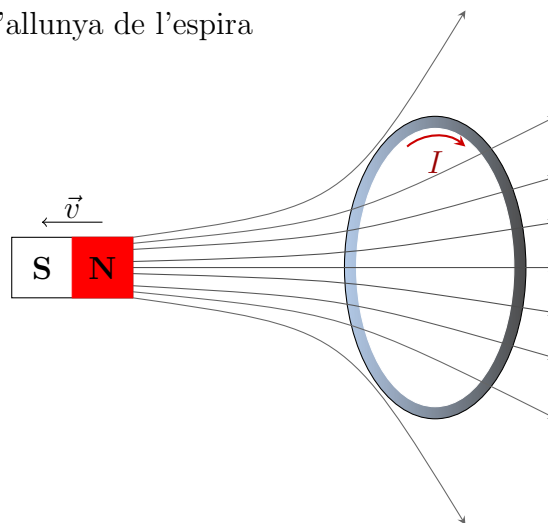
Per simplicitat només mostrem les línies de camp que participen al fenomen d'inducció.

a) L'imant s'acosta a l'espira



En aquest cas el flux magnètic a través de l'espira augmentarà, ja que a mesura que l'imant s'acosta a l'espira, van entrant més línies de camp magnètic. En resposta, a l'espira s'induirà un corrent tal que creï un camp magnètic (el seu sentit el que li correspon segons la regla de la mà dreta), que s'oposi al que aporta l'imant. El mateix passa si és l'espira que s'acosta a l'imant.

b) L'imant s'allunya de l'espira



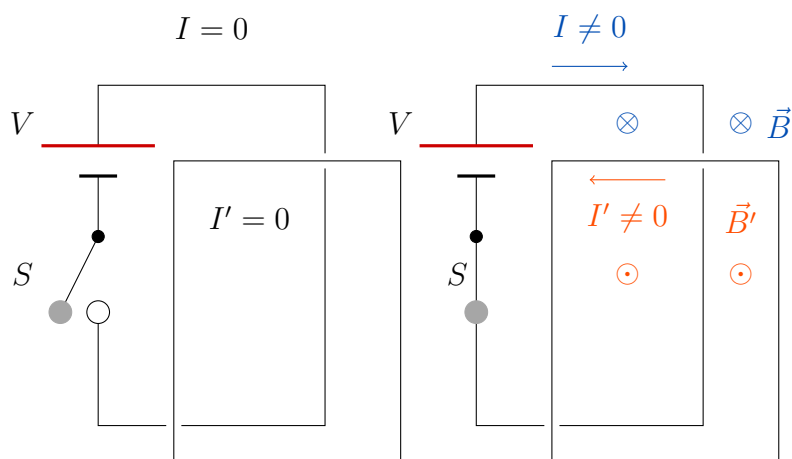
En aquest cas el flux magnètic a través de l'espira disminuirà, ja que a mesura que l'imant s'allunyi de l'espira, entraran menys línies de camp magnètic. En resposta, a l'espira s'induirà un corrent tal que creï un camp magnètic (sentit segons regla de la mà dreta), que intenti augmentar el flux cap a la dreta. El mateix passa si és l'espira que s'allunya de l'imant.

### Exemple 2

Considerem un circuit (dotat d'un interruptor) que alimenta una espira. Disposem una altra espira (que no té contacte elèctric amb el circuit) de forma que es troben situades paral·lelament. Raoneu què succeirà quan es tanqui l'interruptor.

El camp magnètic induït pot aparèixer en altres situacions, per exemple al tancar o obrir l'interruptor d'un circuit elèctric. Veiem amb un exemple els detalls d'aquesta situació.

Al tancar-se l'interruptor  $S$ , la font d'alimentació injecta en l'espira una intensitat  $I$ , que circula en sentit horari. Aquesta intensitat, tal com vam veure al tema anterior, crea un camp magnètic  $\vec{B}$  entrant al paper (per la regla de la mà dreta), llavors el que preveu la llei de Lenz és que a l'espira que es troba paral·lela al circuit s'induirà un corrent  $I'$ , tal que creï un camp  $\vec{B}'$  de sentit contrari a  $\vec{B}$ . La intensitat induïda doncs, té sentit antihorari.



Hem de destacar que aquest procés dura un breu espai de temps. Un cop la intensitat en el circuit és estacionària, desapareix el corrent induït en l'altra espira. Només hi ha corrent induït mentre hi ha variació de flux, en el règim

transitori des de que es tanca l'interruptor i comença a circular intensitat pel circuit, fins que aquesta ha quedat establerta. La mateixa situació es pot observar si s'obre l'interruptor. Durant el breu període que el flux va variant mentre desapareix la intensitat al circuit, s'establirà un corrent induït, ara de sentit contrari a l'anterior.

### 6.3.2 Llei de Faraday

(Indica el valor de la força electromotriu induïda  $\mathcal{E}$ ). Faraday va quantificar la llei de Lenz dotant-la d'una expressió matemàtica que permetia calcular el corrent induït. Aquest corrent depèn tant de la força electromotriu que la provoca com de la resistència del material conductor. Com que aquest és un paràmetre particular de cada material, és preferible relacionar la força electromotriu amb la variació del flux magnètic.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Veiem que la *fem* induïda s'oposa a la variació de flux magnètic  $\Phi_B$ . Per variacions lineals del flux amb el temps es pot fer servir l'expressió

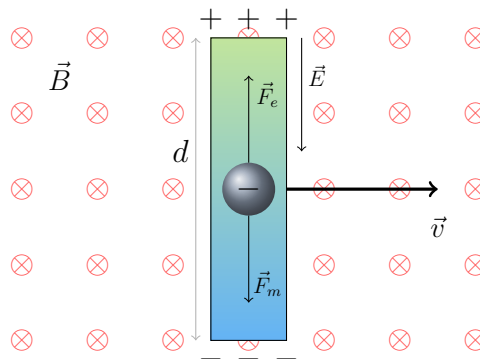
$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

i gràcies a la llei d'Ohm podem relacionar la intensitat induïda  $I$ , amb la força electromotriu  $\mathcal{E}$  i la resistència  $R$  de l'espira

$$\mathcal{E} = I \cdot R$$

### 6.3.3 L'experiència de Henry

Joseph Henry va dur a terme nombrosos experiments sobre l'electromagnetisme, entre ells destaca el següent. Suposem un fil conductor de longitud  $d$  (sobredimensionat a l'esquema per veure els detalls del fenomen).



Si desplacem el conductor cap a la dreta amb velocitat  $\vec{v}$  en el sí d'un camp magnètic  $\vec{B}$ , apareixerà una força d'origen magnètic sobre els electrons del conductor. D'acord amb la llei de Lorentz aquesta força val

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

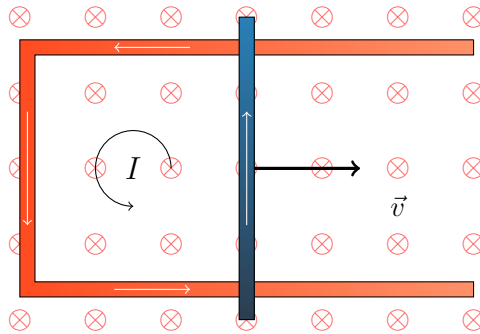
i està dirigida cap a baix. Aquest arrossegament dels electrons lliures del material provoca una polarització en el mateix. Hi ha un excés de càrrega negativa a la part baixa i un altre excés de càrrega positiva a la part superior. Aquesta polarització fa que aparegui un camp elèctric, dirigit cap a baix, que contraresta l'efecte inicial d'arrossegament del camp magnètic i evita una polarització més gran (però no l'anul·la la que ja hi havia). En algun moment s'arriba a un equilibri i podem escriure

$$F_m = F_e \rightarrow qvB = qE \rightarrow vB = E$$

Com  $B$  i  $v$  són constants, també ho serà  $E$ , i llavors podem relacionar aquest camp elèctric amb una diferència de potencial apareguda entre els extrems del conductor en moviment

$$V = Ed = vBd$$

Si ara posem aquest conductor en contacte elèctric amb una espira oberta, hi podrà circular un corrent  $I$ , corrent que anomenarem induït, pel mecanisme que l'ha creat.



De manera que el sistema es comporta com un generador de força electromotriu, el valor d'aquesta ve donat per

$$\mathcal{E} = V = Ed = vBd$$

Aquest resultat es pot deduir independentment a partir de la llei de Faraday. En un temps  $\Delta t$  la vareta conductora s'ha desplaçat un espai  $v\Delta t$  i la variació corresponent de superfície  $\Delta S$  travessada pel camp  $\vec{B}$  val,



$$\Delta S = d \cdot v \Delta t$$

llavors, la llei de Faraday, prediu que la força electromotriu induïda en l'espira construïda d'aquesta manera val

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\Delta S}{\Delta t} = -\frac{Bd \cdot v\Delta t}{\Delta t} = -vBd$$

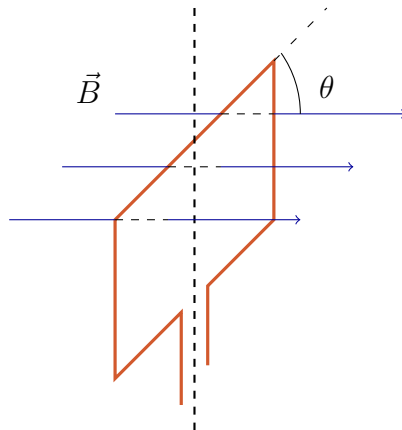
El signe està relacionat amb el sentit de la intensitat, que circula de forma que es creï un camp magnètic contrari al que hi era present.

## 6.4 Aplicacions de la inducció electromagnètica

### 6.4.1 Generadors elèctrics

Un generador elèctric és un dispositiu capaç d'obtenir energia elèctrica a partir d'una d'un altre tipus. Podem parlar de *dinamos*, que generen corrent continu, i *alternadors* que generen corrent altern. Per simplicitat ens centrarem en l'anàlisi dels principis bàsics de l'alternador.

Un alternador consisteix en una espira que es fa girar a velocitat angular constant en el sí d'un camp magnètic uniforme. Això provoca una variació de flux magnètic que travessa l'espira, en conseqüència, apareix una força electromotriu induïda, que va variant d'una manera que ara deduirem.



Si suposem que l'espira (d'àrea  $S$ ), gira amb velocitat angular constant  $\omega$ , la força electromotriu induïda la podem calcular com

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(t) &= -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d(BS \cos \theta)}{dt} = -\frac{d(BS \cos \omega t)}{dt} \\
 &= -BS \frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -BS\omega(-\sin \omega t) \\
 &= \omega BS \sin \omega t = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t
 \end{aligned}$$

ja que  $\omega$ ,  $S$  i  $B$  són constants. D'aquesta manera els generadors transformen energia mecànica de rotació a les espires, en energia elèctrica. Aquesta és la manera de generar pràcticament tota l'energia elèctrica que es consumeix. El corrent generat d'aquesta manera és corrent altern.

Els *motors* elèctrics, funcionen segons un principi semblant, però a la inversa. Fent servir el corrent que proporciona una xarxa elèctrica, transformen l'energia elèctrica en moviment rotatori a les espires conductores, moviment rotatori que després es pot transformar en lineal amb els elements de transmissió adequats.

### Exemple 3

En un camp magnètic uniforme de  $0,02\text{ T}$ , s'hi col·loca perpendicularment una bobina circular de  $40\text{ cm}$  de radi i 10 espires que comença a girar al voltant d'un dels seus diàmetres. Es demana:

1. Calculeu el flux magnètic màxim que travessa l'espira.
2. Calculeu la *fem* en la bobina en l'instant  $t = 0,1\text{ s}$ , si gira amb una velocitat angular constant de  $120\text{ rpm}$ .

1. Hem de tenir en compte que hi ha  $N = 10$  espires, llavors

$$\Phi(t) = NBS \cos \theta = NBS \cos \omega t$$

observem que  $|\cos \omega t| \leq 1$ , d'aquesta manera el valor màxim del flux és

$$\Phi_{max} = NBS = 10 \cdot 0,02 \cdot \pi(0,4)^2 = 0,1\text{ Wb}$$

2. La *fem* induïda es pot escriure com

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega NBS \sin \omega t$$

volem la velocitat angular en *rad/s*

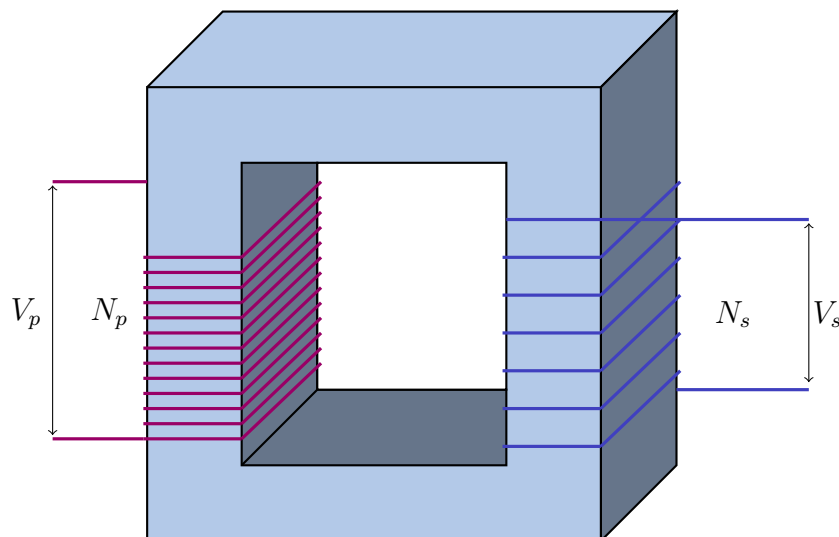
$$120 \text{ rpm} = 120 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 4\pi \text{ rad/s}$$

ara, per la *fem*

$$\mathcal{E}(t = 0,1) = 4\pi \cdot 10 \cdot 0,02 \cdot \pi(0,4)^2 \sin(4\pi \cdot 0,1) = 2,76 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

#### 6.4.2 Funcionament d'un transformador

Els transformadors es consideren màquines elèctriques que tenen com a funció modificar la intensitat o la tensió elèctriques. El seu funcionament es basa en el fenomen de la inducció magnètica.



Un transformador monofàsic consta de dues bobines de filferro enrotllades al voltant d'un nucli d'algun material ferromagnètic, aïllades elèctricament entre sí. Per una de les bobines (anomenada *primària*) es fa circular el corrent d'entrada. Aquesta bobina té  $N_p$  espirals. En l'altra (anomenada *secundària*) obtenim el corrent de sortida, i aquesta té  $N_s$  espirals. El conjunt forma un

*circuit magnètic*. El corrent altern injectat a la bobina primària crea un camp magnètic que es veu reforçat gràcies al nucli ferromagnètic. Aquest camp induïx un corrent a la bobina secundària. Els detalls de tots els fenòmens que es donen al transformador són prou més complexos i no s'exposaran aquí. El transformador basa el seu funcionament en la diferència d'espores a les bobines primària i secundària, i a que el corrent que es fa servir sigui altern. Si connectem el transformador a una font de corrent continu, no hi hauria variació de flux més enllà del moment de connectar-lo o desconnectar-lo, i no serviria al seu propòsit, ja que sense variació de flux no hi ha corrent induït. Per una altra banda, si el nombre d'espores de les dues bobines fos el mateix, llavors tampoc serviria per gaire més que per consumir energia elèctrica, ja que als transformadors reals les pèrdues d'energia són molt importants. Nosaltres ens limitarem a parlar dels fonaments del transformador ideal, que no presenta pèrdues d'energia.

A partir de l'expressió de la força electromotriu en cada bobina podem escriure

$$\mathcal{E}_p = -N_p \frac{d\Phi_p}{dt}$$

$$\mathcal{E}_s = -N_s \frac{d\Phi_s}{dt}$$

I si considerem que tot el flux magnètic que travessa la bobina primària ho fa també a la secundària podem escriure

$$\frac{d\Phi_p}{dt} = \frac{d\Phi_s}{dt} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_p}{N_p} = \frac{\mathcal{E}_s}{N_s} \rightarrow \frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$$

Per una altra banda, si suposem que no hi ha pèrdues, llavors la potència elèctrica es transmet íntegrament d'una bobina a l'altra i podem escriure

$$P_p = P_s \rightarrow V_p I_p = V_s I_s$$

En resum, obtenim les següents expressions

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{I_p}{I_s}$$

## 7 Física quàntica

### 7.1 Els fets que no explica la física clàssica

Al tombant del segle XIX alguns fenòmens físics no es podien explicar amb les idees de la física clàssica: la radiació del cos negre, l'efecte fotoelèctric i els espectres atòmics. Per poder explicar aquests fenòmens es va haver d'admetre que la matèria a escala microscòpica no seguia les lleis que s'observaven a escala macroscòpica. Una nova disciplina dins la ciència, la *física quàntica* s'obria camí amb una premissa fonamental, els intercanvis d'energia amb la matèria a nivell microscòpic es donen de forma discreta, en forma de petites unitats (*quanta* en llatí).

#### 7.1.1 La radiació del cos negre

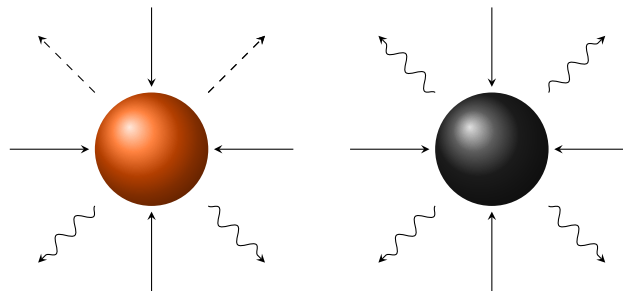
Tots els objectes emeten radiació electromagnètica només pel fet d'estar a una determinada temperatura. Gran part d'aquesta radiació s'emet ordinàriament fora de l'espectre visible, a l'infraroig. A mesura que la temperatura d'un cos augmenta, la freqüència de la radiació emesa es desplaça cap al visible i més enllà, al ultraviolat. Per això, un ferro posat al foc es veu primer de color taronja, per anar passant a tonalitats més blavoses si s'escalfa més.

Per una altra banda, els objectes poden reflectir part de la radiació que els arriba. Això depèn entre altres coses, del seu color. Ja sabem que els objectes foscos s'escalfen més al Sol (perquè absorbeixen radiació) i els clars menys (reflecteixen la major part de la radiació que els arriba). Un cos negre és un objecte ideal que absorbeix tota radiació que li arriba i per tant, la que emet ho fa exclusivament a causa de la temperatura que tingui.

La importància del cos negre rau en el fet que el seu espectre de radiació depèn només de la seva temperatura, i ho fa de forma coneguda, segons l'anomenada llei d'Stefan-Boltzmann

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

on  $P$  és la potència radiada pel cos negre,  $A$  és l'àrea (d'aquí que  $P/A$  sigui la intensitat emesa),  $T$  la temperatura absoluta i  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$  l'anomenada constant d'Stefan-Boltzmann.



~~~~~ Radiació tèrmica emesa

---> Radiació reflectida

—> Radiació incident

Per una altra banda, Wilhelm Wien (1864-1938), havia estudiat la radiació del cos negre i va concloure que:

- El cos emet radiació de moltes longituds d'ona diferents i la intensitat de la radiació augmenta amb la temperatura.
- A mesura que s'augmenta la temperatura, la intensitat més gran emesa es concentra al voltant d'una determinada longitud d'ona.
- La longitud d'ona que s'emet amb més intensitat,  $\lambda_{max}$  és menor com més gran és la temperatura del cos.

De fet, Wien va arribar a establir una llei de forma experimental, anomenada *lleï de desplaçament de Wien* segons la qual

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} mK$$

Això explica les variacions de color que experimenta un objecte quan s'escalfa progressivament, tal com comentàvem al principi.

**Exemple 1**

Suposeu que la longitud d'ona predominant de la llum provinent del Sol és  $\lambda = 483 \text{ nm}$  per estimar la temperatura de la seva superfície fent servir la llei de desplaçament de Wien.

Escrivim

$$483 \cdot 10^{-9} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3}$$

d'on

$$T = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{483 \cdot 10^{-9}} = 6000 \text{ K}$$

\* \* \*

**La catàstrofe de l'ultraviolat.** El primer intent de proporcionar una expressió matemàtica que pogués descriure l'espectre de radiació del cos negre es va fer a partir de consideracions de física clàssica i d'aquest esforç es va obtenir l'anomenada llei de Rayleigh-Jeans

$$B_T(\lambda) = \frac{2c k_B T}{\lambda^4}$$

on

- $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  és la velocitat de la llum en el buit,
- $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg/s}^2 \text{ K}$  és la constant de Boltzmann,
- $T$  és la temperatura en  $K$ ,
- $\lambda$  és la longitud d'ona (en  $m$ ), de la radiació.

de forma que per cada temperatura, s'obté la distribució de l'espectre de radiació en funció de la longitud d'ona.

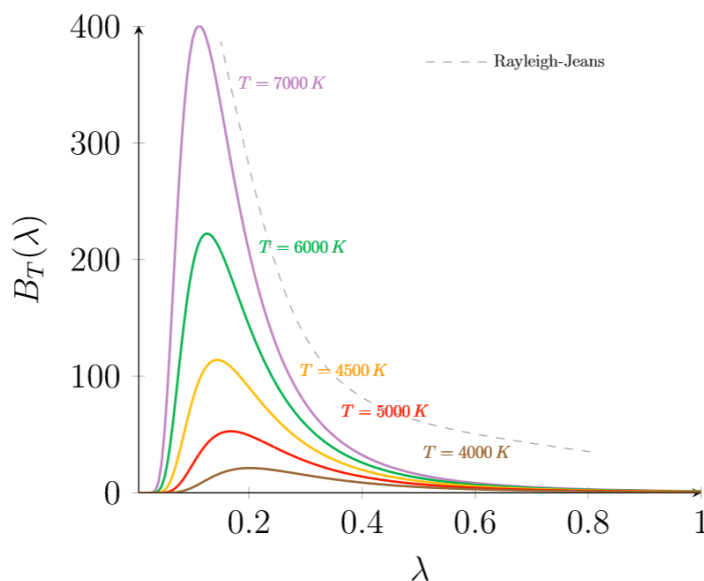
Aquesta fórmula descrivia bé els resultats experimentals per longituds d'ona grans però no per petites, ja que com es pot comprovar fàcilment, prediu que a mesura que la longitud d'ona disminueix, la radiació hauria de créixer sense límit. Aquesta situació, conceptualment inadmissible, se la va anomenar *la catàstrofe de l'ultraviolat*.

**La hipòtesi de Planck.** Més endavant, el físic alemany Max Planck (1858-1947) va obtenir una altra expressió, suposant que els àtoms es comportaven com a petits oscil·ladors, capaços de vibrar en unes determinades freqüències, absorbint i emetent energia en forma d'ones electromagnètiques. Va suposar que cada oscil·lador només podia absorbir o emetre energia que fos un múltiple enter de la seva freqüència natural d'oscil·lació

$$E = nhf \quad n \in \mathbb{N}$$

amb  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ , l'anomenada constant de Planck. Segons el seu argument els àtoms o mol·lècules passen d'un estat d'energia a un altre absorbint o emetent aquests *quants* d'energia, que va anomenar fotons. A partir d'aquestes consideracions, Planck va obtenir per l'espectre de radiació

$$B_T(\lambda) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left( e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)}$$



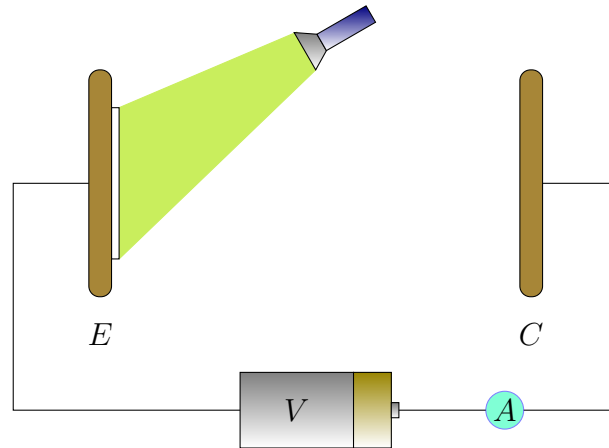
Aquesta expressió prediu els mateixos resultats que la llei de Rayleigh-Jeans per longituds d'ona grans, però corregia el comportament erroni d'aquesta darrera per longituds d'ona petites.

### 7.1.2 L'efecte fotoelèctric

El 1887 el físic alemany Rudolph Hertz (1857-1894) va descobrir que en il·luminar un metall amb una determinada radiació algunes plaques metàl·li-

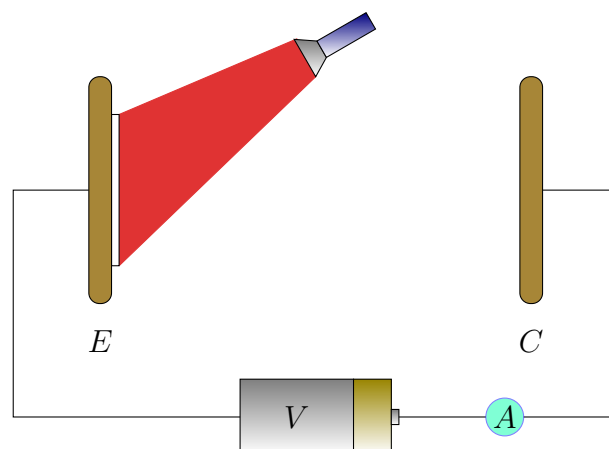


ques, s'obtenia un corrent elèctric. L'esquema bàsic que va dissenyar és el següent

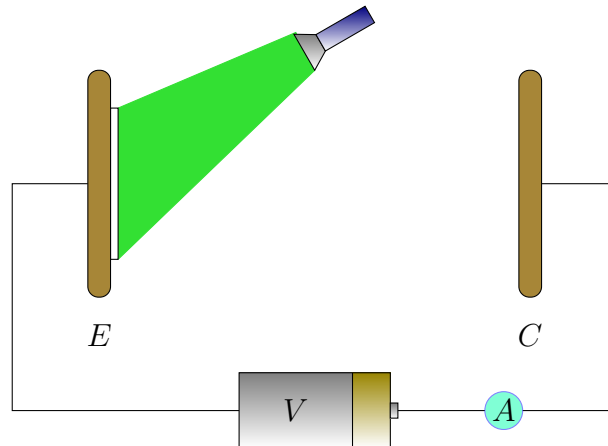


Un tub (no es mostra a l'esquema), de vidre o quars al buit conté una placa metàl·lica  $E$  (emissor) connectada al terminal negatiu d'una bateria, i una altra placa metàl·lica  $C$  (col·lector) connectada al terminal positiu de la bateria. Quan el tub es conserva a la foscor, la lectura a l'amperímetre és zero, el que vol dir que no hi ha corrent al circuit. Quan la placa  $E$  s'il·lumina, és possible l'amperímetre marqui pas de corrent, el que vol dir que hi ha un flux de càrregues entre les plaques  $E$  i  $C$ . Aquest corrent apareix a causa dels fotoelectrons emesos per l'emissor i recollits al col·lector. Els electrons arrencats d'aquesta manera pels fotons de la radiació lluminosa es van anomenar *fotoelectrons*.

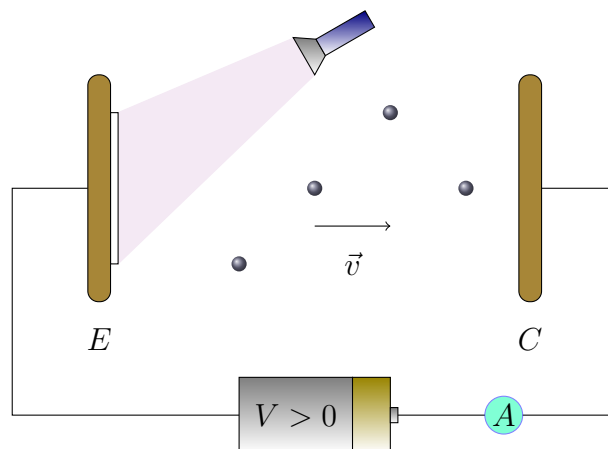
Suposem que il·luminem una placa de sodi amb radiació de  $\lambda = 700\text{ nm}$  (color vermell). S'observa que, independentment de la intensitat lluminosa, no s'arrenquen electrons del metall.



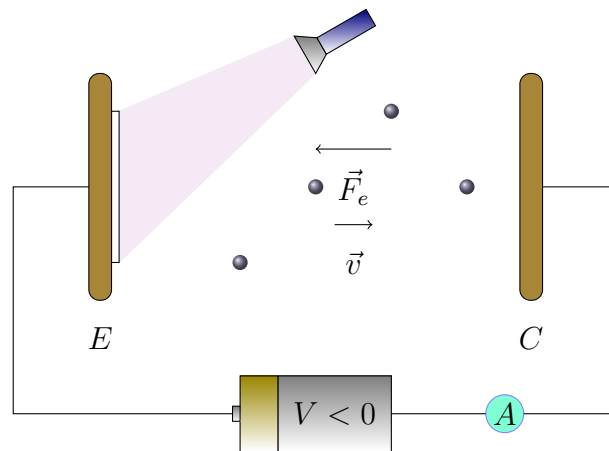
Si modifiquem la radiació a  $\lambda = 550 \text{ nm}$  (color verd), veiem que no hi ha cap canvi.



Ara bé, a partir de cert valor de  $\lambda$  s'observa que es comencen a desprendre electrons de la placa de sodi. Per exemple, amb  $\lambda = 450 \text{ nm}$  hi ha emissió d'electrons fins i tot amb intensitats **molt baixes** de la radiació incident.



Una vegada establert l'efecte fotoelèctric, si augmentem la tensió de la bateria els fotoelectrons arribaran amb més energia al col·lector, però no variarà el seu nombre, això només passa si augmentem la intensitat de la radiació. També podem polaritzar les plaques a la inversa per tal d'aturar els electrons que estaven arribant al col·lector. Aquest potencial depèn de la freqüència de la llum però no de la intensitat i s'anomena *potencial de frenada*, està relacionat amb l'energia cinètica màxima dels electrons.



Les conclusions que es poden treure de tot això són

- Per tal que una radiació provoqui efecte fotoelèctric ha de tenir una freqüència mínima, anomenada freqüència llindar. Aquest valor depèn del material. Si la freqüència de la radiació és menor que la llindar, no es produeix efecte fotoelèctric sigui quina sigui la intensitat de la radiació.
- Si la radiació que il·lumina el metall supera la freqüència llindar, es produeixen fotoelectrons que es poden detectar perquè circula corrent i l'amperímetre ho assenyalirà. En aquestes circumstàncies, la intensitat del corrent establert és proporcional a la intensitat de la radiació.
- Si modifiquem el voltatge extern i invertim la polaritat de les plaques podem aturar els fotoelectrons emesos just abans d'arribar al col·lector. El mínim valor del potencial que aconseguim aquest efecte s'anomena *potencial de frenada*.

Des d'un punt de vista clàssic no es possible explicar tots aquests fets. Albert Einstein va guanyar el premi Nobel l'any 1921 per explicar l'efecte fotoelèctric, entre altres coses. El que va fer Einstein va ser suposar que la llum és composta de partícules o *quants* de llum, anomenats *fotons*. L'energia d'un fotó de freqüència  $\nu \equiv f$  es calcula com

$$E = hf$$

on  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  és l'anomenada constant de Planck.

El balanç d'energia fonamental que podem escriure al voltant del fenomen de l'efecte fotoelèctric és

$$hf = hf_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

on el terme  $hf_0$  s'anomena *treball d'extracció* o *funció de treball* del material.

Cada fotó incident interacciona amb un electró. Si el fotó no té prou energia, encara que n'arribin molts (intensitat de radiació elevada), no arrencaran electrons i l'amperímetre no marcarà pas de corrent. Si l'energia del fotó supera el treball d'extracció, la intensitat del corrent produït dependrà de la intensitat de la llum ja que el nombre d'electrons arrencats coincidirà amb el dels fotons incidents. Quan l'energia del fotó supera amb escreix el treball d'extracció, tota l'energia extra es transforma en energia cinètica de l'electró. Remarquem que, en termes del potencial de frenada

$$\frac{1}{2}mv^2 = |q_e|V_{fre}$$

### Exemple 2

En una superfície de zinc arriba llum ultraviolada de  $150\text{ nm}$  de longitud d'ona. Es demana:

**a)** Calculeu quina és la velocitat dels electrons extrets sabent que la funció de treball del zinc és de  $4,31\text{ eV}$ , si és que es produeix efecte fotoelèctric.

**b)** A continuació fem servir llum amb una longitud d'ona que és just la meitat que en el cas anterior. Quin serà aleshores el valor de la velocitat amb que surten extrets els electrons del metall?

Dades:  $m_{e^-} = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ ;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\text{ Js}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$ ;  $1\text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ J}$

**a)** Calculem l'energia dels fotons incidents

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^{-9}} = 1,326 \cdot 10^{-18}\text{ J}$$

Passem el valor de la funció de treball a joule,

$$4,31\text{ eV} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1\text{ eV}} = 6,896 \cdot 10^{-19}\text{ J}$$

Com el valor de l'energia incident és més gran que el treball d'extracció es produirà efecte fotoelèctric. Escrivint l'equació del balanç,

$$hf = hf_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

d'on

$$v = \sqrt{\frac{2(hf - hf_0)}{m_{e^-}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,326 \cdot 10^{-18} - 6,896 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,18 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

**b)** Si la longitud d'ona és ara la meitat, seguirà produint-se efecte fotoelèctric, ja que aquesta longitud d'ona nova correspon al doble de freqüència i per tant, a més energia incident també. En qualsevol cas, la velocitat ara **no** serà el doble, cal calcular-la.

$$\lambda' = \frac{1}{2}\lambda \rightarrow f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\frac{1}{2}\lambda} = \frac{2c}{\lambda} = 2f$$

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2(hf' - hf_0)}{m_{e^-}}} = \sqrt{\frac{2(2hf - hf_0)}{m_{e^-}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot (2 \cdot 1,326 \cdot 10^{-18} - 6,896 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,08 \cdot 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

### Exemple 3

Se sap que el treball d'extracció d'electrons per a un determinat metall és de  $4,34 \text{ eV}$ . Calculeu quina és la longitud d'ona màxima per produir l'efecte fotoelèctric en aquest metall.

Dades:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ;  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

La longitud d'ona màxima correspon a una freqüència mínima que al seu torn es relaciona amb un valor mínim per l'energia, que serà exactament el treball d'extracció

$$E_{min} = 4,34 \text{ eV} = 4,34 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 6,944 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

ara

$$E_{min} = hf_{min} = h \frac{c}{\lambda_{max}}$$

llavors

$$\lambda_{max} = h \frac{c}{E_{min}} = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^8}{6,944 \cdot 10^{-19}} = 2,864 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 286,4 \text{ nm}$$

## 7.2 La mecànica quàntica

Els avenços teòrics a partir de l'explicació de l'efecte fotoelèctric i d'altres fenòmens va permetre formular una sèrie de principis sobre els quals s'assenta la *mecànica quàntica* que tracta sobre la física a nivell atòmic i subatòmic. Els punts de partida de la mecànica quàntica són la dualitat ona-còrpuscle i el principi d'incertesa.

### 7.2.1 La dualitat ona-còrpuscle

Amb l'efecte fotoelèctric i d'altres es va veure que la llum es pot considerar composta per partícules. Més endavant es va postular també que les partícules es podien comportar com a ones. Al final es va arribar a la conclusió que és en funció de l'experiment que fem que la natura *decideix* comportar-se com una ona o com una partícula.

La relació deguda a **de Broglie**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

(on  $p$  és la *quantitat de moviment*), ens diu quina és la longitud d'ona associada a un objecte de massa  $m$  que es mou amb velocitat  $v$ . Cal notar que en el cas dels fotons, que no tenen massa, la seva quantitat de moviment s'ha de calcular a partir de l'equació relativista més general

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

que relaciona la massa en repòs d'una partícula ( $m_0$ ), la seva quantitat de moviment ( $p$ ) i l'energia total que té ( $E$ ). D'aquesta manera, en el cas dels fotons

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

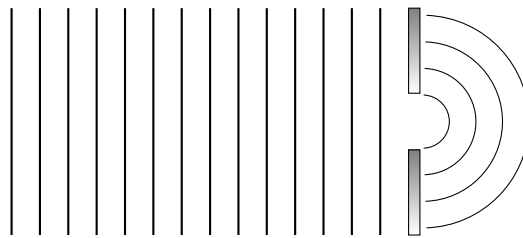
**Exemple 4**

Considereu un esquiador de massa  $m = 75 \text{ kg}$  que baixa per un pendent amb velocitat  $30 \text{ m/s}$  en el moment en que passa per la línia de meta, consistent en dues barreres separades 6 metres. Calculeu la longitud d'ona associada a l'esquiador i raoneu si patirà el fenomen de difracció (típic de les ones). Dades:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

És fàcil calcular

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{75 \cdot 30} = 2,95 \cdot 10^{-37} \text{ m}$$

Recordem que la difracció és un fenomen que pateixen les ones, consistent en que quan una ona passa per una escletxa, aquesta es comporta com un emissor puntual.



El fenomen de difracció és màxim quan el tamany de l'escletxa és de l'ordre de magnitud de la longitud d'ona. Si comparem la longitud d'ona associada a l'esquiador amb l'amplada de l'escletxa per la qual passa (formada per la barrera de la línia de meta) veiem que són molts ordres de magnitud diferents i per tant, no s'observarà difracció. En contrast amb això, en les experiències de difracció de neutrons, aquests sí que pateixen aquest fenomen perquè el seu tamany és de l'ordre de magnitud de la seva longitud d'ona associada.

**7.2.2 El principi d'indeterminació de Heisenberg**

El principi d'indeterminació de Heisenberg postula que no es pot conèixer amb la mateixa precisió la posició i el moment d'una partícula al mateix temps

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

on el símbol  $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$  s'anomena constant de Planck *reduïda*. La idea és que si volem que la incertesa en la mesura de la posició de, per exemple, una partícula, sigui molt petita, per observar-la, ho haurem de fer amb radiació de

longitud d'ona molt petita, és a dir, de freqüència gran. Com que l'energia dels fotons és directament proporcional a la freqüència, això vol dir que comunicarem molta energia a la partícula de la qual volíem saber la posició amb exactitud, això provocarà que la seva quantitat de moviment sigui molt gran i per tant, la incertesa d'aquesta. El mateix es pot raonar de forma semblant. Si el que volem és no pertorbar la partícula quan l'observem, haurem *d'il·luminar-la* amb llum de freqüència petita, és a dir longitud d'ona gran, el que farà que la incertesa en la seva posició augmenti. Segons la mecànica quàntica, a cada magnitud física observable se li pot associar una matriu. Llavors, la interpretació del principi d'incertesa des del punt de vista rigorós és senzillament que les matrius associades a la posició i moment no commuten.

Una forma alternativa del principi d'incertesa de Heisenberg involucra l'energia i el temps per un estat quàntic

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

Aquest resultat permet, entre d'altres, la possibilitat de fluctuacions en el buit que donin lloc a la creació de matèria de forma espontània. Al tema següent veurem com un argument basat en aquest fet i ideat per *Hideki Yukawa*, va portar al descobriment de les partícules que es comporten com a missatgers de la força nuclear forta.

### Exemple 5

Suposem que estem en el buit i a partir d'una fluctuació quàntica es crea un parell electró-positró. Es demana calcular el temps mig de vida d'aquestes partícules abans no es trobin i desapareguin en forma d'energia.

Dades:  $m_{e^-} = m_{e^+} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ;  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

L'energia que cal per crear aquest parell es pot calcular a partir de

$$E = mc^2 = 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,638 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

i pel principi d'indeterminació de Heisenberg, aquestes partícules podran viure un temps

$$\Delta t = \frac{\hbar/2}{\Delta E} = \frac{h}{4\pi \Delta E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{4\pi \cdot 1,638 \cdot 10^{-13}} = 3,22 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$



**Límits observables de la Física.** En el context de la Teoria Quàntica de Camps, i a partir de les constants notables de la física  $G$ ,  $\hbar$  i  $c$ , es defineixen unes unitats de temps, longitud i massa que són considerades els valors més petits d'aquestes magnituds amb significat físic

- temps de Planck,  $t_P$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$$

- longitud de Planck,  $l_P$

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$$

- massa de Planck,  $m_P$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

Es deixa com a exercici calcular els seus valors.

## 8 Física de partícules

### 8.1 Del començament fins avui

#### 8.1.1 El paradigma de la física antiga

- **Tales**, Θαλῆς: (Milet, 624-548 a.C.) Va establir que la natura es pot comprendre si s'observa amb cura. Totes les substàncies estan formades per un principi únic, l'aigua.
- **Pitàgores**, Πυθαγόρας: (Samos, 580-500 a.C.) Va descobrir l'harmonia musical. La natura es descriu amb nombres. Són l'essència de totes les coses. La Terra és rodona.
- **Empèdocles**, Ἐμπεδοκλῆς: (Agrigent, 490-430 a.C.) No pot haver un sol principi ja que a la natura hi ha propietats contradictòries. Hi ha quatre elements: Aigua, Terra, Aire i Foc. Totes les substàncies conegudes estan composades d'aquests elements en proporcions variables.
- **Demòcrit**, Δημόκριτος: (Abdera, 460-370 a.C.) Va establir que totes les coses estaven composades d'àtoms. Aquests estan formats per la mateixa substància però tenen diferents formes i mides.
- **Aristòtil**, Ἀριστοτέλης: (Atenes, 384-322, a.C.) Partint del concepte de substància (immutable) i forma (canviant), Aristòtil descriu el moviment com un tipus de canvi. No accepta la teoria atòmica de Demòcrit però sí la d'Empèdocles.

La física d'Aristòtil, junt amb els quatre elements d'Empèdocles, han constituït el paradigma bàsic del saber científic al llarg de quasi *dos mil* anys. Basats en aquest paradigma, Arquímedes va descobrir les lleis de la palanca, Ptolomeu va descriure el moviment dels astres amb gran precisió i els alquimistes medievals provaven de transmutar plom en or afegint diferents proporcions dels quatre elements. Precedint al renaixement es desenvolupen conceptes filosòfics que modificaran aquest paradigma de la física antiga. Destaquem a Guillem d'Occam, "Pluribus non est ponenda sine necessitate".

Com a resum d'aquest paradigma:

- **Elements:** Terra, Aigua, Aire i Foc.
- **Interaccions:** Els elements s'atrauen mitjançant *l'Amor* i se separen mitjançant *l'Odi*. Els moviments forçats tenen causes externes.
- **Marc teòric:** Física d'Aristòtil.

### 8.1.2 El paradigma de la física clàssica

- **Copèrnic:** (Cracòvia, 1473-1543) Estableix el sistema heliocèntric.
- **Galileu:** (Pisa, 1564-1642) Estableix el principi de que les propietats dels sistemes no depenen de si estan en repòs o en moviment uniforme rectilini.
- **Newton:** (Cambridge, 1642-1727) Desenvolupa, paral·lelament amb Leibnitz, el càlcul diferencial que permetrà una descripció formal de les lleis físiques. Formula les seves tres lleis. Planteja la llei de gravitació universal. Tot l'univers satisfà les mateixes lleis.
- **Lavoisier:** (París, 1747-1794) Descompon i recompon l'aigua. Descobreix que la combustió és una reacció amb l'oxigen. Estableix la conservació de la matèria en les reaccions químiques.
- **Dalton:** (Manchester, 1766-1844) Replanteja la teoria atòmica. Obté la relació de les masses atòmiques de diferents elements amb l'hidrogen.
- **Maxwell:** (Cambridge, 1831-1879) Unifica les descripcions dels fenòmens elèctrics i magnètics, així com la llum.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

- **Mendeleiev:** (Sant Petersburg, 1834-1907) Classifica els elements en la taula periòdica (90 en aquell moment). D'aquesta forma es correlaciona per atòmic amb diferents propietats químiques dels elements.

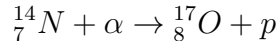
A finals del segle *XIX* la ciència constitueix una base per les necessitats tecnològiques de la revolució industrial. Les lleis de Newton es veuen confirmades per observacions astronòmiques. Es desenvolupen les aplicacions pràctiques de l'electricitat. La química progressa a partir de la base de la teoria atòmica. Esquemàticament, podem expressar aquest paradigma com:

- **Elements:** 90 elements de la taula periòdica.
- **Interaccions:** Gravitació, electromagnetisme, enllaç químic.
- **Marc Teòric:** Física clàssica (Lleis de Newton).

### 8.1.3 El paradigma de la física moderna

Malgrat que la física clàssica segueix tenint plena validesa en molts camps, els seus fonaments es van haver de modificar en funció de descobriments realitzats a finals del segle *XIX* i principis del *XX*.

- **Thompson:** (Manchester, 1856-1940) Descobreix l'electró el 1897. Planteja el primer model atòmic, però no pot explicar encara els espectres d'emissió i absorció.
- **Bequerel:** (París, 1852-1908) Descobreix la radioactivitat. Les radiacions descobertes s'identifiquen posteriorment amb partícules carregades extraordinàriament energètiques.
- **Planck:** Berlín, (1858-1947) Planteja la hipòtesi dels “quanta” per explicar l'espectre d'emissió del cos negre.
- **Rutherford:** (Manchester, 1871-1937) Descobreix el nucli atòmic. planteja el model planetari de l'àtom, encara que no resulta compatible amb l'electromagnetisme. Identifica la radiació  $\alpha$  com a nuclis d'heli. Produeix la primera reacció nuclear



- **Bohr:** (Copenhaguen, 1885-1962) Aplica la teoria dels “quanta” al model de Rutherford, aconseguint explicar els espectres d'emissió i absorció de llum pels àtoms.
- **Heisenberg:** (Munich, 1901-1976) Formula el principi d'indeterminació que du el seu nom.
- **Schrödinger:** (Viena, 1887-1961) Proposa l'equació que descriu l'evolució dels sistemes quàntics.
- **Pauli:** (Viena, 1900-1958) Planteja el principi d'exclusió. Postula l'existència del neutrí per justificar la conservació de l'energia en la radiació beta.
- **Chadwick:** (Manchester, 1891-1974) Descobreix el neutró el 1932.
- **Fermi:** (Roma, 1901-1954) Planteja la primera teoria de la interacció feble.

- **Einstein:** (Ulm, 1879-1955) Explica l'efecte fotoelèctric aplicant la teoria quàntica. Introdueix la teoria de la relativitat especial, que modifica la concepció de l'espai i temps, correlaciona massa i energia, i desenvolupa la teoria de la relativitat general, que explica la relació entre la curvatura de l'espai-temps i el camp gravitatori.

El paradigma de la física moderna que s'estableix sobre el 1940 es pot descriure com segueix:

- **Elements:** Electrón, protón, neutrón i neutrí.
- **Interaccions:** Gravitació, electromagnetisme, interacció forta, interacció feble.
- **Marc teòric:** Física quàntica (equació d'Schrödinger).

#### 8.1.4 El paradigma de la física actual

El paradigma de la ciència moderna, encara que aplicable avui dia en la majoria dels camps científics, va resultar insuficient com a base per descriure les partícules i explicar les interaccions realment fonamentals. Les contribucions que van dur al seu qüestionament van ser:

- **Dirac:** (Cambridge, 1902-1984) Planteja una equació quàntica compatible amb la relativitat especial. Això el porta a postular l'existència d'una antipartícula per a cada partícula d'spin semienter. En l'any 1928 postula l'existència del positró, que és descobert el 1932.
- **Yukawa:** (Tokio, 1907-1981) Prediu l'existència d'una partícula que actuaria com a missatger en la interacció forta, el valor de la seva massa d'uns  $200 \text{ MeV}$ . Els anomena *mesons*.
- **Feynmann:** (Boston, 1918-1988) Juntament amb Schwinger, Tomonaga i d'altres, contribueix al desenvolupament de la teoria quàntica de camps, en general, i de l'electrodinàmica quàntica en particular. Aquesta teoria permet calcular la relació del moment magnètic de l'electró i la seva càrrega i massa amb una precisió de 10 xifres significatives.
- **Gell-Mann:** (Chicago, 1929-2019) Ell i Zweig, de forma independent, plantegen el model de quarks (1963), que permet descriure la gran varietat de partícules elementals (mesons i barions) en termes d'unes partícules anomenades quarks. Aquesta hipòtesi es va recolzar experimentalment en experiments de col·lisions electró-nucleó a altes energies (1968).

- **Weinberg:** (Harvard, 1933-2021) Juntament amb Abdus Salam, van plantejar una teoria que unifica la interacció electromagnètica i la feble. Prediuen l'existència de noves partícules, els bosons vectorials intermedis  $W^\pm$  i  $Z_0$ .

La interacció que lliga als quarks es concreta en una teoria que adquireix la seva forma definitiva l'any 1973 i que relaciona la interacció amb una propietat dels quarks anomenada color, estant associada a vuit partícules sense massa anomenats *gluons*. El paradigma de la ciència actual, que s'estableix el 1975 i es coneix com a *Model estàndard* es pot descriure com:

- **Elements:** quarks ( $u, d, s, c, b, t$ ) i leptons ( $e^-, \nu_e, \mu^-, \nu_\mu, \tau^-, \nu_\tau$ )

## 8.2 Descobriment de partícules

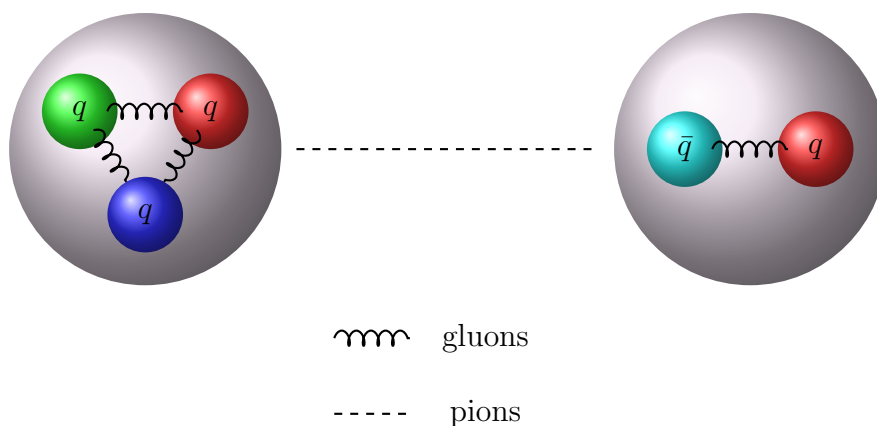
- 1937, descobriment del muó, massa  $107 \text{ MeV}$ . No és la partícula de Yukawa perquè no interacciona amb la matèria fortament.
- 1947, descobriment dels pions, massa  $140 \text{ MeV}$ . Sí corresponen a la partícula de Yukawa.
- Més endavant, partícules de masses intermèdies entre els pions i els protons, com els mesons  $K$  ( $m = 500 \text{ MeV}$ ), i d'altres més pesants que el protó, anomenades hiperons, com la  $\Lambda$  ( $m = 1110 \text{ MeV}$ ). Aquestes partícules són inestables i es descomponen en temps de l'ordre de  $10^{-8}$  segons per donar protons, neutrons, electrons i neutrins. Posteriorment, amb el desenvolupament dels acceleradors de partícules, es produeixen moltes més partícules, de vida cada cop més curta.

## 8.3 Les interaccions fonamentals

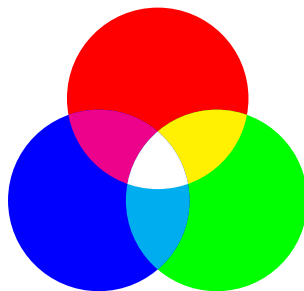
És impossible explicar l'existència mateixa dels àtoms exclusivament a partir de les forces la gravitatòria i l'electromagnètica. El fet que els nuclis dels àtoms es mantinguin units a pesar de la repulsió entre els protons que els formen, fa que haguem de postular l'existència d'una força de més intensitat que l'electromagnètica. Aquesta força ha de tenir un abast molt curt, ja que a distàncies més grans que el tamany típic del nucli no s'observen. L'anomenem *força nuclear forta*. Per una altra banda, a partir de l'anàlisi de la desintegració  $\beta$  es va proposar l'existència d'una altra interacció anomenada *força nuclear feble*. Les interaccions nuclears són molt importants, però només a distàncies de l'ordre del tamany del nucli. A distàncies més grans, la seva intensitat decau pràcticament a zero i llavors domina la força electromagnètica.

## 8.4 Un zoo de partícules

Els quarks, (que junt amb els leptons formen la base del *Model estàndard*), no es poden trobar aïllats. Sempre es troben formant partícules anomenades *barions* en grups de tres o bé formant els anomenats *mesons*, grups de dos quarks (sempre parelles quark-antiquark). Els barions i mesons s'anomenen en conjunt *hadrons*. La interacció que manté units els quarks dins els hadrons es dona gràcies a intercanvi de gluons. D'aquesta interacció fonamental en queda un efecte residual que és el que fa que per exemple, protons i neutrons es puguin trobar junts al nucli. Diem que aquests es mantenen units intercanviant *pions*. En una suposada interacció entre un barió i un mesó, tindrem



Els quarks tenen càrrega elèctrica (com veurem més endavant) i una altra tipus de càrrega anomenada *de color*, que pot tenir com a valor *vermell*, *blau*, o *verd* de forma que als corresponents antiquarks se'ls assigna *l'anti-vermell*, (*cyan*), *l'anti-blau*, (*groc*) i *l'anti-verd*, (*magenta*). D'aquesta manera un aspecte bàsic de la teoria és que els hadrons han de ser *incolors*.



Aquesta càrrega de color es va introduir per tal d'explicar que, a pesar de ser fermions i per tant, obeir el principi d'exclusió de Pauli, es trobaven quarks amb el mateix estat de l'espín, tant en mesos com en barions. Els processos

governats per la interacció forta tenen vides mitjanes molt curtes, de l'ordre de  $10^{-24}$  s. Per una altra banda, els processos associats a la interacció feble tenen vides mitjanes relativament més llargues, de l'ordre de  $10^{-11}$  s. Aquesta interacció és la responsable de la desintegració del neutró lliure

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

La partícula  $\bar{\nu}_e$ , s'anomena *antineutrí electrònic* i és una partícula neutra que té massa molt petita i es mou a velocitats properes a la de la llum. Produïts en processos de fusió i fissió nuclear, del mateix Sol en provenen molts, s'ha calculat que cada segon ens travessen  $10^{11}$  per cada centímetre quadrat de la nostra pell. Com son tant lleugers, amb prou feines interaccionen amb la matèria i de fet, la seva detecció ha suposat un repte tecnològic, no resolt fins fa pocs anys.

La descripció relativista de les interaccions implica que cada interacció porta associada l'intercanvi d'una partícula, que ha de ser un *bosó* (el valor de l'espín ha de ser un nombre enter). En el cas de la interacció electromagnètica la partícula intercanviada és un fotó (espín zero).

**L'argument de Yukawa.** Per crear una partícula de massa  $m$  cal una energia  $\Delta E = mc^2$ . D'acord amb el principi d'indeterminació de Heisenberg,

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$$

aquesta energia es pot crear del no res si el temps no supera un valor prou curt

$$\Delta t = \frac{\hbar}{2mc^2}$$

llavors, durant aquest temps la partícula pot viatjar una distància màxima donada per

$$d = c \cdot t = \frac{\hbar}{2mc}$$

que és l'abast de la interacció. Com la interacció forta té un abast de l'ordre del radi nuclear,  $1 \text{ fm}$  ( $1 \text{ femtòmetre} = 10^{-15} \text{ m}$ ), ha de tenir associada una partícula de massa

$$m = \frac{\hbar}{2dc}$$

a la que li correspon una energia

$$E = mc^2 = \frac{\hbar}{2d} c^2 = \frac{\hbar c}{2d} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-15}} = 1,582 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$



que, expressada en electronvolts són

$$1,582 \cdot 10^{-11} J \cdot \frac{1, eV}{1,602 \cdot 10^{-19} J} \approx 100 MeV$$

Aquesta massa és unes 200 vegades més gran que la de l'electró i deu vegades més petita que la dels nucleons (protó i neutró). En aquell temps no es coneixia cap partícula que satisfés aquestes condicions. La importància d'aquest argument, proposat per Yukawa, es que va esperonar la recerca de partícules de massa intermèdia entre el protó i l'electró, i a partir d'aquí es van començar a trobar moltes més partícules noves.

#### 8.4.1 Els leptons

Els *leptons* es caracteritzen perquè no senten la interacció forta. A diferència del hadrons, dels que n'hi ha milers, només es coneixen sis leptons. L'electró, el muó i el tau tenen càrrega negativa, mentre que els neutrins són neutres. Tots tenen espín 1/2, i per tant, són *fermions*. L'electró és la partícula més lleugera amb càrrega elèctrica. La conservació de la càrrega elèctrica obliga a que l'electró sigui estable.

- **Muó:** el muó es desintegra per interacció feble segons

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

El següent procés no s'observa experimentalment

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$$

Si aquest procés fos el més important, hauríem de pensar que el muó és un estat excitat de l'electró.

- **Tau:** el tau, al tenir una massa relativament gran, pot desintegrar-se, per interacció feble, en moltes combinacions de partícules, encara que sempre apareixerà un  $\nu_\tau$ .

**El nombre quàntic leptònic.** Com als processos d'interacció feble, al desaparèixer un electró, muó o tau, sempre apareixia el neutrí corresponent, i al crear-se electró, muó o tau, apareixia l'antineutrí corresponent, va postular-se un nombre quàntic leptònic, que es conserva en la interacció feble.

- $L_e$ : el nombre leptònic electrònic val 1 per  $e^-$  i  $\nu_e$ , -1 per a  $e^+$  i  $\bar{\nu}_e$  i zero per la resta de partícules.

- $L_\mu$ : el nombre leptònic muònic val 1 per  $\mu^-$  i  $\nu_\mu$ , -1 per a  $\mu^+$  i  $\bar{\nu}_\mu$  i zero per la resta de partícules.
- $L_\tau$ : el nombre leptònic tauònic val 1 per  $\tau^-$  i  $\nu_\tau$ , -1 per a  $\tau^+$  i  $\bar{\nu}_\tau$  i zero per la resta de partícules.

La interacció electromagnètica no afecta als neutrins, però pot anihilar o crear parells leptó-antileptó, de manera que es conservin els nombres leptònics corresponents.

### 8.4.2 Els hadrons

Senten la interacció forta. Ja hem vist que es divideixen en *mesons*, amb espín enter i *barions*, amb espín semienter. Per descriure'ls es fan servir els nombres quàntics següents:

- **Nombre bariònic:** s'introdueix per justificar que el protó (lliure) sigui estable (vida mitja de l'ordre de  $10^{34}$  anys, edat univers  $\approx 10^9$  anys) i que altres partícules (neutró,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ , ...) decauen al protó. s'ha de tenir en compte que el procés

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

que veurem de passada al tema següent, de desintegració radioactiva, no es pot considerar pròpiament una desintegració, ja que hi ha interacció amb els neutrons del nucli. S'assigna per conveni  $B = 1$  al protó i als hadrons que decauen en ell,  $B = -1$  a les seves antipartícules i  $B = 0$  als hadrons que no decauen al protó. Experimentalment s'ha trobat que els barions tenen  $B = 1$ , i els mesons  $B = 0$ . El nombre bariònic és un nombre quàntic estrictament conservat.

- **Estranyesa:** s'introdueix per explicar un fet que va sorprendre al principi, que alguns hadrons ( $K$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ , ...), tinguin vides relativament llargues, el que implica que no decauen a altres hadrons més lleugers ( $p$ ,  $\pi$ ) per la interacció forta o la electromagnètica, sinó per la feble. Als experiments es va observar una paradoxa, ja que aquestes partícules sentien la interacció forta quan eren produïdes, però no quan es desintegren. La solució a aquesta paradoxa va sorgir de l'observació que les partícules estranyes sempre apareixien per parelles. Es va introduir un nombre quàntic  $S$ , que havia de ser conservat per les interaccions forta i electromagnètica, però podia ser violat per la interacció feble.

L'estranyesa  $S$ , val zero pels hadrons "normals" ( $p$ ,  $n$ ,  $\pi$ ), i es va assignar el valor  $S = 1$  als mesons  $K$  (*kaons*),  $K^0$  i  $K^+$ . Degut a la

conservació de  $S$  per la interacció forta, en els processos de col·lisió entre hadrons normals que produeixin  $K^0$  o  $K^+$ , l'altre partícula estranya ha de tenir  $S = -1$ . Així, es va assignar  $S = -1$  per a  $\bar{K}^0$ ,  $K^-$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma^+$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Sigma^0$ . Les partícules anomenades “cascades”  $\Xi^0$ ,  $\Xi^-$  tenen  $S = -2$ . Les antipartícules tenen estranyesa oposada a les partícules, per a que puguin anihilar-se sense violació de  $S$ .

- **Isoespín o spin isotòpic:** S'introdueix a partir del fet que els hadrons apareixen en grups de partícules, anomenats *doblets* (grups de dos) o *triplets* (grups de tres), amb massa i propietats molt semblants (mateix espín, nombre bariònic, estranyesa), llevat que tenen càrrega elèctrica que varia d'un en un. Per exemple, tenim el neutró i el protó, els pions ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ), etc. Per descriure aquest fet introduïm l'isospín com

$$I_3 = \frac{Y}{2} + \frac{Q}{e}$$

on  $Y$  és una constant anomenada *hipercàrrega*. Gell-Mann i Nishijima van trobar experimentalment la relació

$$Y = B + S$$

D'aquesta manera pels nucleons,  $Y = 1$ ,  $I_3 = 1/2$  pel protó i  $I_3 = -1/2$  pel neutró. Pels pions,  $Y = 0$  i llavors és  $I_3 = +1$  pel  $\pi^+$ ,  $0$  pel  $\pi^0$  i  $-1$  pel  $\pi^-$ .

## 8.5 El model de quarks

La hipòtesi fonamental del model de quarks és que existeix una partícula, anomenada quark, amb tres estats interns o “sabors”, anomenats  $u$  (up),  $d$  (down) i  $s$  (strange). A la taula següent donem els valors respectius de  $I_3$  i  $Y$ . De la fórmula  $Q/e = I_3 + Y/2$  es dedueix que els quarks tenen càrrega elèctrica fraccionària.

|     | $I_3$  | $Y$    | $Q/e$  | $B$   | $S$  |
|-----|--------|--------|--------|-------|------|
| $u$ | $1/2$  | $1/3$  | $2/3$  | $1/3$ | $0$  |
| $d$ | $-1/2$ | $1/3$  | $-1/3$ | $1/3$ | $0$  |
| $s$ | $0$    | $-2/3$ | $-1/3$ | $1/3$ | $-1$ |

Ja hem vist que els barions són sistemes de tres quarks. Com que tots els barions tenen  $B = 1$  i el nombre bariònic és additiu, tots els quarks han de tenir  $B = 1/3$ . A partir de la relació  $Y = B + S$  es pot obtenir l'estranyesa dels quarks. L'antipartícula del quark, l'antiquark, té tres estats o “sabors”,

$\bar{u}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{s}$ , amb nombres quàntics de signe oposat als dels estats  $u$ ,  $d$ ,  $s$ . En el model de quarks, els mesons són sempre sistemes quark-antiquark, per tant el seu nombre bariònic és zero. A partir dels valors de  $I_3$  i  $Y$ , o de  $Q/e$  i  $S$ , per exemple, es pot conèixer el contingut en quarks dels hadrons.

### 8.5.1 Paritat i moment angular

De forma semblant als electrons, els quarks també posseeixen un grau de llibertat intern anomenat espín ( $S$ ). Aquest nombre quàntic es presenta en múltiples de  $\frac{1}{2}\hbar$ , tot i que sovint prescindirem de la constant  $\hbar$ . Per una altra banda, el que mesurem experimentalment és *la tercera component* de l'espín,  $S_z$ . El valor d'aquesta projecció varia **sempre en increments de 1**. Pels quarks és  $S = \frac{1}{2}$  i per tant  $S_z = \pm\frac{1}{2}$ .

A banda, també hem de considerar el moment angular ( $L$ ) del conjunt quan es troben associats en parelles (mesons) o grups de tres (barions) que està relacionat amb el moviment d'uns al voltant dels altres. Els valors de  $L$  són 0, 1, 2, ... Llavors, el moment angular total ( $J$ ) és la combinació dels possibles valors de  $S$  i  $L$ . Escrivim

$$J = L + S$$

Pels mesons, l'espín total de la partícula pot ser zero, quan els quarks que formen el mesó tenen els espins antiparal·lels ( $\uparrow\downarrow$ ), o 1 quan els tenen alineats ( $\uparrow\uparrow$ ). Per  $S = 1$ , la projecció pot valer  $S_z = 1$ ,  $S_z = 0$ , o  $S_z = -1$ . En el cas d'un barió, si els tres quarks que el formen tenen l'espín alineat ( $\uparrow\uparrow\uparrow$ ), serà  $S = \frac{3}{2}$  de forma que tindrem

$$S_z = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

i si els espins son antiparal·lels ( $\uparrow\downarrow\uparrow$ ),  $S = \frac{1}{2}$  amb

$$S_z = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

Els físics estan interessats típicament en el cas  $L = 0$ , ja que correspon a l'estat fonamental, de més baixa energia. Per una altra banda, si imaginem un procés qualsevol i la seva imatge reflectida en un mirall, voldríem suposar que les lleis de la física haurien de ser les mateixes, i així és quasi de forma universal. Això s'anomena invariància per paritat i es respecta sempre, llevat en els processos en els que apareix la força nuclear feble que pot violar la paritat d'un procés. Per les partícules fonamentals la paritat es calcula com

$P = (-1)^L$ . A banda, els quarks posseeixen una paritat *intrínseca* de valor  $P_q = +1$  i els antiquarks  $P_{\bar{q}} = -1$ . Llavors, pels mesons la paritat total es calcula com

$$P = P_q P_{\bar{q}} \cdot (-1)^L$$

Una forma convenient de resumir tota aquesta informació per una determinada partícula és escriure-la de la forma  $J^P$ .

### Exemple 1

Calculeu explícitament la paritat de les partícules que apareixen als diagrames de *l'octava via*.

Tenim, pels mesons pseudoescalars i vectorials

$$P = P_q P_{\bar{q}} \cdot (-1)^L = (+1)(-1)(-1)^0 = +1$$

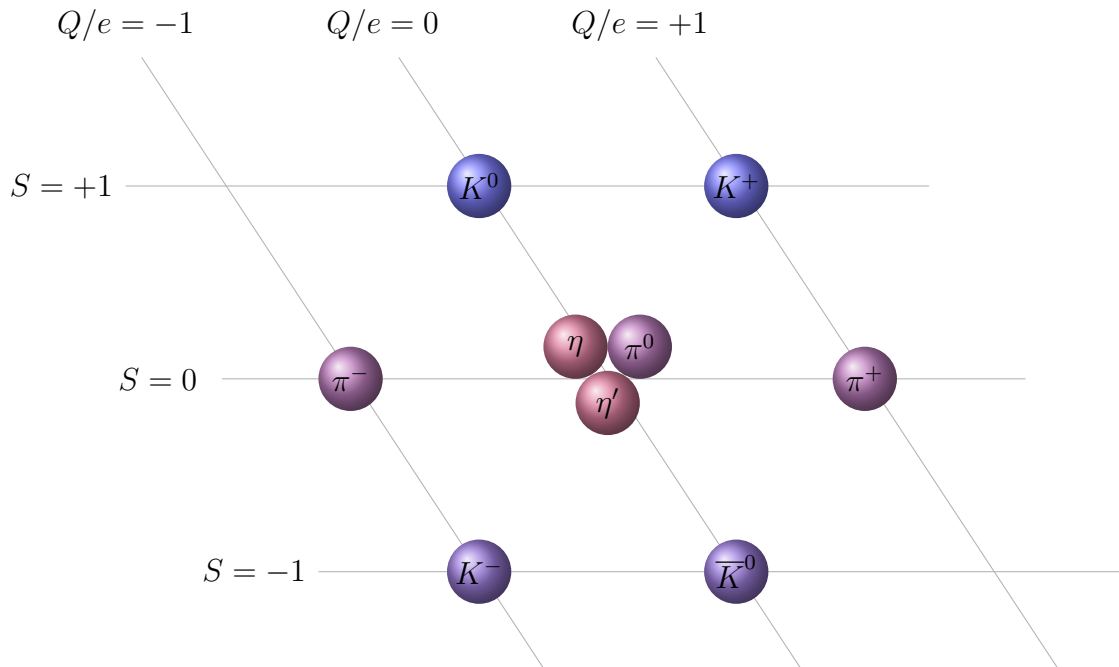
i pels barions

$$P = P_q P_q P_q \cdot (-1)^L = (+1)(+1)(+1)(-1)^0 = +1$$

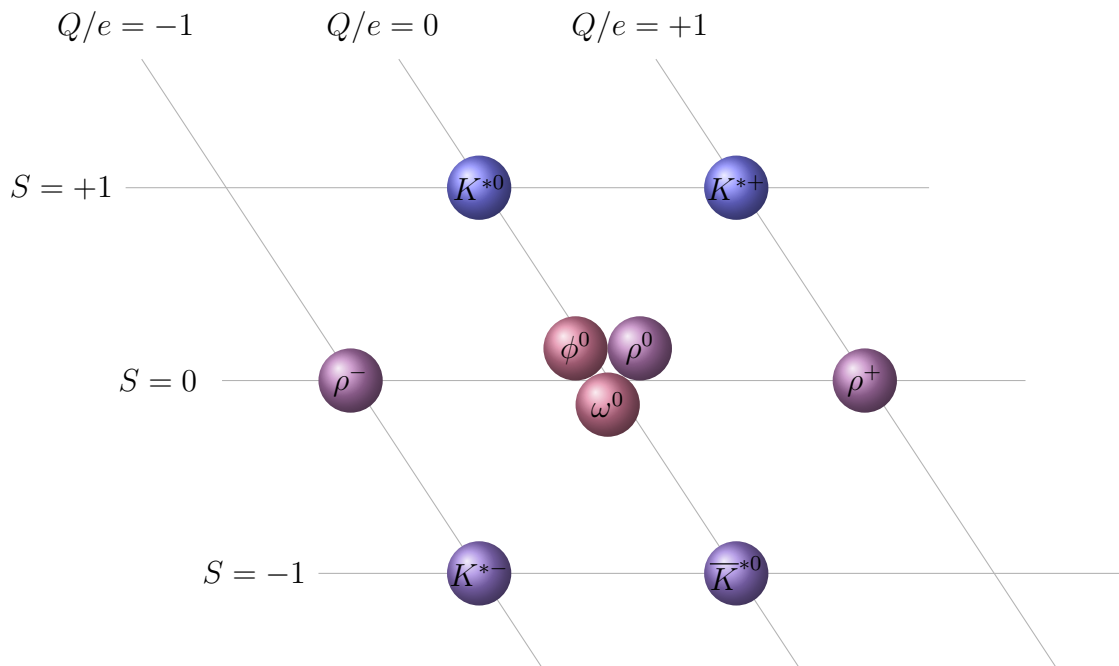
### 8.5.2 L'octava via

En un article publicat el 1961, Murray Gell-Mann va proposar una classificació de les partícules que anaven descobrint-se fent un símil amb el conegut com a “Noble camí òctuple” de la religió budista. En aquesta classificació, s'ordenaven les partícules en funció de la seva càrrega elèctrica i estranyesa. A aquest mètode el va anomenar, *L'octava via*. Aquesta classificació va resultar molt útil. De fet, al moment d'organitzar els barions, va aparèixer una posició buida per la qual Gell-Mann va suggerir una partícula encara per descobrir. Al cap d'un temps es va trobar la  $\Omega^-$ , que tenia precisament les propietats de la partícula que faltava per completar l'esquema dels barions.

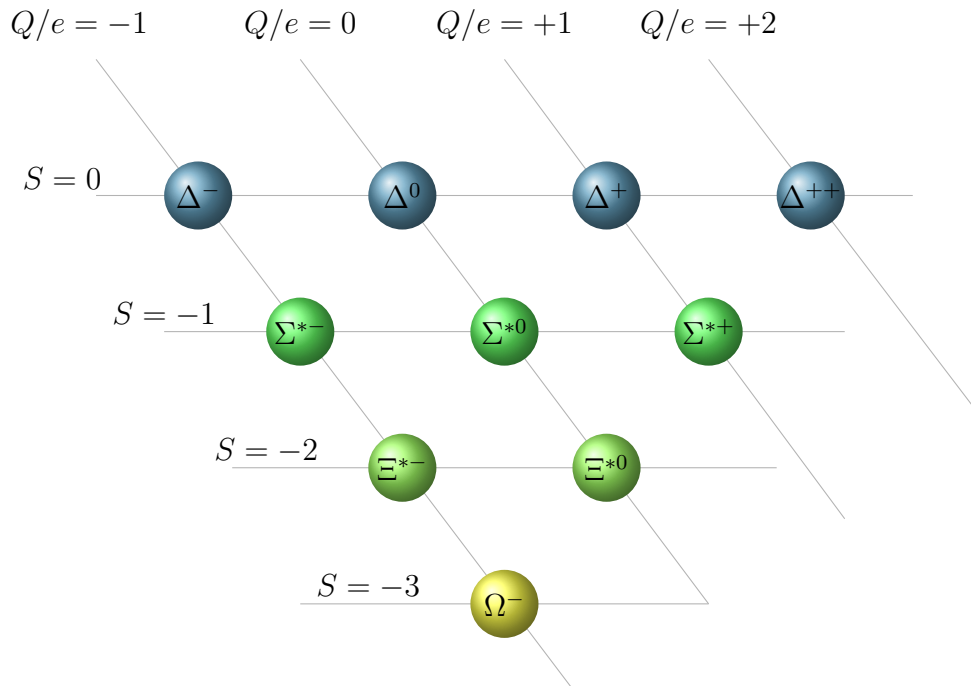
**Els mesons pseudoescalars,  $J^P = 0^-$ , ( $\uparrow\downarrow$ ;  $L = 0$ ).**



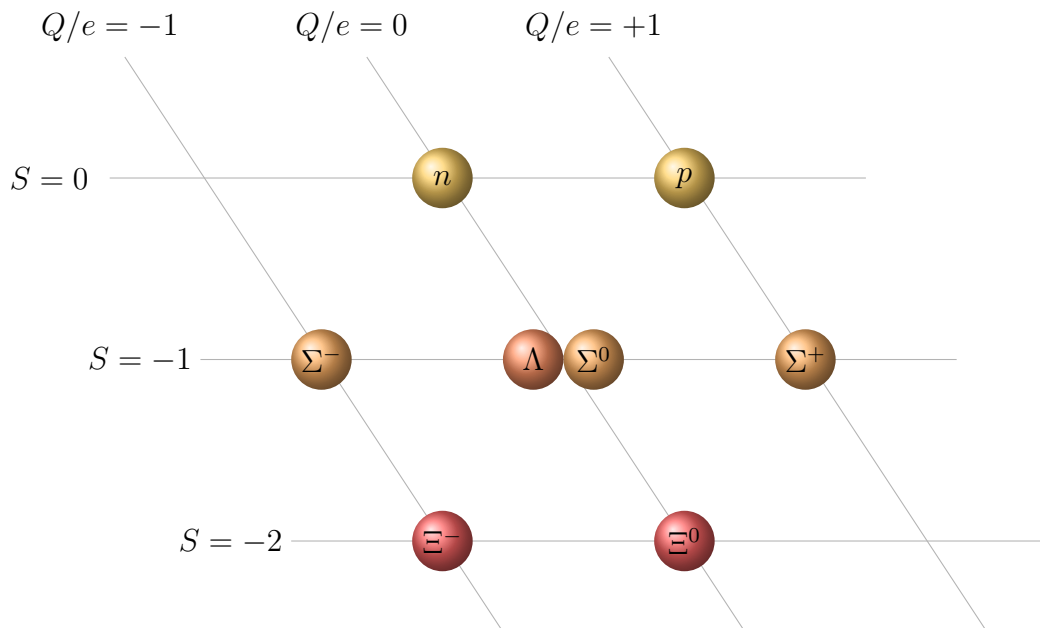
**Els mesons vectorials,  $J^P = 1^-$ , ( $\uparrow\uparrow$ ;  $L = 0$ ).**



**Barions amb  $J^P = 3/2^+$ , ( $\uparrow\uparrow\uparrow$ ;  $L = 0$ ).**



**Barions amb  $J^P = 1/2^+$ , ( $\uparrow\downarrow\uparrow$ ;  $L = 0$ ).**



**Exemple 2**

Trobeu el contingut en quarks del neutró i del kaó  $K^+$ .

- Pel neutró, sabem que no té estranyesa i que la seva càrrega és zero. Només podem fer servir quarks  $u$  i  $d$ . No podem fer servir antiquarks  $\bar{u}$ ,  $\bar{d}$  perquè el nombre bariònic del neutró és 1. L'única combinació possible que dona càrrega zero és  $udd$ .
- Pel kaó  $K^+$ , sabem que està format per un parell quark-antiquark pel fet de ser un mesó. Sabem que conté l'antiquark *strange*,  $\bar{s}$  ja que té estranyesa +1 i finalment, que té càrrega elèctrica +1. L'única combinació possible és  $\bar{s}u$ .

Els quarks interaccionen entre sí mitjançant l'anomenada *càrrega de color*, concepte que queda fora de l'abast d'aquests apunts. La interacció feble pot modificar el sabor dels quarks. Raonaments teòrics van fer predir l'existència de tres quarks més, anomenats pesants, dels quals es va obtenir evidència experimental més tard. Aquests quarks pesants s'anomenen  $c$  (*charm*),  $t$  (*top*) i  $b$  (*bottom* o *beauty*).

|     | $I_3$  | $Y$   | $Q/e$  | $B$   | $S$ |
|-----|--------|-------|--------|-------|-----|
| $c$ | $1/2$  | $1/3$ | $2/3$  | $1/3$ | 0   |
| $b$ | $-1/2$ | $1/3$ | $-1/3$ | $1/3$ | 0   |
| $t$ | $1/2$  | $1/3$ | $2/3$  | $1/3$ | 0   |



## 9 Física nuclear

### 9.1 Propietats dels nuclis

Tots els nuclis es troben formats per dos tipus de partícules: protons i neutrons. El nucli atòmic es descriu amb el nombre de protons i neutrons que conté, fent servir les següents quantitats:

- el **nombre atòmic**  $Z$ , que és igual al nombre de protons al nucli
- el **nombre de neutrons**  $N$ , que és igual al nombre de neutrons al nucli
- el **nombre màssic**  $A$ ,  $A = Z + N$  que és igual al nombre de *nucleons* al nucli

Quan representem nuclis, resulta convenient fer servir el símbol  ${}_Z^AX$  per a mostrar quants protons i neutrons hi són presents.  $X$  representa el símbol químic de l'element. Per exemple,  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$  té nombre màssic 56 i nombre atòmic 26; per tant, conté 26 protons i 30 neutrons. Els nuclis de tots els àtoms d'un element particular contenen el mateix nombre de protons, però poden tenir diferent nombre de neutrons. Els nuclis relacionats així s'anomenen **isòtops**. Els isòtops d'un element tenen el mateix valor de  $Z$ , però diferent valor de  $A$ . L'abundància natural d'isòtops pot variar molt. Per exemple,  ${}_{6}^{11}\text{C}$ ,  ${}_{6}^{12}\text{C}$ ,  ${}_{6}^{13}\text{C}$  i  ${}_{6}^{14}\text{C}$  són alguns dels isòtops del carboni. L'abundància relativa de l'isòtop  ${}_{6}^{12}\text{C}$  és d'aproximadament el 98,9%, en tant que la de l'isòtop  ${}_{6}^{13}\text{C}$  és només del 1,1%. L'isòtop  ${}_{6}^{11}\text{C}$  es produeix artificialment fent servir reaccions nuclears i es fa servir en mètodes de diagnòstic per la imatge, en particular en l'anomenada TEP (tomografia per emissió de positrons).

#### 9.1.1 Càrrega i massa

El protó té una càrrega positiva individual  $e$ , igual en magnitud a la càrrega  $-e$ , de l'electró ( $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ). El neutró és elèctricament neutre. És possible mesurar amb gran precisió les masses nuclears fent servir espectròmetres de masses, (tal com vam veure a la secció 5.5 del tema 5. **Camp magnètic**). El protó té aproximadament una massa 1836 vegades la de l'electró i les masses del protó i el neutró són molt semblants. La **unitat de massa atòmica**  $u$ , es defineix de tal forma que la massa d'un àtom de  ${}_{6}^{12}\text{C}$  és exactament  $12 u$ , amb  $1 u = 1,660\,539 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ . Sovint convé expressar la massa d'una partícula o nucli en funció de l'equivalent a l'energia en repòs.

Per la unitat de massa atòmica

$$E = mc^2 = (1,660\,539 \cdot 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (2,997\,92 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 931,494 \text{ MeV}$$

on

$$1 \text{ eV} = 1,602\,176 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

### 9.1.2 El tamany i l'estructura dels nuclis

Als experiments de dispersió de Rutherford es llançaven nuclis d'àtoms d'Heli, també anomenades partícules alfa, contra una làmina molt prima de metall.. Aquests nuclis tenen dos protons i dos neutrons. Suposant que l'energia cinètica de les partícules alfa s'invertia en potencial electrostàtica en acostar-se als nuclis del metall, podem escriure

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{d}$$

aïllant la  $d$ , obtenim

$$d = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{mv^2} = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(Ze)}{mv^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{mv^2}$$

on  $Z$  és el nombre atòmic del nucli objectiu. D'aquesta expressió, Rutherford va descobrir que les partícules alfa s'acostaven als nuclis a una distància de  $3,2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  quan el metall era or. Dels resultats dels seus experiments de dispersió, Rutherford va arribar a la conclusió que la càrrega positiva d'un àtom es trobava concentrada en una petita regió que ell va anomenar *nucli* i que tenia un radi aproximat de  $10^{-14} \text{ m}$ . Com en física nuclear aquestes dimensions són habituals, es fa servir amb freqüència el femtòmetre ( $\text{fm}$ ), també anomenat **fermi** i que es defineix com

$$1 \text{ fm} \equiv 10^{-15} \text{ m}$$

Per explicar la massa nuclear, Rutherford va proposar que cada nucli havia de tenir també  $A - Z$  partícules neutres, que va anomenar neutrons. En l'any 1932, el físic James Chadwick va descobrir el neutró, raó per la qual va ser mereixedor del premi Nobel. A partir dels experiments de Rutherford i d'altres, s'ha demostrat que la major part dels nuclis són aproximadament esfèrics i tenen un radi mitjà donat per

$$r = r_0 A^{1/3}$$

on  $r_0$  és una constant de valor  $1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  i  $A$  és el nombre màssic.

### 9.1.3 Energia d'enllaç nuclear

Experimentalment s'observa que la massa total d'un nucli és inferior a la suma de les masses dels seus nucleons individuals. A aquesta diferència de massa entre els nucleons per separat i una vegada units al nucli se l'anomena *defecte de massa*,  $\Delta m$  i es pot calcular en general com

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{nucli}$$

Gràcies a l'equivalència entre massa i energia podem interpretar aquesta diferència com *l'energia d'enllaç* del nucli, que no és més que l'energia que cal donar al nucli per separar els seus constituents. A partir de la relació entre massa i energia proposada per Einstein

$$E = mc^2$$

podem calcular l'energia d'enllaç coneixent el defecte de massa. Per caracteritzar l'energia d'enllaç podem fer servir la lletra  $B$  (*binding*), enlloc de la  $E$  habitual.

#### Exemple 1

Calculeu el defecte de massa i l'energia d'enllaç per nucleó del nucli  ${}^{12}_6C$ . Dades:  $m_p = 1,0076 u$ ,  $m_n = 1,0089 u$ .

Recordem que la massa de  ${}^{12}_6C$  era  $12 u$ , per definició d'unitat de massa atòmica. Per calcular el defecte de massa fem

$$\begin{aligned}\Delta m &= Zm_p + (A - Z)m_n - m_{nucli} \\ &= 6 \cdot 1,0076 + (12 - 6) \cdot 1,0089 - 12 \\ &= 12,099 - 12 \\ &= 0,099 \cdot \frac{1,66 \cdot 10^{-27} kg}{1} = 1,64 \cdot 10^{-28} kg\end{aligned}$$

ara, per calcular l'energia d'enllaç

$$B = mc^2 = 1,64 \cdot 10^{-28} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1,48 \cdot 10^{-11} J$$

Recordant l'equivalència entre unitats de massa atòmica i electronvolts, podem obtenir directament

$$B = 0,099 \cdot \frac{931 MeV}{1} = 92,169 MeV$$

Finalment, l'energia d'enllaç per nucleó serà

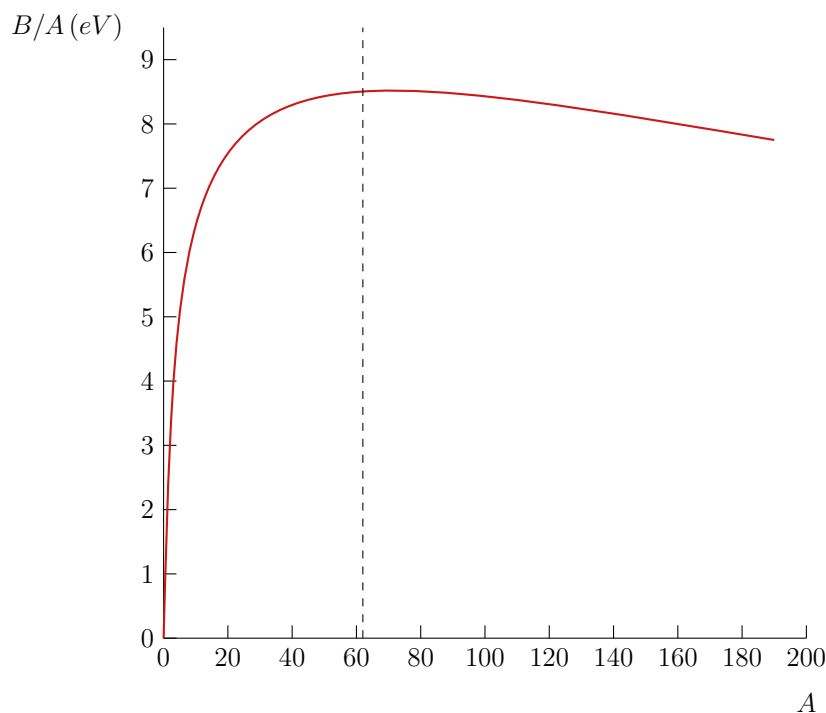
$$B/A = \frac{92,169}{12} = 8,01 \text{ MeV/nucleó}$$

Aquesta darrera dada és la que caracteritza adequadament l'energia d'enllaç dels nuclis atòmics.

Notem que estem ignorant l'energia d'enllaç dels electrons del àtom, donat que aquestes són típicament de l'ordre del  $eV$ , mentre que les energies d'enllaç dels nuclis són, com hem vist, de l'ordre dels  $MeV$ .

#### 9.1.4 Corba d'estabilitat nuclear

Si es representa l'energia d'enllaç per nucleó en funció del nombre màssic per tots els elements de la taula periòdica s'observa que la corba que s'obté presenta un màxim al voltant de  $A = 62$ .



Així, els elements que tenen nombre màssic majors que 62 alliberaran energia quan es divideixin a través de la *fissió nuclear* en elements més lleugers, ja que els nuclis *fills* són més estables, mentre que els que tenen nombre màssic més petits que 60 alliberen energia si es *fusionen*, ja que el nucli resultant és més estable que els de partida. D'aquesta manera, els estels produeixen

la seva energia per fusió dels nuclis atòmics presents. Comencen *cremant* hidrogen i la majoria arribarà com a molt a produir ferro. El núclid  ${}^{62}_{28}\text{Ni}$  és el que té l'energia d'enllaç més gran per nucleó, però rarament s'arriba a produir als estels. Per crear elements amb nombre màssic superior a 62 es necessita energia addicional, que s'obté quan al final de la seva vida alguns estels exploten en forma de nova o supernova. D'aquesta manera, tots els àtoms pesants que existeixen a la natura tenen el seu origen en l'explosió d'estels, per això es diu que som *pols d'estels*.

## 9.2 Radioactivitat

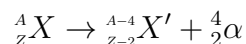
### 9.2.1 Mecanismes de desintegració radioactiva

En les substàncies radioactives es presenten tres tipus de desintegració

- Desintegració alfa ( $\alpha$ ): les partícules emeses són nuclis d'heli,  ${}^4_2\text{He}$ .
- Desintegració beta ( $\beta$ ): les partícules emeses són electrons ( $\beta^-$ ) o positrons ( $\beta^+$ ) d'alta energia.
- Desintegració gamma ( $\gamma$ ): les partícules emeses són fotons d'alta energia.

### 9.2.2 Desintegració alfa

La desintegració alfa es pot representar com



On  ${}^4_2\alpha$  és un nucli d'heli,  ${}^4_2\text{He}$ . Al nucli  $X$  se l'anomena *pare* i al  $X'$ , *fill*. L'energia  $Q$ , després en el procés es pot calcular amb

$$Q = (M_X - M_{X'} - M_\alpha)c^2$$

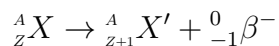
L'energia està en joules quan les masses es donen en kilograms i  $c$ , és la velocitat de la llum en el buit  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . De tota manera, si les masses s'expressen en unitats de massa atòmica  $u$ , és possible calcular  $Q$  en  $\text{MeV}$  amb

$$Q = (M_X - M_{X'} - M_\alpha) \cdot 931,494 \text{ MeV}/u$$

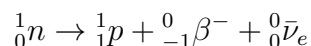
en qualsevol cas, un valor de  $Q$  negatiu significa que la desintegració no serà espontània tal i com està escrita.

### 9.2.3 Desintegració beta

Quan un nucli pateix una desintegració beta, el nucli fill conté el mateix nombre de nucleons que el nucli pare, però el nombre de protons canvia



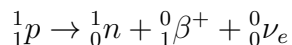
la reacció subjacent que s'està produint és



on  ${}^0_{-1}\beta^-$  són electrons d'alta energia. És important adonar-se que aquests electrons provenen del nucli de l'àtom i no de la seva escorça. Noteu la presència del corresponent antineutrí per tal que es conservi el nombre quàntic leptònic electrònic.

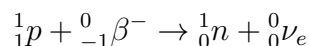
**Nombre atòmic,  $Z = -1$ ?** L'assignació un tant artificial de nombre atòmic i nombre màssic per l'electró emès es fa per *igualar* la reacció però no té cap significat físic.

Un procés semblant que es pot donar a nivell nuclear és



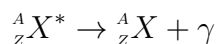
tal com vam veure al tema anterior, el protó lliure es considera una partícula estable. De tota manera, per protons al nucli és possible que es doni la reacció anterior, on la partícula emesa  $\beta^+$  és un positró.

Un altre procés que no és exactament una desintegració  $\beta$  però que competeix amb l'anterior és l'anomenat *captura electrònica*.



### 9.2.4 Desintegració gamma

Un nucli excitat pot desintegrar-se emetent radiació  $\gamma$  (fotons) d'alta energia. El procés es pot representar com



Un cop més hem d'insistir en distingir aquest procés del d'emissió de radiació d'un àtom per salts d'electrons de l'escorça electrònica. En la desintegració  $\gamma$  és el nucli el que passa d'un nivell energètic a un altre inferior.

### 9.3 Cinètica de la desintegració radioactiva

En tots els casos el procés de desintegració és totalment aleatori, no se sap *quan* es desintegrarà un nucli, el que es coneix amb exactitud és la quantitat de nuclis que queden *sense* desintegrar en funció del temps

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On  $N_0$  és el nombre de nuclis presents inicialment,  $t$  és el temps transcorregut, i  $\lambda$  és l'anomenada *constant de desintegració* radioactiva. Les seves unitats al sistema internacional són  $s^{-1}$ , tot i que sovint es pot expressar en altres si permeten un càlcul més còmode tal i com veurem als exemples.

Un altre paràmetre d'utilitat és l'anomenat *període de semidesintegració*  $T_{1/2}$ , que es defineix com el temps que ha de passar per tal que la mostra es redueixi a la meitat. D'aquesta manera

$$\frac{N}{2} = N e^{-\lambda T_{1/2}} \rightarrow e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \rightarrow -\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

on hem fet servir la definició de logaritme

$$\log_B A = C \Leftrightarrow A = B^C$$

Per una altra banda, anomenem *vida mitjana*,  $\tau$  al temps que triga, en mitjana, a desintegrar-se una mostra

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Es defineix l'*activitat radioactiva* d'una mostra com la velocitat a la que es desintegra

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = -\dot{N}(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t)$$

La unitat de l'activitat en el *SI* és el *becquerel*  $Bq$  amb  $1 Bq = 1$  desintegració per segon.

A l'hora de fer els exercicis cal no confondre la constant de desintegració radioactiva  $\lambda$  amb la longitud d'ona de de Broglie (associada a una partícula), o d'una ona qualsevol. També convé no confondre l'activitat  $A$  amb el nombre màssic d'un nucli ni amb altres magnituds de la física representades amb la mateixa lletra, que puguin aparèixer en el mateix context.

**Exemple 2**

L'activitat inicial d'una mostra radioactiva és de  $8,154 \cdot 10^{13} \text{ Bq}$  i, després de 5 anys, és de  $3 \cdot 10^{13} \text{ Bq}$ . Es demana:

1. Calculeu la constant de desintegració radioactiva i el període de semidesintegració de la mostra.
2. Calculeu el nombre de nuclis inicial de la mostra.
3. Calculeu la quantitat de nuclis que queden després de  $3 \cdot T_{1/2}$  anys transcorreguts.

1. L'activitat es calcula com

$$A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

fent servir la informació de l'enunciat

$$\begin{cases} 8,154 \cdot 10^{13} = \lambda N_0 \\ 3 \cdot 10^{13} = \lambda N_0 e^{-\lambda \cdot 5} \end{cases}$$

dividint les equacions

$$\frac{8,154}{3} = \frac{1}{e^{-\lambda \cdot 5}} \rightarrow \frac{8,154}{3} = e^{\lambda \cdot 5} \rightarrow \lambda = \frac{1}{5} \ln \frac{8,154}{3} = 0,2 \text{ anys}^{-1}$$

llavors

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 3,466 \text{ anys}$$

2. Podem escriure

$$N_0 = \frac{8,154 \cdot 10^{13}}{\lambda} = \frac{8,154 \cdot 10^{13}}{0,2} = 4,077 \cdot 10^{14} \text{ nuclis}$$

3. Per definició de període de semidesintegració, al cap d'un temps  $T_{1/2}$  queda la meitat de la mostra, al cap de  $2 \cdot T_{1/2}$  queda la quarta part de la mostra i al cap de  $3 \cdot T_{1/2}$  queda la vuitena part de la mostra, per tant

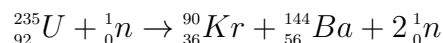
$$N(3 \cdot T_{1/2}) = \frac{1}{8} N_0 = 5,09625 \cdot 10^{13} \text{ nuclis}$$



## 9.4 Reaccions nuclears de fissió i fusió

### 9.4.1 Fissió

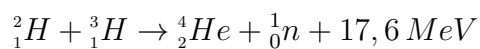
En aquest procés el nucli d'un àtom es desintegra en dos nuclis més lleugers. Típicament el procés s'inicia mitjançant un bombardeig amb neutrons que, a banda de provocar la fissió, allibera més neutrons del nucli resultants, provocant el que s'anomena una *reacció en cadena*. Per exemple, podem considerar



la massa dels productes en conjunt és més petita que la de l'urani i això fa que en aquest tipus de reaccions es desprengui energia, molta més que en una reacció química.

### 9.4.2 Fusió

En el procés de fusió nuclear, dos nuclis lleugers es fusionen en un més pesant que té massa inferior a la suma dels originals, això provoca alliberament d'energia, proporcionalment, més encara que en el procés de fissió. Per exemple,



Els isòtops de l'hidrogen  ${}_1^2\text{H}$  i  ${}_1^3\text{H}$  s'anomenen *deuteri* i *triti* respectivament.

Aquest procés de fusió nuclear és el responsable de la síntesi dels diferents elements de la taula periòdica als estels. L'hem descrit abans a la secció [9.1.4](#).

## 9.5 Aprofitament de l'energia nuclear

### 9.5.1 Aplicacions en indústria

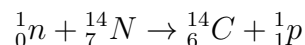
L'energia nuclear es fa servir en molts àmbits de la indústria, per exemple per produir energia elèctrica a les centrals nuclears o per dotar de fonts d'energia als satèl·lits artificials. Fins fa poc també es feien servir elements radioactius en alguns parallamps detectors de fum però poc a poc s'han anat limitant aquests usos degut als efectes que podrien tenir sobre la salut.

### 9.5.2 Aplicacions en medicina

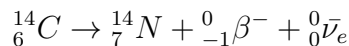
En moltes tècniques de diagnòstic es fan servir elements radioactius. També hi ha aplicacions en radioteràpia.

### 9.5.3 Aplicacions en datació geològica

L'isòtop  ${}^{14}_6\text{C}$  és produït contínuament en l'atmosfera per interacció dels raigs còsmics amb  ${}^{14}_7\text{N}$ , component majoritari de l'aire. La radiació còsmica està formada per protons, partícules alfa, partícules beta i radiació electromagnètica. Quan els raigs còsmics penetren a l'atmosfera pateixen diverses transformacions, entre elles la producció de neutrons, que interaccionen amb el nitrogen present de la manera següent



el període de semidesintegració del  ${}^{14}_6\text{C}$  és de 5730 anys, i es desintegra mitjançant la interacció feble



El carboni-14 es combina amb l'oxigen per formar  $\text{CO}_2$ . Aquest és absorbit pels éssers vius de forma que la proporció de d'aquest isòtop als organismes respecte al carboni-12 no radioactiu és pràcticament constant. Quan un organisme mor, deixa d'absorbir el carboni-14 i la quantitat que conté comença a disminuir ja que es desintegra tal com hem vist, amb un  $T_{1/2}$  de 5730 anys.

D'aquesta manera, analitzant la proporció de carboni-14 que contenen els fòssils d'origen orgànic, es pot deduir la seva edat. Aquest mètode s'anomena *datació per carboni-14*.

#### Exemple 3

En unes restes arqueològiques s'ha trobat que la quantitat de carboni-14 present és 1/16 vegades l'actual. Es demana calcular l'antiguitat de les restes sabent que per el carboni-14 és  $T_{1/2} = 5730 \text{ anys}$

Com que cada  $T_{1/2}$  el nombre de nuclis es redueix a la meitat, si queda 1/16 part vol dir que han passat  $4 \cdot T_{1/2}$  i per tant les restes tenen aproximadament  $t = 4 \cdot 5730 = 22\,920 \text{ anys}$