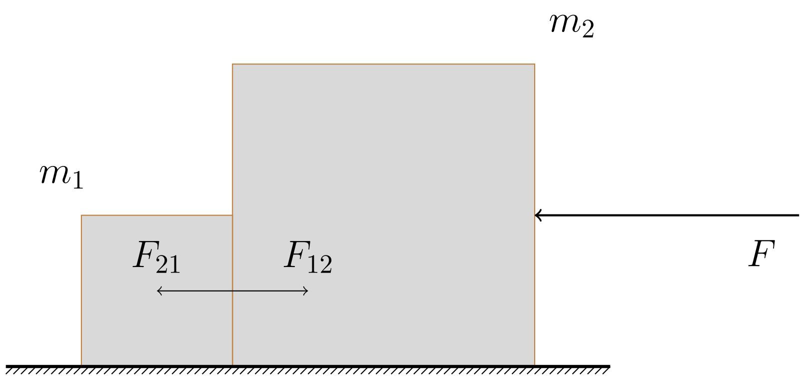
Tema 4. Dinàmica del punt

Exercicis introductoris

1.



Calculem l'acceleració del sistema aplicant la segona llei de Newton al conjunt

$$F = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{24}{2+10} = 2\,m/s^2$$

Ara apliquem la segona llei de Newton només al bloc m_1

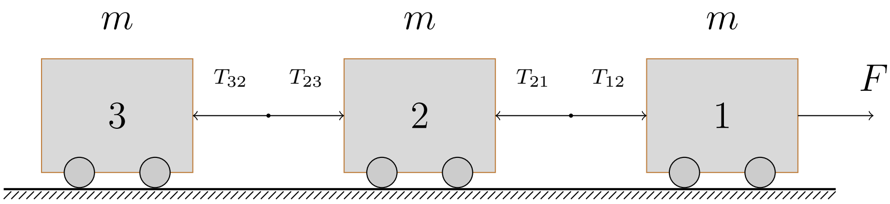
$$F_{21} = m_1 a = 2 \cdot 2 = 4\,N = F_{12}$$

Veiem que el valor de les forces de contacte depèn de sobre quin dels cossos s'aplica la força externa. Quan l'apliquem sobre el cos més massiu, les forces de contacte són relativament petites, quan s'aplica sobre el més lleuger, les forces de contacte són més grans.

Noteu que també podíem haver trobat F_{12} primer, d'una forma més complexa. Aplicant la segona llei de Newton a m_2

$$F - F_{21} = m_2 a \rightarrow F_{21} = F - m_2 a = 24 - 10 \cdot 2 = 4\,N = F_{21}$$

2.



Calculem primer l'acceleració del conjunt

$$F = (m + m + m)a \rightarrow a = \frac{F}{3m} = \frac{10^4}{300} = 33,33\, m/s^2$$

Llavors, per trobar les tensions comencem aplicant la segona llei de Newton al vagó 3, l'últim

$$T_{23} = ma = 100 \cdot 33,33 = 3333\, N = T_{32}$$

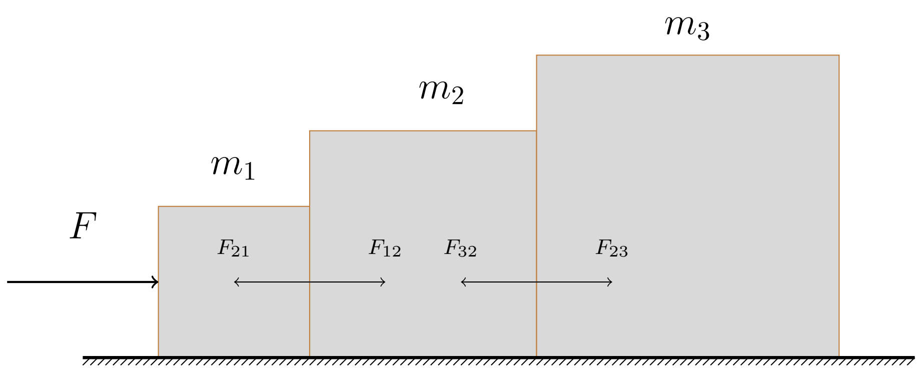
ara apliquem la segona llei de Newton al conjunt format pel tercer i segon vagons (dels quals estira T_{12}),

$$T_{12} = (m + m)a = 200 \cdot 33,33 = 6666\, N = T_{21}$$

Podem trobar aquesta darrera tensió d'una forma més complexa, aplicant la segona llei de Newton *només* al vagó 2,

$$T_{12} - T_{32} = ma \rightarrow T_{12} = T_{32} + ma = 3333 + 100 \cdot 33,33 = 6666\, N$$

3.



Calculem primer l'acceleració del conjunt

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{200}{10 + 11 + 12} = 6,06\, m/s^2$$

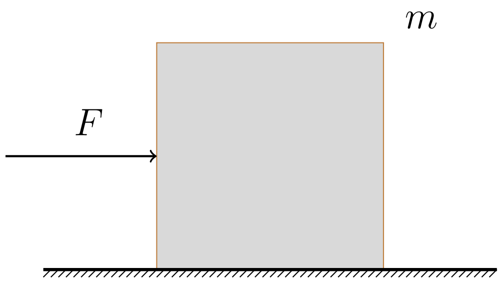
Llavors, aplicant la segona llei de Newton al cos m_3

$$F_{23} = m_3 a = 12 \cdot 6,06 = 72,72\, N = F_{32}$$

ara apliquem la segona llei de Newton al conjunt $m_2\,, m_3$

$$F_{12} = (m_2 + m_3)a = (11 + 12)6,06 = 139,38\, N = F_{21}$$

4.



Per calcular l'acceleració apliquem la segona llei de Newton

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{100}{40} = 2,5\,m/s^2$$

La velocitat al cap de $2\,s$ la calculem mitjançant les eines vistes a l'avaluació anterior

$$v = v_o + at = 0 + 2,5 \cdot 2 = 5\,m/s$$

5.

De forma semblant a l'exercici anterior

$$F = ma \rightarrow m = \frac{F}{a} = \frac{200}{2} = 100\,kg$$

i en quant al desplaçament efectuat en $10\,s$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \cancel{0 \cdot 10} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 100\,m$$

6.

Per resoldre l'exercici i trobar la força aplicada sobre el cos haurem de fer servir la segona llei de Newton, però necessitem saber l'acceleració. Fem servir les dades cinemàtiques que proporciona l'enunciat per calcular-la

A partir de

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

podem escriure

$$30 = \cancel{0 \cdot 20} + \frac{1}{2} a \cdot 20^2$$

d'on

$$a = \frac{2 \cdot 30}{20^2} = 0,15\, m/s^2$$

Ara, podem aplicar $F = ma$ per trobar la força aplicada

$$F = ma = 80 \cdot 0,15 = 12\, N$$

7.

Passem primer la velocitat a m/s

$$72\, \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{1000\, m}{1\, \cancel{km}} \times \frac{1\, \cancel{h}}{3600\, s} = 20\, m/s$$

Calculem ara l'acceleració

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \rightarrow 0 = 20^2 + 2a \cdot 60 \rightarrow a = -\frac{20^2}{2 \cdot 60} = -3,33\, m/s^2$$

i finalment la força demanada

$$F = ma = 1300 \cdot (-3,33) = -4333,33\, N$$

8.

Comencem calculant l'acceleració amb que es mourà el cos

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{150}{100} = 1,5\, m/s^2$$

ara, per calcular la velocitat al cap de $8\, s$

$$v = v_0 + at = 0 + 1,5 \cdot 8 = 12\, m/s$$

Al cap de $10\, s$ d'actuar la força la velocitat és més gran, la calculem

$$v = v_0 + at = 0 + 1,5 \cdot 10 = 15\, m/s$$

llavors, quan la força deixa d'actuar sobre el cos, i suposant que no actua cap altra força sobre ell, hem de suposar que mantindrà aquesta velocitat assolida. En $5\, s$ recorrerà doncs

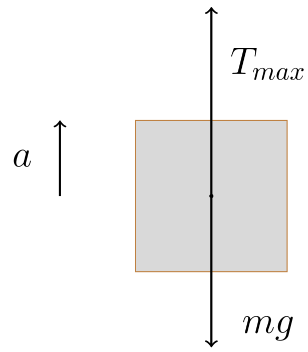
$$x = vt = 15 \cdot 5 = 75\, m$$

9.

Aplicant la segona llei de Newton

$$T - mg = ma \rightarrow T = mg + ma = m(g + a) = 1200(1 + 9,8) = 12960\, N$$

10.



Notem que la força que hauria de fer el fil per mantenir el cos en equilibri val, $T = mg = 10 \cdot 9,8 = 98\,N$, llavors, en les condicions del problema, s'està accelerant cap amunt, ja que s'està pujant amb $T_{max} = 200\,N$. L'acceleració que li correspon a aquesta tensió es pot calcular aplicant la segona llei de Newton al cos

$$T_{max} - mg = ma_{max}$$

$$a_{max} = \frac{T_{max} - mg}{m} = \frac{200 - 10 \cdot 9,8}{10} = 10,2\,m/s^2$$

11.

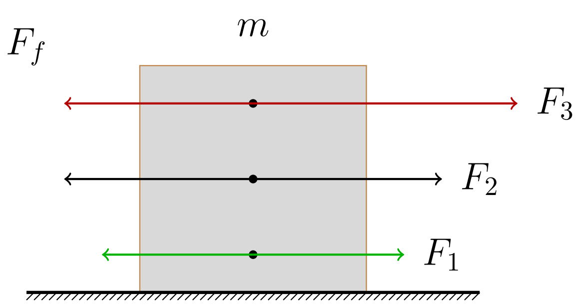
Si el pal fes una força sobre el bomber igual al seu pes, aquest estaria quiet. Com que baixa, apliquem la segona llei de Newton al bomber, tenint en compte que al estar baixant, el pes té el mateix signe que l'acceleració i la força que li fa el pal, sentit contrari. En aquestes condicions tenim

$$mg - F_{pal} = ma$$

$$F_{pal} = mg - ma = m(g - a) = 70 \cdot (9,8 - 3) = 476\,N$$

12.

Veiem que és el que succeeix quan a un cos que es troba recolzat sobre una superfície amb fregament se li aplica una força variable.



La força aplicada F_1 és més petita que la força de fregament màxima que presenta el cos amb la superfície, de manera que aquesta força de fregament s'adapta al valor de la força aplicada, i el cos roman quiet.

La força aplicada F_2 correspon al valor màxim del fregament entre el cos i la superfície. En aquest cas ens trobem en el límit en que el cos es pot començar a moure.

La força aplicada F_3 correspon a un valor més gran que el que pot assolir la força de fregament i llavors, tenim una força neta cap a la dreta $F_3 - F_f$ que provocarà una acceleració del cos.

En l'exercici que ens ocupa, ens parlen de la situació en la que s'aplicaria la força F_2, que ens diuen que val $500\,N$ i tenim que

$$500 = F_f = \mu_e N = \mu_e mg = \mu_s \cdot 120 \cdot 9,8$$

$$\mu_e = \frac{500}{120 \cdot 9,8} = 0,425$$

on hem usat $N = mg$, un resultat conegut de teoria.

13.

La situació és semblant a la de l'exercici anterior, i podem escriure

$$F_f = \mu mg \to mg = \frac{F_f}{\mu} = \frac{800}{0.8} = 1000\,N$$

14.

Calculem la força de fregament estàtic màxima que pot presentar el cos

$$F_f = \mu_e mg = 0,4 \cdot 60 \cdot 9,8 = 235,2\,N$$

Com que la força que s'aplica és $F = 300\,N$, més gran, el cos es mourà. Ara farem servir la segona llei de Newton per calcular l'acceleració però hem de tenir en compte que com ja s'està movent, hem de usar el coeficient de fregament dinàmic μ_d

$$F - F_f = ma \rightarrow F - \mu_d mg = ma$$

$$a = \frac{F - \mu_d mg}{m} = \frac{300 - 0,3 \cdot 60 \cdot 9,8}{60} = 2,06\, m/s^2$$

15.

Calculem primer l'acceleració

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$
$$0 = 15^2 + 2a \cdot 97,8 \rightarrow a = \frac{-15^2}{2 \cdot 97,8} = -1,15\, m/s^2$$

Per trobar el coeficient de fregament apliquem la segona llei de Newton, tenint en compte que la única força que està actuant sobre el cos mentre es mou és la de fregament que té sentit contrari al del moviment i per tant, acabarà aturant el cos,

$$-F_f = ma \rightarrow -\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a \rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = -\frac{-1,15}{9,8} = 0,117$$

16.

En quant a la força de fregament, podem escriure

$$F_f = \mu N = \mu m g = 0,3 \cdot 10 \cdot 9,8 = 29,4$$

i per l'acceleració tenim

$$F - F_f = ma \rightarrow a = \frac{F - f_f}{m} = \frac{300 - 29,4}{10} = 27,06\, m/s^2$$

Cossos enllaçats

1. A partir de l'esquema de la teoria, suposant que la massa m_1 es troba a l'esquerra i la massa m_2 a la dreta, les tensions són iguals i valen T i assumint ara que la politja es mou en sentit antihorari llavors, pel cos de l'esquerra tenim

$$m_1 g - T = m_1 a$$

i per el de la dreta

$$T - m_2 g = m_2 a$$

Sumant les equacions

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

d'on

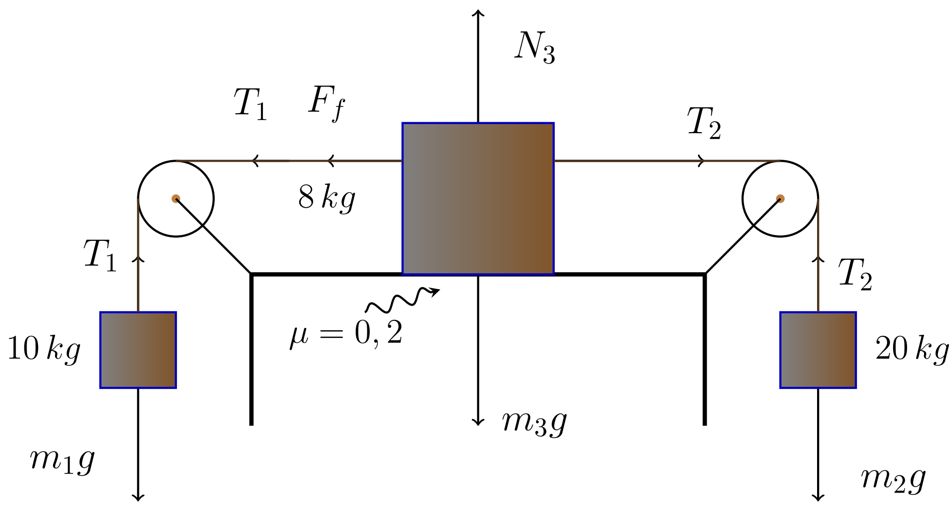
$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 9,8 \cdot \frac{4-2}{4+2} = 3,27 \, m/s^2$$

2. El, procés de resolució està detallat a la teoria, les equacions que s'obtenen són

$$a = g \frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 9,8 \cdot \frac{5 + 1 - 0,2 \cdot 3}{3 + 5 + 1} = 5,88 \, m/s^2$$

$$N_3 = m_3 g \frac{m_1 (1 + \mu)}{m_1 + m_2 + m_3} = 1 \cdot 9,8 \cdot \frac{3 \cdot (1 + 0,2)}{3 + 5 + 1} = 3,92 \, N$$

3.



Hem suposat que el sistema es mou *cap a la dreta*. Les equacions per cada massa són

$$T_1 - m_1g = m_1a$$
$$T_2 - T_1 - F_f = m_3a \qquad N_3 = m_3g$$
$$m_2g - T_2 = m_2a$$

que es poden escriure com

$$T_1 - m_1g = m_1a$$
$$T_2 - T_1 - \mu N_3 = m_3a \qquad N_3 = m_3g$$
$$m_2g - T_2 = m_2a$$

i, finalment

$$T_1 - m_1g = m_1a$$
$$T_2 - T_1 - \mu m_3g = m_3a$$
$$m_2g - T_2 = m_2a$$

Sumant-les, obtenim

$$m_2g - m_1g - \mu m_3g = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

d'on

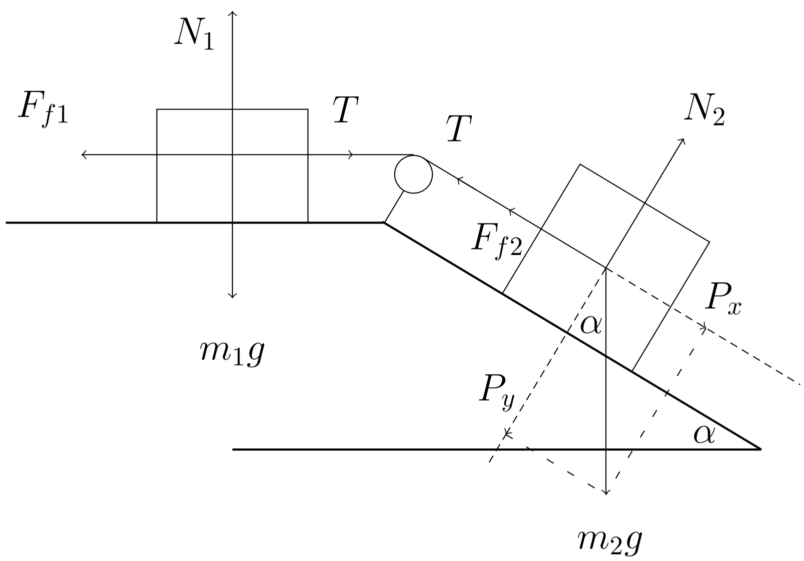
$$a = g\frac{m_2 - m_1 - \mu m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 9,8 \cdot \frac{20 - 10 - 0,2 \cdot 8}{10 + 20 + 8} = 2,07\, m/s^2$$

El pla inclinat

1. Només cal seguir el raonament fet a la teoria i substituir els valors a l'expressió final

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 3,2\,m/s^2$$

2. Posem noms a les masses, representem les forces i escrivim les equacions per cada cos



Pel cos 1 les equacions son,

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \\ T - F_{f1} = m_1 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1 g \\ T - \mu N_1 = m_1 a \end{cases} \rightarrow T - \mu m_1 g = m_1 a$$

Pel cos 2 les equacions son,

$$\begin{cases} N_2 = P_y \\ P_x - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\alpha \\ m_2 g \sin\alpha - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\alpha \\ m_2 g \sin\alpha - T - \mu N_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow m_2 g \sin\alpha - T - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 a$$

llavors, obtenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g = m_1 a \\ m_2 g \sin\alpha - T - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 a \end{cases}$$

que es resol trivialment per donar,

$$m_2 g \sin\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha - \mu m_1 g = m_1 a + m_2 a$$

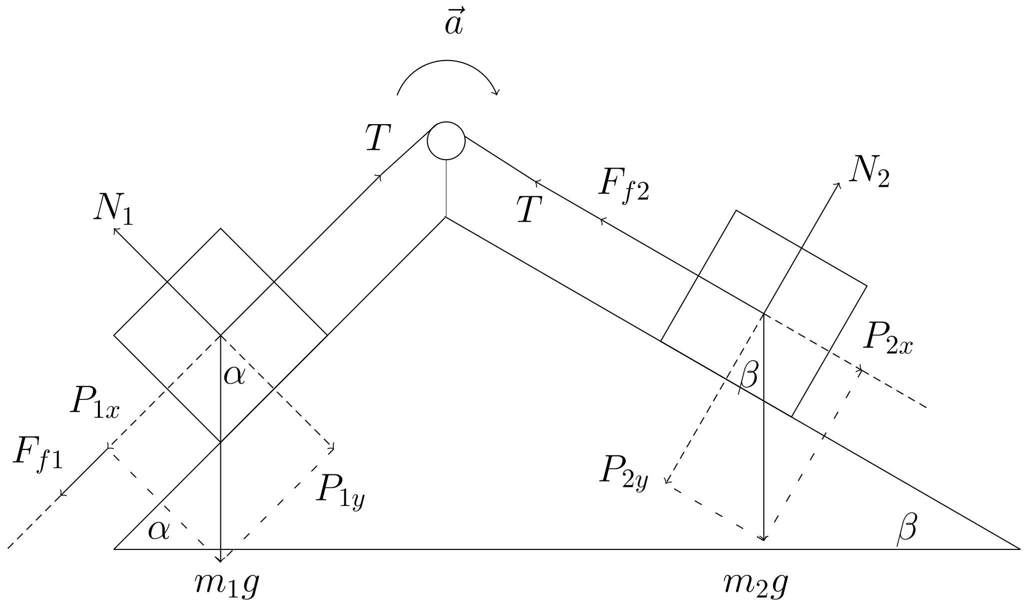
d'on

$$a = g \cdot \frac{m_2 \sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha - \mu m_1}{m_1 + m_2}$$

$$= 9,8 \cdot \frac{25 \sin 30^\circ - 0,2 \cdot 25 \cos 30^\circ - 0,2 \cdot 8}{8 + 25}$$

$$= 1,95\, m/s^2$$

3.



Pel cos 1 les equacions son,

$$\begin{cases} N_1 = P_{1y} \\ T - F_{f1} - P_{1x} = m_1 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ T - F_{f1} - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\alpha \\ T - \mu N_1 - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \end{cases} \rightarrow T - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a$$

Pel cos 2 les equacions son,

$$\begin{cases} N_2 = P_{2y} \\ P_{2x} - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\beta \\ m_2 g \sin\beta - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\beta \\ m_2 g \sin\beta - T - \mu N_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow m_2 g \sin\beta - T - \mu m_2 g \cos\beta = m_2 a$$

Obtenim llavors el sistema

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a \\ m_2 g \sin\beta - T - \mu m_2 g \cos\beta = m_2 a \end{cases}$$

que es resol fàcilment per donar

$$m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta - \mu m_1 g \cos\alpha - m_1 g \sin\alpha = m_1 a + m_2 a$$

d'on finalment

$$a = g \cdot \frac{m_2 \sin\beta - \mu m_2 \cos\beta - \mu m_1 \cos\alpha - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}$$

Dinàmica del moviment circular

La utilitat dels exercicis 1, 2 i 3 és ser capaç de reproduir els raonaments que porten als resultats finals. No es repetirà aquí el que s'explica a la teoria.

1. *Atenció!*: Ja es va comentar a la classe (i en breu es corregirà als apunts) que prenguéssim $\omega = \frac{20\pi}{3}$.

En el cas que el cos és a dalt de tot tenim,

$$T = m\omega^2 L - mg = 5\left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 2 - 5 \cdot 9,8 = 4337,5\,N$$

En el cas que el cos és a mitja alçada,

$$T = m\omega^2 L = 5\left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 2 = 4386,5\,N$$

Quant el cos és a la part inferior de la trajectòria,

$$T = m\omega^2 L + mg = 5\left(\frac{20\pi}{3}\right)^2 2 + 5 \cdot 9,8 = 4435,5\,N$$

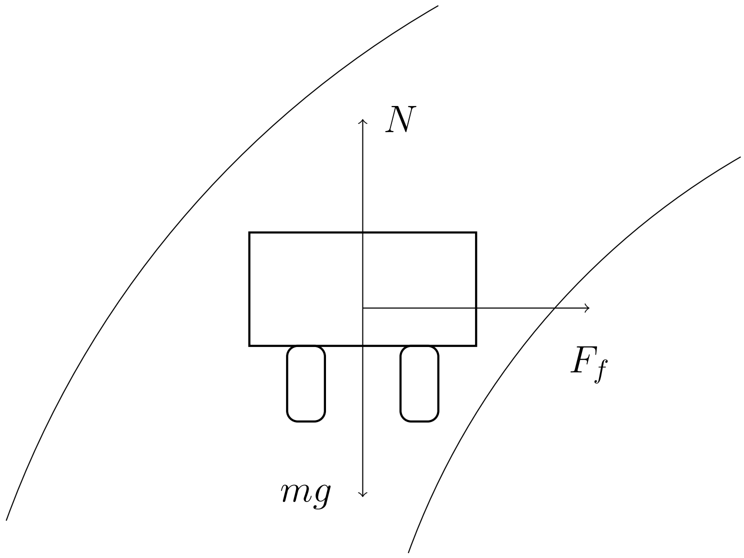
2. Com a resultat tenim,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu R}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,3 \cdot 2}} = 4,04\,rad/s$$

3. A la teoria s'arriba a l'expressió

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{MR}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 9,8}{10 \cdot 1}} = 3,83\,rad/s$$

4.



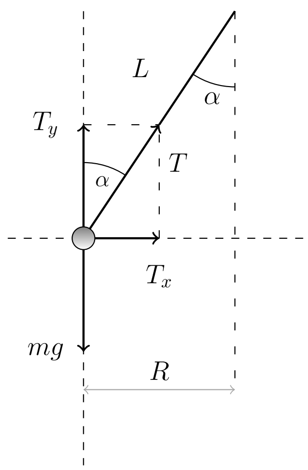
La força normal equilibra al pes, mentre que hi ha d'haver alguna força no equilibrada que proporcioni acceleració centrípeta, per tal que el cotxe pugui descriure la corba, llavors

$$\begin{cases} N = mg \\ F_f = m\frac{v^2}{R} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N = mg \\ \mu N = m\frac{v^2}{R} \end{cases} \rightarrow \mu \cancel{m} g = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

d'on

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,3 \cdot 9,8 \cdot 25} = 8,57\, m/s$$

5.



Després de posar uns eixos orientats d'acord amb el pes mg veiem que la component vertical de la tensió equilibra al pes i la component horitzontal proporciona l'acceleració centrípeta,

$$\begin{cases} T_x = m\frac{v^2}{R} \\ T_y = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

a) Tenim

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0,5\cdot 9,8}{\cos 60^\circ} = 9,8\,N$$

b) Dividint les equacions

$$\frac{\cancel{T}\sin\alpha}{\cancel{T}\cos\alpha} = \frac{\cancel{m}\frac{v^2}{R}}{\cancel{m}g}$$

d'on

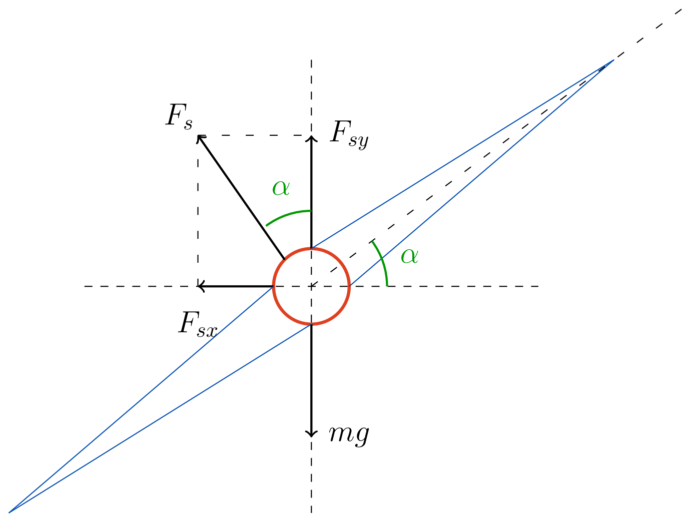
$$v = \sqrt{Rg\tan\alpha}$$

per una altra banda, del dibuix es veu que és $R = L\sin\alpha$, llavors

$$v = \sqrt{Rg\tan\alpha} = \sqrt{Lg\sin\alpha\tan\alpha} = \sqrt{0.5\cdot 9,8\sin 60^\circ\tan 60^\circ} = 2,71\,m/s$$

c) Sabem que la velocitat sempre és tangent a la trajectòria i com l'acceleració centrípeta es dirigeix cap al centre, l'angle que formen velocitat i acceleració és 90°.

6.



Per tal de girar, el pilot de l'avió maniobra amb els alerons per desequilibrar-lo. D'aquesta manera, la força de sustentació, perpendicular al pla de les ales, proporciona la força centrípeta necessària perquè l'avió descrigui el gir. La component vertical de la força de sustentació equilibra el pes.

$$\begin{cases} F_{sx} = m\frac{v^2}{R} \\ F_{sy} = mg \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_s\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \\ F_s\cos\alpha = mg \end{cases}$$

Dividint les equacions

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{Rg} \tag{1}$$

a) Les restriccions per l'acceleració màxima ens permeten escriure

$$a_c = \frac{v^2}{R} = 8g$$

d'on

$$R = \frac{v^2}{8g} = \frac{400^2}{8 \cdot 9,8} = 2040,82\, m$$

b) De l'expressió (1), obtinguda abans

$$\alpha = \arctan\frac{v^2}{Rg} = \arctan\frac{8Rg}{Rg} = \arctan 8 = 82,87^\circ$$

La corba peraltada

1.

Velocitat màxima

a) $\alpha = 0°$

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}$$

Per $\alpha = 0°$ la superfície és horitzontal, i el resultat que obtenim és el mateix que vam trobar en un exercici anterior.

b) $\alpha = 90°$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{-Rg}{\mu}}$$

El resultat no és un nombre real. Ho interpretem com que al ser la superfície vertical no hi ha cap límit superior per la velocitat (sí un valor mínim com veurem després).

Velocitat mínima

a) $\alpha = 0°$

$$v_{min} = \sqrt{-\mu g R}$$

Aquest valor no és un nombre real. Per aquest angle no hi ha velocitat mínima per descriure la corba, de fet el vehicle podria estar aturat.

b) $\alpha = 90°$

$$v_{min} = \sqrt{\frac{Rg}{\mu}}$$

Quan la superfície és vertical, cal una velocitat mínima perquè el vehicle pugui descriure la corba.

2.

Trobem la velocitat mínima i màxima.

$$v_{min} = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{25 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sin 30^\circ - \mu\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ + \mu\sin 30^\circ}}$$

$$= 9,1\, m/s$$

$$v_{max} = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

$$= \sqrt{25 \cdot 9,8 \cdot \frac{\sin 30^\circ + 0,2\cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - 0,2\sin 30^\circ}}$$

$$= 14,67\, m/s$$

3.

A mesura que μ va disminuint el rang de velocitats pel qual el vehicle pot descriure la corba es va fent més i més petit. Quan és $\mu = 0$ les expressions de la velocitat mínima i màxima coincideixen al valor

$$v = \sqrt{Rg\tan\alpha}$$