1. (a) Podem calcular la velocitat a partir de

$$2\pi r = vT$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^{20}}{203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,36 \cdot 10^5\, m/s$$

(b) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

tenint en compte que el període val

$$T = 203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 6,402 \cdot 10^{15}\, s$$

podem escriure

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(6,402 \cdot 10^{15}\right)^2} \cdot \left(2,4 \cdot 10^{20}\right)^3 = 2,00 \cdot 10^{41}\, kg$$

2. (a) Imposant servir la condició $v_e^p = 6 v_e^{\oplus}$, tenim

$$\sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} = 6\sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$$

elevant al quadrat

$$\frac{2GM_p}{R_p} = 36 \cdot \frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}$$

fent servir la dada de la relació entre les masses del planeta i la Terra

$$\frac{\cancel{2G} \cdot 360 \cancel{M_{\oplus}}}{R_p} = 36 \cdot \frac{\cancel{2GM_{\oplus}}}{R_{\oplus}}$$

d'on la relació entre el radi del planeta i el de la Terra val

$$\frac{R_p}{R_{\oplus}} = \frac{360}{36} = 10$$

(b) Ara, per la relació entre el valor del camp gravitatori del planeta i la Terra

$$\frac{g_p}{g_{\oplus}} = \frac{\frac{GM_p}{R_p^2}}{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}} = \frac{\frac{\cancel{G \cdot} 360 \cancel{M_{\oplus}}}{R_p^2}}{\frac{\cancel{GM_{\oplus}}}{R_{\oplus}^2}} = \frac{360 R_{\oplus}^2}{R_p^2} = 360 \left(\frac{R_{\oplus}}{R_p}\right)^2 = 360(0,1)^2 = 3,6$$

3. (a) Tenim

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{(5500 \cdot 10^3)^2} =$$

(b) Calculem

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{5500 \cdot 10^3}} = 1,54 \cdot 10^4 \, m/s$$

4. (a) Al periheli, l'energia mecànica de Mart (♂) val,

$$\begin{aligned} E_{M_p} &= \frac{1}{2} M_{♂} v_p^2 - \frac{G M_\odot M_{♂}}{r_p} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot \left(26,50 \cdot 10^3\right)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{206,7 \cdot 10^9} \\ &= -1,87 \cdot 10^{32} \, J \end{aligned}$$

Llavors, com que l'energia mecànica es conserva, a l'afeli podem escriure

$$E_{M_a} = \frac{1}{2} M_{♂} v_a^2 - \frac{G M_\odot M_{♂}}{r_a} = -1,87 \cdot 10^{32}$$

d'on

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{2}{M_{♂}} \cdot \left(-1,87 \cdot 10^{32} + \frac{G M_\odot M_{♂}}{r_a}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{6,42 \cdot 10^{23}} \cdot \left(-1,87 \cdot 10^{32} + \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{249,2 \cdot 10^9}\right)} \\ &= 2,2 \cdot 10^4 \, m/s \end{aligned}$$

(b) L'energia mecànica es conserva, per tant, valdrà el mateix a l'afeli que al periheli (aquesta darrera l'hem calculat abans),

$$E_{M_a} = -1,87 \cdot 10^{32} \, J$$

5. (a) L'energia cinètica mínima, o de forma equivalent, el treball mínim, que cal donar per situar-lo en l'òrbita desitjada es pot calcular com la diferència d'energia mecànica que tingui a dalt i la que té a la superfície de la Terra. Noteu que en aquest exercici parla de situar-lo a una altura; llavors, quan escrivim l'energia mecànica a

dalt només tindrem en compte el terme d'energia potencial gravitatòria. Al segon apartat sí que ens demanen l'energia addicional que ha de tenir per *descriure* l'òrbita correctament.

$$E_{c_{min}} = W_{min} = -\frac{GM_{\oplus}m}{2R_{\oplus}} - \left(-\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}\right)$$

$$= \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{GM_{\oplus}m}{2R_{\oplus}}$$

$$= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 10^{3}}{2 \cdot 6,37 \cdot 10^{6}} = 3,13 \cdot 10^{10}\, J$$

(b) A banda d'haver arribat on és, per mantenir uns òrbita estable el satèl·lit necessita tenir una velocitat,

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{2R_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 6,37 \cdot 10^{6}}} = 5,59 \cdot 10^{3}\, m/s$$

i per tant l'energia cinètica addicional que caldrà val,

$$E_{c_{add}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot \left(5,59 \cdot 10^3\right)^2 = 1,56 \cdot 10^{10}\, J$$