1 Mecanismes de transmissió del moviment

1.1 Transmissió mitjançant elements flexibles

1.1.1 Transmissió per corretja

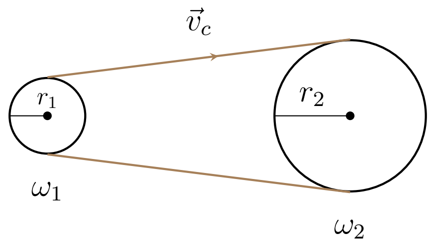
Formada per dues politges unides mitjançant un element flexible anomenat *corretja*. Tenen l'avantatge de poder treballar amb distàncies relativament llargues entre els eixos i transmetre grans esforços. Si es necessita molta velocitat i precisió es poden fer servir corretges *dentades*.

1.1.2 Transmissió per cadena

Amb la cadena s'elimina la possibilitat de lliscament (que amb la corretja hi és present) i de la mateixa manera que amb les cadenes, es poden transmetre esforços molt grans a distàncies relativament llargues entre els eixos.

1.1.3 Càlcul de velocitats. Relació de transmissió

Considerem un sistema de transmissió per corretja com el representat a continuació



La velocitat $\vec{v}_c$ de la corretja serà la mateixa que la velocitat lineal de les politges v_1, v_2, suposant que la corretja no llisca sobre elles. Llavors

$$v_1 = v_2 \to \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \tag{1}$$

si suposem que la politja motriu (que forma part de l'eix d'un motor, per exemple) és la 1, llavors l'anomenem *conductora* i a la 2, *conduïda*.

Definim la *relació de transmissió* com el quocient

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{2}$$

De forma similar a com definíem la potència desenvolupada per una força que actua sobre un objecte desplaçant-lo amb moviment rectilini i velocitat constant

$$P = F \cdot v$$

podem definir la potència desenvolupada per un *parell* $\Gamma = F \cdot r$ que fa girar una politja amb velocitat ω,

$$P = \Gamma \cdot \omega \tag{3}$$

i si suposem que no hi ha pèrdua de potència en la transmissió

$$P_1 = P_2 \to \Gamma_1 \cdot \omega_1 = \Gamma_2 \cdot \omega_2 \to \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \tag{4}$$

Ha de quedar clar que els valors desitjats de τ s'obtenen sense més que fent servir els radis adequats per la politja motriu i la conduïda.

Podem trobar dues situacions d'interès

- Quan $\tau > 1$ llavors la velocitat angular de sortida és més gran que la d'entrada, parlem de *sistema multiplicador*. En aquestes condicions, el parell de sortida disminueix respecte al d'entrada. Un exemple d'aquesta situació és quan en una bicicleta que té diverses marxes fem servir la combinació *plat* gran i *pinyó* petit. Hem de fer molta força per moure'ns però per cada volta que donem als pedals la roda posterior en dóna més, cosa que s'aprofita en baixades per adquirir més velocitat pedalant.

- Quan $\tau < 1$ la velocitat angular de sortida és menor que la d'entrada però el parell és més gran, parlem de *sistema reductor*. Aquesta situació la trobem per exemple en la transmissió de l'eix del motor d'una rentadora i el tambor. El motor pot girar a molta velocitat però té poca força en comparació. L'avantatge mecànic s'obté perquè el radi de l'eix del motor és molt més petit que l'eix del tambor i el parell es multiplica notablement.

1.2 Transmissió mitjançant engranatges

Els engranatges són mecanismes de transmissió de moviment circular mitjançant rodes dentades. Poden transmetre grans esforços i treballar a grans velocitats però el seu ús es limita a eixos que es troben a poca distància.

1.2.1 Càlcul de velocitats i relacions de transmissió

En aquest tipus de transmissió es pot establir la relació

$$\omega_1 \cdot z_1 = \omega_2 \cdot z_2 \tag{5}$$

on ω_1, ω_2 són les velocitats angulars d'entrada i sortida respectivament i z_1, z_2 les dents de cadascun dels engranatges. De forma semblant a la transmissió per corretja, podem definir la relació de transmissió τ com

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2} \tag{6}$$

Exemple 1.2.1.1

Un ciclista es troba circulant amb la seva bicicleta a una certa velocitat en un terreny pla. La longitud del pedal és de $150\,mm$ i el ciclista aplica una força constant de $150\,N$ fent que el plat (que té 60 dents) giri a $120\,min^{-1}$. Si el pinyó que du engranat la cadena en aquell moment té 12 dents i la roda posterior té $60\,cm$ de diàmetre, es demana

1. Calculeu la velocitat angular del pedal en rad/s

   Fem el factor de conversió

   $$120\,min^{-1} \equiv 120\frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \cdot \frac{2\pi\,rad}{1\cancel{rev}} \cdot \frac{1\cancel{min}}{60\,s} = 4\pi\,rad/s$$

2. Calculeu el parell aplicat al pedal

   A partir de la definició de parell podem calcular

   $$\Gamma = F \cdot r = 150 \cdot 0,150 = 22,5\,N \cdot m$$

3. Calculeu la potència motriu

   El ciclista, desenvolupa en el pedal una potència

   $$P = \Gamma\omega = 22,5 \cdot 4\pi = 90\pi = 282,74\,W$$

4. Calculeu la relació de transmissió en les condicions de l'exemple

   És fàcil calcular, a partir del nombre de dents de plat i pinyó

   $$\tau = \frac{z_1}{z_2} = \frac{60}{12} = 5$$

5. Calculeu la velocitat angular del pinyó i la roda posterior de la bicicleta

   Amb el resultat de l'apartat anterior i la definició de relació de transmissió
   $$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \omega_2 = \omega_1 \tau = 4\pi \cdot 5 = 20\pi \, rad/s$$

6. Calculeu la velocitat lineal d'un punt de la perifèria de la roda posterior

   Fent servir la relació
   $$v = \omega \cdot r = 20\pi \cdot 0,6 = 12\pi = 37,7 \, m/s$$

7. Calculeu la velocitat amb que es mou el ciclista.

   La velocitat del ciclista i la bicicleta és la mateixa que la velocitat lineal dels punts de la perifèria de la roda, per tant, el ciclista es mou a $37,7 \, m/s$

2 Trens de mecanismes

Anomenem tren de mecanismes a qualsevol associació de més de dos mecanismes, que poden ser politges, engranatges, etc.

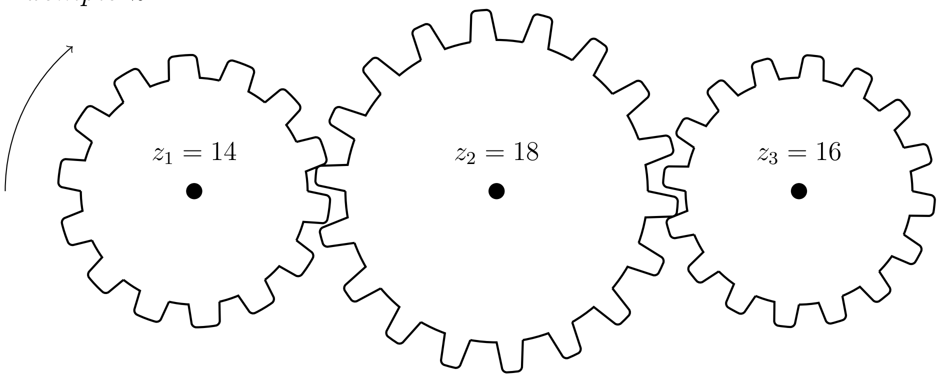
2.1 Càlcul de velocitats i relacions de transmissió

Per trobar la relació de transmissió d'un tren de mecanismes podem fer servir la fórmula[†]
$$\tau = \frac{\prod z_{\text{conductores}}}{\prod z_{\text{conduïdes}}} \tag{7}$$

También podem anar aplicant la condició que calgui (comparteixen velocitat lineal a la perifèria o comparteixen velocitat angular) a cada parell d'elements del tren. Hi ha diverses maneres de representar els trens de mecanismes. Als exemples en veurem unes quantes.

[†]El símbol $\prod$ s'anomena productori i per exemple és
$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$$

Exemple 2.1.1



Suposem que la roda 1 és la motriu, llavors forma part de les conductores. La roda 2 és conduïda per la 1 i al seu torn condueix la 3. La roda 3, finalment, només es pot considerar conduïda. Així

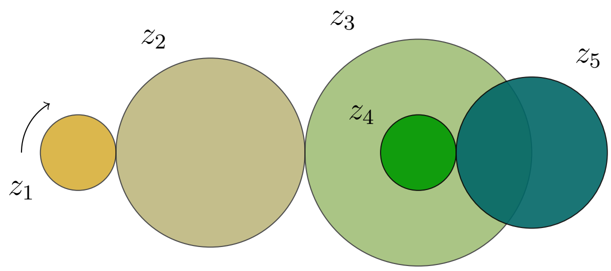
$$\tau = \frac{z_1 z_2}{z_2 z_3} = \frac{z_1}{z_3} = \frac{14}{16} = 0.875$$

El sistema es comporta com un reductor. La velocitat angular de la sortida serà menor que la d'entrada i el parell (a la sortida), més gran. Noteu que el valor de la relació de transmissió no depèn de la roda 2. De fet, tant és quantes dents tingui, el seu paper és fer de roda *inversora*, canviant el sentit de gir de la tercera respecte del que tindria si la segona no hi fos.

Exemple 2.1.2

Trobeu la relació de transmissió en el següent tren de mecanismes, amb

$$z_1 = 10 \qquad z_2 = 30 \qquad z_3 = 35 \qquad z_4 = 10 \qquad z_5 = 20$$



Ara farem servir un altre mètode. Sabem que per definició, la relació de transmissió del tren de mecanismes és

$$\tau = \frac{\omega_5}{\omega_1}$$

i que en un parell qualsevol a, b d'engranatges que tenen contacte en la seva perifèria

$$v_a = v_b \rightarrow \omega_a z_a = \omega_b z_b$$

i per els que giren solidàriament al voltant d'un eix

$$\omega_a = \omega_b$$

Llavors,

$$\tau = \frac{\omega_5}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1}[\omega_5] = \frac{1}{\omega_1}\left[\frac{z_4}{z_5}\omega_4\right] = \frac{1}{\omega_1}\left[\frac{z_4}{z_5}\omega_3\right] = \frac{1}{\omega_1}\left[\frac{z_4}{z_5}\frac{z_2}{z_3}\omega_2\right] = \frac{1}{\cancel{\omega_1}}\left[\frac{z_4}{z_5}\frac{z_2}{z_3}\frac{z_1}{z_2}\cancel{\omega_1}\right]$$

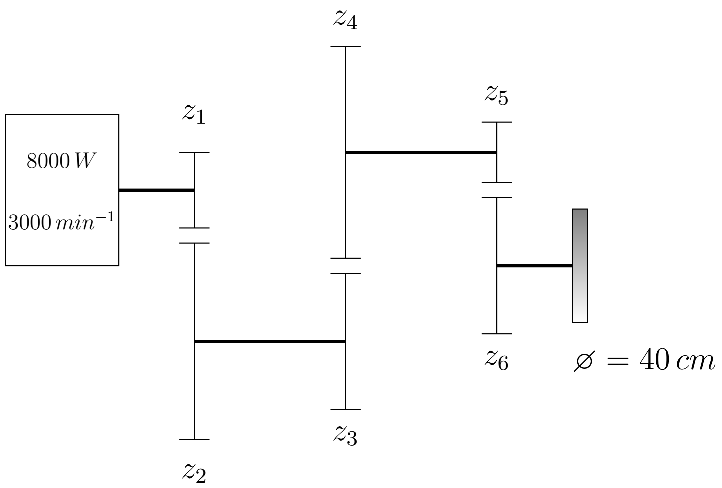
finalment,

$$\tau = \frac{z_4}{z_5}\frac{\cancel{z_2}}{z_3}\frac{z_1}{\cancel{z_2}} = \frac{z_4}{z_5}\frac{z_1}{z_3}$$

Fixem-nos que coincideix amb el que faríem si apliquéssim la fórmula (7). La roda 1 és la motriu i per tant, conductora. La roda 2 també es pot considerar conductora ja que fa girar la 3 *per la seva perifèria*. La roda 4 també condueix la 5. Noteu que la 3 i la 4 giren amb la mateixa velocitat angular.

Exemple 2.1.3

El diagrama següent mostra el tren de mecanismes que governa les rodes d'un tramvia. Suposant que $z_1 = 10$, $z_2 = 25$, $z_3 = 15$, $z_4 = 35$, $z_5 = 8$, $z_6 = 18$, calculeu la velocitat del tramvia i el parell a la roda. És aquesta combinació d'engranatges que es mostra reductora o multiplicadora?



Calculem la relació de transmissió del conjunt.

$$\tau = \frac{z_1 z_3 z_5}{z_2 z_4 z_6} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 8}{25 \cdot 35 \cdot 18} = 0,0762 < 1 \text{ (sistema reductor)}$$

Per calcular el parell a la sortida suposem que no hi ha pèrdues de potència en el tren de mecanismes

$$P_1 = P_6 \rightarrow P_1 = \Gamma_6 \cdot \omega_6 \rightarrow \Gamma_6 = \frac{P_1}{\omega_6} = \frac{P_1}{\omega_1 \cdot \tau} = \frac{8000}{3000 \cdot \frac{\pi}{30} \cdot 0,0762} = 334,2\, N \cdot m$$

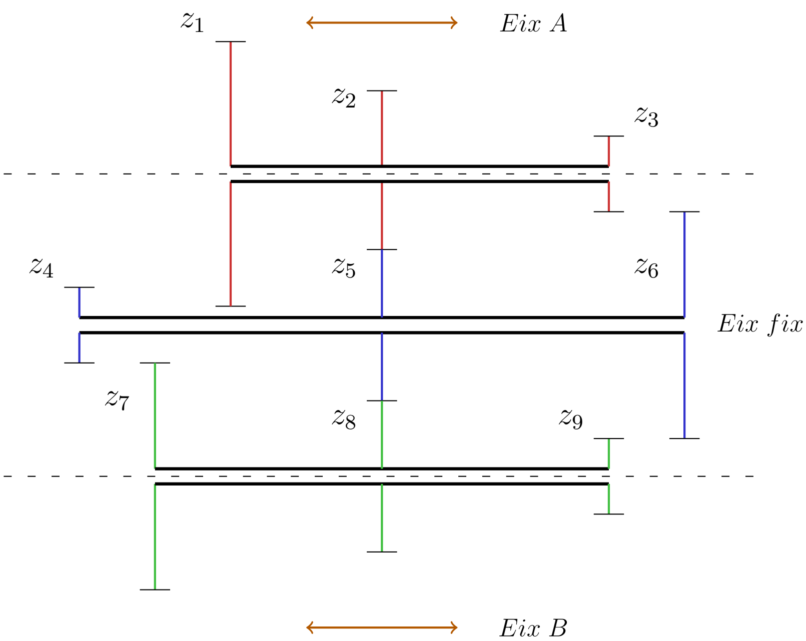
on hem passat implícitament la velocitat angular de rev/min a rad/s (podeu repassar els detalls del factor de conversió al primer apartat de l'exemple 1.2.1.1). Finalment, la velocitat del tramvia serà la mateixa que la velocitat lineal de la roda. Així

$$v_6 = \omega_6 \cdot r_6 = \omega_1 \cdot \tau \cdot r_6 = 3000 \cdot \frac{\pi}{30} \cdot 0,0762 \cdot 0,2 = 4,788\, m/s$$

2.2 Caixes de canvi de marxes

Els trens de mecanismes ofereixen la possibilitat de poder transmetre moviment amb un efecte reductor o multiplicador però la relació de transmissió és fixa. Per dotar-los de més versatilitat es fan servir les anomenades *caixes de canvi de marxes.*

Exemple 2.2.1



Els eixos A, B són mòbils de forma que desplaçant-los a dreta i esquerra es poden aconseguir diferents relacions de transmissió. Per conveniència, codificarem la configuració de l'esquema anomenant els engranatges que es troben activats, en l'exemple: 2-5-8. Si suposem que z_1 és el motriu i que el nombre de dents és $z_1 = 40$, $z_6 = z_7 = 30$, $z_2 = z_5 = z_8 = 15$ i $z_3 = z_4 = z_9 = 10$, la relació de transmissió (fins a la sortida, roda 9) en l'estat actual val, aplicant la fórmula (7)

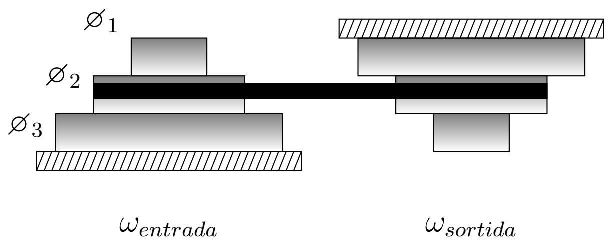
$$\tau_{2-5-8} = \frac{z_2 \cancel{z_5}}{\cancel{z_5} z_8} = \frac{z_2}{z_8} = \frac{15}{15} = 1$$

també es pot calcular a partir de (5) i (6)

$$\tau = \frac{\omega_9}{\omega_1} = \frac{\omega_8}{\omega_1} = \frac{\omega_5 z_5}{z_8 \omega_1} = \frac{\omega_2 z_2 z_5}{z_5 z_8 \omega_1} = \frac{\omega_1 z_2 \cancel{z_5}}{\cancel{z_5} z_8 \omega_1} = \frac{z_2}{z_8} = \frac{15}{15} = 1$$

Exemple 2.2.2 (Con de politges)

Considerem el següent mecanisme, consistent en dos cons iguals de politges que se situen invertits de manera que la corretja de transmissió pot estar en tres posicions diferents.



La relació de transmissió (fent servir l'expressió (1)) en la situació representada val

$$\tau = \frac{\omega_{sortida}}{\omega_{entrada}} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\varnothing_2/2}{\varnothing_2/2} = 1$$

Noteu que si els cons tenen un nombre senar de politges llavors sempre hi ha una posició en la que $\tau = 1$.

Exercicis

1. Fent servir la situació i les dades de l'exemple 2.2.1, es demana:
   (a) Representeu *totes* les combinacions possibles (hi ha nou) per aquest canvi de marxes. Recordeu que l'eix central roman sempre fix.
   (b) Calculeu la relació de transmissió *per cada cas* de l'apartat anterior.
   (c) Suposant que a la roda 1 la potència val $P = 200\,CV$, calculeu els parells màxim i mínim de sortida i especifiqueu per quina configuració del mecanisme es dona cadascun d'aquests valors.

2. Considereu un con de politges amb diàmetres $\varnothing_1 = 100\,mm$, $\varnothing_2 = 150\,mm$, $\varnothing_3 = 200\,mm$ i $\varnothing_4 = 250\,mm$. Suposem que a l'entrada la velocitat de rotació val $n_{in} = 1500\,min^{-1}$ i la potència $P = 10\,CV$. Es demana:
   (a) Calculeu el parell Γ_{in} a l'entrada.
   (b) Feu un esquema i calculeu la relació de transmissió en totes les configuracions diferents del mecanisme (quatre).
   (c) Calculeu el valor del parell màxim i mínim de sortida i dieu per quina configuració es dona cada valor Γ_{out}.