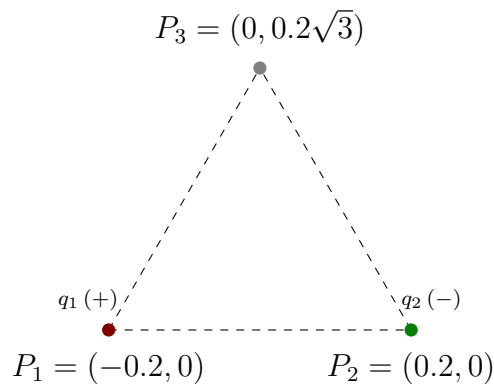


### Exercici 44

a) Podem representar la situació amb el següent esquema, on hem situat la càrrega positiva en el punt  $P_1 = (-0.2, 0)$  i la negativa al punt  $P_2 = (0.2, 0)$ . En aquestes condicions, el tercer vèrtex del triangle equilàter es troba al punt  $P_3 = (0, 0.4 \sin 60^\circ) = (0, 0.4 \frac{\sqrt{3}}{2}) = (0, 0.2\sqrt{3})$



Per calcular el camp elèctric en  $P_3$ , creat per  $q_1$  i  $q_2$ , necessitem els vectors

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = (0, 0.2\sqrt{3}) - (-0.2, 0) = (0.2, 0.2\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{P_2 P_3} = (0, 0.2\sqrt{3}) - (0.2, 0) = (-0.2, 0.2\sqrt{3})$$

i el seu mòdul

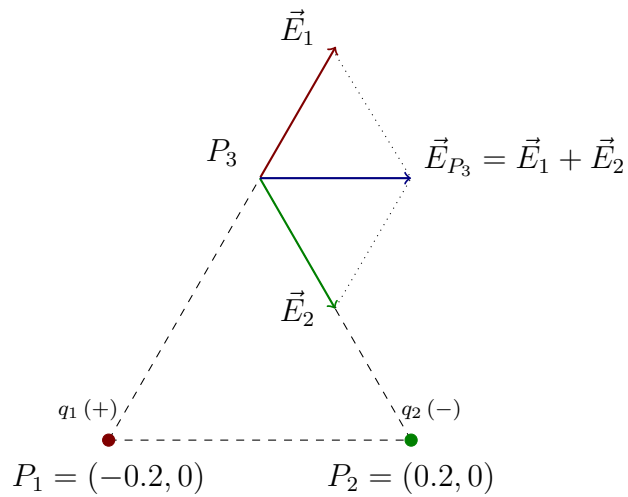
$$|\overrightarrow{P_1 P_3}| = \sqrt{(0.2)^2 + (0.2\sqrt{3})^2} = 0.2\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 0.2\sqrt{1+3} = 0.4 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{P_2 P_3}| = \sqrt{(-0.2)^2 + (0.2\sqrt{3})^2} = 0.2\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 0.2\sqrt{1+3} = 0.4 \text{ m}$$

ara podem calcular

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{P_3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{P}_1\vec{P}_3|^3} \vec{P}_1\vec{P}_3 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{P}_1\vec{P}_3|^3} \vec{P}_2\vec{P}_3 \\
&= 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-8}}{(0,4)^3} \cdot (0,2,0,2\sqrt{3}) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-8}}{(0,4)^3} \cdot (-0,2,0,2\sqrt{3}) \\
&= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2}{(0,4)^3} \left[ (1, \sqrt{3}) + (1, -\sqrt{3}) \right] \\
&= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2}{(0,4)^3} (2,0) \\
&= (1.6875, 0) \text{ N/C}
\end{aligned}$$

La representació del camp seria



En quant al potencial elèctric en  $P_3$

$$\begin{aligned}
V_{P_3} &= V_1^{P_3} + V_2^{P_3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1 P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2 P_3}|} \\
&= 9 \cdot 10^9 \frac{3 \cdot 10^{-8}}{0,4} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-3 \cdot 10^{-8}}{0,4} \\
&= 0 \text{ V}
\end{aligned}$$

**b)** Per trobar l'energia potencial elèctrica de les dues càrregues, calculem el treball que cal fer per dur-les des de l'infinit fins el punt on es troben.

El treball per dur la càrrega  $q_1$  al punt  $P_1$  des de l'infinit

$$W_{\infty \rightarrow P_1} = q_1 \cdot (V_{P_1} - V_{\infty}) = q_1 \cdot (0 - 0) = 0 \text{ V}$$

quan  $q_1$  es dirigeix a  $P_1$ , no hi ha cap altre càrrega present i el potencial en  $P_1$  val zero

Ara, el treball per dur la càrrega  $q_2$  al punt  $P_2$  des de l'infinit

$$W_{\infty \rightarrow P_2} = q_2 \cdot (V_{P_2} - V_{\infty}) = q_2 \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|} - 0 \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|}$$

quan  $q_2$  arriba a  $P_2$ , sentirà l'efecte del potencial que crea  $q_1$  en aquest punt.

Noteu que sovint es pren aquest darrer resultat com a “fórmula” per calcular l'energia potencial elèctrica de dues càrregues. Si al problema que hem de resoldre n'hi ha tres o més, llavors la “fórmula” anterior ja no és útil. És sempre millor conèixer els mètodes generals que funcionen en qualsevol situació, independentment del nombre de càrregues presents o la seva disposició en figures més o menys regulars.

La suma  $W_{\infty \rightarrow P_1} + W_{\infty \rightarrow P_2}$  d'aquests dos treballs és l'energia de configuració o energia potencial elèctrica del sistema de càrregues

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{P_1 P_2}|}$$

Quan la distància es duplica, fent una anàlisi semblant, es comprova que aquesta energia val ara

$$E_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(2|\vec{P_1 P_2}|)}$$

Llavors, per la variació de l'energia potencial elèctrica, tenim

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_f - E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{2|\vec{P_1 P_2}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\vec{P_1 P_2}|} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{P_1 P_2}|} \end{aligned}$$

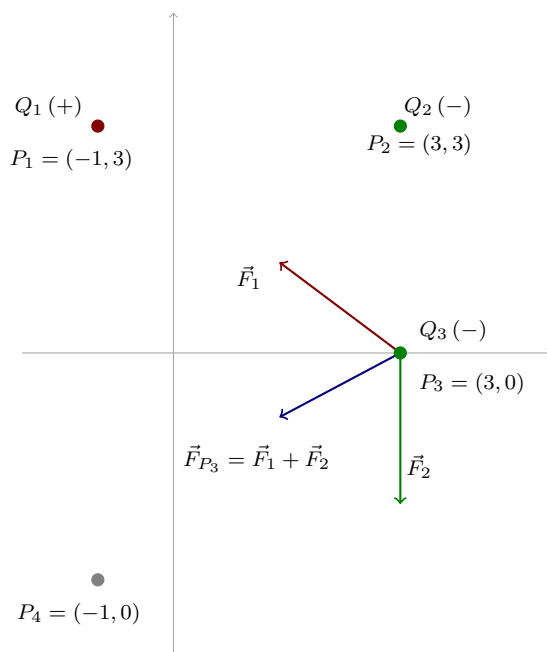
substituint els valors coneguts

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-(3 \cdot 10^{-8})^2}{0.4} = 1,0125 \cdot 10^{-5} J > 0$$

l'energia potencial augmenta, que és el que podíem esperar ja que les càrregues de diferent signe s'atrauen, l'energia potencial que tenen com a parella és negativa i si les separem, aquesta energia s'acosta a zero pels valors negatius, per tant augmenta.

## Exercici 45

a)



Per calcular la força que fan  $Q_1$  i  $Q_2$  sobre  $Q_3$ , calcularem el camp elèctric que creen  $Q_1$  i  $Q_2$  en el punt  $P_3$ . Necessitem els vectors

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = (3, 0) - (-1, 3) = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{P_2 P_3} = (3, 0) - (3, 3) = (0, -3)$$

i el seu mòdul

$$|\overrightarrow{P_1 P_3}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5 \, m$$

$$|\overrightarrow{P_2 P_3}| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3 \, m$$

ara podem calcular

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{P_3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^3} \overrightarrow{P_1P_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^3} \overrightarrow{P_2P_3} \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5^3} \cdot (4, -3) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{3^3} \cdot (0, -3) \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{3}{5^3} \cdot (4, -3) - \frac{5}{3^3} \cdot (0, -3) \right] \\
&= 9 \cdot 10^3 \cdot \left( \frac{12}{125}, \frac{1634}{3375} \right) \\
&= \left( \frac{108000}{125}, \frac{14706000}{3375} \right) N/C
\end{aligned}$$

Lavors la força que experimenta  $Q_3$ ,

$$\vec{F} = q\vec{E} = Q_3\vec{E}_{P_3} = -8 \cdot 10^{-6} \cdot \left( \frac{108000}{125}, \frac{4896000}{1125} \right) = (-0.0069, -0.0348) N$$

b)

El treball demanat per portar la càrrega  $Q_3$  des del punt  $P_3$  a  $P_4$  el calcularem amb

$$W_{P_3 \rightarrow P_4} = Q_3(V_{P_4} - V_{P_3})$$

Llavors, calculem el potencial elèctric que creen en aquest dos punts les càrregues  $Q_1$  i  $Q_2$

$$\begin{aligned} V_{P_3} &= V_1^{P_3} + V_2^{P_3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{3} \\ &= -9600 \text{ V} \end{aligned}$$

Hem de fer un càlcul semblant per el punt  $P_4$ , però abans hem de calcular els vectors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_4} &= (-1, -3) - (-1, 3) = (0, -6) \\ \overrightarrow{P_2P_4} &= (-1, -3) - (3, -3) = (-4, -6) \end{aligned}$$

amb mòdul

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{P_1P_4}| &= \sqrt{(0)^2 + (-6)^2} = 6 \text{ m} \\ |\overrightarrow{P_2P_4}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13} \text{ m} \end{aligned}$$

Ara

$$\begin{aligned} V_{P_4} &= V_1^{P_4} + V_2^{P_4} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_4}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_4}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{6} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{2\sqrt{13}} \\ &= -1740 \text{ V} \end{aligned}$$

Finalment

$$W_{P_3 \rightarrow P_4} = Q_3(V_{P_4} - V_{P_3}) = -8 \cdot 10^{-6} \cdot (-1740 - (-9600)) = -0.06288 \text{ J}$$

Hem calculat el treball que hem de fer per moure la càrrega, com el resultat és negatiu, interpretem que el treball el fa el camp.

---

### Exercici 46

Fixem la notació de les dades de l'exercici

$$\begin{aligned} A &= (0, 3) & B &= (0, -5) & P &= (4, 0) & O &= (0, 0) \\ q_A &= 3\mu\text{C} & q_B &= -7\mu\text{C} \end{aligned}$$

**a)** Llavors, per començar a calcular el camp que creen  $q_A$ ,  $q_B$  en  $P$  necessitem com sempre els vectors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= (4, 0) - (0, 3) = (4, -3) \\ \overrightarrow{BP} &= (4, 0) - (0, -5) = (4, 5) \end{aligned}$$

amb mòdul



$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41} \text{ m}$$

Ara podem calcular

$$\begin{aligned}\vec{E}_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{|\overrightarrow{AP}|^3} \overrightarrow{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{|\overrightarrow{BP}|^3} \overrightarrow{BP} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5^3} \cdot (4, -3) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{41})^3} \cdot (4, 5) \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{3}{5^3} \cdot (4, -3) - \frac{7}{(\sqrt{41})^3} \cdot (4, 5) \right] \\ &= (-95.897, 1847.87) \text{ N/C}\end{aligned}$$

**b)** El potencial elèctric en  $P$

$$\begin{aligned}V_P &= V_A^P + V_B^P \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{|\overrightarrow{BP}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{41}} \\ &= -4438,95 \text{ V}\end{aligned}$$

Per trobar el potencial elèctric en  $O$  calculem els vectors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AO} &= (0, 0) - (0, 3) = (0, -3) \\ \overrightarrow{BO} &= (0, 0) - (0, -5) = (0, 5)\end{aligned}$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{BO}| = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = 5 \text{ m}$$

Llavors

$$V_O = V_A^O + V_B^O$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{|\overrightarrow{AO}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{|\overrightarrow{BO}|}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{5}$$

$$= -3600 \text{ V}$$

Finalment,

$$V_O - V_P = -3600 - (-4438,95) = 838,95$$

c) El treball que hem de fer per dur una càrrega de  $5\mu C$  des del punt O fins a P val

$$W_{O \rightarrow P} = 5 \cdot 10^{-6} (V_P - V_O) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-838,95) = -0,0042 \text{ J}$$

Com el resultat és negatiu la conclusió és que el treball el fa el camp.

### Exercici 47

Situem la càrrega  $Q_2$  a l'origen de coordenades  $O = (0,0)$  de forma que les coordenades de  $Q_1$  són  $A = (0,2)$  i el centre del quadrat  $C = (1,1)$ . En aquestes condicions el camp elèctric en  $C$  es pot calcular un cop trobats els vectors

$$\overrightarrow{AC} = (1,1) - (0,2) = (1,-1)$$

$$\overrightarrow{OC} = (1,1) - (0,0) = (1,1)$$

amb mòdul

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} m \\ |\overrightarrow{OC}| &= \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} m \end{aligned}$$

llavors

$$\begin{aligned} \vec{E}_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\overrightarrow{AC}|^3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\overrightarrow{OC}|^3} \overrightarrow{OC} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^3} \cdot (1, -1) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-9 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^3} \cdot (1, 1) \\ &= \frac{9^2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^3} [(1, -1) - (1, 1)] \\ &= (0, -5.73 \cdot 10^4) N/C \end{aligned}$$

**b)** El treball que fa *el camp* elèctric per moure una càrrega  $Q_3$  des del punt  $C$  al punt  $D = (2, 0)$  val

$$W_{C \rightarrow D} = -Q_3(V_D - V_C)$$

llavors calculem el potencial en el punt  $C = (1, 1)$

$$\begin{aligned} V_C &= V_1^C + V_2^C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\overrightarrow{OC}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-9 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} \\ &= 0 V \end{aligned}$$

per calcular el potencial en el punt  $D = (2, 0)$  necessitem els vectors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= (2, 0) - (0, 2) = (2, -2) \\ \overrightarrow{OD} &= (2, 0) - (0, 0) = (2, 0)\end{aligned}$$

amb mòdul

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AD}| &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \, m \\ |\overrightarrow{OD}| &= \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2 \, m\end{aligned}$$

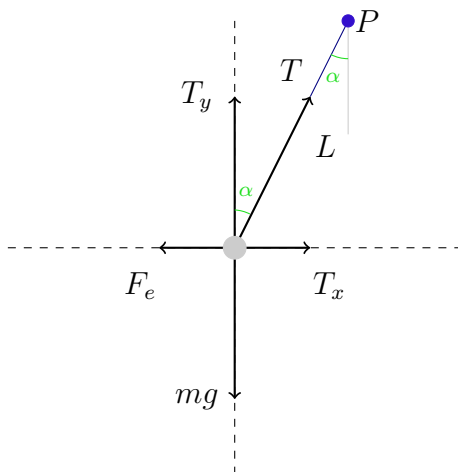
llavors

$$\begin{aligned}V_D &= V_1^D + V_2^D \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\overrightarrow{AD}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\overrightarrow{OD}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{2\sqrt{2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-9 \cdot 10^{-6}}{2} \\ &= -1,19 \cdot 10^4 \, V\end{aligned}$$

i finalment

$$W_{C \rightarrow D} = Q_3(V_D - V_C) = 7 \cdot 10^{-6}(-1,19 - 0) = -8,30 \cdot 10^{-2} \, J$$

### Exercici 48



a) Escrivim les equacions que corresponen a l'equilibri en els eixos horitzontal i vertical

$$T_x = F_e$$

$$T_y = mg$$

que es poden escriure (sabent que la corda té una longitud  $L$ ), com

$$T \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2L \sin \alpha)^2}$$

$$T \cos \alpha = mg$$

dividint les equacions d'adalt a baix

$$\tan \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2L \sin \alpha)^2} \frac{1}{mg}$$

d'on

$$m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2L \sin \alpha)^2} \frac{1}{g \tan \alpha}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-5,8 \cdot 10^{-6})^2}{(2 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ)^2} \cdot \frac{1}{9,8 \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= 5,35 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

a) Per calcular el camp elèctric que creen les càrregues  $Q$  en el punt  $P$  fem servir un sistema de coordenades de forma que aquest punt sigui l'origen, per exemple. Llavors, les càrregues es troben situades als punts

$$A = (-L \sin \alpha, -L \cos \alpha) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B = (L \sin \alpha, -L \cos \alpha) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ara necessitem els vectors (trivialment unitaris, per la geometria de la figura)

$$\widehat{AP} = (0, 0) - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\widehat{BP} = (0, 0) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Llavors el camp elèctric en  $P$  es calcula com

$$\begin{aligned}\vec{E}_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\widehat{AP}|^3} \widehat{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\widehat{BP}|^3} \widehat{BP} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5,8 \cdot 10^{-6}}{1^3} \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5,8 \cdot 10^{-6}}{1^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (0, -9,04 \cdot 10^3) \text{ N/C}\end{aligned}$$

### Exercici 49

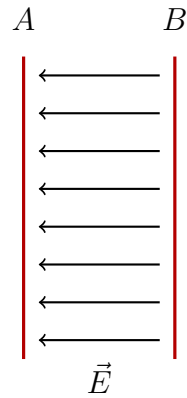
a) El treball que fa el camp elèctric sobre l'electró s'inverteix en variar la seva energia cinètica

$$W = q\Delta V = \frac{1}{2}mv^2$$

d'on

$$\Delta V = \frac{mv^2}{2q} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \cdot (2 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})} = 11,39 \text{ V}$$

Les càrregues negatives es mouen espontàniament, tal com vam veure a teoria, de potencials baixos a alts, per tant  $V_B > V_A$ .



**b)** L'electró descriurà un moviment parabòlic tal com vam veure a la teoria i es veurà atret per la placa inferior. En aquestes condicions podem escriure

$$F = ma \rightarrow Eq = ma \rightarrow a = \frac{Eq}{m} = \frac{500 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 8,78 \cdot 10^{13} m/s^2$$

Les components de la velocitat (en mòdul) per tot temps són

$$v_x = v_{0x} = 2 \cdot 10^6 m/s$$

$$v_y = v_{0y} + at$$

el temps que tarda a sortir de la regió on hi ha camp elèctric és justament el que tarda a recórrer la longitud de  $2 cm$  que tenen les plaques, aleshores

$$x = v_x t \rightarrow t = \frac{x}{v_x} = \frac{0,02}{2 \cdot 10^6} = 10^{-8} s$$

llavors, per aquest instant del temps

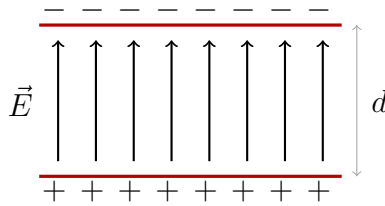
$$v_x = v_{0x} = 2 \cdot 10^6 m/s$$

$$v_y = v_{0y} + at = 0 + 8,78 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-8} = 8,78 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Com hem comentat abans, l'electró corbarà la seva trajectòria cap a baix.

### Exercici 50

a)



Tenim

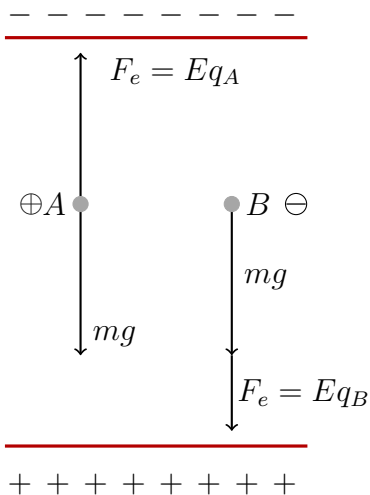
$$\Delta V = Ed = 5000 \cdot 0,01 = 50 \text{ V}$$

Aquest resultat ha de ser positiu necessàriament, ja que  $E$  és el mòdul del vector camp elèctric i  $d$  és una distància. En aquest sentit, és difícil justificar un signe per la diferència de potencial, donat que segons com la prenguem surt un o altre resultat. En qualsevol cas la placa positiva es troba a un potencial més alt que la negativa, (recordem els apunts de teoria on es parla del potencial creat per càrregues), llavors,

$$V_+ - V_- = 50 \text{ V} \quad V_- - V_+ = -50 \text{ V}$$



a) Considerem ara aquestes dues partícules



Com que la càrrega  $A$  queda suspesa en l'aire, alguna força ha de compensar la del pes que va cap a baix, llavors, ha de ser  $q_A$  positiva. Per la càrrega  $q_B$ , si fos neutra, cauria amb l'acceleració de la gravetat,  $9,8 m/s^2$ . Com que la seva acceleració de baixada és més gran que aquest valor, ha de patir una força suplementaria, que ve donada pel camp elèctric, cosa que obliga a que sigui negativa. Per cada càrrega podem escriure

$$E \cdot q_A = mg \rightarrow q_A = \frac{mg}{E} = \frac{0,5 \cdot 10^{-9} \cdot 9,8}{5000} = 9,8 \cdot 10^{-13} C$$

$$E \cdot q_B + mg = ma \rightarrow q_B = m \cdot \frac{a - g}{E} = 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{14,7 - 9,8}{5000} = 4,9 \cdot 10^{-13} C$$

### Exercici 51

a) De la gràfica es veu que

$$V(10 \text{ cm}) - V(0 \text{ cm}) = 700 - 100 = 600 V$$

b) Suposem que l'equació serà

$$V = mx + n$$

llavors

$$\begin{cases} 700 = m \cdot 0,1 + n \\ 100 = m \cdot 0 + n \end{cases}$$

d'on

$$n = 100 \text{ V}$$

$$m = \frac{700 - n}{0,1} = \frac{700 - 100}{0,1} = 6000 \text{ V/m}$$

i l'equació de la recta queda

$$V = 6000x + 100$$

Per trobar el valor del camp elèctric, recordem que és

$$\Delta V = E \cdot d$$

de forma que podem identificar el pendent de la recta,  $m = 1000$  amb el valor del camp elèctric, és a dir

$$E = 6000 \text{ V/m}$$

## Exercici 52

**a)** Situem la càrrega  $Q_2$  a l'origen de coordenades  $O = (0, 0)$  de forma que les coordenades de  $Q_1$  són  $P_1 = (0, 0.15)$ , les de  $Q_3$  són  $P_3 = (0.15, 0)$  i les del punt  $A$ ,  $(0.15, 0.15)$ . En aquestes condicions el camp elèctric en  $A$  es pot calcular un cop trobats els vectors

$$\overrightarrow{P_1A} = (0.15, 0.15) - (0, 0.15) = (0.15, 0)$$

$$\overrightarrow{P_2A} = (0.15, 0.15) - (0, 0) = (0.15, 0.15)$$

$$\overrightarrow{P_3A} = (0.15, 0.15) - (0.15, 0) = (0, 0.15)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{P_1A}| = \sqrt{0.15^2 + 0^2} = 0.15 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{P_2A}| = \sqrt{0.15^2 + 0.15^2} = 0.15\sqrt{2} \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{P_3A}| = \sqrt{0^2 + 0.15^2} = 0.15 \text{ m}$$

llavors

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{P}_1\vec{A}|^3} \vec{P}_1\vec{A} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{P}_2\vec{A}|^3} \vec{P}_2\vec{A} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_3}{|\vec{P}_3\vec{A}|^3} \vec{P}_3\vec{A} \\
 &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 0.15}{0.15^3} \left[ (1, 0) + \frac{-2}{(\sqrt{2})^3} \cdot (1, 1) + (0, 1) \right] \\
 &= 4 \cdot 10^5 \left( 1 + \frac{-2}{(\sqrt{2})^3}, \frac{-2}{(\sqrt{2})^3} + 1 \right) \\
 &= (1.17 \cdot 10^5, 1.17 \cdot 10^5) \text{ N/C}
 \end{aligned}$$

**b)** Calculem el potencial en el punt  $A = (0.15, 0.15)$

$$\begin{aligned}
 V_A &= V_1^A + V_2^A + V_3^A \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{P}_1\vec{A}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{P}_2\vec{A}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{|\vec{P}_3\vec{A}|} \\
 &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}}{0.15} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right] \\
 &= 3,51 \cdot 10^4 \text{ V}
 \end{aligned}$$

El treball que hem de fer per moure una càrrega  $Q_4 = 7 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  des de l'infinit fins al punt  $A$  val

$$W_{\infty \rightarrow A} = Q_4(V_A - V_\infty) = 7 \cdot 10^{-6} \cdot (3,51 \cdot 10^4 - 0) = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

El treball l'ha de fer un agent extern.

### Exercici 53

a) Siguin

$$A = (0, 0), \quad B = (3, 0), \quad C = (1.5, 0), \quad P = (0, 4)$$

$$Q_A = 10^{-4} C \quad Q_B = -10^{-4} C$$

Per calcular el potencial elèctric en  $P$  necessitem els vectors

$$\overrightarrow{AP} = (0, 4) - (0, 0) = (0, 4)$$

$$\overrightarrow{BP} = (0, 4) - (3, 0) = (-3, 4)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

Llavors

$$V_P = V_A^P + V_B^P$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{|\overrightarrow{BP}|}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right]$$

$$= 4,5 \cdot 10^4 \text{ V}$$

b) Per trobar l'acceleració que pateix el protó al punt  $C$ , calcularem la força elèctrica, que al seu torn depèn del camp elèctric. Ara necessitem els vectors

$$\overrightarrow{AC} = (1.5, 0) - (0, 0) = (1.5, 0)$$

$$\overrightarrow{BC} = (1.5, 0) - (3, 0) = (-1.5, 0)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(1.5)^2 + 0^2} = 1.5 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(-1.5)^2 + 0^2} = 1.5 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{|\overrightarrow{AC}|^3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{|\overrightarrow{BC}|^3} \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4}}{1.5^3} \left[ 1 \cdot (1.5, 0) + (-1) \cdot (-1.5, 0) \right] \\ &= (8 \cdot 10^5, 0) \text{ N/C}\end{aligned}$$

Ara podem calcular

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_p} = \frac{q_p \cdot \vec{E}}{m_p} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \cdot (8 \cdot 10^5, 0) = (7,67 \cdot 10^{13}, 0) \text{ m/s}^2$$

**c)** Calculem la variació d'energia potencial elèctrica (a l'apartat *b*) de l'exercici 44. es va fer la justificació del resultat que farem servir a continuació)

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_f - E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_A Q_B}{2|\overrightarrow{AB}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_A Q_B}{|\overrightarrow{AB}|} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A Q_B}{|\overrightarrow{AB}|}\end{aligned}$$

amb  $\overrightarrow{AB} = (3, 0) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3 \text{ m}$ . Llavors, substituint els valors coneguts

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-(10^{-4})^2}{3} = 15 \text{ J} > 0$$

l'energia potencial augmenta, que és el que podíem esperar ja que les càrregues de diferent signe s'atrauen, l'energia potencial que tenen com a parella és negativa i si les separem, aquesta energia s'acosta a zero pels valors negatius, per tant augmenta.

### Exercici 54

a) Situem la càrrega  $q_1 = 2 \cdot 10^{-6} C$  a l'origen de coordenades  $O = (0, 0)$  i la càrrega  $q_2 = 20 \cdot 10^{-6} C$  al punt  $A = (2, 0)$ . Per calcular el camp elèctric que creen en un punt de coordenades  $B = (x, 0)$  situat entre elles, calculem primer els vectors

$$\overrightarrow{OB} = (x, 0) - (0, 0) = (x, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x, 0) - (2, 0) = (x - 2, 0) = \left( -(2 - x), 0 \right)$$

(on el vector  $\overrightarrow{AB}$  s'ha escrit d'una forma aparentment capriciosa per poder simplificar còmodament més tard)

amb mòdul

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{x^2 + 0^2} = x \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left( -(2 - x) \right)^2 + 0^2} = (2 - x) \text{ m}$$

Lavors

$$\vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{OB}|^3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{AB}|^3} \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \frac{q_1}{|\overrightarrow{OB}|^3} \overrightarrow{OB} + \cancel{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} \frac{q_2}{|\overrightarrow{AB}|^3} \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\frac{2 \cdot \cancel{10^{-6}}}{x^3} \cdot (x, 0) + \frac{20 \cdot \cancel{10^{-6}}}{(2 - x)^3} \cdot \left( -(2 - x), 0 \right) = 0$$

$$\frac{2}{x^{\cancel{3}2}} \cdot (\cancel{x}, 0) + \frac{20}{(2 - x)^{\cancel{3}2}} \cdot \left( -(2 - \cancel{x}), 0 \right) = 0$$

$$\frac{2}{x^2} \cdot (1, 0) + \frac{20}{(2 - x)^2} \cdot (-1, 0) = 0$$

$$\frac{2}{x^2} + \frac{20 \cdot (-1)}{(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{10}{(x-2)^2} \rightarrow (x-2)^2 = 10x^2$$

$$x-2 = \pm x\sqrt{10} \rightarrow x \mp x\sqrt{10} = 2 \rightarrow x = \frac{2}{1 \mp \sqrt{10}}$$

La única solució que té sentit en el problema és

$$x = \frac{2}{1 + \sqrt{10}} = 0,48 \text{ m}$$

ja que amb dues càrregues positives el camp elèctric només es pot anular en algun punt situat entre elles.

**b)** Sigui  $P = (0.2, 0)$  el punt on es vol calcular el potencial elèctric degut a la presència de les dues càrregues. Necessitem els vectors

$$\overrightarrow{OP} = (0.2, 0) - (0, 0) = (0.2, 0)$$

$$\overrightarrow{AP} = (0.2, 0) - (2, 0) = (-1.8, 0)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(0.2)^2 + 0^2} = 0.2 \text{ m}$$

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-1.8)^2 + 0^2} = 1.8 \text{ m}$$

Llavors

$$V_P = V_O^P + V_A^P$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{OP}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{AP}|}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{2}{0.2} + \frac{20}{1.8} \right]$$

$$= 1,9 \cdot 10^5 \text{ V}$$

c) Per trobar l'energia potencial elèctrica de les dues càrregues, calculem el treball que cal fer per dur-les des de l'infinit fins el punt on es troben.

El treball per dur la càrrega  $q_1$  al punt  $O$  des de l'infinit

$$W_{\infty \rightarrow O} = q_1 \cdot (V_O - V_{\infty}) = q_1 \cdot (0 - 0) = 0 \text{ J}$$

quan  $q_1$  es dirigeix a  $O$ , no hi ha cap altre càrrega present i el potencial en  $O$  val zero

Ara, el treball per dur la càrrega  $q_2$  al punt  $A$  des de l'infinit

$$W_{\infty \rightarrow A} = q_2 \cdot (V_A - V_{\infty}) = q_2 \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{OA}|} - 0 \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{OA}|}$$

quan  $q_2$  arriba a  $A$ , sentirà l'efecte del potencial que crea  $q_1$  en aquest punt.

Llavors, amb

$$\overrightarrow{OA} = (2, 0) - (0, 0) = (2, 0) \rightarrow |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \text{ m}$$

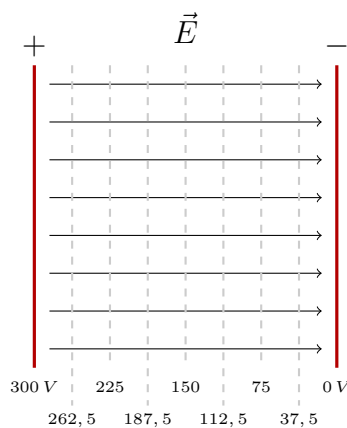
L'energia potencial elèctrica del sistema serà la suma

$$W_{\infty \rightarrow O} + W_{\infty \rightarrow A} = 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{OA}|} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2} = 0,18 \text{ J}$$



### Exercici 55

a) Suposem que la placa negativa es troba a  $0\text{ V}$ . En aquestes condicions tenim



Les càrregues positives es mouran cap a la dreta, les càrregues negatives es mouran cap a l'esquerra. En quant al camp elèctric

$$E \cdot d = V \rightarrow E = \frac{V}{d} = \frac{300}{0,2} = 1500\text{ V}$$

b) Moviment rectilini i uniforme  $\Rightarrow a = 0\text{ m/s}^2$ , en aquestes condicions la força elèctrica  $F_e$  i la de fregament  $F_f$  han de valer el mateix i tenir sentit contrari. En mòdul

$$F_e = qE = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1500 = 2,4 \cdot 10^{-16}\text{ N} = F_f$$

### Exercici 56

a) Fent referència al diagrama de l'enunciat, per tal que l'electró s'acceleri cap a la dreta a la regió  $A$ , el camp elèctric ha d'anar cap a l'esquerra a dins de la regió. Els camps elèctrics "arrossegueu" les càrregues positives en el sentit del camp i les negatives en sentit contrari al camp. A la regió  $B$ , el moviment que té l'electró (tal com es va veure a la teoria) és un moviment parabòlic. Com que el camp elèctric en aquesta regió està dirigit cap a baix, la trajectòria de l'electró es corbarà cap a dalt.

b) Amb la informació de l'enunciat podem escriure

$$\Delta V = E \cdot d = 40,0 \cdot 10^3 \cdot 5,00 \cdot 10^{-2} = 2,00 \cdot 10^3 \text{ V}$$

i com sabem que el treball que fa el camp elèctric s'invertirà en incrementar l'energia cinètica de l'electró

$$E_c = |q|\Delta V = 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 2,00 \cdot 10^3 = 3,20 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

### Exercici 57

a) Suposem que la placa superior es troba carregada negativament i la inferior positivament. En aquestes condicions, la trajectòria de l'electró es corbarà cap a baix i sortirà fregant l'extrem  $B$ . Perquè passi això l'electró ha de recórrer  $5 \text{ cm}$  en vertical mentre travessa els  $30 \text{ cm}$  de llarg. Les equacions del moviment són

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

amb

$$F_e = ma \rightarrow a = \frac{F_e}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 1,76 \cdot 10^{15}$$

calculem el temps que triga a recórrer en vertical la distància  $\frac{d}{2}$

$$0 = \frac{0,1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1,76 \cdot 10^{15} \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{0,1}{1,76 \cdot 10^{15}}} = 7,55 \cdot 10^{-9} s$$

i finalment

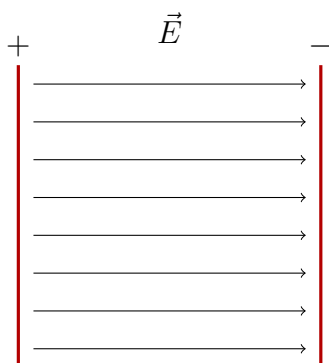
$$0,3 = v \cdot t \rightarrow v = \frac{0,3}{7,55 \cdot 10^{-9}} = 3,97 \cdot 10^7 m/s$$

**b)** Es tracta d'un moviment parabòlic ja que a l'eix horitzontal no hi ha acceleració i en canvi al vertical si, degut a la força que exerceix el camp elèctric sobre l'electró. El treball que fa el camp elèctric sobre l'electró no depèn de la trajectòria seguida, i val

$$W_e = |q|\Delta V = |q|E \cdot \frac{d}{2} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4 \cdot 0,05 = 8 \cdot 10^{-17} J$$

### Exercici 58

**a)**



El camp es pot calcular com

$$E = \frac{V}{d} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-9}} = 8,57 \cdot 10^6 n/C$$

el sentit i direcció és l'indicat a la figura.

b) El treball que s'ha de fer el calculem com

$$W = |q|\Delta V = |q|(V_+ - V_-) = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 9,60 \cdot 10^{-21} J$$

### Exercici 59

a) El potencial només varia si ens movem en contra o a favor del camp. Tenim

$$V_A - V_B = 0$$

ja que  $A$  i  $B$  es troben en una superfície equipotencial.

$$V_B - V_C = E \cdot d = 500 \cdot 0,2 = 100 V$$

$$V_A - V_C = V_A - V_B + V_B - V_C = 0 + V_B - V_C = E \cdot d = 100 V$$

b) Una partícula situada en el punt  $C$  en equilibri haurà de tenir càrrega negativa per tal que la força elèctrica vagi cap a dalt i compensi la gravitòria (habitualment ignorada en la gran majoria d'exercicis de camp elèctric), llavors

$$qE = mg \rightarrow q = \frac{mg}{E} = \frac{0,002 \cdot 9,8}{500} = 3,92 \cdot 10^{-5} C$$

Es trobarà en equilibri en qualsevol altre punt de la regió, ja que es tracta d'un camp uniforme.