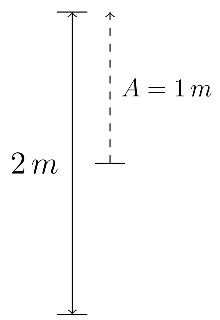
Exercici 1

a) Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $2\,m$ deduïm que $A = 1\,m$



si triga $t = 6,28 \approx 2\pi$ segons a anar de dalt a baix, el període ha de ser el doble, $T = 4\pi\,s$.

L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

on hem fet servir y perquè l'oscil·lació es dóna en l'eix vertical, llavors

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}\,rad/s$$

i podem trobar φ_0 gràcies a les condicions inicials que proporciona l'enunciat $y(0) = A$

$$A = y(0) = A\cos(0 + \varphi_0) \to \cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \to 1 = \cos\varphi_0 \to \varphi_0 = 0\,rad$$

de forma que l'equació queda

$$y(t) = 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot t\right)$$

b) Per trobar la velocitat a l'instant inicial fem

$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i és

$$v(0) = -A\omega\sin\varphi_0 = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 0 = 0\,m/s$$

De forma semblant, l'acceleració inicial es pot calcular a partir de

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

llavors

$$a(0) = -A\omega^2 \cos(\varphi_0) = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cos 0 = -\frac{1}{4}\, m/s^2$$

Exercici 2

a) La llei de Hooke es pot expressar de dues formes. Quan parlem de la relació entre la força que fem (nosaltres) sobre, per exemple una molla, i la distància que es comprimeix, escrivim

$$F = k \cdot x$$

si parlem de la força que fa la molla, oposant-se a l'externa, i la distància que es comprimeix, llavors escrivim

$$F = -k \cdot x$$

Al aplicar la força de $8\,N$ sobre la vareta, si suposem que aquesta obeeix la llei de Hooke, podem escriure

$$F = k \cdot x \rightarrow 8,00 = k \cdot 0,04 \rightarrow k = \frac{8,00}{0,04} = 200\, N/m$$

Ara, aplicant la segona llei de Newton a la força recuperadora de la vareta i aplicant un resultat parcial que s'obté al segon apartat d'aquest exercici

$$F = ma \rightarrow -kx = m(-\omega^2 x)$$

d'on, suposant que $x \neq 0$, podem obtenir la freqüència angular o pulsació

$$k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en quant a la freqüència,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

i finalment el període

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Fent servir les dades que coneixem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0,300}{200}} = 0,243$$

b) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

Finalment, en el cas que ens ocupa

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = A \cdot \frac{k}{m} = 0,040 \cdot \frac{200}{0,300} = 26,7\,m/s^2$$

En realitat hauríem d'arrodonir a dues xifres significatives, ja que la dada de l'amplitud, que en té només dues, *domina* sobre les altres que en tenen més.

Exercici 3

a) L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

trobem les constants que ens calen:

L'amplitud

$$A = \frac{15}{2}\, mm = 7,5\, mm = 7,5 \cdot 10^{-3}\, m$$

la freqüència angular o pulsació

$$1200 \cdot \frac{puntades}{\cancel{minut}} \cdot \frac{1\,\cancel{minut}}{60\, s} = 20\, Hz$$

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 20 = 40\, \pi\, rad/s$$

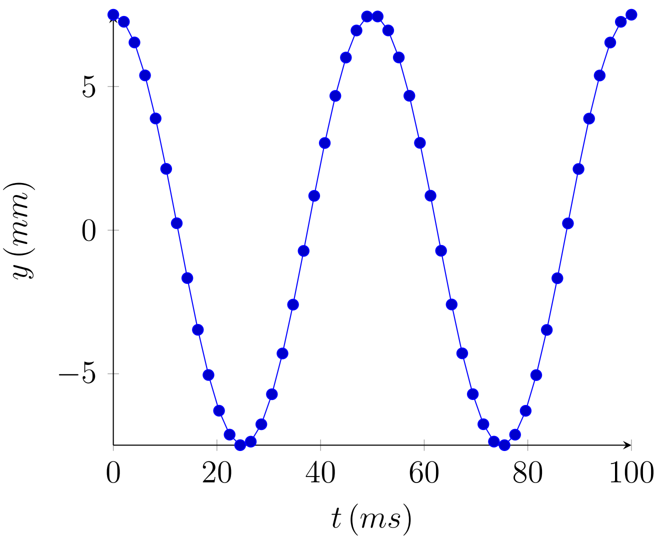
l'angle de fase

$$\begin{cases} y(0) = A \\ y(0) = A\cos\varphi_0 \end{cases} \quad \rightarrow A\cos\varphi_0 = A \rightarrow \cos\varphi_0 = 1 \rightarrow \varphi_0 = 0$$

llavors

$$y(t) = 7,5 \cdot 10^{-3} \cos(40\pi\, t)$$

i la gràfica



b) La velocitat màxima es pot trobar a partir de

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 40\pi \sin(40\pi\, t)$$

i com el sinus és una funció acotada

$$v_{max} = \pm 7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 40\pi = 0,94\, m/s$$

En quant a l'acceleració màxima

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -7,5 \cdot 10^{-3}(40\pi)^2 \cos(40\pi t)$$

de manera que tenim

$$a_{max} = \pm 7,5 \cdot 10^{-3}(40\pi)^2 = 118,4\, m/s^2$$

hauríem de prendre dues xifres significatives.

Exercici 4

a) A la gràfica es veu que l'amplitud és $A = 0,02\, m$ i hi ha cinc períodes en $0,04\, s$, llavors

$$5\,T = 0,04 \rightarrow T = \frac{0,04}{5} = 8 \cdot 10^{-3}\, s$$

l'equació del moviment és de la forma

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

i per $t = 0$ $x = A$ de forma que

$$A = x(0) = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = 0\, rad$$

per una altra banda, la freqüència angular val

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8 \cdot 10^{-3}} = 250\pi\, rad/s$$

podem escriure doncs

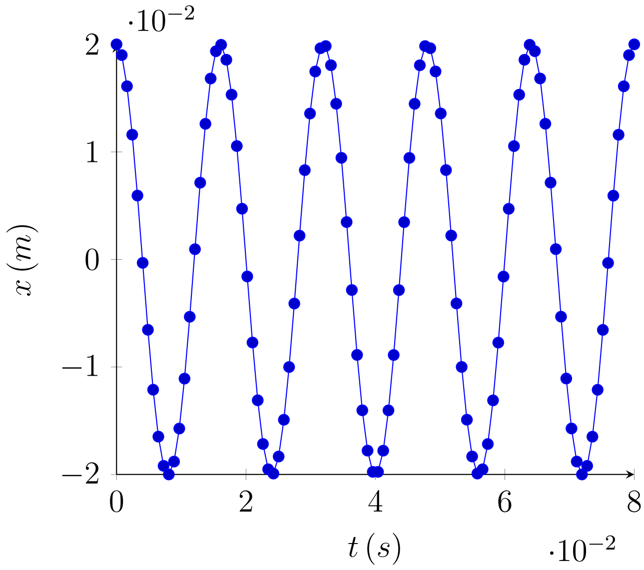
$$x(t) = 0,02\, m \cos\left(250\pi\, \frac{rad}{s} t\right)$$

noteu que incorporar les unitats a l'equació és farragós i artificial (amb l'afegit que en aquest cas hi apareixen radians, que al ser adimensionals es poden escriure o no a voluntat), però l'enunciat ho demana fer.

L'equació quan la freqüència és la meitat és

$$x(t) = 0,02\,m\cos\left(125\pi\,\frac{rad}{s}t\right)$$

i la gràfica



b) Ignorem aquest apartat en la correcció ja que pertany al tema d'ones i tampoc és complet.

Exercici 5

a) La relació entre la freqüència, la constant elàstica d'una molla i el valor de la massa d'un objecte unit a la molla és

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Per l'objecte A

$$f_A = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_A}}$$

i per un altre objecte, diguem B, que ha d'oscil·lar amb el doble de freqüència

$$2f_A = f_B = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_B}}$$

elevant al quadrat

$$4f_A^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{k}{m_B}$$

$$f_A^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{k}{m_A}$$

dividint les equacions

$$\frac{4\cancel{f_A^2}}{\cancel{f_A^2}} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\frac{k}{m_B}}{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}\frac{k}{m_A}}$$

d'on

$$4 = \frac{\frac{k}{m_B}}{\frac{k}{m_A}} = \frac{\cancel{k}m_A}{\cancel{k}m_B} \rightarrow m_B = \frac{m_A}{4} = \frac{100\,g}{4} = 25\,g = 0,025\,kg$$

a) L'equació del moviment de la massa A és

$$y(t) = A\cos(\omega_A t + \varphi_0)$$

les condicions inicials imposen

$$-A = y(0) = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \pi\,rad$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega_A \sin(\omega_A t + \varphi_0)$$

tenint en compte que

$$\omega_A = 2\pi f_A = \frac{2\pi}{T_A} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\,rad$$

l'equació de la velocitat queda, finalment

$$v(t) = -0,05 \cdot 2\pi \sin(2\pi t + \pi) = -0,1\pi \sin(2\pi t + \pi)$$

L'equació del moviment de la massa B és

$$y(t) = A\cos(\omega_B t + \varphi_0)$$

les condicions inicials imposen

$$-A = y(0) = A\cos(\varphi_0) \rightarrow \varphi_0 = \pi \, rad$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega_B \sin(\omega_B t + \varphi_0)$$

tenint en compte que

$$\omega_B = 2\omega_A = 2 \cdot (2\pi f_A) = \frac{4\pi}{T_A} = \frac{4\pi}{1} = 4\pi \, rad$$

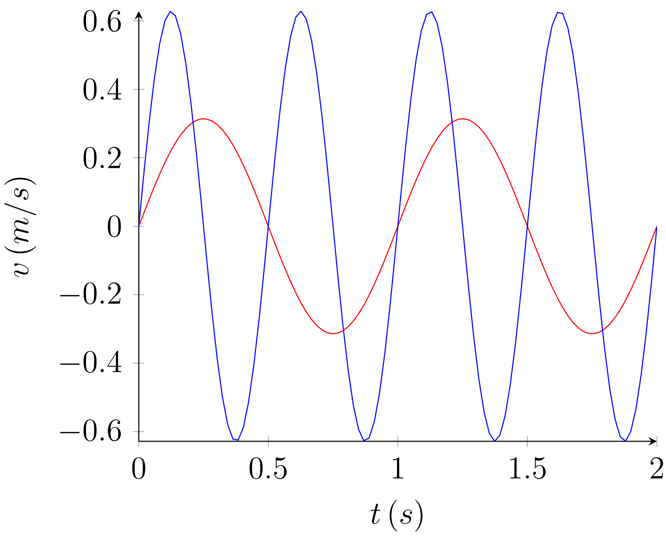
l'equació de la velocitat queda, finalment

$$v(t) = -0,05 \cdot 4\pi \sin(4\pi t + \pi) = -0,2\pi \sin(4\pi t + \pi)$$

Representem les gràfiques d'ambdues equacions com

$$v_A(t) = -0,05 \cdot 2\pi \sin(2\pi t + \pi) = -0,1\pi \sin(2\pi t + \pi)$$

$$v_B(t) = -0,05 \cdot 4\pi \sin(4\pi t + \pi) = -0,2\pi \sin(4\pi t + \pi)$$



Quan la diferència de fase és π es diu que es troben en oposició de fase. Aquesta situació es dona quan les masses estan en extrems oposats, on tindran velocitat nul·la instantàniament i de signes diferents un instant després (si les masses es troben al mateix extrem, el signe de la velocitat poc després serà el mateix). Amb aquestes consideracions, els punts demanats corresponen als instants de temps $0,5\,s$ i $1,5\,s$.

Exercici 6

a) L'equació del moviment es pot escriure

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

trobem les constants que ens calen:

L'amplitud

$$A = \frac{20}{2}\,cm = 10\,cm = 0,1\,m$$

La freqüència angular o pulsació

$$\omega \to 1,91\cdot 10^3\,\frac{rev}{minut}\cdot\frac{2\pi\,rad}{1\,rev}\cdot\frac{1\,minut}{60\,s} = 200\,\frac{rad}{s}$$

L'angle de fase (l'enunciat no especifica si es troba a dalt o baix per $t = 0$, prenem a dalt)

$$\begin{cases} y(0) = A \\ y(0) = A\cos\varphi_0 \end{cases} \to A\cos\varphi_0 = A \to \cos\varphi_0 = 1 \to \varphi_0 = 0$$

llavors

$$y(t) = 0,1\cos(200t)$$

La velocitat màxima es pot trobar a partir de

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -0,1\cdot 200\sin(200t)$$

i com el sinus és una funció acotada

$$v_{max} = \pm 0,1\cdot 200 = \pm 20\,m/s$$

b) Per trobar la força màxima necessitem l'acceleració màxima

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -0,1(200)^2 \cos(200t)$$

de manera que tenim

$$a_{max} = \pm 0,1(200)^2 = \pm 4000\, m/s^2$$

i llavors

$$|F_{max}| = m \cdot |a_{max}| = 0,200 \cdot 4000 = 800\, N$$

Exercici 7

a) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

Ara, aplicant la segona llei de Newton a la força recuperadora

$$F = ma \rightarrow -kx = m(-\omega^2 x)$$

d'on, suposant que $x \neq 0$, podem obtenir la freqüència angular o pulsació

$$k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en quant a la freqüència,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

i finalment el període

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Fent servir les dades de l'exercici

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2 = m(2\pi f)^2 = 1,58 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 12)^2 = 8,98\,N/m$$

b) La freqüència associada a un període $T = 0,12\,s$ és

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,12} = 8,33\,Hz$$

llavors, la massa

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{8,9}{(2\pi \cdot 8,33)^2} = 3,25 \cdot 10^{-3}\,kg$$

Com hem vist abans, l'acceleració màxima val

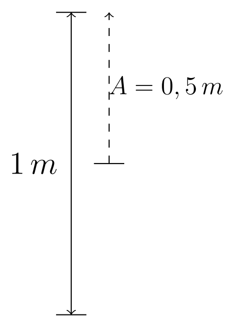
$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm A(2\pi f)^2$$

llavors, el valor absolut

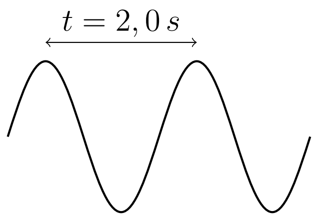
$$|a_{max}| = 2,00 \cdot 10^{-3} \cdot (2\pi \cdot 8,33)^2 = 5,44\,m/s^2$$

Exercici 8

a) Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $1\,m$ deduïm que $A = 0,5\,m$



també sabem que arriba una onada cada $2,00$ segons



deduïm que el període val $T = 2,00\,s$, la freqüència $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5\,s$ i la freqüència angular pulsació $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,5 = \pi\,rad/s$.

L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

com que la boia sura i es diu que per $t = 0\,s$ "l'onatge que hi ha fa que el punt més alt..., més baix" podem suposar que $y(0) = A$.

$$A = y(0) = A\cos(0 + \varphi_0) \rightarrow \cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \rightarrow 1 = \cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0\,rad$$

llavors podem escriure

$$y(t) = 0,5\cos(\pi t)$$

b) Per calcular l'energia cinètica màxima podem fer-ho a partir de la velocitat màxima. La velocitat és

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -0,5\pi\sin(\pi t)$$

i com el sinus és una funció acotada la velocitat màxima és

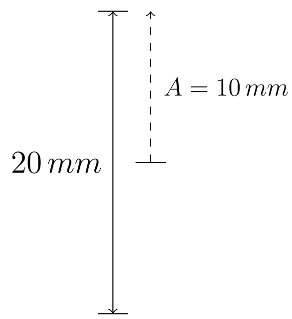
$$v_{max} = \pm 0,5\pi = 1,57\,m/s$$

i l'energia cinètica màxima

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 1,57^2 = 1,85\,J$$

Exercici 9

a) Com ens diuen que del punt més alt al punt més baix hi ha $20\,mm$ deduïm que $A = 10\,mm$



Podem trobar la freqüència fent el factor de conversió

$$1800 \cdot \frac{puntades}{\cancel{minut}} \cdot \frac{1\,\cancel{minut}}{60\,s} = 30\,Hz$$

i la frqüència angular (que necessitarem en breu)

$$\omega = 2\pi\, f = 2\pi \cdot 30 = 60\,\pi\, rad/s$$

L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

les condicions inicials diuen que $y(0) = A$

$$A = y(0) = A\cos(0 + \varphi_0) \rightarrow \cancel{A} = \cancel{A}\cos\varphi_0 \rightarrow 1 = \cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = 0\,rad$$

llavors

$$y(t) = 10 \cdot 10^{-3}\cos(60\pi t)$$

b) La velocitat màxima es pot trobar a partir de

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -10 \cdot 10^{-3} \cdot 60\pi \sin(60\pi\, t)$$

i com el sinus és una funció acotada

$$v_{max} = \pm 10 \cdot 10^{-3} \cdot 60\pi = 1,885\,m/s = 1,9\,m/s$$

En quant a l'acceleració màxima

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -10 \cdot 10^{-3}(60\pi)^2 \cos(60\pi t)$$

de manera que tenim

$$a_{max} = \pm 10 \cdot 10^{-3}(60\pi)^2 = 355,3\, m/s^2 = 3,6 \cdot 10^2\, m/s^2$$

Exercici 10

a) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

A una freqüència $f = 6,0\, Hz$ li correspon una freqüència angular o pulsació

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 6,0 = 12\pi\, rad/s$$

llavors, de l'expressió de l'acceleració màxima obtinguda

$$|a_{max}| = A\omega^2 \rightarrow A = \frac{|a_{max}|}{\omega^2} = \frac{6,0}{(12\pi)^2} = 4,2 \cdot 10^{-3}\, m$$

b) De la llei de Hooke $F = -k \cdot x$, l'acceleració de l'oscil·lador i la segona llei de Newton tenim

$$F = ma \rightarrow -kx = m(-\omega^2 x)$$

i si $x \neq 0$ es pot escriure com

$$k = m\omega^2$$

llavors

$$k = m\omega^2 = 85 \cdot (2\pi \cdot 6,0)^2 = 1,2 \cdot 10^5\ N/m$$

Exercici 11

a) A partir de la relació

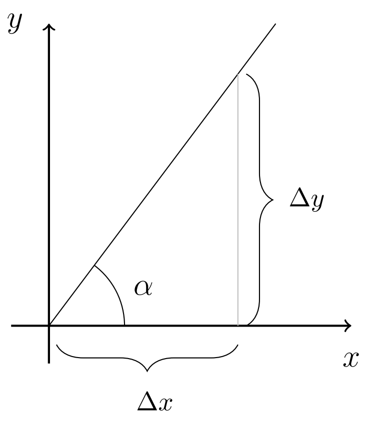
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

podem obtenir

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \to T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \to T^2 = 4\pi\frac{m}{k} \to m = \frac{k}{4\pi^2}T^2$$

de forma que si podem calcular el pendent de la gràfica $m = m(T^2)$ podem conèixer el terme $k/4\pi^2$ i d'aquí la constant elàstica de la molla.

Recordem com podíem obtenir gràficament el pendent d'una recta $y = mx$



quan relacionem un increment de x amb el corresponent increment de y podem definir el pendent m, de la recta com

$$m \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Llavors, a la gràfica podem considerar el quocient d'increments (és difícil triar amb precisió)

$$\frac{1,5-0}{0,4-0} = 3,75 = k/4\pi^2$$

per obtenir

$$k = 3,75 \cdot 4\pi^2 = 148,04\,N/m$$

Tal com vam veure a les classes de teoria l'energia màxima d'un oscil·lador es pot calcular de dues formes: una, quan passa pel punt d'equilibri ja que en aquest moment la velocitat és màxima (i per tant l'energia cinètica) i l'energia potencial elàstica mínima, i l'altra quan es troba en un extrem, ja que en aquest moment la velocitat és zero i l'energia potencial elàstica màxima. Per tant, en el cas que ens ocupa per calcular l'energia cinètica màxima serà equivalent a calcular

$$\frac{1}{2}kA^2$$

que és més senzill amb les dades que tenim. Llavors

$$E_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}148,04 \cdot 0,10^2 = 0,74\,J$$

b) L'equació de l'oscil·lador harmònic simple és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t)$$

de forma que l'acceleració màxima és

$$a_{max} = \pm A\omega^2$$

ja que el cosinus és una funció acotada i el seu valor està entre ± 1.

Fem servir les dades de l'apartat per calcular ω

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150}{1,5}} = 10\, rad/s$$

$$a_{max} = \pm A\omega^2 = \pm 0,2 \cdot (10)^2 = \pm 20\, m/s^2$$

El fregament s'haurà endut tota l'energia de l'oscil·lador que ara és

$$E_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0,2^2 = 3\, J$$

Exercici 12

a) En aquest exercici, a l'enunciat es fa servir el subíndex k per referir-se a l'energia cinètica (E_k). Això pot induir a confusió, ja que en aquest context el símbol k típicament es fa servir per representat la constant elàstica d'un oscil·lador. Aquest ús de la k com a subíndex de l'energia cinètica té el seu origen en la influència anglosaxona (*kinetic energy*).

A partir de les dades es pot calcular directament el valor de k i m,

$$4,00 = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k \cdot 1,00^2 \to k = \frac{4,00 \cdot 2}{1,00} = 8,00\, N/m$$

$$12,00 = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot (-5,44)^2 \to m = \frac{12,00 \cdot 2}{(-5,44)^2} = 0,81\, kg$$

L'energia mecànica total del sistema és la suma de la cinètica i la potencial, per tant

$$E_M = 12,00 + 4,00 = 16,00\, J$$

b)

L'energia total es pot escriure com la potencial màxima o com la cinètica màxima, llavors

$$16,00 = E_M = \frac{1}{2}kA^2 \to A = \sqrt{\frac{16,00 \cdot 2}{k}} = \sqrt{\frac{16,00 \cdot 2}{8,00}} = 2,00\, m$$

$$16,00 = E_M = \frac{1}{2}m(A\omega)^2 \rightarrow A\omega = \sqrt{\frac{16,00\cdot 2}{m}} = \sqrt{\frac{16,00\cdot 2}{0,81}} = 6,29 \approx 2\pi$$

llavors

$$\omega = \frac{2\pi}{A} = \frac{2\pi}{2,00} = \pi\, rad/s$$

Ara, de l'equació de l'oscil·lador i les condicions inicials

$$x(t) = A\cos(\omega + \varphi_0)$$

$$1,00 = x(0) = A\cos\varphi_0 = 2,00\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}\, rad$$

Finalment, l'equació del moviment es pot escriure com

$$x(t) = 2,00\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Exercici 13

a) De la gràfica es veu que l'amplitud val $A = 12\, cm = 0,12\, m$ i el període $T = 6\, s$ (perquè tarda $3\, s$ a fer mig cicle), llavors

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\, s$$

també es veu que $x(0) = 0$ i com l'equació de l'oscil·lador s'escriu

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

llavors

$$0 = x(0) = A\cos\varphi_0 \rightarrow \cos\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

b)L'equació del moviment quedarà finalment

$$x(t) = 0,12\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

i l'energia mecànica total del sistema es pot calcular com

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2$$

i fent ús de

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2$$

$$E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}0,250 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 (0,12)^2 = 1,97 \cdot 10^{-3}\, J$$

Exercici 14

a) A partir de la relació

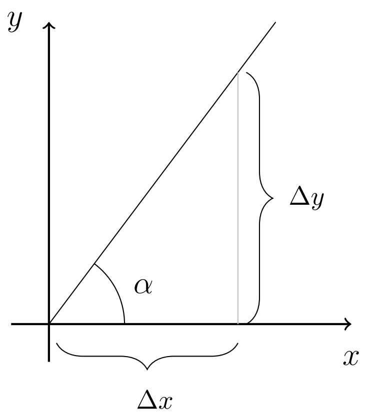
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

podem obtenir

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{k}m$$

de forma que si podem calcular el pendent de la gràfica $T^2 = T^2(m)$ podem conèixer el terme $4\pi^2/k$ i d'aquí la constant elàstica de la molla.

Recordem com podíem obtenir gràficament el pendent d'una recta $y = mx$



quan relacionem un increment de x amb el corresponent increment de y podem definir el pendent m, de la recta com

$$m \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Llavors, a la gràfica podem considerar el quocient d'increments (és difícil triar amb precisió)

$$\frac{0,62 - 0,4}{0,14 - 0,092} = 4,583 = 4\pi^2/k$$

per obtenir

$$k = \frac{4\pi^2}{4,583} = 8,61, N/m$$

la constant d'una molla no depèn de la massa que sosté, si no del material del que està feta. Una altra cosa és que hi hagi una relació entre la pulsació o freqüència angular d'un oscil·lador, la massa i la constant recuperadora.

Si fem oscil·lar la massa de $32\,g$ el període serà

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{k}m} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{8,61} \cdot 0,032} = 0,38$$

b) El valor del període que correspon a una massa $m = 100\,g$ és

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{k}m} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{8,61} \cdot 0,100} = 0,68\,s$$

L'equació de l'oscil·lador és

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

fent servir les condicions inicials

$$-A = y(0) = A\cos\varphi_0 \rightarrow \cos\varphi_0 = -1 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

i amb la relació

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,68} = 9,28\,rad/s$$

llavors podem escriure

$$y(t) = 0,1\cos(9,28t + \pi)$$

i per $t = 3\,s$

$$y(3) = 0,1\cos(9,28 \cdot 3 + \pi) = 0,086\,m$$

la velocitat es calcula com

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

i l'acceleració

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y(t)$$

per tant

$$a(3) = -(9,28)^2 y(3) = -(9,28)^2 \cdot 0,086 = -7,38\, m/s^2$$

Les dades de la gràfica són difícils de selecionar amb precisió i els càlculs progressius que es van fent fan que aquesta imprecisió es vagi amplificant. És perfectament possible que cadascun dels alumnes que afronti l'exercici obtingui resultats diferents, tot i que haurien de ser del mateix ordre de magnitud.

Exercici 15

a) Després de penjar la plataforma, el pes d'aquesta s'equilibra amb la força que li fa la molla

$$mg = ky \rightarrow y = \frac{mg}{k} = \frac{0,020 \cdot 9,8}{4,00} = 0,049\, m$$

La lectura, si prenem l'origen al punt superior serà

$$l = l_0 + y = 0,20 + 0,049 = 0,249\, m$$

b) La freqüència angular que tindrà l'oscil·lador amb la massa M afegida serà

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{4,00}{0,02 + 0,3}} = 3,535\, rad/s$$

i la velocitat quan passa per la posició d'equilibri és la màxima que com hem vist al llarg d'aquest document és

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm 0,1 \cdot 3,535 = \pm 0,3535\, m/s$$

noteu que l'amplitud ens la donen com a dada i **no** correspon al valor y obtingut al primer apartat, si no al que ens proporciona l'enunciat directament que val, $0,1\, m$