1. (a) De la gràfica es veu que el temps mínim que tarda en repetir-se el moviment són $1,25\,s$. També es veu que l'amplitud és[†] $A = 1,5\,cm = 0,015\,m$. La freqüència es pot calcular a partir del període com
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,25\cdot 10^{-3}} = 800\,Hz$$
i la velocitat de propagació (o de fase)
$$\lambda = v\cdot T \to v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,20}{1,25\cdot 10^{-3}} = 160\,m/s$$
L'equació de l'ona és
$$y(x,t) = A\sin(kx - wt + \varphi_0)$$
la determinació de les condicions inicials és ambigua. Si acceptem que la gràfica és $y(t)$ i suposant que el zero de l'eix $x$ coincideix amb el del sistema de coordenades mostrat, llavors podem dir $y(0) = 1,5\,cm = 0,015\,m$ d'on
$$0,015 = 0,015\sin(\varphi_0) \to \varphi_0 = \pi/2$$
Amb la informació que tenim podem escriure
$$y(x,t) = 0,015\,m\sin\left(\frac{2\pi\,rad}{0,20\,m}x - \frac{2\pi\,rad}{1,25\cdot 10^{-3}\,s}t + \frac{\pi\,rad}{2}\right)$$
La inclusió de les unitats de totes les magnituds que hi ha en les equacions no és una pràctica habitual, però l'enunciat ho demana expressament.

(b) A partir de l'equació d'una ona transversal
$$y(x,t) = A\sin(kx - wt + \varphi_0)$$
es pot escriure la de la velocitat dels seus punts
$$v_y = \dot{y}(x,t) = -A\omega\cos(kx - wt + \varphi_0)$$
i com el cosinus és una funció acotada, el valor màxim de la velocitat és
$$v_{max} = \pm A\omega$$

[†]La gràfica de l'enunciat hauria d'estar etiquetada amb $y$ en lloc de $x$ per poder escriure l'equació d'ona de la forma habitual

2. (a) De l'enunciat és dedueix $\lambda = 50\,m$ i $T = 10\,s$. Es tractaria d'una ona mecànica transversal amb

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi \frac{1}{10} = \frac{\pi}{5}\,rad/s$$

(b) Amb $A = 0,5\,m$ l'equació del moviment harmònic simple que descriu un dels espectadors serà

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

per fixar l'angle de fase fem servir les condicions inicials $y(0) = -A$ per trobar

$$-A = A\cos\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 = \pi$$

llavors l'equació de l'espectador quedarà finalment

$$y(t) = 0,5\cos\left(\frac{\pi}{5}t + \pi\right)$$

3. (a) Tenim que a partir de $f = 83\,kHz$ i amb $\lambda = v \cdot T$ es pot calcular la longitud d'ona

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{f} = \frac{340}{83000} = 4,10 \cdot 10^{-3}\,m$$

i

$$T = \frac{1}{f} = 1,20 \cdot 10^{-5}\,s$$

En una ona harmònica

$$y(x,t) = A\sin(kx - wt + \varphi_0)$$

Anomenarem *fase*, $\varphi$ a l'expressió $kx - \omega t + \varphi_0$. En general, la *diferència de fase* $\Delta\varphi$ entre dos punts $x_1$, $x_2$ i dos temps $t_1$, $t_2$ es calcula com

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = kx_2 - \omega t_2 + \cancel{\varphi_0} - (kx_1 - \omega t_1 + \cancel{\varphi_0}) = k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1)$$

De manera que si volem calcular $\Delta\varphi$ entre dos punts diferents en el mateix instant del temps tindrem

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) - \omega(\cancel{t_1} - \cancel{t_1}) = k(x_2 - x_1)$$

en el nostre cas

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{4,10 \cdot 10^{-3}}(1,5030 - 1,5000) = 4,60\,rad$$

(b) El nivell d'intensitat sonora s'expressa amb $\beta$ (a l'enunciat es fa servir $I$, cosa que introdueix una ambigüitat perillosa) i es calcula en funció de la intensitat $I$ de l'ona com

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

on $I_0$ és l'anomenat nivell llindar d'intensitat, que no cal conèixer en aquest exercici com veurem.

$$\begin{aligned}\beta_{dret} - \beta_{esq} &= 10 \left[ \log \frac{I_{dret}}{I_0} - \log \frac{I_{esq}}{I_0} \right] \\ &= 10 \log \frac{I_{dret}/I_0}{I_{esq}/I_0} \\ &= 10 \log \frac{I_{dret}}{I_{esq}} \\ &= 10 \log \frac{r_{esq}^2}{r_{dret}^2} = 10 \log \frac{34^2}{33^2} = 0,26\, dB\end{aligned}$$

on s'ha fet servir que per ones tridimensionals i suposant que la potència es transmet íntegra al llarg de la propagació de l'ona

$$I = \frac{P}{S} \longrightarrow P = IS = I 4\pi r^2$$

per dos punts 1 i 2 diferents

$$P_1 = P_2 \longrightarrow I_1 \cancel{4\pi} r_1^2 = I_2 \cancel{4\pi} r_2^2 \longrightarrow I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$

4. (a) Tot i que la redacció de l'enunciat no és prou clara suposarem $A = 30\, cm$. Sí que és evident que $\lambda = 9,00\, m$ i $T = 4,00\, s$, llavors

$$\lambda = v \cdot T \to v = \frac{\lambda}{T} = \frac{9,00}{4,00} = 2,25\, m/s$$

L'equació d'ona serà

$$y(x,t) = A \sin(kx - wt) = A \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t \right) = A \sin 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

d'on

$$y(x,t) = 0,30 \sin 2\pi \left( \frac{x}{9,00} - \frac{t}{4,00} \right)$$

(b) Anomenarem *fase*, $\varphi$ a l'expressió $kx - \omega t + \varphi_0$. En general, la *diferència de fase* $\Delta\varphi$ entre dos punts $x_1$, $x_2$ i dos temps $t_1$, $t_2$ es calcula com

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = kx_2 - \omega t_2 + \cancel{\varphi_0} - (kx_1 - \omega t_1 + \cancel{\varphi_0}) = k(x_2 - x_1) - \omega(t_2 - t_1)$$

De manera que si volem calcular $\Delta\varphi$ entre dos punts diferents en el mateix instant del temps tindrem

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) - \omega(\cancel{t_1} - \cancel{t_1}) = k(x_2 - x_1)$$

en el nostre cas

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{9,00} \cdot 4,00 = \frac{8}{9}\pi\, rad$$

5. (a) La intensitat amb què borda el gos es calcula com

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{2,00 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 5,00^2} = 6,37 \cdot 10^{-6}\, W/m^2$$

i el nivell d'intensitat sonora serà

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{6,37 \cdot 10^{-6}}{1,00 \cdot 10^{-12}} = 68\, dB$$

(b) Si fossin dos gossos es multiplica la intensitat per 2, no la intensitat sonora, llavors

$$\beta' = 10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 \left[\log 2 + \log \frac{I}{I_0}\right] = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I}{I_0} = 3 + 68 = 71\, dB$$

6. (a) El so més agut correspon a la freqüència més alta

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{1174,7} = 0,29\, m$$

el so més greu correspon a la freqüència més baixa

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{261,7} = 1,3\, m$$

(b) De la definició de nivell d'intensitat sonora

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}$$

que per $80\,dB$ és

$$I = 1,0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 1,0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{8} = 10^{-4}\,W$$

i la potència a 10, 0 metres de distància

$$P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2 = 10^{-4} \cdot 4\pi(10)^2 = 0,126\,W$$

7. (a) A partir de la definició de nivell de intensitat sonora

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}$$

d'on

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 1,0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{50/10} = 1,0 \cdot 10^{-7}\,W/m^2$$

(b) La potència del timbre es pot calcular a partir de

$$P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2 = 1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot (7,0)^2 = 6,2 \cdot 10^{-5}\,W$$

A mesura que ens allunyem de la font sonora, la potència generada es va repartint en una àrea esfèrica cada cop més gran. Quan la intensitat sigui $I = 1,0 \cdot 10^{-12} \equiv I_0$, el timbre es deixarà de sentir.

$$P = I \cdot S \rightarrow S = \frac{P}{I} \rightarrow 4\pi r^2 = \frac{P}{I}$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{6,16 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-12}}} = 2,2 \cdot 10^{3}\,m$$

8. (a) A partir de l'equació d'una ona transversal

$$y(x,t) = A \sin(kx - wt + \varphi_0)$$

es pot escriure la de la velocitat dels seus punts

$$v_y = \dot{y}(x,t) = -A\omega \cos(kx - wt + \varphi_0)$$

i com el cosinus és una funció acotada, el valor màxim de la velocitat és

$$v_{max} = \pm A\omega = \pm A \cdot 2\pi f$$

fent servir les dades de l'enunciat

$$v_{max} = \pm 0,02 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 20 = 0,8\pi\,m/s$$

(b) A partir de les dades de l'enunciat podem calcular la velocitat amb que es progaguen les ones a la cubeta

$$x = vt \rightarrow v = \frac{x}{t} = \frac{10}{5} = 2\, m/s$$

Llavors la longitud d'ona val

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2}{20} = 0,1\, m$$

Per calcular $\Delta\varphi$ entre dos punts diferents en el mateix instant del temps era

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1)$$

en el nostre cas

$$\Delta\varphi = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{0,1} \cdot 0,05 = \pi\, rad$$

9. (a) El fenomen s'anomena *efecte Doppler*. Ens hem de fixar en la freqüència que correspon a la velocitat de $\pm 100\, m/s$. Quan s'està acostant observem una freqüència més alta, que correspon a $240\, Hz$, quan s'allunya s'observa una freqüència més baixa, $130\, Hz$. Just en el moment de passar pel nostre costat, el so baixa $110\, Hz$

(b) La potència es calcula com

$$P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2$$

es comprova que el valor obtingut és pràcticament el mateix per cada parella de dades i obtenim (prenent la primera, per exemple)

$$P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2 = 0,080 \cdot 4\pi \cdot 5^2 = 25,13 \cdot 10^{-3}\, W$$

Si volem que el nivell de sonoritat sigui de $65\, dB$ podem fer

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\beta/10}$$

d'on

$$I = I_0 \cdot 10^{\beta/10} = 1,0 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{65/10} = 3,16 \cdot 10^{-6}\, W/m^2$$

i finalment

$$P = I \cdot S \rightarrow S = \frac{P}{I} \rightarrow 4\pi r^2 = \frac{P}{I}$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{25,13 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 3,16 \cdot 10^{-6}}} = 25,14\, m$$

10. (a) En quant a la longitud d'ona

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{300} = 1,13\,m$$

la pulsació

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 300 = 600\pi\, rad/s$$

i el període

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{300} = 3,33 \cdot 10^{-3}\, s$$

(b) Quan l'altaveu s'acosta a l'observador la freqüència que percep és més gran que la original mentre que la longitud d'ona no canvia. Quan el so arriba després d'una reflexió no canvien ni la freqüència ni la longitud d'ona.

11. (a) Quan una ona passa d'un medi on té velocitat $v_1$ i passa a un altre on la seva velocitat és $v_2$ la relació entre l'angle d'incidència i el refractat és

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

fent servir les dades de l'enunciat

$$\frac{\sin 60°}{1500} = \frac{\sin\alpha_2}{340}$$

d'on

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{340}{1500} \cdot \sin 60°\right) = 11,32°$$

hem de tenir en compte que aquest angle es mesura respecte la normal, és a dir que surt de l'aigua quasi vertical. Això fa impossible que se senti des d'un punt arran de la costa, però sí des d'un altre lloc més elevat.

(b) Suposem que els 20 $Hz$ del sons emesos per la balena són mesurats dins de l'aigua. Sabem que quan una ona travessa la interfície de separació entre dos medis (en els que la seva velocitat de propagació és diferent) la freqüència no canvia i sí ho fa la longitud d'ona. D'aquesta manera, la longitud d'ona dins l'aigua serà

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500}{20} = 75\,m$$

i fora de l'aigua

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{20} = 17\,m$$

12. A l'exercici no hi ha coherència en el nombre de xifres significatives de les dades. N'hi ha dues amb 3 xifres significatives i una amb dues. En principi els resultats els hauríem de donar amb dues, però degut a aquesta manca de coherència, donarem tres.

    (a) La freqüència de la llum groga de $580 \cdot 10^{-9}\, m$ en l'aire és

    $$f = \frac{v_{air}}{\lambda} = \frac{3,0 \cdot 10^{8}}{580 \cdot 10^{-9}} = 5,17 \cdot 10^{14}\, Hz$$

    La seva velocitat de propagació en el vidre es pot trobar a partir de la definició d'índex de refracció (només aplicable a les ones electromagnètiques)

    $$n = \frac{c}{v}$$

    on $c$ és la velocitat de l'ona electromagnètica (aquí llum) en el buit i $v$ la velocitat de l'ona en el medi. D'aquesta manera

    $$v_{vidre} = \frac{c}{n} = \frac{3,0 \cdot 10^{8}}{1,55} = 1,94 \cdot 10^{8}\, m/s$$

    (b) La freqüència d'aquesta llum groga en el vidre serà la mateixa que a l'aire. La longitud d'ona serà

    $$\lambda = \frac{v_{vidre}}{f} = \frac{1,94 \cdot 10^{8}}{5,17 \cdot 10^{14}} = 3,75 \cdot 10^{-7}\, m = 375\, nm$$

13. 1. Com és

    $$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 440 = 880\pi\, rad/s$$

    i en l'equació de l'ona l'argument ha de ser

    $$(\pm\omega t \pm kx)$$

    es conclou que l'equació correcta ha de ser

    $$y(x,t) = 5 \cdot 10^{-3} \sin\left(880\pi t - \frac{44\pi}{17}x\right)$$

    noteu que no podíem *a priori* dir res sobre el terme relacionat amb el nombre d'ona $k$, ja que no sabem res de la velocitat d'aquesta ona.

2. Un cop sabem quina de les expressions és correcte, podem deduir més informació. En particular, per calcular la longitud d'ona (distància mínima ne)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{44\pi}{17}} = \frac{34}{44} = 0,773\,m$$

Alternativament, sabent la velocitat del so podem fer

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{440} = 0,773\,m$$