1. (a) Per l'energia cinètica tenim

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 750 \cdot (400)^2 = 6 \cdot 10^7 J$$

per la potencial gravitatòria

$$E_{pg} = -\frac{GM_{\oplus}m}{r} = -\frac{g_0 R_{\oplus}^2 m}{10R_{\oplus} + R_{\oplus}} = -\frac{g_0 R_{\oplus}^2 m}{11R_{\oplus}}$$
$$= -\frac{g_0 R_{\oplus}m}{11} = -\frac{9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 750}{11} = -4,26 \cdot 10^9 J$$

i finalment, per la mecànica

$$E_M = E_c + E_{pq} = 6 \cdot 10^7 - 4,26 \cdot 10^9 = -4,2 \cdot 10^9 J$$

- (b) Com que és  $E_M < 0$  podem concloure que es troben lligats per la interacció gravitatòria.
- (c) Fem un balanç d'energia

$$-4, 2 \cdot 10^9 = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}$$

d'on

$$v' = \sqrt{\frac{2}{m} \left( -4, 2 \cdot 10^9 + \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \right)} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( -4, 2 \cdot 10^9 + \frac{g_0 R_{\oplus}^2 m}{R_{\oplus}} \right)}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{750} \left( -4, 2 \cdot 10^9 + 9, 81 \cdot 6, 37 \cdot 10^6 \cdot 750 \right)} = 10667 \, m/s$$

2. (a) La velocitat de les òrbites circulars estables es calcula com

$$\begin{split} v &= \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_{\oplus}^2}{8R_{\oplus} + R_{\oplus}}} \\ &= \sqrt{\frac{g_0 R_{\oplus}^2}{9R_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{9}} = 2,635 \cdot 10^3 \, m/s \end{split}$$

(b) La velocitat d'escapament des d'una altura h sobre la superfície de la Terra es calcula com

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + h}} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + 8R_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{2g_0R_{\oplus}^2}{9R_{\oplus}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 6,37 \cdot 10^6}{9}} = 3,726 \cdot 10^3 \, m/s$$



3. El treball demanat es pot calcular com la diferència d'energia mecànica del satèl·lit al canviar d'òrbita. Així

$$\begin{split} W_{h\to h'} &= -\frac{1}{2} G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h'} - \left( -\frac{1}{2} G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + h} \right) \\ &= -\frac{1}{2} G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + 4R_{\oplus}} - \left( -\frac{1}{2} G \frac{M_{\oplus} m}{R_{\oplus} + 3R_{\oplus}} \right) \\ &= \frac{1}{2} G M_{\oplus} m \left( \frac{1}{4R_{\oplus}} - \frac{1}{5R_{\oplus}} \right) = \frac{1}{2} g_0 R_{\oplus}^2 \cdot \frac{5R_{\oplus} - 4R_{\oplus}}{4R_{\oplus} \cdot 5R_{\oplus}} \\ &= \frac{1}{2} g_0 R_{\oplus}^2 m \cdot \frac{R_{\oplus}}{20 R_{\oplus}^2} \\ &= \frac{1}{40} \cdot 9,81 \cdot 75 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 1,17 \cdot 10^8 \, J \end{split}$$

4. Apliquem la tercera llei de Kepler a Tritó i a Nereida tenint en compte que el centre de forces és Neptú (ੴ)

$$T_{Tr}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\mbox{\scriptsize $\%$}}} r_{\mbox{\scriptsize $\%$}-Tr}^3$$

$$T_{Ne}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\stackrel{\bullet}{\nabla}}} r_{\stackrel{\bullet}{\nabla} - Ne}^3$$

Dividint les equacions

$$\frac{T_{Tr}^2}{T_{Ne}^2} = \frac{\frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}r_{\odot}^3 - Tr}{\frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}r_{\odot}^3 - Ne}$$

d'on

$$T_{Tr}^2 = T_{Ne}^2 \cdot \frac{r_{\heartsuit,-Tr}^3}{r_{\heartsuit,-Ne}^3} = (360, 11)^2 \cdot \frac{354759^3}{5513400^3} = 34,5534,547$$

i finalment

$$T_{Tr} = \sqrt{34,547} = 5,878 \, dies$$



5. (a) A partir de la tercera llei de Kepler, aplicada al centre galàctic com a centre de forces i el Sol,

$$T_{\odot}^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

calculem directament

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT_{\odot}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (2, 4 \cdot 10^{20})^3}{6, 67 \cdot 10^{-11} \cdot (203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 2 \cdot 10^{41} \, kg$$

(b) Com que hem suposat que la trajectòria del Sol és circular es pot fer servir

$$2\pi r = vT$$

d'on

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2, 4 \cdot 10^{20}}{203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,36 \cdot 10^5 \, m/s$$

