1. a) Tenint en compte que el centre de forces és Saturn, podem fer servir la tercera llei de Kepler per trobar el radi de l'òrbita

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_s T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,68 \cdot 10^{26} \cdot (36 \cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 2,53 \cdot 10^8 \, m$$

Ara, fent servir que és una òrbita circular

$$2\pi r = vT$$

d'on

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2,53 \cdot 10^8}{36 \cdot 3600} = 1,23 \cdot 10^4 \, m/s$$

L'energia mecànica es pot calcular com

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_s m}{r} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3500 \cdot \left(1,23 \cdot 10^4\right)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,68 \cdot 10^{26} \cdot 3500}{2,53 \cdot 10^8} \\ &= -2,59 \cdot 10^{-11} \, J \end{aligned}$$

b) Com que es tracta d'un sistema lligat, l'energia que cal donar per que ho deixi de ser és exactament l'energia mecànica de la sonda, és a dir, quan la seva energia sigui zero deixarà d'estar lligada per la força gravitatòria i per tant, l'energia que cal donar es el valor positiu de la calculada a l'apartat anterior, $2,62 \cdot 10^{-11} \, J$.

* * *

2. a) Passem la velocitat al SI

$$25000 \, \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{10^3 \, m}{1 \, \cancel{km}} \cdot \frac{1 \, \cancel{h}}{3600 \, s} = 6,94 \cdot 10^3 \, m/s$$

Com es tracta d'una òrbita circular podem escriure

$$2\pi r = vT$$

d'on

$$r = \frac{vT}{2\pi} = \frac{6,94 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 3600}{2\pi} = 1,99 \cdot 10^7 \, m$$

Ara, a partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

tenim

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2}r^3 = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (5 \cdot 3600)^2} \cdot (1,99 \cdot 10^7)^3 = 1,44 \cdot 10^{25}\, kg$$

b) A partir de la definició de densitat

$$\rho = \frac{M}{V} \rightarrow V = \frac{M}{\rho}$$

i tenint en compte que es tracta d'una esfera de volum

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3$$

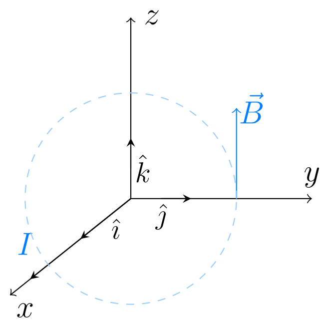
podem calcular el radi del planeta segons

$$\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{M}{\rho} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1,44 \cdot 10^{25}}{4\pi \cdot 16150}} = 5,97 \cdot 10^6\, m$$

Finalment, el camp gravitatori a la superfícies del planeta val

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,44 \cdot 10^{25}}{(5,97 \cdot 10^6)^2} = 26,95\, m/s^2$$

3. a) Representem la situació



per la regla de la mà dreta el camp que crea el fil conductor en el punt de l'eix OY $(0,5,0)$ té la direcció i sentit indicats. El mòdul val

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25}{2\pi \cdot 5} = 10^{-6}\, T$$

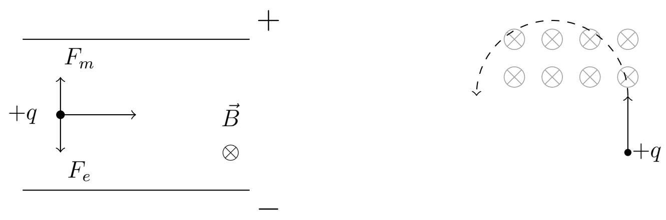
i com a vector es pot escriure

$$\vec{B} = 10^{-6}\, \hat{k}$$

b) La força magnètica demanada, aplicant la llei de Lorentz, serà

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = -1,6\cdot10^{-19}\cdot(10^3\,\hat{\jmath})\times(10^{-6}\,\hat{k}) = -1,6\cdot10^{-22}\,(\hat{\jmath}\times\hat{k}) = -1,6\cdot10^{-22}\,\hat{\imath}$$

4. a) Els esquemes del selector de velocitats i l'espectròmetre de masses es poden representar com



b) Al selector de velocitats, pels ions que no es desvien es compleix

$$F_e = F_m \rightarrow \cancel{q}E = \cancel{q}vB$$

d'on

$$v = \frac{E}{B} = \frac{4,00\cdot10^5}{2,00} = 2,00\cdot10^5\,m/s$$

c) La relació que necessitem s'ha demostrat ja als apunts i als exercicis resolts, a partir de la segona llei de Newton

$$F_m = m\frac{v^2}{R} \rightarrow q\cancel{v}B = m\frac{v^{\cancel{2}}}{R}$$

d'on

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{2,7\cdot10^{-26}\cdot2,00\cdot10^5}{1,6\cdot10^{-19}\cdot5} = 6,75\cdot10^{-3}\,m$$

* * *

5. a) Posem un sistema de coordenades amb origen en P_3, per exemple. Llavors, per calcular el camp elèctric en P_4, creat per q_1, q_2 i q_3, necessitem els vectors

$$\overrightarrow{P_1P_4} \equiv \vec{r}_1 = (2,0)-(0,1) = (2,-1)$$
$$\overrightarrow{P_2P_4} \equiv \vec{r}_2 = (2,0)-(2,1) = (0,-1)$$
$$\overrightarrow{P_3P_4} \equiv \vec{r}_3 = (2,0)-(0,0) = (2,0)$$

i el seu mòdul

$$|\overrightarrow{P_1P_4}| \equiv r_1 = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}\,m$$
$$|\overrightarrow{P_2P_4}| \equiv r_2 = \sqrt{0^2+(-1)^2} = \sqrt{1} = 1\,m$$

$$|\overrightarrow{P_3P_4}| \equiv r_3 = \sqrt{2^2+0^2} = \sqrt{4} = 2\,m$$

ara podem calcular

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{P_4} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3}{r_3^3}\vec{r}_3 \\
&= 8,99\cdot 10^9\left[\frac{2\cdot 10^{-9}}{(\sqrt{5})^3}\cdot(2,-1) + \frac{-3\cdot 10^{-9}}{1^3}\cdot(0,-1) + \frac{5\cdot 10^{-9}}{2^3}\cdot(2,0)\right] \\
&= 8,99\left[\left(\frac{4}{(\sqrt{5})^3}, \frac{-2}{(\sqrt{5})^3}\right) + (0,3) + \left(\frac{5}{4},0\right)\right] \\
&= (14.45, 25.36)\,N/C
\end{aligned}$$

b) Anomenarem C el punt que es troba al centre del rectangle, que té coordenades $(1, 0.5)$. Ara necessitem els vectors

$$\vec{r'}_1 = (1,0.5)-(0,1) = (1,-0.5)$$
$$\vec{r'}_2 = (1,0.5)-(2,1) = (-1,-0.5)$$
$$\vec{r'}_3 = (1,0.5)-(0,0) = (1,0.5)$$

i els seus mòduls

$$r'_1 = \sqrt{1^2+(-0.5)^2} = \sqrt{1,25}$$
$$r'_2 = \sqrt{(-1)^2+(-0.5)^2} = \sqrt{1,25}$$
$$r'_3 = \sqrt{1^2+0.5^2} = \sqrt{1,25}$$

Llavors

$$\begin{aligned}
V_C &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r'_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r'_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r'_3} \\
&= 8,99\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{2\cdot\cancel{10^{-9}}}{\sqrt{1,25}} + 8,99\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{-3\cdot\cancel{10^{-9}}}{\sqrt{1,25}} + 8,99\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{5\cdot\cancel{10^{-9}}}{\sqrt{1,25}} \\
&= \frac{8,99}{\sqrt{1,25}}\big(2-3+5\big) = 32,16\,V
\end{aligned}$$

c) Necessitem calcular el potencial electrostàtic al punt P_4. Aprofitant els vectors trobats al primer apartat podem escriure

$$\begin{aligned}
V_{P_4} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3} \\
&= 8,99\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{2\cdot\cancel{10^{-9}}}{\sqrt{5}} + 8,99\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{-3\cdot\cancel{10^{-9}}}{1} + 8,99\cdot\cancel{10^9}\cdot\frac{5\cdot\cancel{10^{-9}}}{2} \\
&= 8,99\left[\frac{2}{\sqrt{5}} - 3 + \frac{5}{2}\right] = 3,546\,V
\end{aligned}$$

Llavors el treball demanat es pot calcular com

$$W_{C\to P_4} = Q\,(V_{P_4} - V_C) = 3\cdot 10^{-9}\cdot (3,546 - 32,16) = -8,58\cdot 10^{-8}\,J$$

notem que el signe negatiu ens indica que el treball el faria el camp elèctric.

* * *

6. a) El moviment paral·lel de l'espira al fil no afecta al flux magnètic que la travessa, però al disminuir la intensitat de valor sí disminueix el camp magnètic que surt del paper (per la regla de la mà dreta) a través de l'espira, de forma que s'induirà un corrent que ha de circular de forma que l'espira crei un camp magnètic cap enfora, per compensar la pèrdua del camp extern creat pel fil. El corrent induït en l'espira ha de circular doncs en sentit antihorari, també justificat per la regla de la mà dreta.

b) Al desplaçar-se cap a l'esquerra hi ha variació del flux magnètic en l'espira ja que el camp creat pel fil depèn de la distància segons

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

per una altra banda, al augmentar el tamany, el flux magnètic a través de l'espira també augmenta, de forma que tenim dos efectes oposats que, sense més dades, no ens permeten decidir quin dels dos dominarà i per tant, si s'establirà corrent induït ni en quin sentit si ho fa.

c) En aquest cas tant el moviment cap a la dreta com l'augment d'intensitat al fil col·laboren a que el flux magnètic en l'espira augmenti (el camp en ella surt cap a fora) de manera que s'induirà un corrent en sentit horari que crearà un camp cap endins per compensar l'augment de flux magnètic abans esmentat.

d) Al girar al voltant d'un eix perpendicular al pla de l'espira no hi hauria variació de flux magnètic si el camp fos constant en tota la zona de l'espira, però no és el cas, de manera, que a priori sí que hi hauria variació de flux però seria difícil decidir en quin sentit hauria de circular la intensitat en l'espira per compensar aquesta variació.