1. (a) A partir de

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

i prenent, per exemple, el valor de l'energia que correspón a $x = 15\,cm$ $(2\,J)$, podem escriure

$$2 = \frac{1}{2}k \cdot 0,15^2$$

d'on

$$k = \frac{4}{0,15^2} = 177,78\,N/m$$

Ara, podem trobar la freqüència amb

$$f = \frac{10}{6,52} = 1,534\,Hz$$

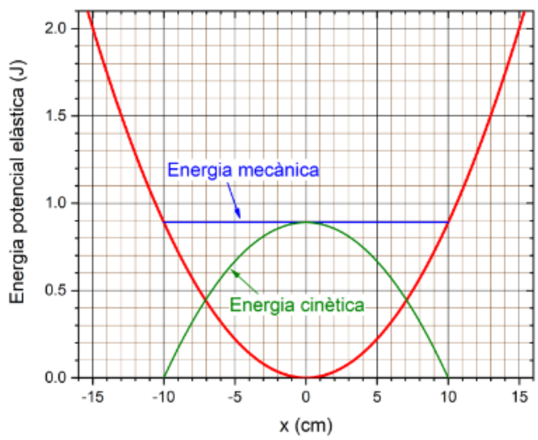
i amb

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2}$$

d'on

$$m = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{177,78}{(2\pi 1,534)^2} = 1,914\,kg$$

(b) Tenim



El fet que l'amplitud sigui $A = 10\,cm$ limita el rang de les corbes que hem de representar. L'energia mecànica és constant (i igual a la suma de la cinètica i la potencial elàstica), i es pot prendre com el valor màxim de l'energia potencial elàstica per aquella amplitud. El valor aproximat d'aquesta energia és $0,9\,J$. Per una altra banda, sabem que quan l'energia potencial elàstica és màxima (per $x = \pm A$), la cinètica és mínima $E_c = 0\,J$, i quan la potencial elàstica és mínima $E_p = 0\,J$, la cinètica és màxima i és una funció quadràtica. D'aquí la corba de color verd representada al gràfic.

2. (a) Calculem la freqüència directament a partir de les dades de l'enunciat

$$f = \frac{6}{30} = 0,2\,Hz$$

el període val, doncs

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,2} = 5\,s$$

i la freqüència angular

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,2 = \frac{2\pi}{5}\,rad/s$$

Amb la informació que tenim de moment l'equació serà

$$y(t) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \varphi_0\right)$$

per fixar el valor de φ_0 fem servir les condicions inicials

$$y(0) = 4$$

d'on podem escriure

$$4 = 4\cos(\varphi_0)$$

i tindrem

$$\varphi_0 = \arccos 1 = 0$$

(b) Per trobar la constant elàstica de la molla fem servir

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

d'on

$$k = m\omega^2 = 60 \cdot \left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 = 94,75\,N/m$$

Finalment, quan s'aturi la saltadora després d'unes quantes oscil·lacions, sabem que el seu pes està compensat per la força elàstica de la corda, llavors

$$ky' = mg$$

on y' representa la longitud que s'ha estirar la corda respecte de la longitud natural

$$y' = \frac{mg}{k} = \frac{60 \cdot 9,8}{94,75} = 6,206\,m$$

de forma que la longitud de la corda, amb la saltadora penjant aturada, val

$$y_{total} = 30 + 6,206 = 36,206\,m$$

3. (a) A partir de

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow k = m\omega^2$$

escrivim, per el cas en el que només està l'aranya

$$k = m_a\omega_a^2$$

i el que està l'aranya i l'insecte

$$k = (m_a + m_i)\omega_{a+i}^2$$

Ara, igualant les equacions

$$m_a\omega_a^2 = (m_a + m_i)\omega_{a+i}^2 \rightarrow m_a\omega_a^2 = m_a\omega_{a+i}^2 + m_i\omega_{a+i}^2$$

d'on

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{m_i\omega_{a+i}^2}{\omega_a^2 - \omega_{a+i}^2} = \frac{1,00 \cdot (2\pi \cdot 10)^2}{(2\pi \cdot 12)^2 - (2\pi \cdot 10)^2} \\ &= \frac{\cancel{4\pi^2} \cdot 100}{\cancel{4\pi^2} \cdot 144 - \cancel{4\pi^2} \cdot 100} = \frac{100}{44} = 2,27\,g = 0,0227\,kg \end{aligned}$$

(b) La constant elàstica associada a aquest oscil·lador es pot calcular com

$$k = m_a\omega_a^2 = 2,27 \cdot (2\pi \cdot 12)^2 = 12,9 \cdot 10^3\,N/m$$

En tots els oscil·ladors harmónics la partícula que vibra assoleix la màxima velocitat (que val $\pm A\omega$) en el punt d'equilibri ($x = 0$), ja que suposant que l'equació d'un oscil·lador és

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

la velocitat s'escriu com

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$$

La màxima acceleració (que val $\pm A\omega^2$) es dona als extrems ($x = \pm A$). Es comprova fàcilment a partir de

$$a(t) = \dot{v}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$$