Electrònica 4t ESO

Artur Arroyo i Pascual§

https://artur-sjo.github.io/index.html

Col·legi Sant Josep Obrer

C. Covadonga, s/n 08906 L'Hospitalet del Llobregat

Darrera revisió 1/4/2025

Resum

Aquests apunts i exercicis es presenten com un material de suport per la part d'Electrònica de la matèria Tecnologia del curs de 4t ESO.

§aarroyo+tecno@stjosep.org

Índex

1 Llei d'Ohm pel corrent continu

Un corrent elèctric és un flux de càrrega. El corrent es defineix com la quantitat de càrrega que travessa la secció d'un conductor per unitat de temps. Si Q és la càrrega que flueix a través de la secció en el temps t, el corrent és:

$$I = \frac{Q}{t}$$

En el Sistema Internacional, el corrent elèctric es mesura en amperes (A), de forma que és

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

És important tenir en compte que per conveni, es pren com sentit positiu del corrent el contrari al flux d'electrons.

1.1 Llei d'Ohm i resistència

En aquesta secció considerarem situacions d'equilibri en les quals la càrrega lliure es mou per un conductor. Experimentalment s'obté que en els conductors el corrent que hi circula entre dos punts és proporcional a la diferència de potencial (volts, V) i inversament proporcional a la resistència del material. Aquest resultat es coneix com a *Llei d'Ohm*.

$$I = \frac{V}{R}$$

La unitat de resistència en el SI s'anomena ohm (Ω). La resistència d'un conductor depèn de la longitud, de l'àrea de la seva secció transversal, del tipus de material i de la temperatura, però pels materials que obeeixen la llei d'Ohm, no depèn de la intensitat I del corrent que hi circula. Aquests materials, entre els que es troben la majoria dels metalls, s'anomenen *òhmics*. Per altres materials la llei d'Ohm tal com l'hem escrit no és vàlida, això ens fa veure que aquesta no és una llei fonamental com per exemple les lleis de Newton, si no una descripció empírica d'una propietat que és compartida per molts materials. En els materials òhmics, la resistència d'un conductor és proporcional a la longitud del conductor i inversament proporcional a l'àrea de la seva secció transversal.

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

La constant de proporcionalitat s'anomena *resistivitat* ρ del conductor i el seu valor depèn de la temperatura.

Exemple 1
Calculeu la intensitat que travessa un cable de coure de $5\,m$ de llarg i $6\,mm$ de diàmetre quan se'l sotmet a una diferència de potencial $V = 220\,V$. Podeu suposar $\rho_{Cu} = 0,0171\,\Omega mm^2/m$

Calculem primer la resistència del cable

$$R = \rho\frac{L}{A} = 0,0171 \cdot \frac{5}{\pi 3^2} = 3,02 \cdot 10^{-3}\,\Omega = 3,02m\,\Omega$$

Ara,

$$I = \frac{V}{R} = \frac{220}{3,02 \cdot 10^{-3}} = 72752,7\,A = 72,8\,KA$$

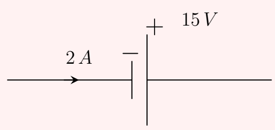
1.2 Energia i potència en els circuits elèctrics

Quan parlem de circuits elèctrics, l'esquema bàsic estarà format per una font d'alimentació (font de tensió o bateria) connectada a una càrrega (típicament una resistència o una agrupació d'elles) mitjançant uns cables conductors pels que suposarem quasi sempre que no ofereixen resistència elèctrica al pas del corrent. Sota aquestes condicions podem parlar de la *potència que entrega* una font d'alimentació com

$$P = VI$$

on V és la tensió que proporciona la font d'alimentació i I la intensitat que la travessa.

Exemple 2
Calculeu la potència que entrega la font



el càlcul és molt senzill

$$P = VI = 15 \cdot 2 = 30\,W$$

També podem parlar de la potència perduda per efecte Joule en una resistència R i la calcularem com

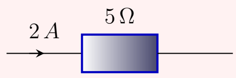
$$P = I^2R$$

on I és la intensitat que travessa la resistència.

L'efecte Joule és la manifestació macroscòpica de les interaccions que pateixen els electrons entre ells i amb els àtoms fixos del material que forma un conductor. Aquestes interaccions es tradueixen en forma d'energia perduda com a calor, que podem calcular com

$$E = Pt = I^2Rt$$

Exemple 3
Calculeu la potència que consumeix la resistència i la calor dissipada en dues hores.



hem de fer

$$P = I^2R = 2^2 \cdot 5 = 20\,W$$

en quant a la calor dissipada

$$E = Pt = 20 \cdot 2 \cdot 3600 = 144000\,J$$

Una altra relació important és la que hi ha entre la potència dissipada per una resistència, el seu valor i la tensió que cau en ella.

$$P = \frac{V^2}{R}$$

Exemple 4
Les característiques d'una bombeta incandescent són $P = 80\,W$, $V = 220\,V$. Calculeu la resistència que representa aquesta bombeta. Calculeu també la potència que dissiparà si es connecta a $125\,V$

Fent servir

$$P = \frac{V^2}{R}$$

tenim

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{80} = 605\,\Omega$$

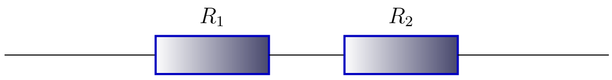
i si es conecta a $125\,V$

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{125^2}{605} = 25,83\,W$$

1.3 Associació de resistències

En aquesta secció estudiarem circuits senzills compostos de bateries i resistències connectades segons diverses combinacions.

Dues resistències R_1, R_2 connectades de forma que circuli la mateixa intensitat per les dues es diu que estan connectades en sèrie.



La caiguda de potencial entre les resistències es

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

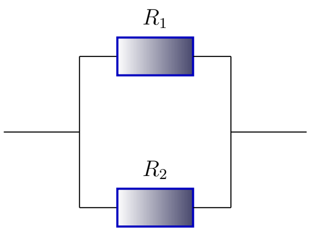
sovint es pot simplificar l'anàlisi d'un circuit que té resistències en sèrie substituint aquestes per una sola resistència equivalent que ens proporcioni la mateixa caiguda de potencial quan circula per ella la mateixa intensitat I. La resistència equivalent per les resistències en sèrie és la suma de les resistències originals:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Quan existeixin més de dues resistències en sèrie, la resistència equivalent es calcula amb:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots$$

Dues resistències unides de forma que el corrent es divideixi entre elles es diu que estan unides en paral·lel. Com la càrrega elèctrica es conserva, la suma de les intensitats que circulen per les resistències ha de ser igual a la que hi entrava



$$I = I_1 + I_2$$

el potencial que cau en cadascuna és

$$V = I_1R_1 = I_2R_2$$

de forma que de les dues equacions anteriors s'obté

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \\
I_2 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} I
\end{aligned}
$$

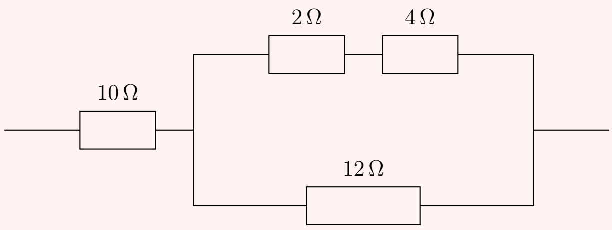
i la resistència equivalent a aquestes dues serà

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

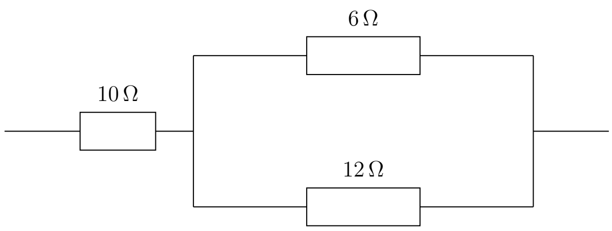
resultat que es pot generalitzar a qualsevol nombre de resistències connectades en paral·lel

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdots$$

Exemple 5
Trobeu la resistència equivalent de la següent combinació

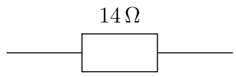


Podem començar sumant les resistències de $2\,\Omega$ i $4\,\Omega$, que estan en sèrie



Ara, sumem en paral·lel les resistències de $6\,\Omega$ i $12\,\Omega$

i finalment,



És important tenir en compte que a l'inici, les resistències de $2\,\Omega$ i $12\,\Omega$ no es poden sumar en paral·lel, ja que és prioritari fer l'associació de la de $2\,\Omega$ amb la de $4\,\Omega$ de la mateixa manera que les de $2\,\Omega$ i $10\,\Omega$ no es poden sumar en sèrie perquè hi ha una *derivació* entre elles, i s'ha de reduir primer el grup format per les resistències de $2\,\Omega$, $12\,\Omega$ i $12\,\Omega$.

Exercicis

1. Suposeu que tenim tres resistències de valors $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$ i $R_3 = 50\,\Omega$ Calculeu la resistència equivalent (en cada cas) quan es connecten les tres simultàniament de totes les formes possibles.

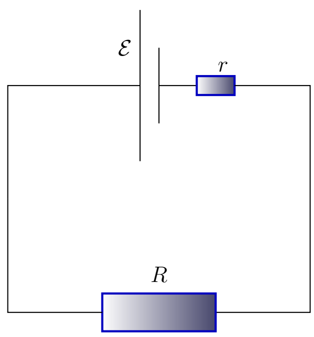
2. Tenim dues bombetes incandescents que treballen a $220\,V\,/\,120\,W$ i $125\,V\,/\,60\,W$ respectivament. Calculeu la resistència que presenta el conjunt quan es connecten en sèrie i quan es connecten en paral·lel. Calculeu també la potència que dissipa cadascuna d'elles quan es connecten a una font de $300\,V$.

2 Circuits de corrent continu

2.1 Fonts d'alimentació reals

Una bateria real és més complicada que una font d'alimentació ideal. Les reals tenen una certa resistència interna que fa que la diferència de potencial que proporcionen *en borns* no sigui la mateixa que la que indiquen, a aquesta darrera li direm *força electromotriu*, o *fem*. Una font de *fem* ideal manté una diferència de potencial constant independentment de la intensitat que hi circula per ella. En una bateria real la tensió en borns disminueix al augmentar la intensitat. La resistència interna es modela suposant que es troba connectada en sèrie amb la font.

Vegem el cas d'un circuit senzill.



Hem de pensar que la tensió que tenim en borns, V_b, no és $\mathcal{E}$, ja que la resistència r és a *dins* de la font d'alimentació. Calculem la intensitat que passa per el circuit

$$\mathcal{E} = I(r+R) \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{r+R}$$

llavors, la tensió en *borns* és la que proporciona la font *menys* la que cau en ella mateixa per causa de la resistència interna que té, r

$$\begin{aligned} V_b = \mathcal{E} - Ir &= \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r+R} r \\ &= \mathcal{E}\left(1 - \frac{r}{r+R}\right) = \mathcal{E}\frac{R}{r+R} \end{aligned}$$

En general sabrem si ens parlen d'una font d'alimentació real perquè ens donaran com a dades la seva *fem* $\mathcal{E}$, i la seva resistència interna. Si es tracta d'una font ideal, ens donaran com a dada la *tensió* V, que proporciona.

Exemple 1
Una font d'alimentació de *fem* $\mathcal{E} = 12\,V$ es connecta a un circuit. Si quan hi circula una intensitat de $10\,A$ la tensió entre el borns V_b, del generador és de $11,2\,V$, quina és la resistència interna r, de la font?

La caiguda de tensió a la resistència interna de la font val

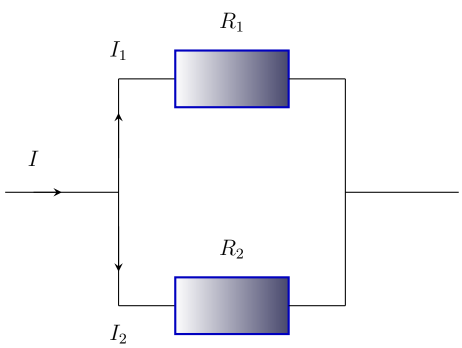
$$\mathcal{E} - V_b = 12 - 11,2 = 0,8\,V$$

Llavors, aplicant la llei d'Ohm

$$V = Ir \Rightarrow 0,8 = 10r \Rightarrow r = 0,08\,\Omega$$

2.2 Divisor de intensitat

En l'anàlisi que haurem de fer en molts dels exemples i exercicis posteriors, trobarem una situació que es repeteix sovint. És el cas d'una derivació com la de la figura

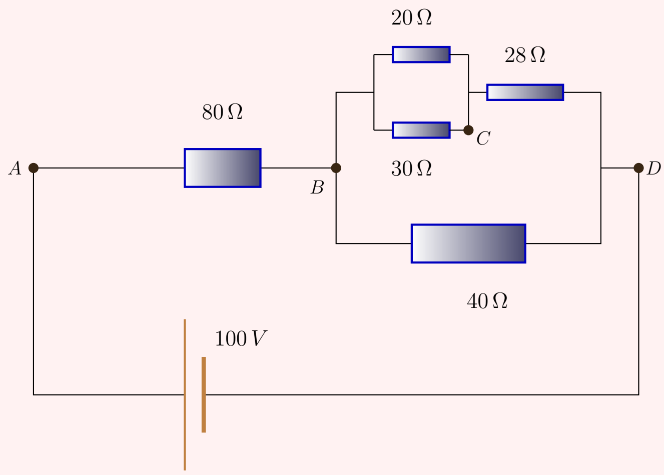


tal com vam veure quan parlàvem de l'associació de resistències en paral-lel, les intensitats I_1, I_2 a la derivació es poden calcular en funció de la intensitat entrant I i de les resistències R_1, R_2 amb les fórmules

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Exemple 2

Calculeu la tensió que cau en cada resistència.



El primer que fem és calcular la resistència equivalent per tal de trobar la intensitat total que passa pel circuit.

Les resistències de 20 Ω i 30 Ω estan en paral·lel, de manera que les assimilem a una de valor

$$\frac{20 \cdot 30}{20+30} = \frac{600}{50} = 12\,\Omega$$

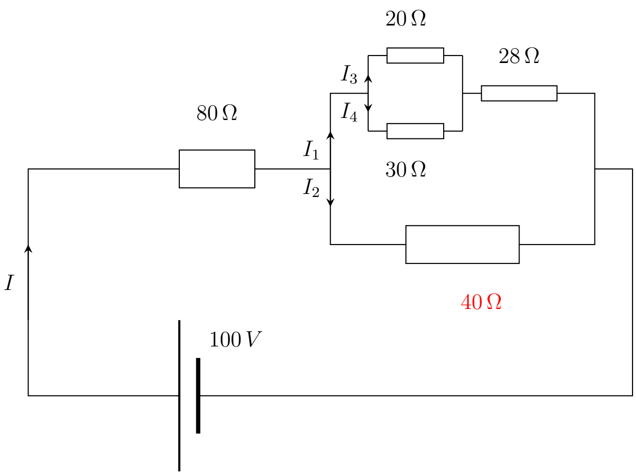
ara, aquesta es troba en sèrie amb la de 28 Ω i juntes queden com una de valor $12 + 28 = 40\,\Omega$.

Aquesta darrera al seu torn es troba en paral·lel amb la de 40 Ω i juntes equivalen a una de 20 Ω.

Finalment, queda sumar la de 80 Ω en sèrie per donar $20 + 80 = 100\,\Omega$. Llavors, la intensitat total val

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{100} = 1\,A$$

Ara aplicarem les fórmules del divisor de intensitat per anar trobant les intensitats a cada branca.



A la primera derivació tenim

$$I_1 = 1 \cdot \frac{40}{40 + 40} = 0,5\,A$$

$$I_2 = 1 \cdot \frac{40}{40 + 40} = 0,5\,A$$

i a la segona derivació

$$I_3 = 0,5 \cdot \frac{30}{30 + 20} = 0,3\,A$$

$$I_4 = 0,5 \cdot \frac{20}{30 + 20} = 0,2\,A$$

Llavors, les caigudes de tensió són

$$V_{80\,\Omega} = I \cdot 80 = 1 \cdot 80 = 80\,V$$

$$V_{40\,\Omega} = I_2 \cdot 40 = 0,5 \cdot 40 = 20\,V$$

$$V_{20\,\Omega} = I_3 \cdot 20 = 0,3 \cdot 20 = 6\,V$$

$$V_{30\,\Omega} = I_4 \cdot 30 = 0,2 \cdot 30 = 6\,V$$

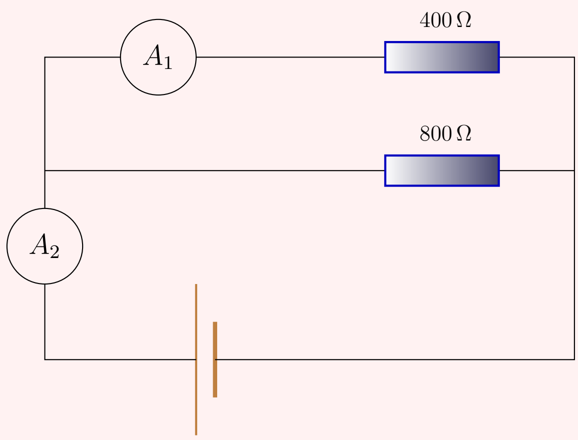
$$V_{28\,\Omega} = I_1 \cdot 28 = 0,5 \cdot 28 = 14\,V$$

2.3 Instruments de mesura

2.3.1 Amperímetre

Al laboratori, per tal de mesurar la intensitat que circula per un conductor es fa servir un *amperímetre*. Els amperímetres s'han de connectar en sèrie a l'element pel qual es vol mesurar la intensitat que el travessa. Els amperímetres presenten una certa resistència interna, que idealment ha de ser propera a zero. En cas contrari, la seva sola presència al circuit alteraria la intensitat que hi circula, donant una lectura errònia.

Exemple 3
Si a l'amperímetre A_2 de la figura es llegeix $60\,mA$, quina serà la lectura de l'amperímetre A_1?



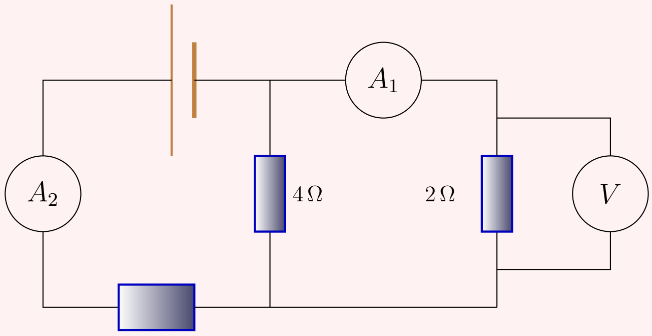
Si anomenem I el corrent que marca A_2 i I' el que marca A_1, llavors aplicant el divisor d'intensitat

$$I' = I \cdot \frac{800}{800+400} = 60 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{800}{800+400} = 40\,mA$$

2.3.2 Voltímetre

Per mesurar la caiguda de tensió en elements passius com resistències, fem servir un *voltímetre*. Els voltímetres s'han de connectar en paral·lel al circuit, abans i després de l'element pel qual es vol mesurar la tensió que hi cau. Idealment han de tenir resistència infinita, per tal que no es derivi intensitat cap a ells i, per tant s'alteri la mesura de la tensió que es vol calcular.

Exemple 4
El voltímetre del circuit següent senyala $2,5\,V$. Què indiquen els amperímetres?



Anomenant I_1 la intensitat que marca A_1 i aplicant la llei d'Ohm a la resistència de $2\,\Omega$ tenim,

$$V = I_1 R \Rightarrow 2,5 = I_1 \cdot 2 \Rightarrow I_1 = 1,25\,A$$

Ara, com les resistències de 2 i $4\,\Omega$ es troben en paral·lel, cau la mateixa tensió en elles, de manera que podem aplicar la llei d'Ohm a la resistència de $4\,\Omega$ per obtenir la intensitat $I_{4\,\Omega}$ que la travessa (aquesta intensitat no està assenyalada al dibuix)

$$V = I_{4\,\Omega} R \Rightarrow 2,5 = I_{4\,\Omega} \cdot 4 \Rightarrow I_{4\,\Omega} = 0,625\,A$$

Les intensitats $I_{4\,\Omega}$ i I_1 se sumen a la derivació per donar la intensitat I_2 que marcarà l'amperímetre A_2, de forma que finalment tenim

$$I_2 = I_{4\,\Omega} + I_1 = 1,875\,A$$

Exercicis

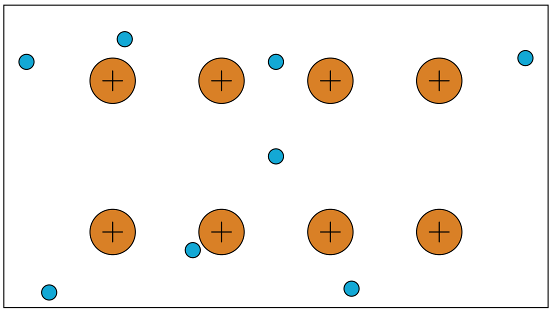
1. Resoleu a la llibreta l'exercici 14 de la Unitat 4 del llibre digital.
2. Resoleu a la llibreta l'exercici 15 de la Unitat 4 del llibre digital.
3. Resoleu a la llibreta l'exercici 22 de la Unitat 4 del llibre digital.

3 Díodes

3.1 Teoria de l'enllaç

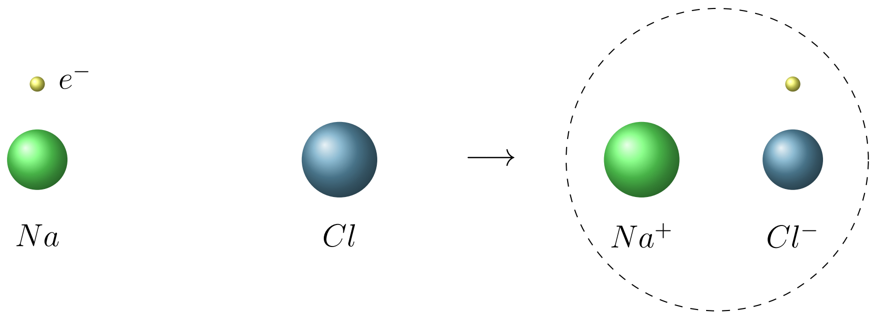
Enllaç metàl·lic

En l'enllaç metàl·lic els àtoms es disposen segons una estructura regular (cristal·lina) i cedeixen els seus electrons de valència de forma que aquests formen una mena de núvol anomenat *gas d'electrons*. Com que es mouen lliurement a través del metall, si apliquem un camp elèctric circularà una gran quantitat de corrent ja que cada àtom contribueix amb, al menys, un electró. El moviment relatiu entre capes d'àtoms es pot donar de forma relativament fàcil, cosa que explica la gran mal·leabilitat i ductilitat dels metalls, sobre tot els purs. Son també molt bons conductors de la calor.



Enllaç iònic

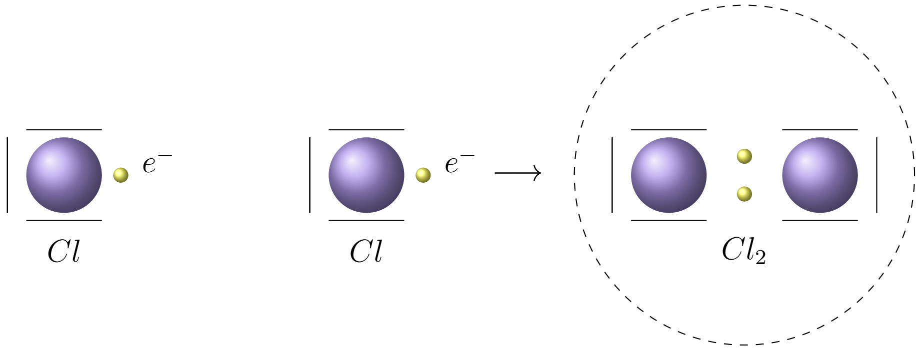
El formen compostos amb electronegativitat molt diferent entre ells. Considerem un àtom de sodi (Na) i un de clor (Cl) neutres. L'àtom de sodi té un electró a la darrera capa mentre que el de clor en té 7. D'aquesta manera, si l'àtom de sodi es pogués despendre d'aquest electró quedaria amb la darrera capa complerta i si el de clor en pogués guanyar un, quedaria amb la darrera capa també complerta. Això és el que succeeix quan s'acosten un àtom de sodi i un de clor, com que el clor és molt electronegatiu i el sodi molt poc, l'electró de la darrera capa del sodi "se'l queda" el clor i llavors, al quedar carregats elèctricament, (el sodi amb càrrega positiva i el clor negativa) queden lligats per la força elèctrica que apareix entre ells,



Els compostos iònics són típicament sòlids a temperatura ambient, durs i resistents encara que poden ser també relativament fràgils. No son bons conductors de la calor ni de l'electricitat.

Enllaç covalent

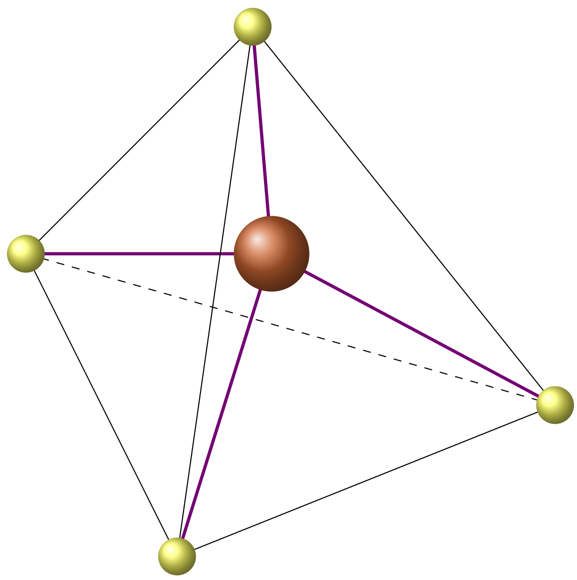
L'enllaç covalent es dona entre àtoms que tenen electronegativitat semblant de forma que *comparteixen* electrons de valència. Per exemple, sabem que l'àtom de clor té set electrons a la darrera capa i aquesta situació la podem representar amb tres parells *no enllaçants* i un electró sol. La molècula de clor Cl_2 es forma quan dos àtoms de clor s'acosten prou,



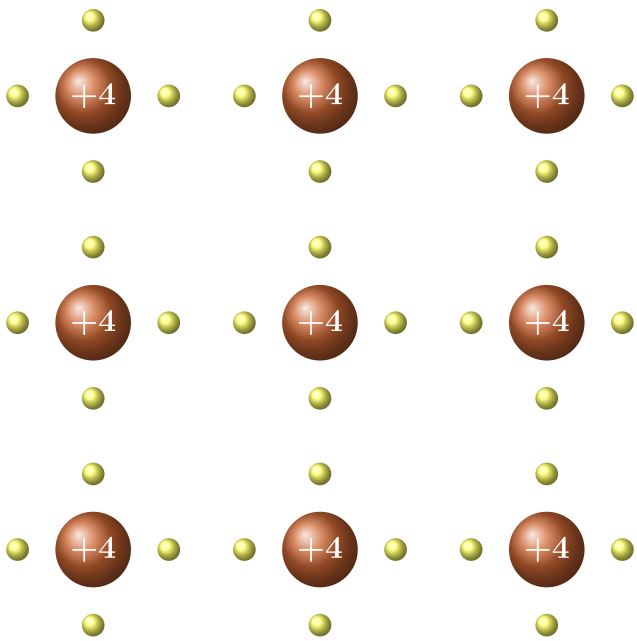
Al compartir un dels electrons de la capa de valència cada àtom es veu rodejat de vuit electrons i com sabem, aquesta és la configuració més estable pels àtoms. En el cas de la molècula de monòxid de carboni, per exemple, formada per un àtom d'oxigen i un de carboni, l'enllaç també serà covalent però els electrons no estaran compartits al 50 % entre cada àtom, ja que l'oxigen és més electronegatiu que el carboni. D'aquesta manera entre àtoms iguals l'enllaç és 100 % covalent però entre àtoms diferents sempre tindrem un percentatge d'enllaç iònic (en aquest cas és diu que l'enllaç és polar). Els compostos covalents tenen punts de fusió i ebullició molt més baixos que els iònics de forma que a temperatura ambient molts es troben en estat líquid o gas.

3.2 Semiconductors intrínsecs

El díode és un dispositiu electrònic format per la unió dos materials semiconductors. Els semiconductors es caracteritzen per ser elements que tenen quatre electrons a la capa de valència. Aquests elements formen una xarxa cristal·lina tridimensional semblant a la del diamant, on els ions positius se situen en el centre d'un tetraedre amb els quatre electrons de la capa de valència situats en els vèrtexs del tetraedre,

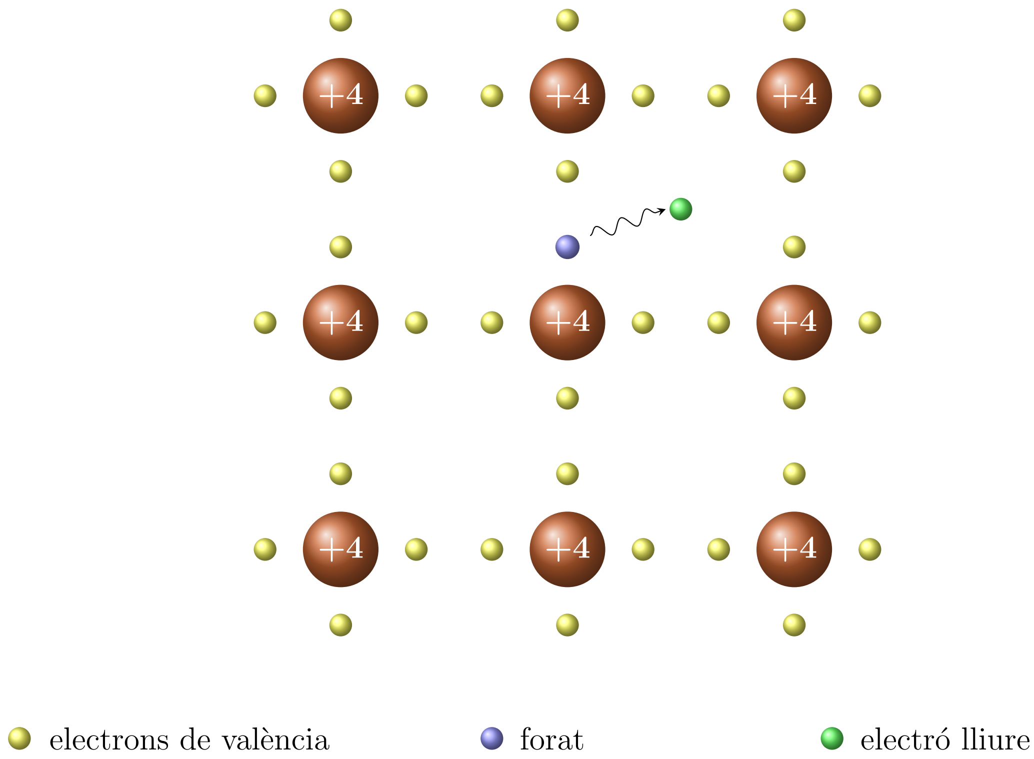


aquests tetraedres s'uneixen entre ells de manera que cada àtom queda unit mitjançant enllaços covalents a quatre àtoms del seu voltant. L'estructura resultant és tridimensional i per poder seguir endavant representarem una versió bidimensional simplificada d'ella.



A temperatures baixes no hi ha electrons lliures i al aplicar un camp elèctric extern la conductivitat elèctrica és pràcticament nul·la, el material es comporta com un aïllant.

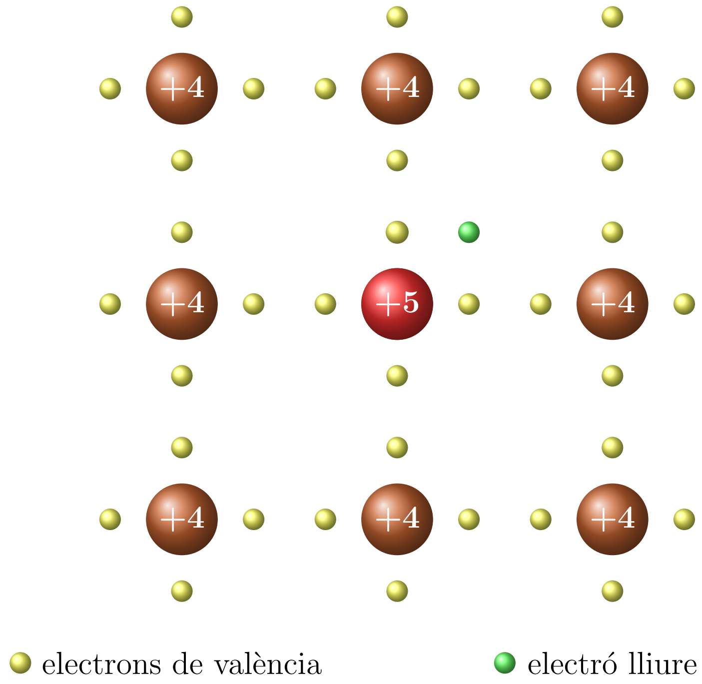
En el moment que elevem la temperatura, degut a la mateixa vibració tèrmica dels àtoms és possible que algun electró abandoni la seva posició i quedi lliure per circular per la xarxa cristal·lina. Quan passa això, al lloc que hi havia l'electró (e^-), queda un *forat* (h^+) que a tots els efectes es comporta com una partícula lliure amb càrrega igual a la de l'electró però signe positiu i massa semblant.



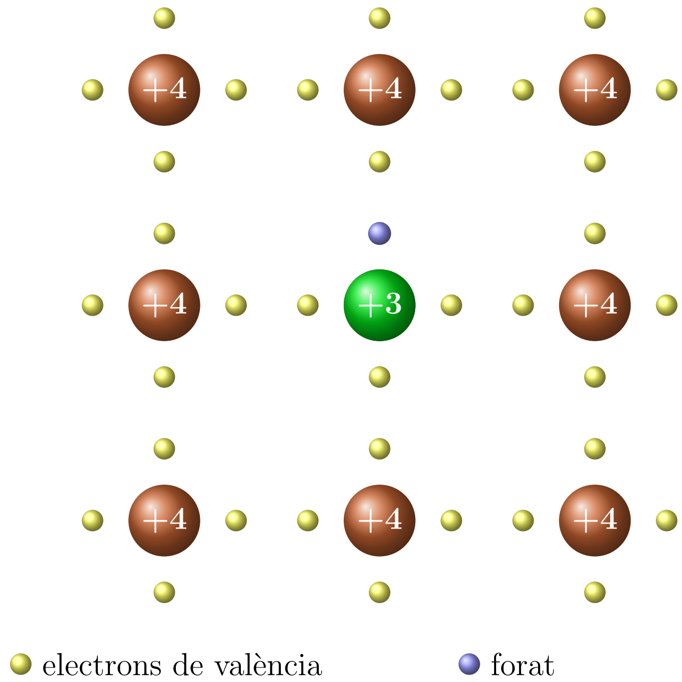
L'energia necessària perque un electró quedi lliure s'anomena E_g, és més petita que l'energia d'ionització del corresponent àtom aïllat i alguns valors típics son $E_g(Si) = 1,12\,eV$, $E_g(Ge) = 0,7\,eV$ a $T = 300\,K$ El nombre de forats creats en un semiconductor d'aquest tipus serà exactament el mateix que d'electrons lliure circulants. Aquests materials s'anomenen semiconductors *intrínsecs*.

3.3 Semiconductors extrínsecs

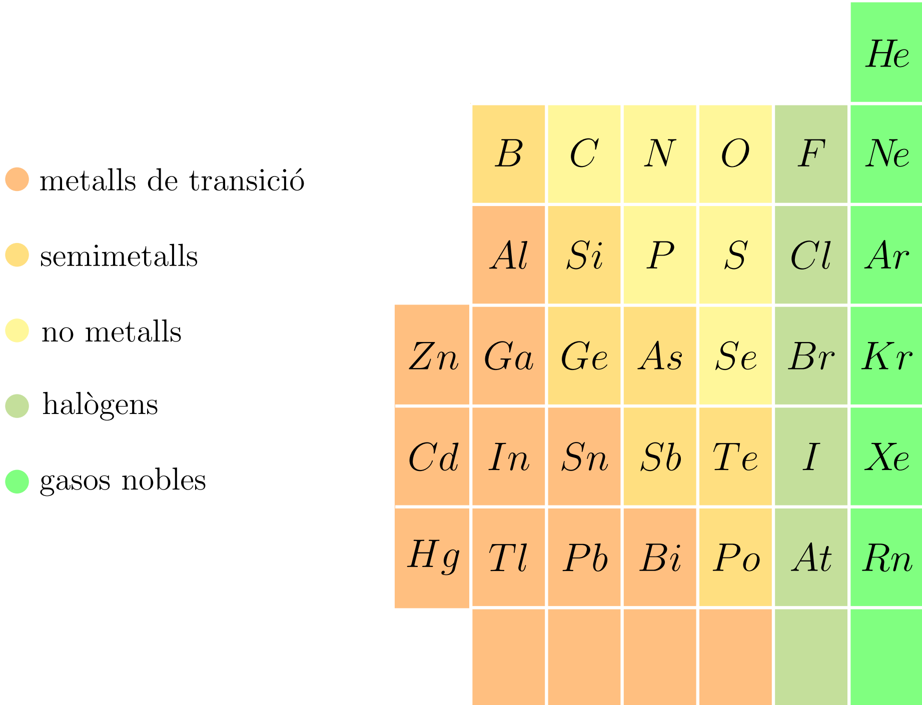
Per tal d'augmentar les utilitats dels semiconductors, sovint se'ls afegeix en molt petites quantitats un altre element (es diu que el material s'ha *dopat*). Aquest element afegit pot ser *donador*, si té cinc electrons de valència, o *acceptador* si en té tres. Direm que el semiconductor dopat d'aquesta manera és de tipus n o p, respectivament. Sovint ens referirem a aquestes substàncies dopants com a *impureses*. Un semiconductor de tipus n tindrà els electrons com a portadors de càrrega majoritaris,



Mentre que un de tipus p tindrà forats com a portadors majoritaris de càrrega.

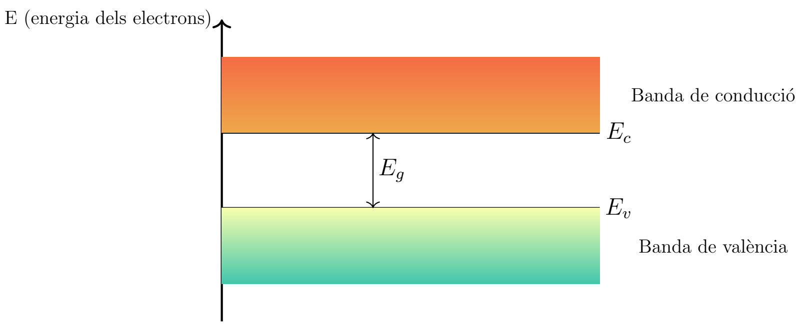


Entre els donants més corrents pel silici es troben el fòsfor, l'arsènic i l'antimoni. En quant als acceptadors tenim el bor, gal·li, indi i alumini.



3.4 Model de bandes

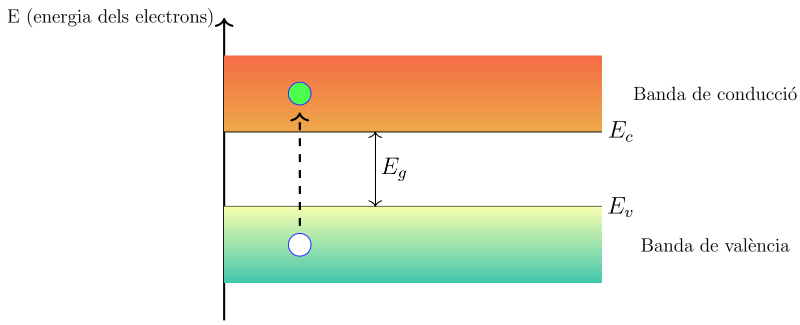
Per tal d'explicar els fenòmens associats al moviment de portadors de càrrega en un semiconductor es fa servir l'anomenat model de bandes (d'energia). Segons aquest model, en un semiconductor intrínsec a temperatura prou baixa els electrons de valència es troben en una banda anomenada *banda de valència* i aquesta està totalment ocupada. Si subministrem d'alguna manera prou energia, alguns d'aquests electrons podran *saltar* a l'anomenada *banda de conducció*. El valor d'aquesta energia que permet el salt és característic de cada semiconductor i l'anomenem E_g (energia del "gap").



On E_g correspon a l'energia del gap, E_c assenyala la mínima energia a la banda de conducció i E_v representa la màxima energia a la banda de valència. La zona entre E_v i E_c s'anomena *banda prohibida.*

En el cas dels materials aïllants la separació entre la banda de valència i la de conducció és molt gran. En el cas dels metalls, les dues bandes es troben solapades, de forma que hi ha electrons lliures disponibles sempre.

El model de bandes permet explicar la formació d'un parell electró/forat considerant que un electró (que tingui energia $\geq E_g$) de la banda de valència passa a la banda de conducció deixant un forat on era ell.

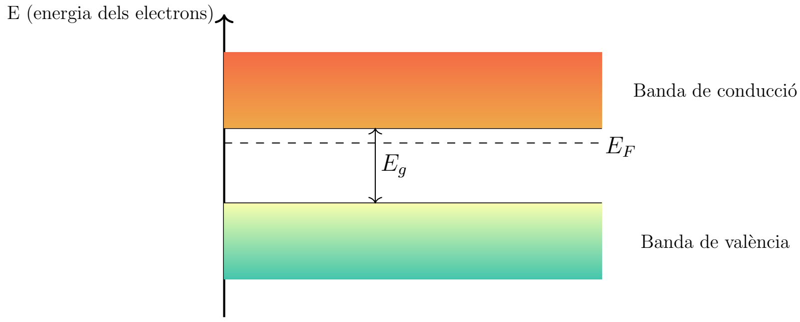


d'aquesta manera hi haurà portadors de càrrega en cada banda.

3.4.1 Efecte de les impureses

Les impureses introduïdes en el semiconductor actuen habilitant nivells d'energia permesos dins la banda prohibida. En el cas de les impureses donadores aquestes introdueixen un cinquè electró per àtom que no es trobarà totalment lliure però que necessitarà poca energia per passar a la banda de conducció. En el cas de les impureses acceptadores apareixen forats que també podran moure's si se'ls proporciona poca energia. Aquestes situacions es modelen introduint uns nivells, anomenats *profunds* dins la banda prohibida.

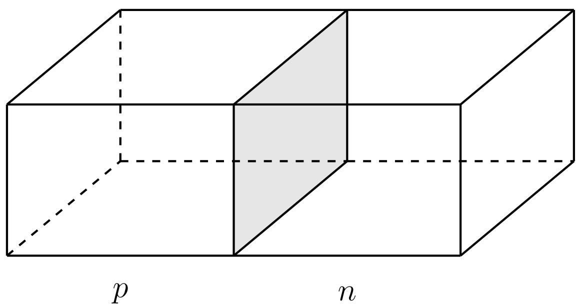
Per exemple, per un donador tindrem



A aquest nivell d'energia l'anomenarem *nivell de Fermi*, E_F.

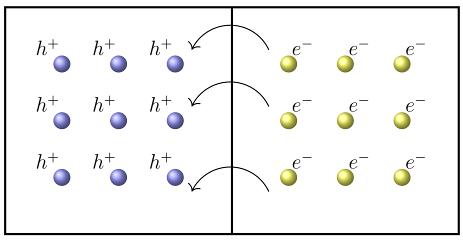
3.5 Unions PN

Considerem la unió de dues mostres de materials semiconductors, de tipus p i n.



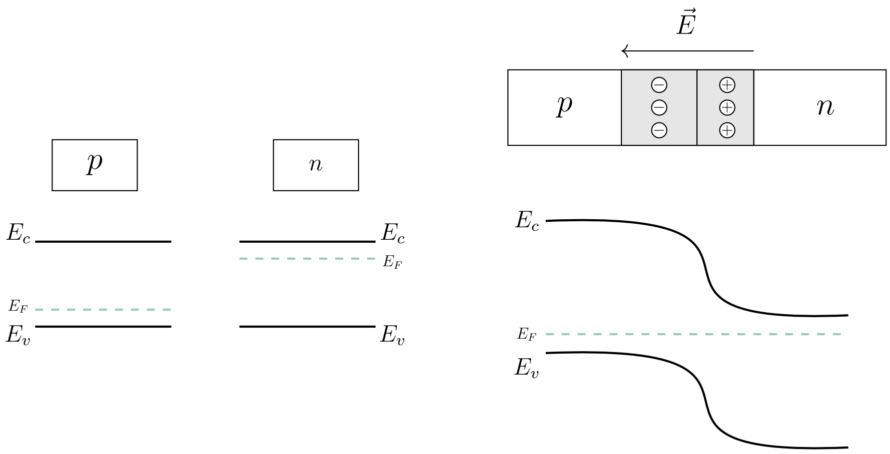
La cara que comparteixen s'anomena *unió metal·lúrgica* i suposarem que a banda i banda les concentracions de portadors de càrrega (e^- i h^+) son homogènies.

Al posar en contacte les dues mostres apareixerà immediatament un flux *per difusió* d'electrons del material n al p i de forats del material p a l'n.



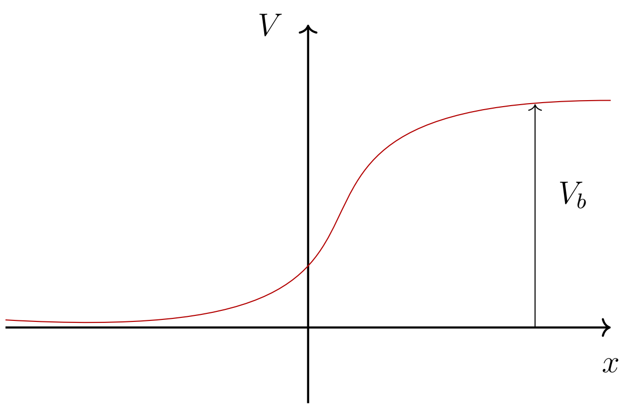
A mesura que augmenti aquest flux es crearà una zona (anomenada *zona d'esgotament o deserta*) a banda i banda de la unió metal·lúrgica.

Aquesta zona presenta càrrega elèctrica (diferent a cada banda) degut als ions fixos que es van creant i no es poden desplaçar, fent que aparegui un camp elèctric dirigit del material n al p que inicia un flux *per arrossegament*, que compensa el flux per difusió dels portadors el transport s'atura (formalment) quan s'arriba a un equilibri entre els dos mecanismes. Arguments que estan fora de l'abast d'aquest apunts ens diuen a la pràctica el que succeeix és que el nivell de Fermi dels dos semiconductors s'iguala, provocant una deformació de les bandes de valència i conducció tal i com es veu a la figura.



En resum, els portadors de càrrega negatius (electrons) és mouen per difusió cap a "l'esquerra" i per arrossegament (a causa del camp elèctric creat) cap a "la dreta". Els portadors de càrrega positius (forats) és mouen per difusió cap a la dreta i per arrossegament cap a l'esquerra. Fora de la zona d'esgotament el material és neutre. Fent un símil mecànic, els forats es comporten com objectes que cauen pel pendent creat en la interfície d'unió.

Associat a aquest camp elèctric s'estableix un potencial anomenat *potencial de barrera* (V_b) en la zona d'esgotament.



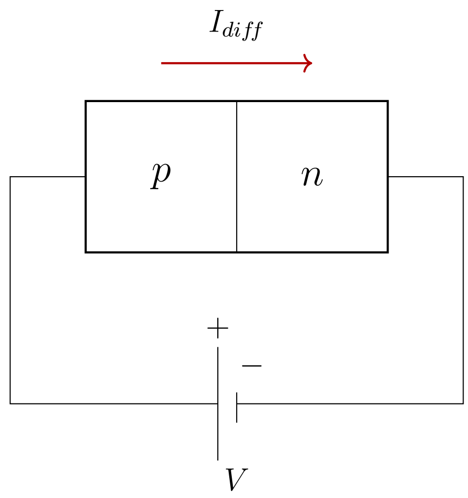
Hem de tenir present que el dopatge no té perquè tenir el mateix valor en cada zona del díode, això fa que la zona d'esgotament no sigui simètrica.

3.6 Polarització del díode

Veiem ara què succeeix quan polaritzem una unió PN. Tenim dues possibilitats

Polarització directa

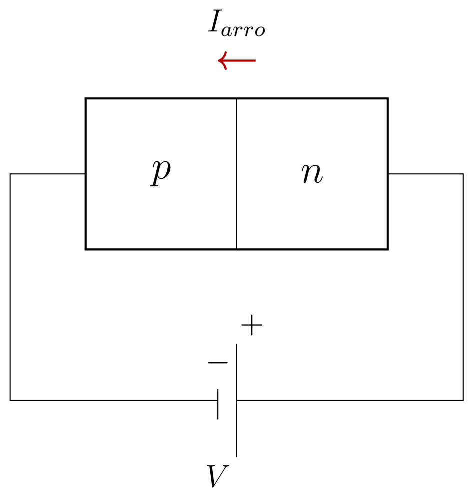
En aquesta situació la connexió de la font d'alimentació fa que s'estiguin injectant electrons al material N. Alternativament, podríem pensar que són forats els portadors amb els que la bateria alimenta el material P



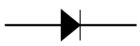
L'efecte sobre la zona d'esgotament és disminuir el potencial de contacte de forma que tindrem $V_b' = V_b - V$, la zona d'esgotament s'estreta de manera que els portadors majoritaris a la zona N travessen la barrera de potencial per difusió, convertint-se en portadors minoritaris al arribar a la zona P i establint-se un corrent mesurable.

Polarització inversa

L'efecte d'aquest tipus de connexió és augmentar l'amplada de la zona d'esgotament, elevant el potencial de barrera segons $V_b' = V_b + V$. Al augmentar el camp elèctric el corrent de difusió queda molt reduït. Una altra conseqüència és l'establiment d'un petit corrent d'arrossegament, anomenat corrent de saturació inversa.



El símbol que es fa servir pels díodes és



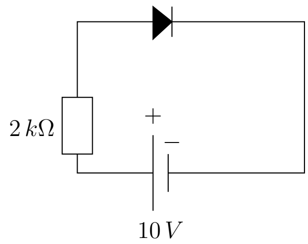
on el sentit de la fletxa indica el pas del corrent en el díode quan es troba polaritzat en directa.

Exercicis

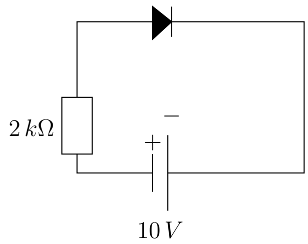
1. Accediu a Anàlisi de circuits i familiaritzeu-vos amb aquest entorn virtual de disseny i anàlisi de circuits. Podeu provar d'implementar els Exemples 2, 3 i 4 de la secció anterior.
2. Implementeu l'esquema de connexió en directa i inversa del Tema 4 de la Unitat 4 del llibre digital en l'entorn virtual. Comproveu que el resultat és l'esperat.
3. Implementeu l'esquema de connexió amb corrent altern del mateix tema 4.
4. Resoleu la darrera activitat del tema 4 *Com es comprova la caiguda de tensió...*

3.7 Comportament dels díodes en circuits

En *primera aproximació*, un díode es comporta com un interruptor, deixa passar el corrent quan està polaritzat en directa i talla el pas del corrent quan ho està en inversa. Aquest comportament *ideal* pot ser suficient per estudiar el seu comportament en un circuit de forma provisional, per exemple



a)

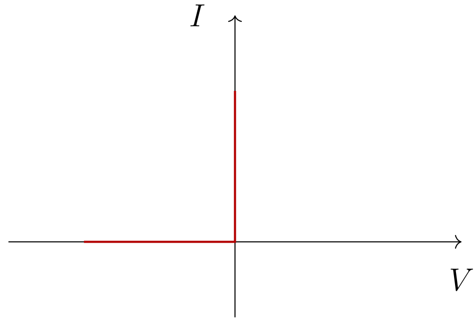


b)

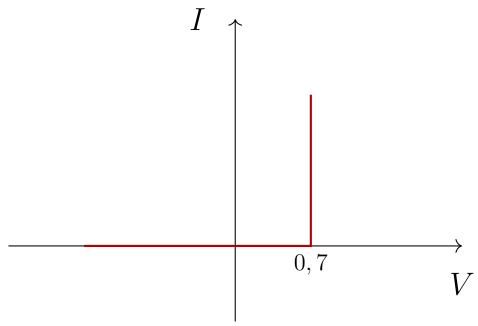
En el circuit *a*), el díode es troba polaritzat en directa de forma que deixa passar tota la corrent a través d'ell (com si fos una part més de la línia de connexió) i podem calcular

$$V = IR \longrightarrow 10 = I \cdot 2000 \longrightarrow I = \frac{10}{2000} = 5\,mA$$

en el circuit *b*) el díode es troba polaritzat en inversa, de forma que no passa corrent en el circuit, com si la línia de connexió estigués tallada en aquest punt. En aquesta aproximació, la corba característica del díode és

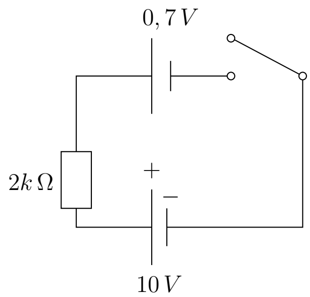


En *segona aproximació*, sabem que un díode necessita estar sotmès a una diferència de potencial mínima per poder conduir corrent. En el cas del silici aquest valor és $0,7\,V$. Si la font d'alimentació proporciona un valor prou gran no s'apreciarà cap diferència amb el cas anterior (podríem treballar en la primera aproximació) però quan el valor proporcionat per la font és petit, s'ha de tenir en compte que el díode està proporcionant els $0,7\,V$. Ara, la corba característica és



on hem suposat que el díode és de silici i per tant $V_b = 0,7\,V$. Si es tractés d'un díode de germani hauríem de fer servir el valor $V_b = 0,3\,V$.

En quant al circuit de l'exemple a), anterior, modelarem el comportament del díode com una font d'alimentació de $0,7\,V$ en sèrie amb un interruptor.



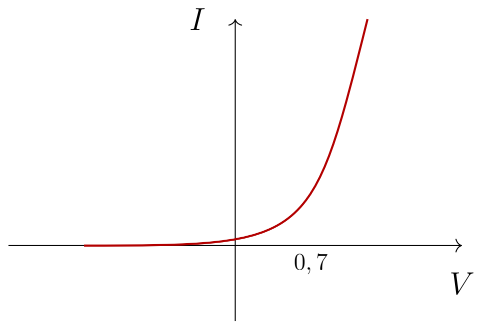
Recordem que el potencial del díode és un potencial *a superar* per tal que comenci a conduir corrent. Per això apareix al circuit amb orientació contraria a la font d'alimentació. Si aquesta proporciona un valor superior, el díode s'activa i deixa passar corrent (l'interruptor es tanca). Els càlculs per la intensitat són ara

$$V = IR \longrightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{10 - 0,7}{2000} = 4,65\,mA$$

En *tercera aproximació*, hem de considerar els efectes resistius del mateix díode. El valor d'aquesta resistència (l'anomenarem r_b) oscil·la típicament entre 1 i 25 Ω i es pot calcular a partir de les especificacions del fabricant del díode. Suposant, pel nostre exemple, que $r_b = 7,5\,\Omega$, tindrem

$$I = \frac{10 - 0,7}{2000 + 7,5} = 4,633\,mA$$

La corba característica es pot representar qualitativament com

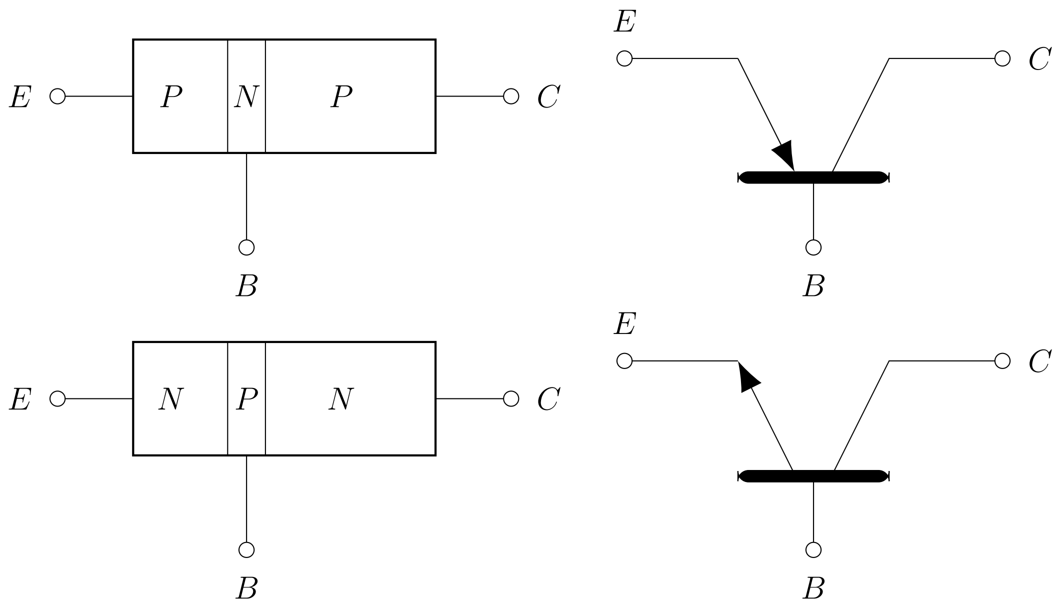

I
0, 7
V

4 Transistors

De transistors existeixen dos tipus, els unipolars (MOSFET, *metal oxide semiconductor field effect transistor*) i els bipolars (BJT, *bipolar junction transistor*) en aquests apunts ens limitarem a parlar del transistor bipolar. El transistor és un element en el qual podem canviar la seva resistència interna fent servir un senyal d'entrada. Això permet regular de forma senzilla el corrent que circula per un circuit al que estigui connectat. A nivell pràctic, els transistors es poden fer servir com a interruptors (sense elements mecànics) o amplificadors de senyal.

4.1 Característiques

De transistors bipolars existeixen dos tipus, els NPN i els PNP,



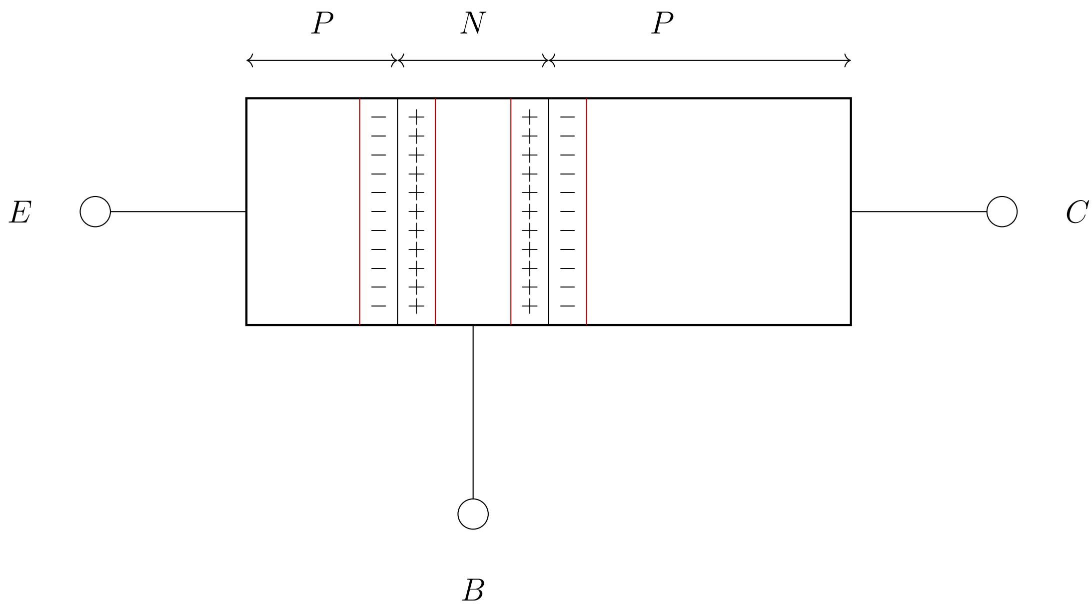
Els dos tipus tenen unes característiques comunes:

- L'emissor està dopat fortament i la seva missió és injectar portadors a la base.
- La base, que conté poques impureses, és molt prima, de l'ordre de $10^{-6}\,m$, de forma que la majoria dels portadors provinents de l'emissor la travessaran fins arribar al col·lector.

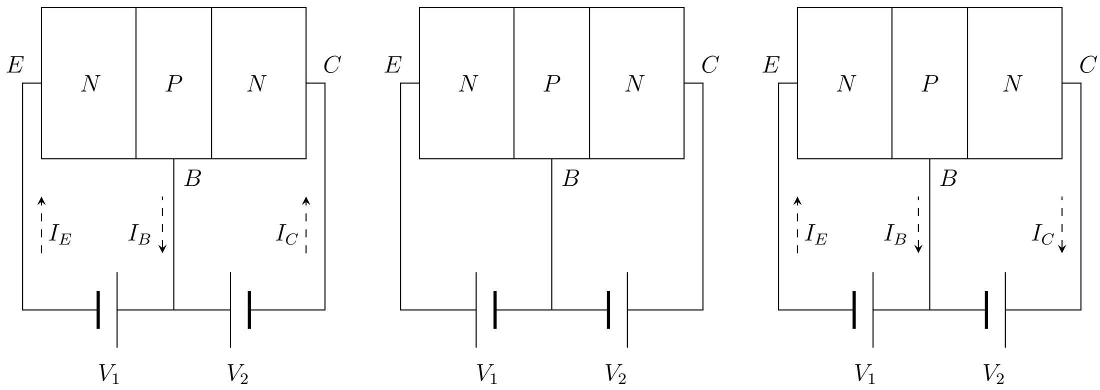
- El col·lector, que té un dopatge mitjà, recollirà la majoria dels portadors que la base no pot absorbir. És la part més gran del transistor i la que dissipa més calor.

4.2 Polarització

Abans de connectar els terminals del transistor a alguna font d'alimentació, és a dir, en absència de polarització externa, a les unions metal·lúrgiques del transistor es creen zones d'esgotament per recombinació de portadors, tal i com vam veure al parlar del díode. Aquestes zones d'esgotament presenten un potencial de $0,7\,V$, insalvable pels portadors si no se'ls comunica energia suficient, (en l'esquema següent s'ha exagerat l'amplada de la base per claredat però hem de tenir en compte que aquesta és molt més prima que l'emissor i el col·lector)



Veiem a continuació els esquemes de connexió associats a un transistor. Farem servir un de tipus NPN i ens fixarem en els *corrents electrònics* (representats amb línia discontinua) per entendre-ho millor



a) *b*) *c*)

Saturació

Si connectem dues bateries com mostra l'esquema de l'esquerra, el díode format per l'emissor i la base es trobarà polaritzat en directa, de la mateixa manera que el díode format per el col·lector i la base. Això fa que circulin corrents (electròniques) elevades amb el sentit indicat (suposant que s'han superat les barreres de potencial). Els responsables d'aquests corrents són en aquest cas els portadors majoritaris. Amb aquesta configuració diem que el transistor treballa en *saturació*.

Tall

Si fem la connexió com mostra l'esquema central veiem que tots dos díodes es troben polaritzats en inversa i per tant els corrents que circulen son deguts a als fenòmens d'arrossegament que pateixen els portadors minoritaris, tal com vam veure en el cas del díode polaritzat en inversa. Amb aquesta configuració és diu que el transistor treballa en la *zona de tall*.

Zona activa

Si fem la connexió com mostra l'esquema de la dreta, podríem suposar que entre la base i el col·lector no hauria de circular corrent ja que es troba en inversa, però en realitat no és així. Amb aquesta configuració diem que el transistor treballa en la zona *activa* i com veurem és capaç d'amplificar variacions de corrent. Si V_1 és prou gran per superar la barrera de potencial, els electrons injectats per l'emissor inunden en grans quantitats la regió de la base, d'aquests, no tots troben camí per arribar al pol positiu de la font V_1, per dues raons:

1. Existeixen pocs forats degut al baix nivell de dopatge de la base.

2. Com hem comentat al principi la base és molt estreta.

D'aquesta manera la base pateix una saturació quasi instantània donant lloc a un corrent relativament petit a través de la seva terminal. L'excedent d'electrons (la majoria) té prou energia per arribar a la zona d'esgotament del col·lector i són després atrets pel potencial de V_2 (suposant $V_2 > V_1$). Escrivim finalment algunes relacions importants. Primer, és fàcil veure que amb aquesta darrera configuració tenim

$$I_E = I_B + I_C$$

és clar que serà $I_E > I_C$ i es defineix el paràmetre

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E}$$

els valors típics de α es troben entre 0,95 i 0,99. Per una altra banda, tal com hem comentat $I_C >> I_B$, i definim

$$\beta = \frac{I_C}{I_B}$$

amb valors típics de β entre 50 i 500 tot i que hi ha transistors que assoleixen $\beta = 1000$. Aquest darrer paràmetre explica el funcionament del transistor com a amplificador. Dues darreres relacions que poden ser útils s'escriuen

$$\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad \alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$$

5 Electrònica digital. Àlgebra de Boole

5.1 Sistemes de numeració

Les xifres d'un nombre en qualsevol sistema de numeració tenen un cert valor posicional. Quan escrivim per exemple, el nombre 234, en el sistema de numeració de base 10, el que volem dir és

$$234 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = 200 + 30 + 4$$

diem que aquest nombre està en base 10 perquè en el seu desenvolupament en potències aquestes són el nombre 10. Hem de tenir clar que quan treballem en una certa base n, disposem només d'n símbols per construir els nombres.

També podem expressar nombres decimals d'aquesta manera

$$37,819 = 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$$

En cada base el nombre de símbols a disposició és diferent, quan $n = 10$ els que podem fer servir per construir els nombres s'han de triar d'entre el conjunt

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

és important veure que el nombre 10, la base en sí, no hi és en aquesta llista.

5.1.1 Bases diferents de 10

Considerem ara la base 2 de numeració que té únicament dos símbols $\{1, 0\}$. Prenem per exemple el nombre binari,

$$100101,11_2$$

fem servir el subíndex per indicar en quina base està el nombre. Quin nombre en base 10 representa? Per passar un nombre (des de qualsevol base) a base 10, l'expressem com a suma de potències i calculem

$$\begin{aligned}100101,11_2 &= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 32 + 0 + 0 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 37,75_{10}\end{aligned}$$

La base 8, també anomenada *octal*, es fa servir molt. Per exemple, el nombre 765_8, equival en base 10 a 501_{10}, veiem-ho

$$765_8 = 7 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 448 + 48 + 5 = 501_{10}$$

Un altre sistema que s'utilitza encara més és l'hexadecimal, de base 16. Com que només hi ha 10 símbols diferents per les xifres i en necessitem 6 més, es fan servir les lletres (majúscules) A, B, C, D, E, F de forma que $F = 15$ i $A = 10$, per exemple

$$\begin{aligned} 6E4AB2_{16} &= 6 \cdot 16^5 + E \cdot 16^4 + 4 \cdot 16^3 + A \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 \\ &= 6 \cdot 1048576 + 14 \cdot 65536 + 4 \cdot 4096 + 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 2 \cdot 1 \\ &= 7\,228\,082_{10} \end{aligned}$$

Segurament us heu adonat que quantes menys xifres té un sistema de numeració més en tenen els nombres que representen, per exemple abans hem vist

$$100101_2 = 37_{10}$$

en part, aquesta és la utilitat de treballar en hexadecimal, podem representar nombres molt grans amb menys xifres, i això, a nivell d'informàtica, suposa un estalvi important, a banda, 16 és divisible entre 8 i entre 2, cosa que fa, com veurem, molt fàcil el pas de binari i octal a hexadecimal.

5.1.2 Pas de base 10 a qualsevol altra

Amb aquests exemples hem vist com passar un nombre que es troba en un sistema de numeració arbitrari a decimal. Per fer el pas invers, farem servir un mètode de divisions successives.

Per exemple, per passar el nombre 379_{10} a binari farem

$$\begin{array}{r|l} 379 & 2 \\ \cline{2-2} 17 & 189 \\ 19 & \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 189 & 2 \\ \cline{2-2} 09 & 94 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 94 & 2 \\ \cline{2-2} 14 & 47 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 47 & 2 \\ \cline{2-2} 07 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 2 \\ \cline{2-2} 03 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

aturem l'algorisme en el moment que el quocient és més petit que el divisor. Llavors, prenem *el darrer quocient* i tots els residus que ha aparegut *en ordre invers* per obtenir

$$379_{10} = 101111011_2$$

Per passar de decimal a octal fem el mateix però ara dividint per 8. Per exemple, per passar el mateix nombre d'abans, 379 a base 8,

$$\begin{array}{r|l} 3\,7\,9 & 8 \\ \cline{2-2} 5\,9 & 4\,7 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4\,7 & 8 \\ \cline{2-2} 7 & 5 \end{array}$$

prenem el darrer quocient i els residus en ordre invers a com s'han obtingut

$$379_{10} = 573_8$$

Com ho faríem per passar per exemple 43251_6 a base 3? El millor en aquests casos, en general, és passar a base 10 i després a la nova base.

5.2 Conversió de nombres decimals

Tornant a la representació en binari, com ho fem pels nombres racionals? Per exemple, com podem representar en binari el nombre $9,7_{10}$? Per la part entera fem el mateix d'abans, divisions successives i ordenar residus en ordre invers a com s'obtenen

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

per tant, de moment sabem $9_{10} = 1001_2$
Ara considerem l'algorisme següent;

$$\begin{gathered} 0,7 \times 2 = 1,4 \geq 1 \Rightarrow 1 \\ 0,4 \times 2 = 0,8 < 1 \Rightarrow 0 \\ 0,8 \times 2 = 1,6 \geq 1 \Rightarrow 1 \\ 0,6 \times 2 = 1,2 \geq 1 \Rightarrow 1 \\ 0,2 \times 2 = 0,4 < 1 \Rightarrow 0 \\ -------------- \\ 0,4 \times 2 = 0,8 < 1 \Rightarrow 0 \end{gathered}$$

prenem la part decimal i multipliquem per 2, si el resultat és més gran o igual a 1, prenem 1. Si el resultat és més petit que 1, prenem 0. Seguim amb la part decimal del nombre resultat del primer producte. Aquest procés acabarà en un nombre finit de passos si el nombre és una potència de 2, o es repetirà a partir d'un cert moment (obtenim un nombre periòdic binari). Sovint fixarem abans de fer la conversió una determinat nombre de xifres a obtenir.

Associem a $0,7_{10}$ el nombre binari decimal obtingut prenent els uns i zeros de dalt a baix

$$0,7_{10} \rightarrow 0.10110\,(0110)_2$$

finalment, prenent un sol període

$$9,7_{10} = 1001,10110_2$$

Tal com hem dit, i en contrast amb el que hem vist en aquest exemple, per qualsevol nombre racional que provingui d'una divisió per una potència de 2, l'algorisme serà finit, i diem que la representació de tal nombre decimal en binari és exacta. Per exemple el nombre $\frac{19}{8} = 2,375_{10}$ en binari es troba com

$$2_{10} = 10_{10}$$

i

$$\begin{aligned} 0,375 \times 2 = 0,75 < 1 \Rightarrow 0 \\ 0,75 \times 2 = 1,5 \geq 1 \Rightarrow 1 \\ 0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow 1 \end{aligned}$$

de forma que

$$2,375_{10} = 10,011_2$$

El que ens ha de quedar clar és que un nombre racional no pot tenir una representació decimal infinita no periòdica (en cap base).

Considerem un altre exemple, suposem que volem passar a hexadecimal el nombre $28,35_{10}$. Per la part entera tenim

$$\begin{array}{r|l} 2\ 8 & 1\ 6 \\ \cline{2-2} 1\ 2 & 1 \end{array}$$

així, podem escriure

$$28_{10} = 1C_{16}$$

per la part decimal

$$\begin{aligned} 0,35 \times 16 = 5,6 \geq 1 \Rightarrow 5 \\ 0,6 \times 16 = 9,6 \geq 1 \Rightarrow 9 \\ 0,6 \times 16 = 9,6 \geq 1 \Rightarrow 9 \\ \vdots \end{aligned}$$

i tenim

$$0,35_{10} = 0,59(9)_{16}$$

de forma que haurem de prendre tantes xifres del període com precisió vulguem en el càlcul, dit d'una altra manera

$$\begin{aligned}
0,59_{16} &= 5\cdot 16^{-1}+9\cdot 16^{-2}=0,34765625_{10}\\
0,599_{16} &= 5\cdot 16^{-1}+9\cdot 16^{-2}+9\cdot 16^{-3}=0,349853515_{10}\\
0,5999_{16} &= 5\cdot 16^{-1}+9\cdot 16^{-2}+9\cdot 16^{-3}+9\cdot 16^{-4}=0,349990844_{10}
\end{aligned}$$

Veiem ara, un cas en el que el procés pot ser molt llarg. Volem passar el nombre $0,378_{10}$ a hexadecimal, fent servir l'algorisme ja conegut

$$\begin{gathered}
0,378\times 16=6,048\geq 1\Rightarrow 6\\
0,048\times 16=0,768<1\Rightarrow 0\\
0,768\times 16=12,288\geq 1\Rightarrow 12\rightarrow C\\
0,288\times 16=4,608\geq 1\Rightarrow 4\\
0,608\times 16=9,728\geq 1\Rightarrow 9\\
0,728\times 16=11,648\geq 1\Rightarrow 11\rightarrow B\\
0,648\times 16=10,368\geq 1\Rightarrow 10\rightarrow A\\
0,368\times 16=5,888\geq 1\Rightarrow 5\\
0,888\times 16=14,208\geq 1\Rightarrow 14\rightarrow E\\
0,208\times 16=3,328\geq 1\Rightarrow 3\\
\vdots
\end{gathered}$$

si ens aturem aquí podem escriure $0,378_{10}=0,60C49BA5E3_{16}$

5.2.1 El problema de la precisió i els nombres binaris

La manca de precisió que es pot donar al treballar amb nombres binaris pot ser molt important. Prenem com exemple el nombre $3,00390625_{10}$ que es pot representar en forma exacta per $11,000\,000\,01_2$, si augmentem aquest nombre decimal mínimament, convertint-lo en $11,000\,000\,1_2$ aquest nombre en base 10 és $3,0078125_{10}$, és a dir que tots els nombres reals entre $3,00390625_{10}$ i $3,0078125_{10}$ es representen pel mateix nombre, per tant, hi ha 390625 nombres que no es poden representar fent servir la mateixa quantitat de dígits a la part decimal.

5.2.2 Més sobre les bases binària, octal i hexadecimal

Considerem la taula

Binari-Octal	
Dígit octal	Dígit binari
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Aquesta taula ens permet passar un nombre en binari directament a octal. Sigui per exemple el nombre 1100110_2 per passar-lo a octal l'escrivim fent grups de tres amb les seves xifres

$$1\,100\,110$$

afegim zeros *no significatius* per poder tenir tots els grups complets

$$001\,100\,110$$

ara llegim a la taula i *traduïm* directament cada grup de tres en binari per la corresponent xifra en octal

$$1\,4\,6$$

i ja el tenim, $1100110_2 = 146_8$. Per passar de base 8 a binari fem el mateix procés al revés. Traduïm cada xifra del nombre en base 8 al triplet corresponent de la taula. Per exemple, el nombre 45_8 s'escriu en base 2 com

$$100\,101 = 100101_2$$

Una cosa semblant succeeix amb la base 16.

Binari-Hexadecimal	
Dígit hexadecimal	Dígit binari
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Sigui ara el nombre 110110110_2. Per passar-lo a hexadecimal l'escrivim fent grups de quatre amb les seves xifres

$$1\,1011\,0110$$

afegim zeros *no significatius* per poder tenir tots els grups complets

$$0001\,1011\,0110$$

ara llegim a la taula i *traduïm* directament cada grup de quatre en binari per la corresponent xifra en hexadecimal

$$1\,B\,6$$

i ja el tenim, $110110110_2 = 1B6_{16}$.

El canvi invers és fa de forma semblant al cas de la conversió d'octal a binari abans discutida.

5.2.3 El codi BCD

Anteriorment hem convertit nombres binaris a decimal. Recordeu que cada bit tenia un valor segons la posició que ocupava. Així, el nombre 10001_2

$$10001_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17_{10}$$

ens referirem a aquests nombres com a *binaris purs*. Amb el BCD (binary-coded-decimal) un nombre decimal no es converteix com un tot a binari, sino xifra a xifra. Per exemple, el nombre 1 de 17 és 0001 en binari (prenent 4 bits) i el 7 és 0111, llavors

$$17_{10} = 10001_2$$

com a binari pur, però

$$17_{10} = 0001\ 0111$$

en BCD.

5.2.4 Exercicis

1. Convertiu els següents nombres binaris a base 10
   (a) 100110
   (b) 110011
   (c) 110111
   (d) 1001,10
   (e) 101010110,001
2. Convertiu els següents nombres decimals a binari
   (a) 93
   (b) 647
   (c) 310
   (d) 131
   (e) 258,75
   (f) 1,625
   (g) 19,3125

3. Convertiu els següents nombres hexadecimals a decimal
   (a) 13
   (b) 65
   (c) 3F0
   (d) D0CE
   (e) 0,2
   (f) 12,9
   (g) F1,A
   (h) C8,D
4. Convertiu els següents nombres hexadecimals a binari, octal i decimal
   (a) 3,A2
   (b) 1B1,9
   (c) 6416213A,17B
5. Convertiu els següents nombres a hexadecimal
   (a) $204231,134_5$
   (Preneu 8 xifres decimals pel nombre en hexadecimal)
   (b) 165433_7
6. Convertiu cada decimal a BCD.
   (a) 62
   (b) 25
   (c) 274
   (d) 284
   (e) 42,91
   (f) 5,014
7. Convertiu cada BCD a decimal
   (a) 1001
   (b) 101
   (c) 110 0001
   (d) 100 0111
   (e) 11 0110, 1000
   (f) 11 1000, 1000 1

6 Introducció als circuits lògics

6.1 Àlgebra de Boole

Un àlgebra de Boole és un conjunt $\mathcal{B}$ en el que s'han definit unes operacions *negació*, *suma lògica*, *producte lògic* que compleixen unes propietats

- Les operacions són internes

$$\overline{a} \in \mathcal{B} \qquad a+b \in \mathcal{B} \qquad a \cdot b \ \in \mathcal{B} \qquad \forall a, b \in \mathcal{B}$$

- Existeix element neutre

$$a+0=a \qquad a \cdot 1 = a \qquad \forall a \in \mathcal{B}$$

- Existeix element invers

$$a \cdot \overline{a} = 0 \qquad a + \overline{a} = 1 \qquad \forall a \in \mathcal{B}$$

- Se satisfà la propietat commutativa

$$a+b=b+a \qquad a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathcal{B}$$

- Se satisfà la propietat distributiva

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c) \qquad \forall a, b \in \mathcal{B}$$

Els elements de $\mathcal{B}$ s'anomenen variables lògiques i només poden adoptar dos valors 1 ó 0, *cert* - *fals*.

6.2 Operacions lògiques

Definirem les operacions lògiques amb l'ajut de taules de veritat.

- Negació o complement (NOT)

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

- Suma lògica (*OR*)

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Producte lògic (*AND*)

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A banda d'aquestes que hem vist, a partir d'elles es construeixen d'altres

- Suma exclusiva (*XOR*)

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- *NAND*

a	b	$\overline{a \cdot b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- *NOR*

a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

- *XNOR*

a	b	$\overline{a \oplus b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6.3 Lleis de De Morgan

Poden ser útils les expressions següents

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

6.4 Funcions lògiques

Una funció lògica és qualsevol expressió que lligui variables lògiques a través de les operacions que hem vist. Les funcions lògiques tenen un *valor de veritat* en funció dels valors d'entrada de les variables. La forma d'obtenir aquest valor és a través d'una taula de veritat.

Com a exemple trobem la taula de veritat de la funció

$$f(a, b, c) = a \cdot b + \overline{c}$$

a	b	c	$\overline{c}$	ab	$ab + \overline{c}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

6.5 Exercicis

1. Construïu la taula de la veritat de les següents funcions lògiques.

   (a) $f(a, b) = a \cdot b + a$

   (b) $f(a, b) = (a \oplus b) \cdot \overline{b}$

   (c) $f(a, b) = \overline{(\overline{a} + b)} \oplus (a \cdot \overline{b})$

   (d) $f(a, b, c) = (a \cdot b) + c$

   (e) $f(a, b, c) = \overline{(a \cdot b) \oplus c}$

   (f) $f(a, b, c, d) = \overline{\overline{(\overline{a} + b)} \oplus (c \cdot \overline{d})}$

6.6 Mètode de Karnaugh

Sovint obtindrem la taula de la veritat d'una funció lògica *desconeguda* que descriu el comportament d'un circuit lògic. Una vegada escrita la funció, s'haurà d'intentar simplificar. Per fer això l'àlgebra de Boole disposa d'una col·lecció de teoremes que es podrien fer servir. Aquesta manera de procedir és complexa i pot arribar a ser molt farragosa. En casos particulars de funcions fins a quatre variables és més senzill fer servir l'anomenat *mètode de Karnaugh*.

6.6.1 Tres variables

A partir de l'exemple de la secció **6.4** podem escriure la funció lògica que resulta de dues formes diferents. Hem de tenir en compte que el que obtindrem serà precisament la funció sobre la que treballem.

- A través de *minterms* (sumes de productes). Ens fixarem en les combinacions de variables que donen 1 a la sortida i els escriurem com a suma de productes de les variables tenint en compte en quin estat es troben
$$f(a, b, c) = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}\overline{c} + ab\overline{c} + abc$$

- A través de *maxterms* (productes de sumes). Ens fixarem en les combinacions de variables que donen 0 a la sortida i els escriurem com a productes de sumes de les variables escrivint **el seu estat complementari**
$$f(a, b, c) = (a + b + \overline{c})(a + \overline{b} + \overline{c})(\overline{a} + b + \overline{c})$$

Les dues formes de procedir són equivalents i si no ens diuen quina hem d'usar convé fer servir sempre la mateixa, típicament la primera.

Prenent doncs la versió de *minterms*

$$f(a,b,c) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}b\overline{c} + a\overline{b}\,\overline{c} + ab\overline{c} + abc$$

El que farem és situar els uns i zeros en un diagrama com el següent

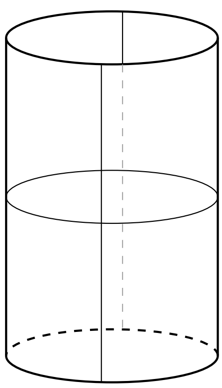
c \ ab	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0

Noteu *l'ordre* en el que posem els valors de les parelles ab, ho hem fet en codi *Gray*, segons el qual només podem canviar un bit en cada pas

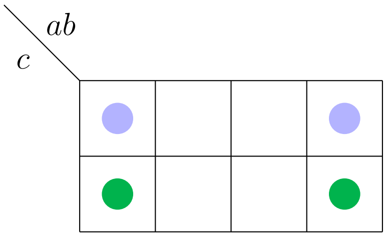
$$00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$$

Això és important per tal que funcioni el mètode que serveix per simplificar un cop hem omplert la taula amb els 1 i 0.

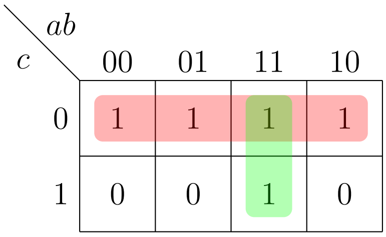
El següent pas és fer grups d'uns, el més grans possible tenint en compte que el nombre d'uns agrupats ha de ser una potència de 2. Els grups es poden solapar, han de tenir forma rectangular i finalment hem de tenir en compte la *topologia* associada al diagrama. En l'exemple que ens ocupa, de tres variables, el diagrama té la topologia d'un cilindre,



de forma que es poden considerar en contacte *extern* les cel·les assenyalades

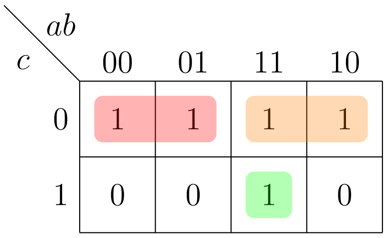


Aleshores, la forma òptima de fer els grups en aquest cas és

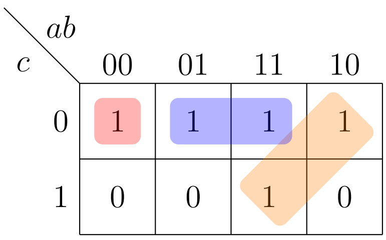


Hem pogut fer un grup de quatre 1 i un de dos. Recordem que el fet que es solapin no és problema.

Abans de seguir veiem un exemple d'agrupament no òptim



i un altre exemple d'un agrupament il·legal,



Reprenent el nostre cas, quin és el significat que tenen els grups que hem fet? La idea és que en cada grup hi ha variables que no canvien. El mètode de simplificació degut a Karnaugh ens diu que cada grup es pot representar precisament per l'estat de les variables que no canvien en el grup. És a dir, al grup de quatre que hem fet les variables a i b canvien i passen per tots els estats, però la variable c es manté, això si, negada. A l'altre grup, de dos 1 que hem fet les variables que no canvien són a i b. Podem escriure doncs

$$f(a, b, c) = \overline{c} + ab$$

que és exactament la funció de partida. Recordem que als exercicis que haurem de fer la funció **no** serà coneguda, la única informació que tindrem serà la taula de la veritat i per tant, tindrà sentit l'esforç fet per a simplificar-la.

Ens podríem demanar a què corresponen casos extrems com que la taula estigui plena d'1 o zeros. En aquest cas es diu que la funció que volem simplificar és una *tautologia*, no es pot representar simplificada i té sempre valor veritat (1) o fals (0), independentment del valor de les variables que integren la funció. Arribats a aquest punt veiem amb un exemple una situació relativament especial. En el diagrama de Karnaugh

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

es podria escriure la funció lògica associada simplificada amb *minterms* de la forma habitual, però en aquest cas és més senzill triar el zero (tal com apareixen les variables, no prenent l'estat complementari com quan ho fem per *maxterms*), i negar el resultat obtingut, és a dir escriurem

$$f(a, b, c) = \overline{ab\overline{c}}$$

6.6.2 Quatre variables

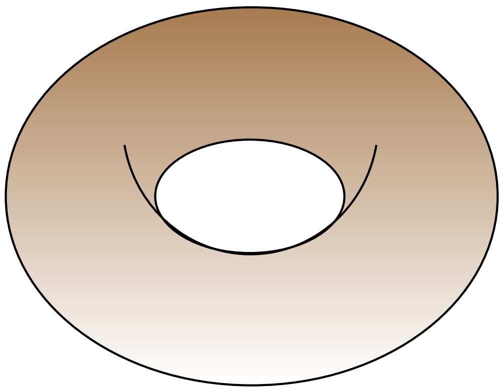
Veiem ara un altre exemple amb una taula ja donada, aquest cop amb quatre variables,

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

A priori podríem considerar els grups

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

Però hem de tenir en compte que en el cas de quatre variables, el diagrama de Karnaugh corresponent té la topologia d'un tor



de forma que les vores esquerra i dreta estan "en contacte" de la mateixa manera que ho estan la vora superior i la inferior. De fet, les quatre cantonades del diagrama es troben en contacte. Amb això, la tria òptima de grups és

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	0	0	1

De forma que l'expressió simplificada de la funció és

$$f(a,b,c,d) = bd + a\overline{b} + \overline{b}\,\overline{d}$$

Aquesta relació entre el nombre de variables i la topologia associada a la taula resultant és el que fa que el mètode de Karnaugh no sigui gaire útil per cinc o més variables. En aquests casos, les superfícies que en resulten tenen autointerseccions, cosa que es tradueix en identificacions complicades de columnes interiors a la taula.

6.6.3 Els "Don't care"

A l'hora de resoldre un exercici d'electrònica digital que demani trobar la funció que codifica el comportament d'un dispositiu, podem trobar que algunes de les combinacions de les variables del problema que ens apareixen a la taula de veritat siguin irrealitzables, per exemple, si volem controlar una aixeta que s'ha d'obrir si el nivell d'aigua d'un dipòsit baixa fins a un cert valor, o tancar si en sobrepassa un altre, és clar que la condició "el nivell d'aigua es troba per sobre del límit superior i al mateix temps per sota de l'inferior" no es donarà mai, ja que és físicament impossible. En aquestes circumstàncies assignarem un valor X a la funció lògica per aquesta combinació de les variables. Aquest símbol es trasllada a la taula de veritat i es fa servir estratègicament com a 1 o 0 segons convingui, per poder fer una simplificació més eficaç.

Per exemple, al mapa de Karnaugh que tenim a continuació

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	X	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	X	0
10	0	X	1	X

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

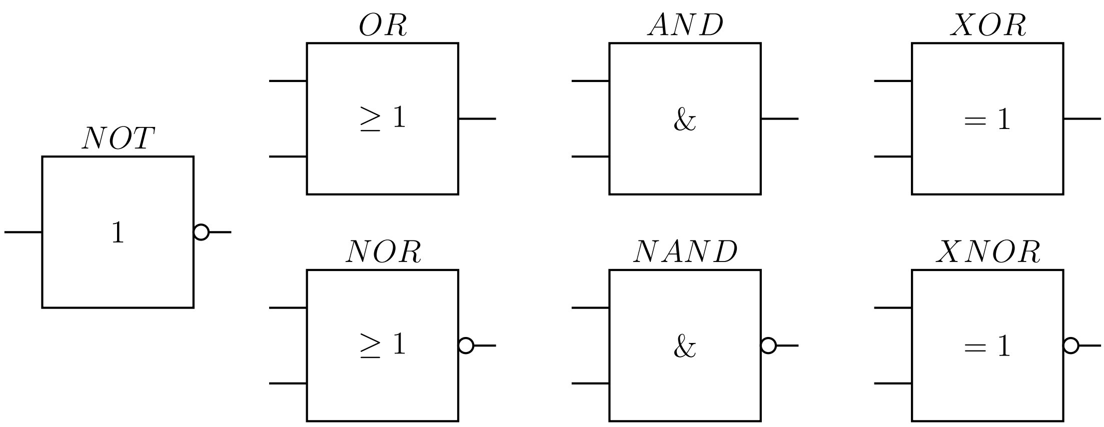
hem fet la tria que s'assenyala, ja que d'aquesta manera podem generar un grup de vuit 1's, i el 1 de la cantonada superior dreta pot quedar agrupat en un conjunt de 4 1's. Noteu que no té sentit activar a 1 el *don't care* de la cantonada inferior dreta, ja que només farem aparèixer un terme més a la funció, cosa que no té sentit. Més endavant veurem que l'expressió de la funció lògica simplificada té associada un circuit físic format per diverses portes lògiques. És en aquest sentit, que si dos circuits resolen el mateix problema i un fa servir menys portes lògiques que un altre, s'ha de considerar millor.

6.7 Portes lògiques

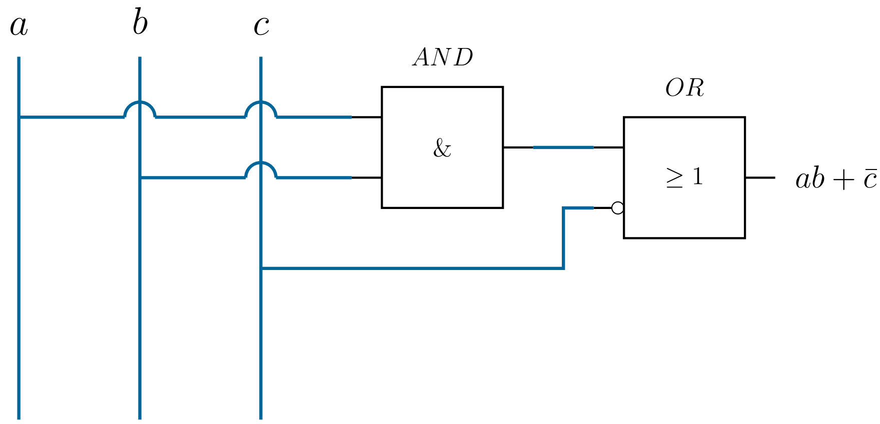
Les funcions lògiques que hem estudiat es poden implementar en la pràctica fent servir portes lògiques electròniques. Sense entrar en detall, comentem una sèrie de factors que s'han de tenir en compte a nivell pràctic quan es treballa amb elles,

- Les portes lògiques necessiten estar connectades a una font d'alimentació per funcionar.
- *Les entrades* de les portes s'activen amb dos valors diferents de la tensió, típicament $0\,V$ i $5\,V$, que representen el 0 i 1 lògics respectivament.
- *La sortida* d'una porta lògica pot prendre dos valors de la tensió, típicament $0\,V$ i $5\,V$, que representen el 0 i 1 lògics respectivament. En general cada porta lògica ofereix només una sortida.
- Sempre hi ha un cert retard entre el senyal d'entrada a una porta lògica i la seva resposta o sortida.

Les portes lògiques corresponen a les operacions lògiques que hem vist anteriorment. La simbologia usada a nivell europeu és



Reprenent la funció lògica de l'exemple de la secció **2.4**, l'esquema implementat amb portes lògiques és

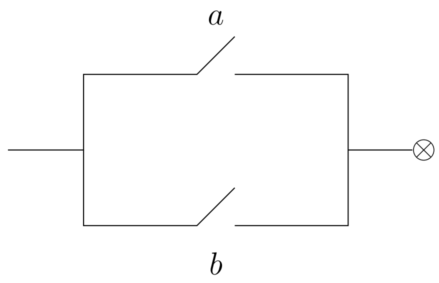


Noteu com hem *negat* la variable c just abans de connectar-la a la porta OR.

6.8 Diagrama de contactes

Els diagrames de contactes es basen en l'ús de circuits amb interruptors per codificar funcions lògiques. En tots ells obviarem la representació de la font d'alimentació (tal i com hem fet amb les portes lògiques).

- Funció lògica OR.

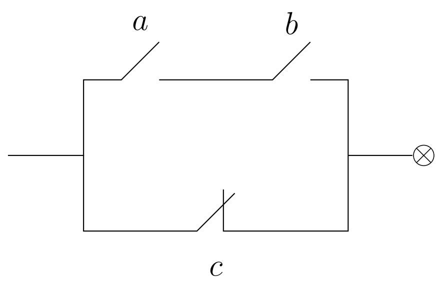


  La *bombeta* ($\otimes$) s'encendrà sempre que l'interruptor a o el b o ambdós, estiguin tancats.

- Funció lògica AND.

  En aquest cas cal que els dos contactes estiguin tancats per que passi corrent.

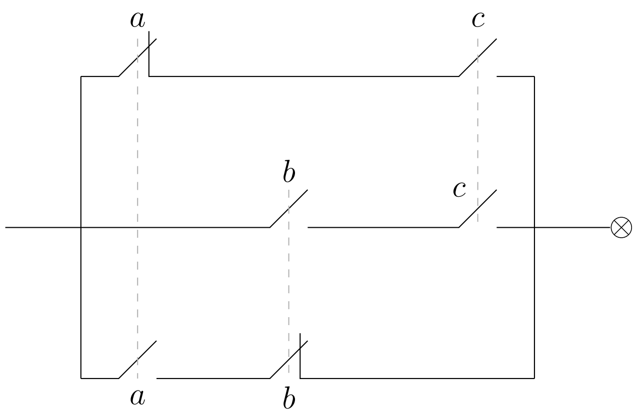
- Representem ara la funció $f(a, b, c) = ab + \bar{c}$



  Noteu el símbol emprat pel contacte assignat a la variable negada $\bar{c}$.

- Representem finalment un cas més general, per exemple la funció

$$f(a,b,c) = \bar{a}c + bc + a\bar{b}$$



Noteu ara com es representen les variables lligades, encara que una d'elles es trobi negada.

6.9 Exercicis

1. Simplifiqueu la següent funció i implementeu-la amb portes lògiques:

$$F(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + (a+b)c$$

2. Un motor és governat per tres polsadors a, b i c. Es demana fer el disseny d'un circuit de control amb portes lògiques que compleixi les següents condicions:

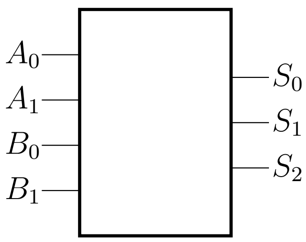
   - Si s'accionen els tres polsadors el motor s'activa.
   - Si s'accionen dos polsadors qualssevol, el motor s'activa i a més s'encén un senyal lluminós.
   - Si només s'acciona un polsador, el motor no s'acciona però s'encén el llum.
   - Si no s'acciona cap polsador, ni el motor ni el llum s'activen.

   Heu de fer primer la taula de la veritat per obtenir la funció que controla l'activació del motor $m = m(a,b,c)$ i la que controla l'activació del senyal lluminós $l = l(a,b,c)$, simplificar-les i representar-les amb un diagrama de contactes.

3. Un procés de fabricació es controla mitjançant quatre sensors a, b, c i d de forma que les seves sortides són 0 ó 1, segons estiguin desactivats o activats respectivament. El procés s'ha d'aturar quan el sensor a es troba activat o quan ho estiguin dos sensors qualssevol. Es demana fer la corresponent taula de veritat, simplificar la funció obtinguda i implementar el circuit amb portes lògiques.

4. Un circuit digital accepta com a entrada un nombre binari, N, de quatre bits (a, b, c, d) i proporciona, a la seva sortida, dos senyals, s_1 i s_2. El senyal s_1 s'activa si $9 < N \leq 15$ mentre que s_2 roman desactivat si N és zero o múltiple de 2. Es demana trobar la taula de la veritat, simplificar les funcions lògiques obtingudes i implementar-les amb un diagrama de contactes.

5. El circuit de la figura és un comparador binari de dos nombres A i B de dos bits. Les sortides (S_0, S_1, S_3) prenen el valor lògic 1 quan $A > B$, $A < B$ i $A = B$ respectivament. Es demana fer la taula de la veritat, obtenir la funció lògica de cada sortida i simplificar-les. Finalment, representeu el corresponent diagrama de portes lògiques.



Podeu suposar que pel nombre A el dígit de menys pes és A_0 i pel nombre B, B_0.

6. Es vol dissenyar el circuit lògic que controlarà *la sortida* dels usuaris de l'andana d'una estació de metro mitjançant dos ascensors. Cada un disposa d'un polsador (p_1, p_2) que els usuaris poden pitjar. El disseny exigeix que quan els usuaris pitgin qualsevol dels polsadors, els ascensors baixin (b_1, b_2) si no es trobaven a l'andana, o s'obrin les portes (o_1, o_2) en cas contrari. Per tal de minimitzar el temps d'espera dels usuaris, si un dels ascensors ja es troba a l'andana i es pitja qualsevol dels dos polsadors, farem baixar l'altre ascensor. La porta de cada ascensor només es pot obrir si aquest es troba a l'andana. Finalment, considerarem impossible el fet que els dos polsadors estiguin pitjats simultàniament. Feu servir les variables an_1 i an_2 per controlar si els ascensors es troben a l'andana de l'estació i tota la informació anterior

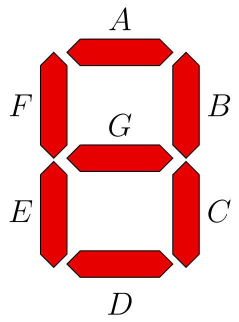
per trobar la taula de la veritat i obtenir les funcions lògiques o_1 (obrir porta ascensor 1), o_2 (obrir porta ascensor 2), b_1 (fer baixar ascensor 1) i b_2 (fer baixar ascensor 2)

- $o_1 = o_1(p_1, p_2, an_1, an_2)$
- $o_2 = o_2(p_1, p_2, an_1, an_2)$
- $b_1 = b_1(p_1, p_2, an_1, an_2)$
- $b_2 = b_2(p_1, p_2, an_1, an_2)$

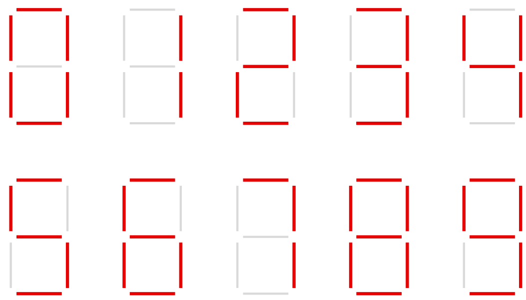
Simplifiqueu-les i representeu el corresponent diagrama de contactes per cada una d'elles.

6.10 El descodificador BCD a display de 7 segments

Mitjançant un display de leds de set segments es poden reproduir els nombres del zero al nou.



Suposem que els diferents nombres tindran l'aparença següent



A partir d'aquí es vol implementar un codificador (es deixa com a exercici) que permeti mostrar al display un nombre enter entre 0 i 9.

El primer que s'ha de fer és una taula amb la representació en BCD de les xifres a codificar. Després, s'ha de completar la taula tenint en compte quins segments del display estaran activats i quins no. Finalment fem un diagrama de Karnaugh per cada segment i simplifiquem la funció obtinguda. Podem suposar que les variables BCD són *abcd* on *a* correspon al dígit de més pes i *d* al dígit de menys pes.

#	*abcd*	A	B	C	D	E	F	G
0	0000							
1	0001							

⋮

Podeu verificar les funcions lògiques obtingudes per cada segment a

https://logic.ly/demo

6.11 Exercicis resolts

6.11.1 Sistemes de numeració

Com a regla general, si no ens diuen el contrari, en aquelles conversions de part decimal d'un nombre en base 10 a binari ens quedarem amb tres *bits* per cada xifra del nombre original. De tota manera als exercicis resolts aquí es calcularan totes les xifres.

1. (a) $100\,110_2 = 2^5 + 2^2 + 2 = 38_{10}$
   (b) $110\,011_2 = 2^5 + 2^4 + 2 + 1 = 51_{10}$
   (c) $110\,111_2 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2 + 1 = 55_{10}$
   (d) $1\,001,10_2 = 2^3 + 1 + 2^{-1} = 9,5_{10}$
   (e) $101\,010\,110,001_2 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2 + 2^{-3} = 342,125_{10}$

2. (a) $93_{10} \longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 93 & 2 \\ \cline{2-2} 13 & 46 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 46 & 2 \\ \cline{2-2} 06 & 23 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 23 & 2 \\ \cline{2-2} 03 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

$$93_{10} = 1\,011\,101_2$$

   (b) $647_{10} \longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 647 & 2 \\ \cline{2-2} 04 & 323 \\ 07 & \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 323 & 2 \\ \cline{2-2} 12 & 161 \\ 03 & \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 161 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 80 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 40 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

$$647_{10} = 1\,010\,000\,111_2$$

   (c) $310_{10} \longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 310 & 2 \\ \cline{2-2} 11 & 155 \\ 10 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 155 & 2 \\ \cline{2-2} 15 & 77 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 77 & 2 \\ \cline{2-2} 17 & 38 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 38 & 2 \\ \cline{2-2} 18 & 19 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 19 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

$$310_{10} = 100\,110\,110_2$$

(d) $131_{10} \longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 131 & 2 \\ \cline{2-2} 11 & 65 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 65 & 2 \\ \cline{2-2} 05 & 32 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ \cline{2-2} 12 & 16 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

$$131_{10} = 10\,000\,011_2$$

(e) $258,75_{10} \longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 258 & 2 \\ \cline{2-2} 05 & 129 \\ 18 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 129 & 2 \\ \cline{2-2} 09 & 64 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ \cline{2-2} 04 & 32 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ \cline{2-2} 12 & 16 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

$$258_{10} = 100\,000\,010_2$$

$$0,75 \times 2 = 1,5 \geq 1 \Rightarrow 1$$
$$0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow 1$$

$$0,75_{10} = 0,11_2 \rightarrow 258,75_{10} = 100\,000\,010,11_2$$

(f) $1,625_{10} \longrightarrow$

$$0,625 \times 2 = 1,25 \geq 1 \Rightarrow 1$$
$$0,25 \times 2 = 0,5 < 1 \Rightarrow 0$$
$$0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \Rightarrow 1$$

$$1,625_{10} = 1,101_2$$

(g) $19,3125_{10} \longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

$$19_{10} = 10011_2$$

$$0,3125 \times 2 = 0,625 < 1 \Rightarrow 0$$
$$0,625 \times 2 = 1,25 \geq 1 \Rightarrow 1$$
$$0,25 \times 2 = 0,5 < 1 \Rightarrow 0$$
$$0,5 \times 2 = 1 \geq 1 \rightarrow 1$$

$$19,3125_{10} = 10011,0101_2$$

3. (a) $13_{16} = 1 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = 19_{10}$

(b) $65_{16} = 6 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 = 101_{10}$

(c) $3F0_{16} = 3 \cdot 16^2 + F \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 3 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 = 1008_{10}$

(d) $D0CE_{16} = D \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + C \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = 13 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 +$

$12 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 53454_{10}$

(e) $0,2_{16} = 0 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^{-1} = 0,125_{10}$

(f) $12,9_{16} = 1 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 + 9 \cdot 16^{-1} = 18,5625_{10}$

(g) $F1,A_{16} = F \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + A \cdot 16^{-1} = 15 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^{-1} = 241,625_{10}$

(h) $C8,D_{16} = C \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 + D \cdot 16^{-1} = 12 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 + 13 \cdot 16^{-1} = 200,8125_{10}$

4. (a)

$$3,A2_{16} \rightarrow 0011,1010\ 0010_2 \rightarrow 011,101\ 000\ 100_2 \rightarrow 3,504_8 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3,6328125_{10}$$

(b)

$$1B1,9 \rightarrow 0001\ 1011\ 0001,1001_2 \rightarrow 110\ 110\ 001,100\ 100_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 661,44_8 \rightarrow 433,5625_{10}$$

(c)

$$6416213A,17B_{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow 0110\ 0100\ 0001\ 0110\ 0010\ 0001\ 0011\ 1010,0001\ 0111\ 1011_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 001\ 100\ 100\ 000\ 101\ 100\ 010\ 000\ 100\ 111\ 010,000\ 101\ 111\ 011_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 14405420472,0573_8 \rightarrow 1679171898,092529296_{10}$$

5. (a) Podem passar el nombre a base 10, després a binari i d'allà és trivial obtenir el nombre en hexadecimal

$$204231,134_5 =$$

$$2{\cdot}5^5+0{\cdot}5^4+4{\cdot}5^3+2{\cdot}5^2+3{\cdot}5^1+1{\cdot}5^0+1{\cdot}5^{-1}+3{\cdot}5^{-2}+4{\cdot}5^{-3} = 6816,352_{10}$$

Part entera

$$\begin{array}{r|l} 6816 & 2 \\ \cline{2-2} 08 & 3408 \\ 016 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3408 & 2 \\ \cline{2-2} 14 & 1704 \\ 008 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1704 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 852 \\ 04 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 852 & 2 \\ \cline{2-2} 05 & 426 \\ 12 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 426 & 2 \\ \cline{2-2} 02 & 213 \\ 06 & \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 213 & 2 \\ \cline{2-2} 013 & 106 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 106 & 2 \\ \cline{2-2} 06 & 53 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 53 & 2 \\ \cline{2-2} 13 & 26 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \cline{2-2} 06 & 13 \\ 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$

$$= 0001\ 1010\ 1010\ 0000_2 = 1AA0_{16}$$

Part decimal

$$\begin{aligned} 0,352_{10} &= 0,0101\ 1010\ 0001\ 1100\ 1010\ 1100\ 0000\ 1000 \\ &= 0,5A1CAC08_{16} \end{aligned}$$

de forma que tenim

$$204231,134_5 = 1AA0,5A1CAC08_{16}$$

Alternativament, un cop passat a base 10 el podem passar a base hexadecimal

Part entera,

$$\begin{array}{r|l} 6816 & 16 \\ \cline{2-2} 41 & 426 \\ 96 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 426 & 16 \\ \cline{2-2} 106 & 26 \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 16 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array}$$

$$6816_{10} = 1AA0_{16}$$

Part decimal

$$\begin{aligned} 0,352 \times 16 &= 5,632 \geq 1 \Rightarrow 5 \\ 0,632 \times 16 &= 10,112 \geq 1 \Rightarrow 10 \rightarrow A \\ 0,112 \times 16 &= 1,792 \geq 1 \Rightarrow 1 \\ 0,792 \times 16 &= 12,672 \geq 1 \Rightarrow 12 \rightarrow C \\ 0,672 \times 16 &= 10,752 \geq 1 \Rightarrow 10 \rightarrow A \\ 0,752 \times 16 &= 12,032 \geq 1 \Rightarrow 12 \rightarrow C \\ 0,032 \times 16 &= 0,512 \geq 1 \Rightarrow 0 \\ 0,512 \times 16 &= 8,192 \geq 1 \Rightarrow 8 \end{aligned}$$

llavors, amb 8 dígits, tenim

$$0,352_{10} = 0,A1CAC08_{16}$$

(b) $165433_7 = 1 \cdot 7^5 + 6 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 33148_{10}$

$$\begin{array}{r|l} 33148 & 16 \\ \cline{2-2} 114 & 2071 \\ 28 & \\ 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2071 & 16 \\ \cline{2-2} 47 & 129 \\ 151 & \\ 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 129 & 16 \\ \cline{2-2} 1 & 8 \end{array}$$

$$33148_{10} = 817C_{16}$$

6. (a) $62 \rightarrow 0110\ 0010$
   (b) $25 \rightarrow 0010\ 0101$
   (c) $274 \rightarrow 0010\ 0111\ 0100$
   (d) $284 \rightarrow 0010\ 1000\ 0100$
   (e) $42,91 \rightarrow 0100\ 0010,\ 1001\ 0001$
   (f) $5,014 \rightarrow 0101,\ 0000\ 0001\ 0100$

7. (a) $1001 \rightarrow 9$
   (b) $0101 \rightarrow 5$
   (c) $0110\ 0001 \rightarrow 61$
   (d) $0100\ 0111 \rightarrow 47$
   (e) $0011\ 0110,\ 1000 \rightarrow 36,8$
   (f) $0011\ 1000,\ 1000\ 1000 \rightarrow 38,88$

6.11.2 Introducció als circuits lògics

1. (a) $f(a,b) = ab + a$

a	b	$ab + a$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

   (b) $f(a,b) = (a \oplus b)\overline{b}$

a	b	$(a \oplus b)\overline{b}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

   (c) $f(a,b) = \overline{(\overline{a} + b)} \oplus (a \cdot \overline{b})$

a	b	$\overline{(\overline{a} + b)} \oplus (a \cdot \overline{b})$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(d) $f(a,b,c) = (a \cdot b) + c$

a	b	c	$ab + c$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(e) $f(a,b,c) = \overline{(a \cdot b) \oplus c}$

a	b	c	$\overline{(a \cdot b) \oplus c}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(f) $f(a,b,c,d) = \overline{\overline{(\overline{a}+b)} \oplus (c \cdot \overline{d})}$

a	b	c	d	$\overline{\overline{(\overline{a}+b)} \oplus (c \cdot \overline{d})}$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

6.11.3 Circuits combinacionals

1. $f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + (a+b)c$

a	b	c	$\bar{a}\bar{b}c + (a+b)c$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

La funció sense simplificar és

$$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc$$

i el diagrama de Karnaugh associat a aquesta funció

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1

de forma que la funció simplificada es pot escriure com $f(a,b,c) = c$

2. Obtenim la taula de la veritat a partir de l'enunciat

a	b	c	m	l
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Les funcions lògiques (sense simplificar) a partir de la taula són

$$m(a,b,c) = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

i

$$l(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

Per la variable m, tenim

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

de forma que la funció simplificada es pot escriure com

$$m(a,b,c) = bc + ab + ac$$

Per la variable l, tenim

$c \backslash ab$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	1	0	1

en aquest cas és molt més senzill mirar els zeros i negar tot el resultat

$$l(a,b,c) = \overline{\bar{a}\bar{b}\bar{c} + abc}$$

3. La taula de la veritat és

a	b	c	d	p
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

la funció sense simplificar s'escriu com

$$\begin{aligned} p(a,b,c,d) = & \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}c\bar{d} \\ & + a\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + abc\bar{d} + abcd \end{aligned}$$

Llavors el diagrama de Karnaugh serà

$cd \backslash ab$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	1	1

de forma que la funció simplificada es pot escriure com

$$p(a,b,c,d) = b\bar{c} + b\bar{d} + ad + ac + \bar{b}cd$$

4. La taula de la veritat per les variables s_1 i s_2 és

a	b	c	d	s_1	s_2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Les funcions sense simplificar es poden escriure com

$$s_1 = a\bar{b}c\bar{d} + a\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d} + abc\bar{d} + abcd$$

$$s_2 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd + ab\bar{c}d + abcd$$

Ara, podem fer els corresponents diagrames de Karnaugh

s_1

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

s_2

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

De forma que les funcions simplificades són

$$s_1(a,b,c,d) = ab + ac \qquad s_2(a,b,c,d) = d$$

5. La taula de la veritat per les variables S_0, S_1 i S_2 és

A_1	A_0	B_1	B_0	S_0	S_1	S_2
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1

i les corresponents funcions sense simplificar

$$\begin{aligned}
S_0\left(A_1, A_0, B_1, B_0\right) =& \bar{A}_1 A_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + A_1 \bar{A}_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + A_1 \bar{A}_0 \bar{B}_1 B_0 \\
&+ A_1 A_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + A_1 A_0 \bar{B}_1 B_0 + A_1 A_0 B_1 \bar{B}_0 \\
S_1(A_1, A_0, B_1, B_0) =& \bar{A}_1 \bar{A}_0 \bar{B}_1 B_0 + \bar{A}_1 \bar{A}_0 B_1 \bar{B}_0 + \bar{A}_1 \bar{A}_0 B_1 B_0 \\
&+ \bar{A}_1 A_0 B_1 \bar{B}_0 + \bar{A}_1 A_0 B_1 B_0 + A_1 \bar{A}_0 B_1 B_0 \\
S_2(A_1, A_0, B_1, B_0) =& \bar{A}_1 \bar{A}_0 \bar{B}_1 \bar{B}_0 + \bar{A}_1 A_0 \bar{B}_1 B_0 + A_1 \bar{A}_0 B_1 \bar{B}_0 + A_1 A_0 B_1 B_0
\end{aligned}$$

Els diagrames de Karnaugh per cada variable són

S_0

B_1B_0 \ A_1A_0	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

S_1

B_1B_0 \ A_1A_0	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

S_2

B_1B_0 \ A_1A_0	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	1

Llavors, les funcions simplificades s'escriuen:

$$S_0(A_1, A_0, B_1, B_0) = A_1\bar{B}_1 + A_1A_0\bar{B}_0 + A_0\bar{B}_1\bar{B}_0$$
$$S_0(A_1, A_0, B_1, B_0) = \bar{A}_1B_1 + \bar{A}_0B_1B_0 + \bar{A}_1\bar{A}_0B_0$$
$$S_0(A_1, A_0, B_1, B_0) = \bar{A}_1\bar{A}_0\bar{B}_1\bar{B}_0 + \bar{A}_1A_0\bar{B}_1B_0 + A_1A_0B_1B_0 + A_1\bar{A}_0B_1\bar{B}_0$$

6. La taula de la veritat per les variables o_1, b_1, o_2 i b_2 es pot representar com

p_1	p_2	an_1	an_2	o_1	b_1	o_2	b_2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	X	X	X	X
1	1	0	1	X	X	X	X
1	1	1	0	X	X	X	X
1	1	1	1	X	X	X	X

Les funcions lògiques sense simplificar són

$$o_1(p_1,p_2,an_1,an_2) = \overline{p}_1\, p_2\, an_1\, \overline{an}_2 + \overline{p}_1\, p_2\, an_1\, an_2 + p_1\, \overline{p}_2\, an_1\, \overline{an}_2 + p_1\, \overline{p}_2\, an_1\, an_2$$
$$b_1(p_1,p_2,an_1,an_2) = \overline{p}_1\, p_2\, \overline{an}_1\, \overline{an}_2 + \overline{p}_1\, p_2\, \overline{an}_1\, an_2 + p_1\, \overline{p}_2\, \overline{an}_1\, \overline{an}_2 + p_1\, \overline{p}_2\, \overline{an}_1\, an_2$$
$$o_2(p_1,p_2,an_1,an_2) = \overline{p}_1\, p_2\, \overline{an}_1\, an_2 + \overline{p}_1\, p_2\, an_1\, an_2 + p_1\, \overline{p}_2\, \overline{an}_1\, an_2 + p_1\, \overline{p}_2\, an_1\, an_2$$
$$b_2(p_1,p_2,an_1,an_2) = \overline{p}_1\, p_2\, \overline{an}_1\, \overline{an}_2 + \overline{p}_1\, p_2\, an_1\, \overline{an}_2 + p_1\, \overline{p}_2\, \overline{an}_1\, \overline{an}_2 + p_1\, \overline{p}_2\, an_1\, \overline{an}_2$$

Els diagrames de Karnaugh per a cada funció són

o_1

an_1an_2 \ p_1p_2	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	0	0	X	0
11	0	1	X	1
10	0	1	X	1

b_1

an_1an_2 \ p_1p_2	00	01	11	10
00	0	1	X	1
01	0	1	X	1
11	0	0	X	0
10	0	0	X	0

o_2

an_1an_2 \ p_1p_2	00	01	11	10
00	0	0	X	0
01	0	1	X	1
11	0	1	X	1
10	0	0	X	0

b_2

an_1an_2 \ p_1p_2	00	01	11	10
00	0	1	X	1
01	0	0	X	0
11	0	0	X	0
10	0	1	X	1

Les funcions lògiques simplificades són

$$o_1(p_1, p_2, an_1, an_2) = an_1p_2 + an_1p_1$$

$$b_1(p_1, p_2, an_1, an_2) = \overline{an}_1p_2 + \overline{an}_1p_1$$

$$o_2(p_1, p_2, an_1, an_2) = an_2p_2 + an_2p_1$$

$$b_2(p_1, p_2, an_1, an_2) = \overline{an}_2p_2 + \overline{an}_2p_1$$

Descodificador BCD a 7 segments.

#	*abcd*	A	B	C	D	E	F	G
0	0000	1	1	1	1	1	1	0
1	0001	0	1	1	0	0	0	0
2	0010	1	1	0	1	1	0	1
3	0011	1	1	1	1	0	0	1
4	0100	0	1	1	0	0	1	1
5	0101	1	0	1	1	0	1	1
6	0110	1	0	1	1	1	1	1
7	0111	1	1	1	0	0	0	0
8	1000	1	1	1	1	1	1	1
9	1001	1	1	1	1	0	1	1

7 Introducció a Arduino Uno

7.1 Interfície online

Farem servir l'entorn Wokwi (feu botó dret per obrir en una pestanya nova), on heu d'entrar fent click al botó SIGN UP.

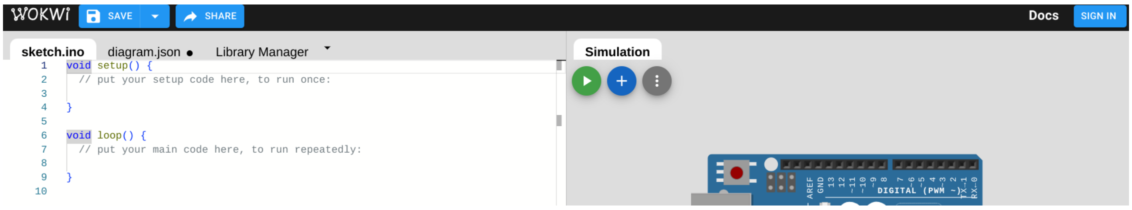


Figura 1: Entrada Wokwi

Podeu associar l'entrada amb el compte de Google de l'escola per comoditat.

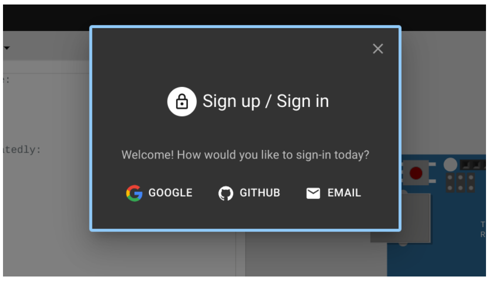


Figura 2: Compte Google

7.2 Documentació

Podeu consultar tota la documentació relativa a aquesta placa i d'altres dins l'apartat DOCS. En qualsevol cas, l'objectiu d'aquest darrer tema del curs és poder fer una aproximació pràctica i anar descobrint pas a pas algunes de les possibilitats que ens ofereix la placa Arduino Uno.

Alerta! En tots els exercicis que haurem de fer, a l'hora d'escriure codi en la finestra de l'entorn d'execució, no podem senzillament *copiar* i *enganxar* del text dels apunts, ja que podem haver afegit caràcters no imprimibles (que no es veuen) però que provocaran que el compilador doni errors. Hem d'escriure a mà sempre totes les instruccions. Sí que podeu copiar i enganxar codi dins de l'editor ja que aquest és ASCII.

7.3 Blink

La primera pràctica que farem consisteix en connectar un LED (Light Emitting Diode) que s'anirà encenent i apagant de forma intermitent.

7.3.1 Hardware

1. Sota *Simulation*, cliqueu el símbol + per afegir una resistència. Li assignarem un valor qualsevol entre $100\,\Omega$ i $1000\,\Omega$, el seu paper és mantenir la integritat del LED, limitant el pas de corrent al seu través.

2. Afegiu ara un LED (vermell per defecte). Veureu que el LED té dues *potes*; una corbada i l'altre una mica més curta, recta.

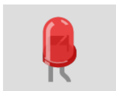
   

   Figura 3: LED

   Recordeu que els LEDs, com a díodes que són, s'han de connectar en *directa* per tal que condueixin corrent. Això es tradueix en que la *pota* curta ha d'anar connectada a terra (GND), i l'altra s'ha de connectar al pin que alimentarà el LED, en aquest cas el 13.

3. No oblideu d'interposar la resistència entre el LED i el pin que alimentarà el LED. Si no ho féssiu no passaria res per dues raons; per una banda el pin 13 duu una resistència incorporada, i per l'altra el corrent en els pins de la placa està limitat a $20\,mA$. En qualsevol cas és una bona pràctica protegir els LEDs sempre amb resistències.

7.3.2 Software

Revisant la finestra de software, veiem que només obrir l'entorn hi apareixien dues estructures que són les mínimes per tal que un programa d'Arduino faci alguna cosa interessant.

- ```
  void setup() {

  }
  ```
  aquí (entre les claus), es declaren els pins actius, entrades o sortides digitals i analògiques i les variables que es faran servir. Aquesta part del codi s'executa al principi del programa exclusivament.
  ```

- void loop() {

  }

  aquesta part del codi estarà en execució contínua fins que s'aturi el programa.

  1. A la finestra del codi, a la primera línia escrivim
     //Programa de LED intermitent
     qualsevol línia que comenci amb els símbols // serà ignorada pel compilador i per tant, es fan servir per comentar el programa. Si volem comentar més d'una línia podem fer servir /* i */ per començar i acabar el comentari respectivament.
  2. Al void setup(), escrivim:
     pinMode(13, OUTPUT);
  3. Al void loop(), escrivim:
     digitalWrite(13, HIGH); // activa la sortida 13
     delay(500); // congela l'execució del codi mig segon
     digitalWrite(13, LOW); // inactiva la sortida 13
     delay(500);

Noteu com cada instrucció va acompanyada d'un punt i coma al final. Ara podeu activar la simulació amb la fletxa verda. Observeu si tot funciona com està previst. Podeu guardar els vostres projectes i descarregar-los si cal. Assegureu-vos d'anomenar-los amb el vostre nom i cognom i un terme descriptiu que us permeti identificar-los.

Variacions sobre *Blink*

- Repetiu la pràctica connectant ara el LED al pin 12. Quina diferència hi ha respecte la situació anterior?

- Connecteu el LED en inversa i expliqueu què s'observa.

- Comenteu (dins el codi) alternativament les instruccions *delay* per entendre quin efecte tenen en l'execució del programa.

Exercici 1 (Semàfor) Fent servir els pins 12, 11 i 10, modifiqueu la pràctica anterior per connectar tres LEDs (un vermell, un verd i un groc o taronja que s'encenguin i apaguin de forma seqüencial. Podeu canviar el color del LED vermell que teniu per defecte accedint a les seves propietats.

Tingueu cura de connectar els tres LEDs a *GND* i no oblideu les resistències. Per major claredat, podeu connectar els tres LEDs a un cable comú que vagi al *terra* mitjançant punts de connexió (*JUNCTION*). També pot ser útil distingir (amb colors) els cables de connexió de cada LED a la placa accedint a les seves propietats (heu de fer *click* sobre cada cable).

Exercici 2 (Encreuament amb semàfors) Es tracta de simular, amb 6 LEDs, el sistema semafòric d'un encreuament de carrers. Volem que el semàfor estigui en verd 5 segons, abans de canviar a groc faci alguna intermitència, estigui en groc 2 segons i passi a vermell.

Exercici 3 (Estel fugaç) La idea d'aquest exercici és simular una espurna de llum que es va movent de costat a costat. Podeu connectar 10 LEDs vermells i programar els encesos i apagats per mirar d'aconseguir l'efecte desitjat.

Exercici 4 (Estel fugaç amb cua) En aquesta pràctica volem afinar l'exercici anterior per afegir un efecte visual. Ho podeu implementar sollapant els *delays* d'encesa i apagat.

7.4 Fade

En aquesta pràctica explorarem les possibilitats que oferixen les sortides *PWM* de la placa. També presentarem la instrucció *for* que ens permetrà automatitzar canvis en un paràmetre del nostre programa. L'objectiu és fer que un LED s'encengui i apagui de forma gradual. La configuració és semblant a la de la versió més senzilla de *Blink* però ara hem de connectar el díode a algun pin de la placa que tingui la funció *PWM (Pulse Width Modulation*, modulació d'amplada del senyal). Aquests estan indicats amb el símbol ∼, per exemple podem fer servir el pin 11

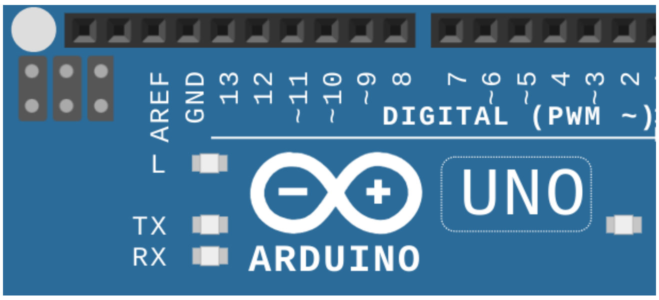


Figura 4: PWM pins

A nivell de programa, en aquesta ocasió declararem les variables que farem servir (abans del *void setup*), per fer el programa més entenedor.

```
int intensitat = 0;
int LED = 11;

void setup()
pinMode(11, OUTPUT);

void loop() {
  for (intensitat = 0; intensitat < 255; intensitat = intensitat + 10)
    {
    analogWrite(LED, intensitat);
    delay(75) ;
    }
  for (intensitat = 255; intensitat >= 0; intensitat = intensitat - 10)
    {
    analogWrite(LED, intensitat);
    delay(75) ;
    }
}
```

A aquest nivell introductori no cal saber molts detalls, només comentar que hem declarat un parell de variables (que farem sevir en el codi) i les hi assignem el tipus int, que vol dir que serà un nombre enter (de 16 bits) de forma que podem abastar el rang de $-2^{15} = -32768$, fins a $2^{15} - 1 = 32767$.

Una altra particularitat que apareix en aquest bloc de codi és el *bucle* for. Noteu que ha de tenir tres arguments, la inicialització de la variable (en aquest cas *intensitat*), la condició per aturar el bucle i l'increment (o decrement) que ha de patir la variable a cada pas. Fixeu-vos que un dels bucles va augmentant la brillantor del LED i l'altre la va disminuint de forma *continua*. Un cop implementat el circuit bàsic i després d'assegurar-vos que funciona correctament podeu jugar amb els paràmetres per tal de veure quin efecte tenen en l'execució.

7.5 Semàfor amb LED RGB

A partir de la pràctica anterior volem ara aprendre a treballar amb els LEDs RGB. Aquests LEDs es caracteritzen per poder emetre llum en els colors primaris vermell, verd i blau amb diferents intensitats. Això fa que es puguin obtenir (teòricament) més de 16 milions de colors diferents amb un sol LED.

7.5.1 Sortides digitals

Farem una primera versió en la que farem servir les sortides digitals per controlar el semàfor. Afegiu un LED RGB i configureu-lo en mode *càtode comú*, d'aquesta manera operem amb lògica *positiva* de forma que el LED s'activa quan li arriba tensió. Connecteu el terminal més llarg del LED al *terra*. Connecteu els altres terminals als pins 9, 10 i 11 respectivament (recordeu intercalar resistències d'uns 200 Ω).

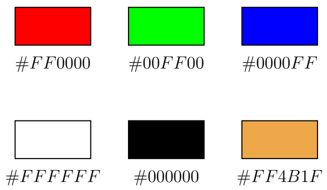
Terminal-color Feu servir el següent codi (afegint i traient comentaris a les línies que convingui), per esbrinar quin color correspon a cada terminal

```
void setup() {
  pinMode(9, OUTPUT);
  pinMode(10, OUTPUT);
  pinMode(11, OUTPUT);
  }

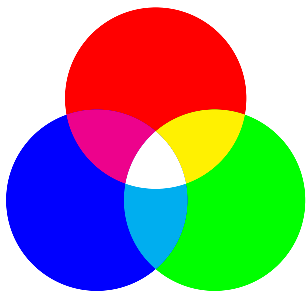
void loop() {
  digitalWrite(9, HIGH);
  delay(500) ;
  digitalWrite(9, LOW);
  delay(500) ;
  digitalWrite(10, HIGH);
  delay(500) ;
  digitalWrite(10, LOW);
  delay(500) ;
  digitalWrite(11, HIGH);
  delay(500) ;
  digitalWrite(11, LOW);
  delay(500) ;
  }
```

Barrejant colors Ara sí explotarem les possibilitats de les sortides amb PWM per treure tot el profit del LED RGB. Recordem abans algunes idees importants de la teoria del color.

La codificació RGB (vermell, verd, blau), és la que fan servir típicament els dispositius que emeten llum; pantalles de TV, monitors d'ordinador, etc. La idea és generar colors variant la intensitat d'aquests tres, anomenats *primaris*. En general, i sobretot en aplicacions web, els valors es codifiquen en el sistema de numeració hexadecimal, de manera que per exemple, tenim



Com podeu veure, el vermell "pur" l'aconseguim activant al màxim el vermell i posant a zero el verd i el blau ($FF\,00\,00$). El blanc és la barreja dels tres al màxim ($FF\,FF\,FF$) i el negre s'obté posant-los tots a zero ($00\,00\,00$). En el nostre cas farem servir nombres en base 10, de forma que el rang de valors per cada color serà $0-255$. El nombre total de combinacions possibles amb els tres colors serà doncs, $256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$, de forma que en teoria. i tal com hem dit abans, podem obtenir més de 16 milions de colors diferents. L'ull humà no percep amb la mateixa intensitat els diferents colors, el blau es percep relativament malament i en canvi la sensibilitat pel verd és molt gran. Això fa que en principi els valors de les resistències per a cada terminal haurien de ser diferents, la del blau menor per tal que passi més corrent, etc. De tota manera el nostre simulador no té en compte aquests detalls.



Amb aquest sistema els diferents colors es troben de forma additiva, de forma que la barreja de verd i vermell proporciona el color groc, la barreja de vermell i blau proporciona el magenta, i la barreja de blau i verd proporciona el cyan. Aquests s'anomenen colors secundaris, que junt amb el negre formen el sistema de *quadricomia* (CMYK) que és el que es fa servir per reproduir imatges impreses. Com que els tres colors primaris junts formen el blanc, podem parlar de colors i *anticolors*, per exemple l'anticolor del vermell és el cyan.

Exercici (mescla de colors) Feu el muntatge de la pràctica anterior amb el següent codi, per poder fer les barreges de forma adequada

```
int ledVermell = 9;
int ledVerd = 10;
int ledBlau = 11;

void setup() {
  pinMode(ledVermell, Output);
  pinMode(ledVerd, Output);
  pinMode(ledBlau, Output);
  }

void loop() {
  analogWrite(ledVermell, 255);
  analogWrite(ledVerd, 255);
  analogWrite(ledBlau, 0);
  }
```

Fent servir els valors adients per a cada sortida, trobeu tots els colors (primaris, secundaris i blanc) que apareixen a la figura anterior. Experimenteu ara amb valors arbitraris per generar tots els colors que vulgueu amb el LED RGB. Podeu trobar taules de colors HTML a internet. Finalment, adeqüeu el codi per implementar un semàfor amb un sol LED.

7.6 Display de set segments

En un altre capítol (secció **6.10** d'aquests apunts), ja vam presentar i estudiar el funcionament del display de set segments. Ara treballarem de forma pràctica amb ell a través d'un parell d'exercicis.

7.6.1 Comptador d'un dígit

Feu servir un display de set segments per tal d'implementar un compte enrere de 9 a 0 segons. Comenceu configurant el display en mode *càtode comú* i associeu els terminals del display als pins de la placa (no oblideu les resistències), de la següent forma:

$(A, 2)$ $(B, 3)$ $(C, 4)$ $(D, 5)$ $(E, 6)$ $(F, 7)$ $(G, 8)$ $(dp, 9)$ $(com.1, gnd)$

El terminals *com.1* i *com.2* són redundants i només ens cal connectar un d'ells a *terra*. Un cop enllestides les connexions heu d'escriure el codi necessari per resoldre el problema. Haureu de posar a prova tot el que heu anat veient fins ara a les seccions anteriors.

7.6.2 Comptador de dos dígits. Multiplexor

Configureu ara un display de set segments en mode *càtode comú* i amb dos dígits. Adopteu l'aparellament següent de terminals i pins de la placa:

$$(A, 2) \quad (B, 3) \quad (dig1, 4) \quad (dig2, 5) \quad (F, 6)$$

$$(G, 7) \quad (D, 8) \quad (E, 9) \quad (dp, 10) \quad (C, 11)$$

els terminals *dig1* i *dig2* ens permeten commutar entre cada dígit. Aquesta funció permet simplificar el nombre de terminals necessari del display ja que quan vulguem activar el LED A per exemple, n'hi ha prou de dir a quin dels dos dígits ens estem referint. D'aquesta manera, només un dels dos dígits es troba actiu en un determinat moment. Per aconseguir l'efecte que els dos ho estan al mateix temps n'hi ha prou de commutar-los prou ràpid perquè l'ull humà no s'adoni. N'hi ha prou amb que el temps de commutació sigui menor d'uns $53\,ms$.

Exercici 1 Escriviu el codi necessari per tal d'implementar un compte enrere que vagi de 99 a 0 segons.

Exercici 2 Escriviu el codi necessari per tal d'implementar un comptador que vagi de 9.9 a 0 segons on el primer dígit (el de menys pes) ha de representar les centèsimes de segon i el segon dígit els segons.