

1. (a) Podem calcular la velocitat a partir de

$$2\pi r = vT$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^{20}}{203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,36 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

- (b) A partir de la tercera llei de Kepler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

tenint en compte que el període val

$$T = 203 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 6,402 \cdot 10^{15} \text{ s}$$

podem escriure

$$M = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (6,402 \cdot 10^{15})^2} \cdot (2,4 \cdot 10^{20})^3 = 2,00 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

2. (a) Imposant servir la condició $v_e^p = 6v_e^\oplus$, tenim

$$\sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}} = 6\sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}$$

elevant al quadrat

$$\frac{2GM_p}{R_p} = 36 \cdot \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}$$

fent servir la dada de la relació entre les masses del planeta i la Terra

$$\frac{2G \cdot 360M_\oplus}{R_p} = 36 \cdot \frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}$$

d'on la relació entre el radi del planeta i el de la Terra val

$$\frac{R_p}{R_\oplus} = \frac{360}{36} = 10$$

- (b) Ara, per la relació entre el valor del camp gravitatori del planeta i la Terra

$$\frac{g_p}{g_\oplus} = \frac{\frac{GM_p}{R_p^2}}{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}} = \frac{\frac{360M_\oplus}{R_p^2}}{\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}} = \frac{360R_\oplus^2}{R_p^2} = 360 \left(\frac{R_\oplus}{R_p} \right)^2 = 360(0,1)^2 = 3,6$$

3. (a) Tenim

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{(5500 \cdot 10^3)^2} = 43 \text{ m/s}^2$$

- (b) Calculem

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,95 \cdot 10^{25}}{5500 \cdot 10^3}} = 2,18 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

4. (a) Al periheli, l'energia mecànica de Mart (σ) val,

$$\begin{aligned} E_{M_p} &= \frac{1}{2} M_{\sigma} v_p^2 - \frac{GM_{\odot} M_{\sigma}}{r_p} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot (26,50 \cdot 10^3)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{206,7 \cdot 10^9} \\ &= -1,87 \cdot 10^{32} \text{ J} \end{aligned}$$

Llavors, com que l'energia mecànica es conserva, a l'afeli podem escriure

$$E_{M_a} = \frac{1}{2} M_{\sigma} v_a^2 - \frac{GM_{\odot} M_{\sigma}}{r_a} = -1,87 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

d'on

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{\frac{2}{M_{\sigma}} \cdot \left(-1,87 \cdot 10^{32} + \frac{GM_{\odot} M_{\sigma}}{r_a} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{6,42 \cdot 10^{23}} \cdot \left(-1,87 \cdot 10^{32} + \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{249,2 \cdot 10^9} \right)} \\ &= 2,2 \cdot 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

- (b) L'energia mecànica es conserva, per tant, valdrà el mateix a l'afeli que al periheli (aquesta darrera l'hem calculat abans),

$$E_{M_a} = -1,87 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

5. (a) L'energia cinètica mínima, o de forma equivalent, el treball mínim, que cal donar per situar-lo en l'òrbita desitjada es pot calcular com la diferència d'energia mecànica que tingui a dalt i la que té a la superfície de la Terra. Noteu que en aquest exercici parla de

situar-lo a una altura; llavors, quan escrivim l'energia mecànica a dalt només tindrem en compte el terme d'energia potencial gravitatòria. Al segon apartat sí que ens demanen l'energia addicional que ha de tenir per *descriure* l'òrbita correctament.

$$\begin{aligned}
 E_{c_{min}} = W_{min} &= -\frac{GM_{\oplus}m}{2R_{\oplus}} - \left(-\frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}}\right) \\
 &= \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{GM_{\oplus}m}{2R_{\oplus}} \\
 &= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 10^3}{2 \cdot 6,37 \cdot 10^6} = 3,13 \cdot 10^{10} J
 \end{aligned}$$

- (b) A banda d'haver arribat on és, per mantenir una òrbita estable el satèl·lit necessita tenir una velocitat,

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{2R_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 6,37 \cdot 10^6}} = 5,59 \cdot 10^3 m/s$$

i per tant l'energia cinètica addicional que caldrà val,

$$E_{c_{add}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot (5,59 \cdot 10^3)^2 = 1,56 \cdot 10^{10} J$$