

## Tema 4. Dinàmica del punt

### Exercicis introductoris

1.



Calculem l'acceleració del sistema aplicant la segona llei de Newton al conjunt

$$F = (m_1 + m_2)a \rightarrow a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{24}{2 + 10} = 2 \text{ m/s}^2$$

Ara apliquem la segona llei de Newton només al bloc  $m_1$

$$F_{21} = m_1 a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ N} = F_{12}$$

Veiem que el valor de les forces de contacte depèn de sobre quin dels cossos s'aplica la força externa. Quan l'apliquem sobre el cos més massiu, les forces de contacte són relativament petites, quan s'aplica sobre el més lleuger, les forces de contacte són més grans.

Noteu que també podríem haver trobat  $F_{12}$  primer, d'una forma més complexa. Aplicant la segona llei de Newton a  $m_2$

$$F - F_{21} = m_2 a \rightarrow F_{21} = F - m_2 a = 24 - 10 \cdot 2 = 4 \text{ N} = F_{21}$$

2.



Calculem primer l'acceleració del conjunt

$$F = (m + m + m)a \rightarrow a = \frac{F}{3m} = \frac{10^4}{300} = 33,33 \text{ m/s}^2$$

Llavors, per trobar les tensions comencem aplicant la segona llei de Newton al vagó 3, l'últim

$$T_{23} = ma = 100 \cdot 33,33 = 3333 \text{ N} = T_{32}$$

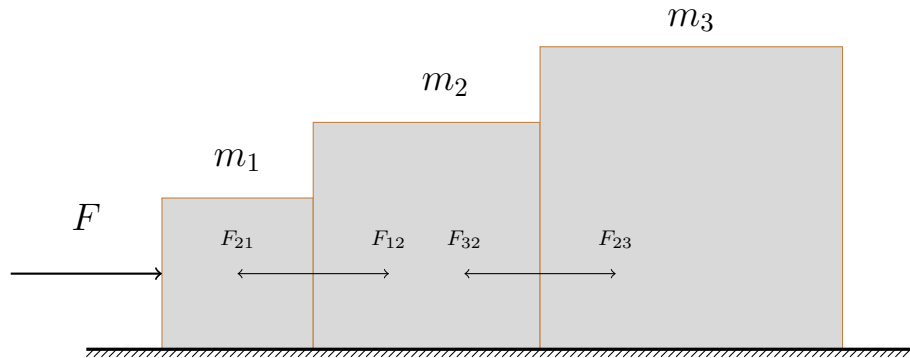
ara apliquem la segona llei de Newton al conjunt format pel tercer i segon vagons (dels quals estira  $T_{12}$ ),

$$T_{12} = (m + m)a = 200 \cdot 33,33 = 6666 \text{ N} = T_{21}$$

Podem trobar aquesta darrera tensió d'una forma més complexa, aplicant la segona llei de Newton *només* al vagó 2,

$$T_{12} - T_{32} = ma \rightarrow T_{12} = T_{32} + ma = 3333 + 100 \cdot 33,33 = 6666 \text{ N}$$

3.



Calculem primer l'acceleració del conjunt

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{200}{10 + 11 + 12} = 6,06 \text{ m/s}^2$$

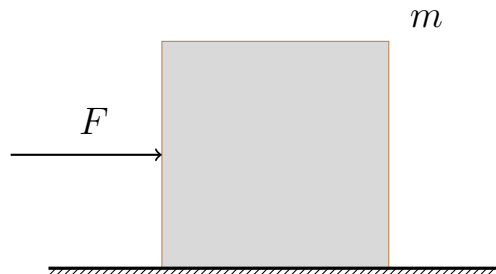
Lavors, aplicant la segona llei de Newton al cos  $m_3$

$$F_{23} = m_3 a = 12 \cdot 6,06 = 72,72 \text{ N} = F_{32}$$

ara apliquem la segona llei de Newton al conjunt  $m_2, m_3$

$$F_{12} = (m_2 + m_3)a = (11 + 12)6,06 = 139,38 \text{ N} = F_{21}$$

4.



Per calcular l'acceleració apliquem la segona llei de Newton

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ m/s}^2$$

La velocitat al cap de  $2 \text{ s}$  la calculem mitjançant les eines vistes a l'avaluació anterior

$$v = v_o + at = 0 + 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ m/s}$$

---

5.

De forma semblant a l'exercici anterior

$$F = ma \rightarrow m = \frac{F}{a} = \frac{200}{2} = 100 \text{ kg}$$

i en quant al desplaçament efectuat en  $10 \text{ s}$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 100 \text{ m}$$

6.

Per resoldre l'exercici i trobar la força aplicada sobre el cos haurem de fer servir la segona llei de Newton, però necessitem saber l'acceleració. Fem servir les dades cinemàtiques que proporciona l'enunciat per calcular-la

A partir de

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

podem escriure

$$30 = 0 \cdot 20 + \frac{1}{2} a \cdot 20^2$$

d'on

$$a = \frac{2 \cdot 30}{20^2} = 0,15 \text{ m/s}^2$$

Ara, podem aplicar  $F = ma$  per trobar la força aplicada

$$F = ma = 80 \cdot 0,15 = 12 \text{ N}$$

---

**7.**

Passem primer la velocitat a  $m/s$

$$72 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{km}} \times \frac{1 \cancel{h}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

Calculem ara l'acceleració

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \rightarrow 0 = 20^2 + 2a \cdot 60 \rightarrow a = -\frac{20^2}{2 \cdot 60} = -3,33 \text{ m/s}^2$$

i finalment la força demanada

$$F = ma = 1300 \cdot (-3,33) = -4333,33 \text{ N}$$

**8.**

Comencem calculant l'acceleració amb que es mourà el cos

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ m/s}^2$$

ara, per calcular la velocitat al cap de 8 s

$$v = v_0 + at = 0 + 1,5 \cdot 8 = 12 \text{ m/s}$$

Al cap de 10 s d'actuar la força la velocitat és més gran, la calculem

$$v = v_0 + at = 0 + 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ m/s}$$

llavors, quan la força deixa d'actuar sobre el cos, i suposant que no actua cap altra força sobre ell, hem de suposar que mantindrà aquesta velocitat assolida. En 5 s recorrerà doncs

$$x = vt = 15 \cdot 5 = 75 \text{ m}$$

---

**9.**

Aplicant la segona llei de Newton

$$T - mg = ma \rightarrow T = mg + ma = m(g + a) = 1200(1 + 9,8) = 12960 \text{ N}$$

10.



Notem que la força que hauria de fer el fil per mantenir el cos en equilibri val,  $T = mg = 10 \cdot 9,8 = 98 \text{ N}$ , llavors, en les condicions del problema, s'està accelerant cap amunt, ja que s'està pujant amb  $T_{max} = 200 \text{ N}$ . L'acceleració que li correspon a aquesta tensió es pot calcular aplicant la segona llei de Newton al cos

$$T_{max} - mg = ma_{max}$$

$$a_{max} = \frac{T_{max} - mg}{m} = \frac{200 - 10 \cdot 9,8}{10} = 10,2 \text{ m/s}^2$$

**11.**

Si el pal fes una força sobre el bomber igual al seu pes, aquest estaria quiet. Com que baixa, apliquem la segona llei de Newton al bomber, tenint en compte que al estar baixant, el pes té el mateix signe que l'acceleració i la força que li fa el pal, sentit contrari. En aquestes condicions tenim

$$mg - F_{pal} = ma$$

$$F_{pal} = mg - ma = m(g - a) = 70 \cdot (9,8 - 3) = 476 \text{ N}$$

**12.**

Veiem que és el que succeeix quan a un cos que es troba recolzat sobre una superfície amb fregament se li aplica una força variable.



La força aplicada  $F_1$  és més petita que la força de fregament màxima que presenta el cos amb la superfície, de manera que aquesta força de fregament s'adapta al valor de la força aplicada, i el cos roman quiet.

La força aplicada  $F_2$  correspon al valor màxim del fregament entre el cos i la superfície. En aquest cas ens trobem en el límit en que el cos es pot començar a moure.



La força aplicada  $F_3$  correspon a un valor més gran que el que pot assolir la força de fregament i llavors, tenim una força neta cap a la dreta  $F_3 - F_f$  que provocarà una acceleració del cos.

En l'exercici que ens ocupa, ens parlen de la situació en la que s'aplicaria la força  $F_2$ , que ens diuen que val  $500\text{ N}$  i tenim que

$$500 = F_f = \mu_e N = \mu_e mg = \mu_s \cdot 120 \cdot 9,8$$

$$\mu_e = \frac{500}{120 \cdot 9,8} = 0,425$$

on hem usat  $N = mg$ , un resultat conegut de teoria.

### 13.

La situació és semblant a la de l'exercici anterior, i podem escriure

$$F_f = \mu mg \rightarrow mg = \frac{F_f}{\mu} = \frac{800}{0.8} = 1000\text{ N}$$

### 14.

Calculem la força de fregament estàtic màxima que pot presentar el cos

$$F_f = \mu_e mg = 0,4 \cdot 60 \cdot 9,8 = 235,2\text{ N}$$

Com que la força que s'aplica és  $F = 300\text{ N}$ , més gran, el cos es mourà. Ara farem servir la segona llei de Newton per calcular l'acceleració però hem de tenir en compte que com ja

s'està movent, hem de usar el coeficient de fregament dinàmic  $\mu_d$

$$F - F_f = ma \rightarrow F - \mu_d mg = ma$$

$$a = \frac{F - \mu_d mg}{m} = \frac{300 - 0,3 \cdot 60 \cdot 9,8}{60} = 2,06 \text{ m/s}^2$$


---

**15.**

Calculem primer l'acceleració

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$0 = 15^2 + 2a \cdot 97,8 \rightarrow a = \frac{-15^2}{2 \cdot 97,8} = -1,15 \text{ m/s}^2$$

Per trobar el coeficient de fregament apliquem la segona llei de Newton, tenint en compte que la única força que està actuant sobre el cos mentre es mou és la de fregament que té sentit contrari al del moviment i per tant, acabarà aturant el cos,

$$-F_f = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow \mu = -\frac{a}{g} = -\frac{-1,15}{9,8} = 0,117$$

**16.**

En quant a la força de fregament, podem escriure

$$F_f = \mu N = \mu mg = 0,3 \cdot 10 \cdot 9,8 = 29,4$$

i per l'acceleració tenim

$$F - F_f = ma \rightarrow a = \frac{F - f_f}{m} = \frac{300 - 29,4}{10} = 27,06 \text{ m/s}^2$$

## Cossos enllaçats

**1.** A partir de l'esquema de la teoria, suposant que la massa  $m_1$  es troba a l'esquerra i la massa  $m_2$  a la dreta, les tensions són iguals i valen  $T$  i assumint ara que la politja es mou en sentit antihorari llavors, pel cos de l'esquerra tenim

$$m_1g - T = m_1a$$

i per el de la dreta

$$T - m_2g = m_2a$$

Sumant les equacions

$$m_1g - m_2g = (m_1 + m_2)a$$

d'on

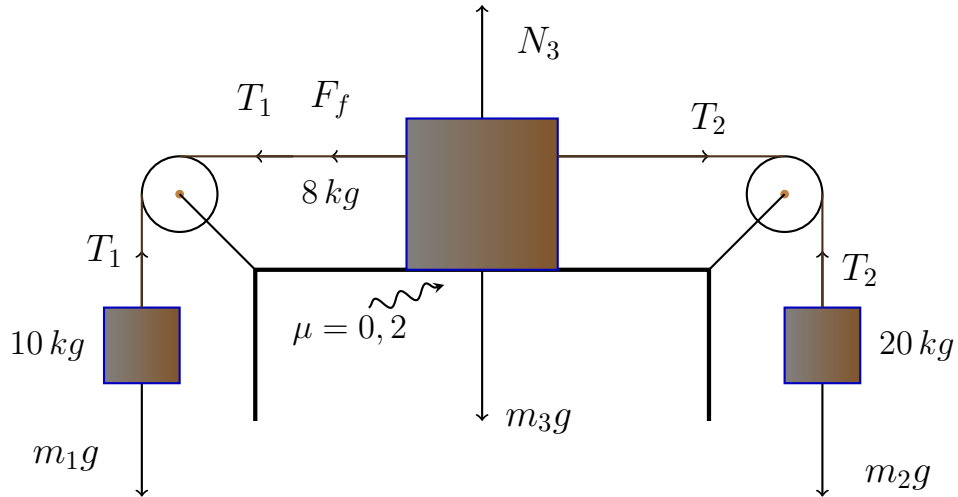
$$a = \frac{m_1g - m_2g}{m_1 + m_2} = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 9,8 \cdot \frac{4 - 2}{4 + 2} = 3,27 \text{ m/s}^2$$

**2.** El, procés de resolució està detallat a la teoria, les equacions que s'obtenen són

$$a = g \frac{m_2 + m_3 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 9,8 \cdot \frac{5 + 1 - 0,2 \cdot 3}{3 + 5 + 1} = 5,88 \text{ m/s}^2$$

$$N_3 = m_3g \frac{m_1(1 + \mu)}{m_1 + m_2 + m_3} = 1 \cdot 9,8 \cdot \frac{3 \cdot (1 + 0,2)}{3 + 5 + 1} = 3,92 \text{ N}$$

3.



Hem suposat que el sistema es mou *cap a la dreta*. Les equacions per cada massa són

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a \\ T_2 - T_1 - F_f &= m_3a \quad N_3 = m_3g \\ m_2g - T_2 &= m_2a \end{aligned}$$

que es poden escriure com

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a \\ T_2 - T_1 - \mu N_3 &= m_3a \quad N_3 = m_3g \\ m_2g - T_2 &= m_2a \end{aligned}$$

i, finalment

$$\begin{aligned} T_1 - m_1g &= m_1a \\ T_2 - T_1 - \mu m_3g &= m_3a \\ m_2g - T_2 &= m_2a \end{aligned}$$

Sumant-les, obtenim

$$m_2g - m_1g - \mu m_3g = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

d'on

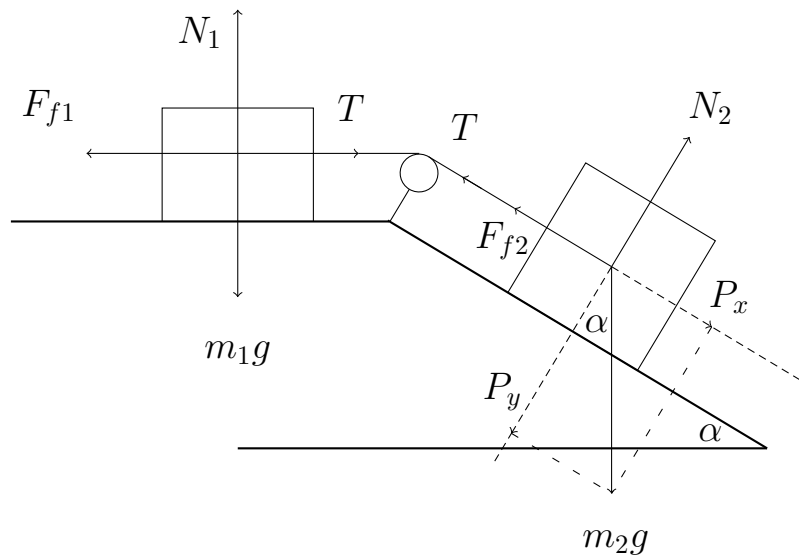
$$a = g \frac{m_2 - m_1 - \mu m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 9,8 \cdot \frac{20 - 10 - 0,2 \cdot 8}{10 + 20 + 8} = 2,07 \text{ m/s}^2$$

## El pla inclinat

1. Només cal seguir el raonament fet a la teoria i substituir els valors a l'expressió final

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 3,2 \text{ m/s}^2$$

2. Posem noms a les masses, representem les forces i escrivim les equacions per cada cos



Pel cos 1 les equacions son,

$$\begin{cases} N_1 = m_1g \\ T - F_{f1} = m_1a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1g \\ T - \mu N_1 = m_1a \end{cases} \rightarrow T - \mu m_1g = m_1a$$

Pel cos 2 les equacions son,

$$\begin{cases} N_2 = P_y \\ P_x - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_2 = m_2 g \cos \alpha \\ m_2 g \sin \alpha - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g \cos \alpha \\ m_2 g \sin \alpha - T - \mu N_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow m_2 g \sin \alpha - T - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a$$

llavors, obtenim el sistema d'equacions

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g = m_1 a \\ m_2 g \sin \alpha - T - \mu m_2 g \cos \alpha = m_2 a \end{cases}$$

que es resol trivialment per donar,

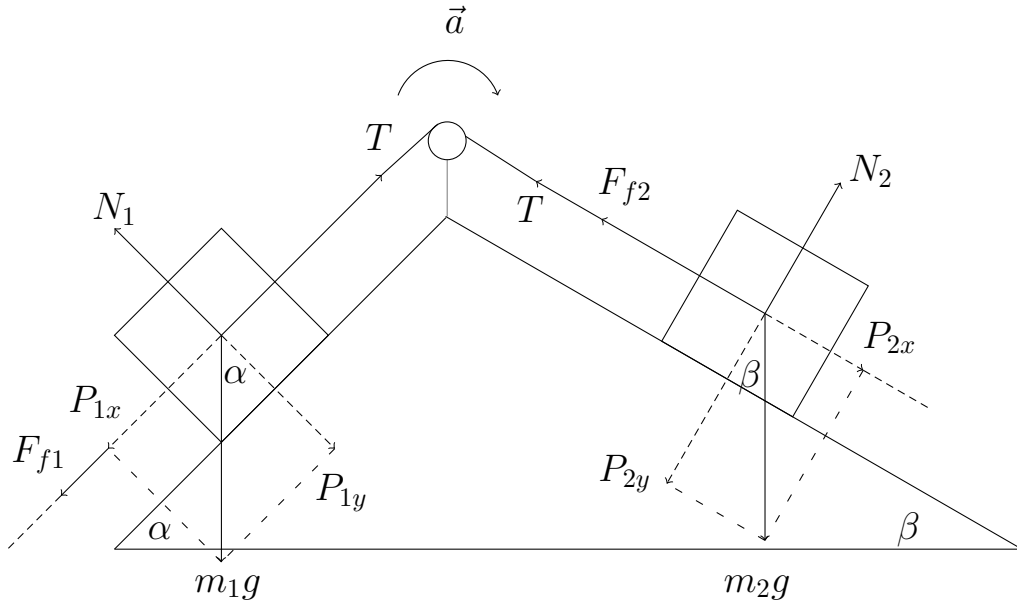
$$m_2 g \sin \alpha - \mu m_2 g \cos \alpha - \mu m_1 g = m_1 a + m_2 a$$

d'on

$$\begin{aligned} a &= g \cdot \frac{m_2 \sin \alpha - \mu m_2 \cos \alpha - \mu m_1}{m_1 + m_2} \\ &= 9,8 \cdot \frac{25 \sin 30^\circ - 0,2 \cdot 25 \cos 30^\circ - 0,2 \cdot 8}{8 + 25} \\ &= 1,95 \, m/s^2 \end{aligned}$$



3.



Pel cos 1 les equacions son,

$$\begin{cases} N_1 = P_{1y} \\ T - F_{f1} - P_{1x} = m_1 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 = m_1 g \cos \alpha \\ T - F_{f1} - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos \alpha \\ T - \mu N_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \end{cases} \rightarrow T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = m_1 a$$

Pel cos 2 les equacions son,

$$\begin{cases} N_2 = P_{2y} \\ P_{2x} - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_2 = m_2 g \cos \beta \\ m_2 g \sin \beta - T - F_{f2} = m_2 a \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} N_2 = m_2 g \cos \beta \\ m_2 g \sin \beta - T - \mu N_2 = m_2 a \end{cases} \rightarrow m_2 g \sin \beta - T - \mu m_2 g \cos \beta = m_2 a$$

Obtenim llavors el sistema

$$\begin{cases} T - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \\ m_2 g \sin \beta - T - \mu m_2 g \cos \beta = m_2 a \end{cases}$$

que es resol fàcilment per donar

$$m_2 g \sin \beta - \mu m_2 g \cos \beta - \mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha = m_1 a + m_2 a$$

d'on finalment

$$a = g \cdot \frac{m_2 \sin \beta - \mu m_2 \cos \beta - \mu m_1 \cos \alpha - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}$$