

1. (a) $i^{23} - 1 = i^{4 \cdot 5 + 3} - 1 = i^{4 \cdot 5} \cdot i^3 - 1 = (i^4)^5 \cdot i^3 - 1 = -i - 1 = \sqrt{2}_{225^\circ}$
 (b) $(i + 1)^3 \rightarrow (\sqrt{2}_{45^\circ})^3 = 2\sqrt{2}_{135^\circ}$
 (c) $(\sqrt{6} + \sqrt{3}i)^7 \rightarrow (\sqrt{9}_{35,26^\circ})^7 = 3^7_{246,82^\circ}$
 (d) $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{13}i)^5}{(1-i)^2} \rightarrow \frac{(\sqrt{16}_{64,34^\circ})^5}{(\sqrt{2}_{315^\circ})^2} = 2^9_{-308,3^\circ} = 2^9_{51,7^\circ}$
 (e) $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^6}{(3 - 3\sqrt{3}i)^4} \rightarrow \frac{(2_{45^\circ})^6}{(6_{-60^\circ})^4} = \frac{(2_{45^\circ})^6}{(6_{300^\circ})^4} = \frac{2^6_{6 \cdot 45^\circ}}{6^4_{4 \cdot 300^\circ}} = \frac{2^6_{270^\circ}}{6^4_{1200^\circ}} = \frac{2^6_{270^\circ}}{6^4_{120^\circ}} = \left(\frac{4}{81}\right)_{150^\circ}$
2. En general, quan es vol resoldre una equació de segon grau amb coeficients reals

$$ax^2 + bx + c = 0$$

s'usava la formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El \pm apareix perquè (ara ho sabem) l'arrel quadrada ha de tenir dues solucions. Quan treballem amb equacions amb coeficients complexos farem servir el resultat

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En cas de l'equació que hem de resoldre

$$x^2 - (1 + i)x + i = 0$$

tenim

$$x = \frac{1 + i + \sqrt{(1 + i)^2 - 4i}}{2}$$

Comencem per calcular

$$\sqrt{(1 + i)^2 - 4i} = \sqrt{1 + 2i - 1 - 4i} = \sqrt{-2i}$$

passem a forma polar el nombre complex que hi ha dins l'arrel

$$\sqrt{2}_{270^\circ}$$

les dues arrels del nombre complex 2_{270° són

$$\sqrt{2}_{\frac{270^\circ + 360^\circ \cdot 0}{2}} = \sqrt{2}_{135^\circ} \rightarrow \sqrt{2} \cos 135^\circ + i\sqrt{2} \sin 135^\circ = -1 + i$$

i

$$\sqrt{2}_{\frac{270^\circ + 360^\circ \cdot 1}{2}} = \sqrt{2}_{315^\circ} \rightarrow \sqrt{2} \cos 315^\circ + i\sqrt{2} \sin 315^\circ = 1 - i$$

de forma que una de les solucions de l'equació és

$$x_1 = \frac{1+i-1+i}{2} = i$$

i l'altra

$$x_1 = \frac{1+i+1-i}{2} = 1$$

3. (a) $\sqrt{i} \rightarrow \sqrt[1]{\frac{\pi}{2}}$

després de passar a forma polar el nombre complex podem calcular les seves dues arrels, que són

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi \cdot 0}{2}} = 1_{\frac{\pi}{4}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

i

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi \cdot 1}{2}} = 1_{\frac{5\pi}{4}} \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(b) $1 - \sqrt[3]{i} \rightarrow 1 - \sqrt[3]{1\frac{\pi}{2}}$

després de passar a forma polar el nombre complex de l'arrel calculem les seves arrels (3), aquestes són

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi \cdot 0}{3}} = 1_{\frac{\pi}{6}} \rightarrow \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi \cdot 1}{3}} = 1_{\frac{5\pi}{6}} \rightarrow \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi \cdot 2}{3}} = 1_{\frac{9\pi}{6}} \rightarrow \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = -i$$

de forma que tenim

$$1 - \sqrt[3]{i} = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$1 - \sqrt[3]{i} = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$1 - \sqrt[3]{i} = 1 - (-i) = 1 + i$$

(c) $e^{-i\frac{\pi}{3}} (1 - (1+i)^3)$ Per una banda tenim

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} \rightarrow \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

per una altra

$$(1+i)^3 \rightarrow \left(\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\right)^3 = 2\sqrt{2}\frac{3\pi}{4} \rightarrow 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} + i2\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} = -2-2i$$

finalment

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot (1 - (-2-2i)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot (3+2i) = \frac{3}{2} + \sqrt{3} + \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)i$$

(d)

$$\frac{(1+i)^{100}}{(1+i\sqrt{3})^{50}} \rightarrow \frac{\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{4}\right)^{100}}{\left(2\frac{\pi}{3}\right)^{50}} = 1^{\frac{100\pi}{4} - \frac{50\pi}{3}} = 1^{\frac{25\pi}{3}} = 1^{\frac{\pi}{3}}$$

(e)

$$\left(1 + \sqrt{3}i\right)^3 - \left(1 - \sqrt{3}i\right)^3 \rightarrow \left(2\frac{\pi}{3}\right)^3 - \left(2\frac{2\pi}{3}\right)^3 = 8_\pi - 8_0 = -8 - 8 = -16$$

4. Calculem el quocient

$$\frac{1+2ai}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i+2ai+6ai^2}{1+9} = \frac{1-6a+(3+2a)i}{10} = \frac{1-6a}{10} + \frac{3+2a}{10}i$$

si volem que aquest nombre complex sigui real, demanarem que la part imaginària valgui zero, d'on

$$\frac{3+2a}{10} = 0 \rightarrow 3+2a = 0 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$