1. (a) $i^{23}-1=i^{4\cdot 5+3}-1=i^{4\cdot 5}\cdot i^3-1=\left(i^4\right)^5\cdot i^3-1=-i-1$
   (b) $(i+1)^3 \rightarrow (\sqrt{2}_{45^\circ})^3=2\sqrt{2}_{135^\circ}$
   (c) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\,i\right)^7 \rightarrow \left(\sqrt{9}_{35,26^\circ}\right)^7=3^7_{246,82^\circ}$
   (d) $\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{13}i\right)^5}{(1-i)^2} \rightarrow \frac{\left(\sqrt{16}_{64,34^\circ}\right)^5}{\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^2}=2^9_{-308,3^\circ}=2^9_{51,7^\circ}$
   (e) $\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^6}{\left(3-3\sqrt{3}\,i\right)^4} \rightarrow \frac{(2_{45^\circ})^6}{(6_{60^\circ})^4}=\left(\frac{4}{81}\right)_{30^\circ}$

2. En general, quan es vol resoldre una equació de segon grau amb coeficients reals
$$ax^2+bx+c=0$$
s'usava la formula
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
El $\pm$ apareix perquè (ara ho sabem) l'arrel quadrada ha de tenir dues solucions. Quan treballem amb equacions amb coeficients complexos farem servir el resultat
$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
En cas de l'equació que hem de resoldre
$$x^2-(1+i)x+i=0$$
tenim
$$x=\frac{1+i+\sqrt{(1+i)^2-4i}}{2}$$
Comencem per calcular
$$\sqrt{(1+i)^2-4i}=\sqrt{1+2i-1-4i}=\sqrt{-2i}$$
passem a forma polar el nombre complex que hi ha dins l'arrel
$$\sqrt{2_{270^\circ}}$$
les dues arrels del nombre complex 2_{270° són
$$\sqrt{2}_{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 0}{2}}=\sqrt{2}_{135^\circ}\rightarrow\sqrt{2}\cos 135^\circ+i\sqrt{2}\sin 135^\circ=-1+i$$
i
$$\sqrt{2}_{\frac{270^\circ+360^\circ\cdot 1}{2}}=\sqrt{2}_{315^\circ}\rightarrow\sqrt{2}\cos 315^\circ+i\sqrt{2}\sin 315^\circ=1-i$$

de forma que una de les solucions de l'equació és

$$x_1 = \frac{1+i-1+i}{2} = i$$

i l'altra

$$x_1 = \frac{1+i+1-i}{2} = 1$$

3. (a) $\sqrt{i} \to \sqrt{1_{\frac{\pi}{2}}}$
després de passar a forma polar el nombre complex podem calcular les seves dues arrels, que són

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi\cdot 0}{2}} = 1_{\frac{\pi}{4}} \to \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

i

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi\cdot 1}{2}} = 1_{\frac{5\pi}{4}} \to -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(b) $1 - \sqrt[3]{i} \to 1 - \sqrt[3]{1_{\frac{\pi}{2}}}$
després de passar a forma polar el nombre complex de l'arrel calculem les seves arrels (3), aquestes són

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi\cdot 0}{3}} = 1_{\frac{\pi}{6}} \to \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi\cdot 1}{3}} = 1_{\frac{5\pi}{6}} \to \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$1_{\frac{\pi/2+2\pi\cdot 2}{3}} = 1_{\frac{9\pi}{6}} \to \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$$

de forma que tenim

$$1 - \sqrt[3]{i} = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$1 - \sqrt[3]{i} = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$1 - \sqrt[3]{i} = 1 - (-i) = 1 + i$$

(c) $e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(1-(1+i)^3\right)$ Per una banda tenim

$$e^{-i\frac{\pi}{3}} \to \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

per una altra

$$(1+i)^3 \to \left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 2\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}} \to 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}+i2\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4} = -2-2i$$

finalment

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\big(1-(-2-2i)\big) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot(3+2i) = \frac{3}{2}+\sqrt{3}+\left(1-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)i$$

(d)

$$\frac{(1+i)^{100}}{\left(1+i\sqrt{3}\,i\right)^{50}} \to \frac{\left(\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}\right)^{100}}{\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^{50}} = 1_{\frac{100\pi}{4}-\frac{50\pi}{3}} = 1_{\frac{25\pi}{3}} = 1_{\frac{\pi}{3}}$$

(e)

$$\left(1+\sqrt{3}\,i\right)^3-\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^3 \to (2_{\frac{\pi}{3}})^3-(2_{\frac{2\pi}{3}})^3 = 8_{\pi}-8_0 = -8-8 = 0$$