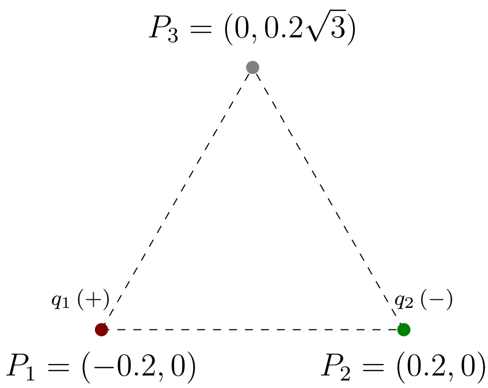
Exercici 44

a) Podem representar la situació amb el següent esquema, on hem situat la càrrega positiva en el punt $P_1 = (-0.2, 0)$ i la negativa al punt $P_2 = (0.2, 0)$. En aquestes condicions, el tercer vèrtex del triangle equilàter es troba al punt $P_3 = (0, 0.4 \sin 60°) = (0, 0.4\frac{\sqrt{3}}{2}) = (0, 0.2\sqrt{3})$



Per calcular el camp elèctric en P_3, creat per q_1 i q_2, necessitem els vectors

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 0.2\sqrt{3}) - (-0.2, 0) = (0.2, 0.2\sqrt{3})$$
$$\overrightarrow{P_2P_3} = (0, 0.2\sqrt{3}) - (0.2, 0) = (-0.2, 0.2\sqrt{3})$$

i el seu mòdul

$$|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{(0.2)^2 + (0.2\sqrt{3})^2} = 0.2\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 0.2\sqrt{1+3} = 0.4\,m$$

$$|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{(-0.2)^2 + (0.2\sqrt{3})^2} = 0.2\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 0.2\sqrt{1+3} = 0.4\,m$$

ara podem calcular

$$\vec{E}_{P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^3}\overrightarrow{P_1P_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^3}\overrightarrow{P_2P_3}$$

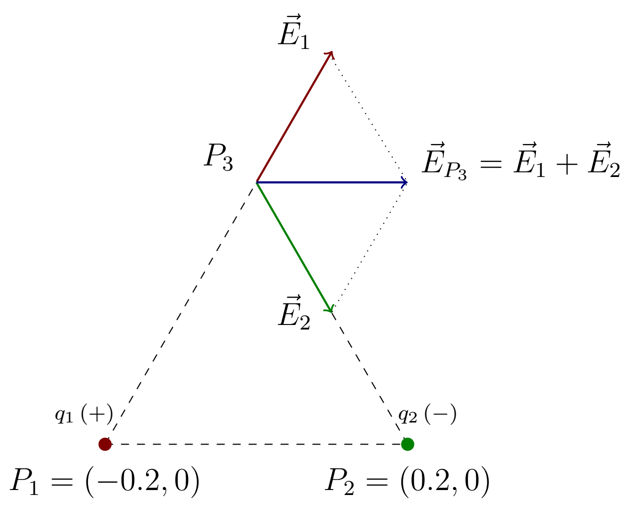
$$= 9\cdot 10^9 \frac{3\cdot 10^{-8}}{(0,4)^3}\cdot(0.2, 0.2\sqrt{3}) + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-3\cdot 10^{-8}}{(0,4)^3}\cdot(-0.2, 0.2\sqrt{3})$$

$$= \frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-8}\cdot 0,2}{(0.4)^3}\left[(1,\sqrt{3}) + (1,-\sqrt{3})\right]$$

$$= \frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-8}\cdot 0,2}{(0.4)^3}\Big(2, 0\Big)$$

$$= (1.687.5, 0)\,N/C$$

La representació del camp seria



En quant al potencial elèctric en P_3

$$
\begin{aligned}
V_{P_3} &= V_1^{P_3} + V_2^{P_3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} \\
&= 9\cdot 10^9 \frac{3\cdot 10^{-8}}{0,4} + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-3\cdot 10^{-8}}{0,4} \\
&= 0\,V
\end{aligned}
$$

b) Per trobar l'energia potencial elèctrica de les dues càrregues, calculem el treball que cal fer per dur-les des de l'infinit fins el punt on es troben.

El treball per dur la càrrega q_1 al punt P_1 des de l'infinit

$$W_{\infty\to P_1} = q_1\cdot(V_{P_1} - V_\infty) = q_1\cdot(0-0) = 0\,V$$

quan q_1 es dirigeix a P_1, no hi ha cap altre càrrega present i el potencial en P_1 val zero

Ara, el treball per dur la càrrega q_2 al punt P_2 des de l'infinit

$$W_{\infty\to P_2} = q_2\cdot(V_{P_2} - V_\infty) = q_2\cdot\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} - 0\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$$

quan q_2 arriba a P_2, sentirà l'efecte del potencial que crea q_1 en aquest punt.

Noteu que sovint es pren aquest darrer resultat com a "fórmula" per calcular l'energia potencial elèctrica de dues càrregues. Si al problema que hem de resoldre n'hi ha tres o més, llavors la "fórmula" anterior ja no és útil. És sempre millor conèixer els mètodes generals que funcionen en qualsevol situació, independentment del nombre de càrregues presents o la seva disposició en figures més o menys regulars.

La suma $W_{\infty\to P_1} + W_{\infty\to P_2}$ d'aquests dos treballs és l'energia de configuració o energia potencial elèctrica del sistema de càrregues

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|}$$

Quan la distància es duplica, fent una anàlisi semblant, es comprova que aquesta energia val ara

$$E_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\left(2|\overrightarrow{P_1 P_2}|\right)}$$

Llavors, per la variació de l'energia potencial elèctrica, tenim

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{2|\overrightarrow{P_1 P_2}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|}$$

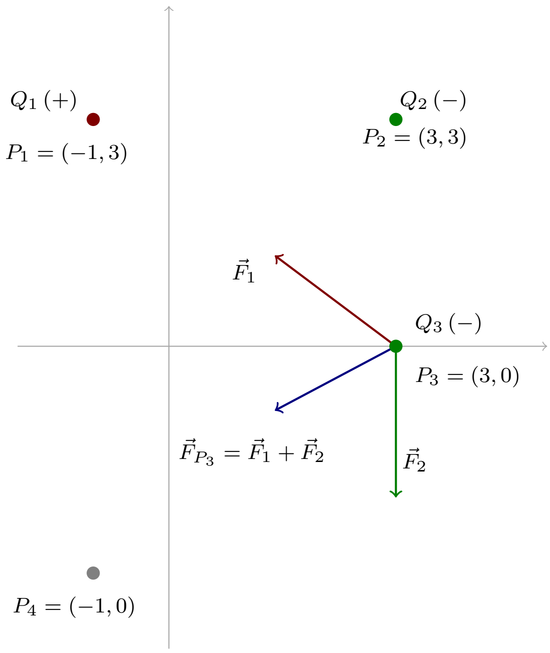
substituint els valors coneguts

$$\Delta E = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-(3 \cdot 10^{-8})^2}{0.4} = 1,0125 \cdot 10^{-5}\, J > 0$$

l'energia potencial augmenta, que és el que podíem esperar ja que les càrregues de diferent signe s'atrauen, l'energia potencial que tenen com a parella és negativa i si les separem, aquesta energia s'acosta a zero pels valors negatius, per tant augmenta.

Exercici 45

a)



Per calcular la força que fan Q_1 i Q_2 sobre Q_3, calcularem el camp elèctric que creen Q_1 i Q_2 en el punt P_3. Necessitem els vectors

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (3,0) - (-1,3) = (4,-3)$$
$$\overrightarrow{P_2P_3} = (3,0) - (3,3) = (0,-3)$$

i el seu mòdul

$$|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5\,m$$
$$|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3\,m$$

ara podem calcular

$$\vec{E}_{P_3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^3}\overrightarrow{P_1P_3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{|\overrightarrow{P_1P_3}|^3}\overrightarrow{P_2P_3}$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-6}}{5^3}\cdot(4,-3) + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-5\cdot 10^{-6}}{3^3}\cdot(0,-3)$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot 10^{-6}\left[\frac{3}{5^3}\cdot(4,-3) - \frac{5}{3^3}\cdot(0,-3)\right]$$

$$= 9\cdot 10^3 \cdot \left(\frac{12}{125}, \frac{1634}{3375}\right)$$

$$= \left(\frac{108000}{125}, \frac{14706000}{3375}\right)\ N/C$$

Llavors la força que experimenta Q_3,

$$\vec{F} = q\vec{E} = Q_3\vec{E_{P_3}} = -8\cdot 10^{-6}\cdot\left(\frac{108000}{125}, \frac{4896000}{1125}\right) = (-0.0069, -0.0348)\, N$$

b)

El treball demanat per portar la càrrega Q_3 des d'el punt P_3 a P_4 el calcularem amb

$$W_{P_3 \to P_4} = Q_3(V_{P_4} - V_{P_3})$$

Llavors, calculem el potencial elèctric que creen en aquest dos punts les càrregues Q_1 i Q_2

$$\begin{aligned} V_{P_3} &= V_1^{P_3} + V_2^{P_3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_3}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_3}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6}}{3} \\ &= -9600\, V \end{aligned}$$

Hem de fer un càlcul semblant per el punt P_4, però abans hem de calcular els vectors

$$\overrightarrow{P_1P_4} = (-1, -3) - (-1, 3) = (0, -6)$$
$$\overrightarrow{P_2P_4} = (-1, -3) - (3, -3) = (-4, -6)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{P_1P_4}| = \sqrt{(0)^2 + (-6)^2} = 6\, m$$
$$|\overrightarrow{P_2P_4}| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13}\, m$$

Ara

$$
\begin{aligned}
V_{P_4} &= V_1^{P_4} + V_2^{P_4} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\overrightarrow{P_1P_4}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{|\overrightarrow{P_2P_4}|} \\
&= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{3\cdot 10^{-6}}{6} + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-5\cdot 10^{-6}}{2\sqrt{13}} \\
&= -1740\,V
\end{aligned}
$$

Finalment

$$
W_{P_3\to P_4} = Q_3(V_{P_4} - V_{P_3}) = -8\cdot 10^{-6}\cdot \big(-1740 - (-9600)\big) = -0.06288\,J
$$

Hem calculat el treball que hem de fer per moure la càrrega, com el resultat és negatiu, interpretem que el treball el fa el camp.

Exercici 46

Fixem la notació de les dades de l'exercici

$$
A = (0,3) \quad B = (0,-5) \quad P = (4,0) \quad O = (0,0)
$$
$$
q_A = 3\mu C \quad q_B = -7\mu C
$$

a) Llavors, per començar a calcular el camp que creen q_A, q_B en P necessitem com sempre els vectors

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AP} &= (4,0) - (0,3) = (4,-3) \\
\overrightarrow{BP} &= (4,0) - (0,-5) = (4,5)
\end{aligned}
$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5\,m$$
$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41}\,m$$

Ara podem calcular

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{|\overrightarrow{AP}|^3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_B}{|\overrightarrow{BP}|^3}\overrightarrow{BP}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5^3} \cdot (4, -3) + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{41})^3} \cdot (4, 5)$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \left[\frac{3}{5^3} \cdot (4, -3) - \frac{7}{(\sqrt{41})^3} \cdot (4, 5) \right]$$

$$= (-95.897, 1847.87)\,N/C$$

b) El potencial elèctric en P

$$V_P = V_A^P + V_B^P$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_B}{|\overrightarrow{BP}|}$$

$$= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{5} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{41}}$$

$$= -4438,95\,V$$

Per trobar el potencial elèctric en O calculem els vectors

$$\overrightarrow{AO} = (0, 0) - (0, 3) = (0, -3)$$
$$\overrightarrow{BO} = (0, 0) - (0, -5) = (0, 5)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3\,m$$
$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(0)^2 + (5)^2} = 5\,m$$

Llavors

$$\begin{aligned}
V_O &= V_A^O + V_B^O \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_A}{|\overrightarrow{AO}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_B}{|\overrightarrow{BO}|} \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6}}{3} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{5} \\
&= -3600\,V
\end{aligned}$$

Finalment,

$$V_O - V_P = -3600 - (-4438,95) = 838,95$$

b) El treball que hem de fer per dur una càrrega de $5\mu C$ des del punt O fins a P val

$$W_{O\to P} = 5 \cdot 10^{-6}(V_P - V_O) = 5 \cdot 10^{-6} \cdot (-838,95) = -0,0042\,J$$

Com el resultat és negatiu la conclusió és que el treball el fa el camp.

Exercici 47

Situem la càrrega Q_2 a l'origen de coordenades $O = (0,0)$ de forma que les coordenades de Q_1 són $A = (0,2)$ i el centre del quadrat $C = (1,1)$. En aquestes condicions el camp elèctric en C es pot calcular un cop trobats els vectors

$$\overrightarrow{AC} = (1,1) - (0,2) = (1,-1)$$
$$\overrightarrow{OC} = (1,1) - (0,0) = (1,1)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\, m$$
$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\, m$$

llavors

$$\begin{aligned}
\vec{E}_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{|\overrightarrow{AC}|^3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{|\overrightarrow{OC}|^3}\overrightarrow{OC} \\
&= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{9\cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^3}\cdot(1,-1) + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-9\cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^3}\cdot(1,1) \\
&= \frac{9^2\cdot 10^9\cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2})^3}\Big[(1,-1)-(1,1)\Big] \\
&= (0, 5.73\cdot 10^4)\, N/C
\end{aligned}$$

b) El treball que fa *el camp* elèctric per moure una càrrega Q_3 des del punt C al punt $D = (2,0)$ val

$$W_{C\to D} = -Q_3(V_D - V_C)$$

llavors calculem el potencial en el punt $C = (1,1)$

$$\begin{aligned}
V_C &= V_1^C + V_2^C \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{|\overrightarrow{OC}|} \\
&= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{9\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} + 9\cdot 10^9\cdot\frac{-9\cdot 10^{-6}}{\sqrt{2}} \\
&= 0\, V
\end{aligned}$$

per calcular el potencial en el punt $D = (2, 0)$ necessitem els vectors

$$\overrightarrow{AD} = (2, 0) - (0, 2) = (2, -2)$$
$$\overrightarrow{OD} = (2, 0) - (0, 0) = (2, 0)$$

amb mòdul

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}\, m$$
$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2} = 2\, m$$

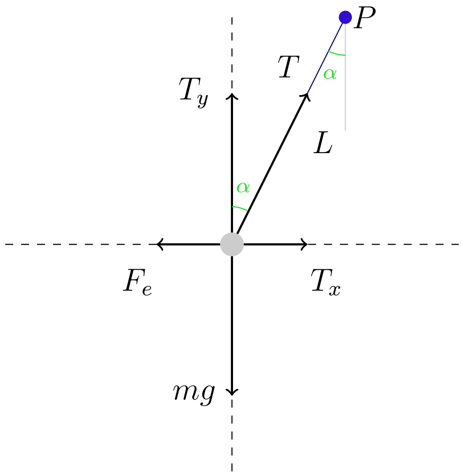
llavors

$$\begin{aligned} V_D &= V_1^D + V_2^D \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{|\overrightarrow{AD}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_2}{|\overrightarrow{OD}|} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6}}{2\sqrt{2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-9 \cdot 10^{-6}}{2} \\ &= -1,19 \cdot 10^4\, V \end{aligned}$$

i finalment

$$W_{C \to D} = -Q_3(V_D - V_C) = -7 \cdot 10^{-6}(-1,19 - 0) = 8,30 \cdot 10^{-2}\, J$$

Exercici 48



a) Escrivim les equacions que corresponen a l'equilibri en els eixos horitzontal i vertical

$$T_x = F_e$$
$$T_y = mg$$

que es poden escriure (sabent que la corda té una longitud L), com

$$T \sin\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2L\sin\alpha)^2}$$
$$T\cos\alpha = mg$$

dividint les equacions d'adalt a baix

$$\tan\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2L\sin\alpha)^2}\frac{1}{mg}$$

d'on

$$m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2L\sin\alpha)^2}\frac{1}{g\tan\alpha}$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(-5,8\cdot 10^{-6})^2}{(2\cdot 1\cdot \sin 30^\circ)^2}\cdot\frac{1}{9,8\cdot\tan 30^\circ}$$

$$= 5,35\cdot 10^{-2}\,kg$$

a) Per calcular el camp elèctric que creen les càrregues Q en el punt P fem servir un sistema de coordenades de forma que aquest punt sigui l'origen, per exemple. Llavors, les càrregues es troben situades als punts

$$A = (-L\sin\alpha, -L\cos\alpha) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B = (L\sin\alpha, -L\cos\alpha) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Ara necessitem els vectors (trivialment unitaris, per la geometria de la figura)

$$\widehat{AP} = (0,0) - \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\widehat{BP} = (0,0) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Llavors el camp elèctric en P es calcula com

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\widehat{AP}|^3}\widehat{AP} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{|\widehat{BP}|^3}\widehat{BP}$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-5,8\cdot 10^{-6}}{1^3}\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9\cdot 10^9 \cdot \frac{-5,8\cdot 10^{-6}}{1^3}\cdot\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= (0, -9.04\cdot 10^3)\, N/C$$