

4 Dinàmica del punt

4.1 Lleis de Newton

Així com la cinemàtica s'ocupa de l'estudi del moviment dels cossos sense atendre a les causes que l'han produït, la dinàmica estudia precisament aquestes causes que, habitualment, seran forces i la qüestió fonamental serà relacionar aquestes amb el comportament del cossos sobre els quals s'apliquen. El pilar teòric sobre el qual s'edifica la dinàmica són les anomenades Lleis de Newton.

1^a Llei de Newton (Llei d'inèrcia)

Un cos roman en el seu estat inicial de repòs o moviment amb velocitat uniforme a no ser que pateixi l'acció d'una força externa que el desequilibri.

2^a Llei de Newton *L'acceleració d'un cos és inversament proporcional a la seva massa i directament proporcional a la força externa resultant que actua sobre ell.*

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

3^a Llei de Newton (Llei d'acció i reacció)

Les forces sempre es presenten per parelles. Si un cos A exerceix una força sobre un cos B, el cos B exercirà una força igual però oposada sobre el cos A.

La formulació de les lleis és aparentment senzilla, però en realitat tenen molt contingut. Per tal d'evitar confusions, comentarem amb un cert detall cadascuna d'elles.

1^a Llei de Newton (comentada) El que ens diu aquesta llei és que si la velocitat d'un cos canvia, necessàriament hi ha alguna força aplicada sobre ell. S'ha de tenir present que la velocitat pot canviar independentment en mòdul, direcció i sentit.

2^a Llei de Newton (comentada) Aquesta llei és la que a la pràctica fa-rem servir, donat que proporciona una relació explícita entre la massa (massa inercial) d'un cos i l'acceleració que adquireix en aplicar-li una força. Cal tenir present, que aquesta força pot ser la resultant (i de fet, sovint serà així) d'un sistema de forces més complexe. Al ser les forces objectes vectorials, cal sumar-les com a tals.

3^a Llei de Newton (comentada) Aquesta és potser la que causa més confusions. S'ha de tenir en compte que les parelles de forces que esmenta actuen sempre sobre cossos diferents. Per comoditat sovint ignorarem una de les parelles de les forces en els problemes, donat que les que ens interessaran són les forces que actuen sobre un cos determinat. S'haurà de tenir molta cura a no considerar parelles acció-reacció a forces que no ho són.

4.2 Forces fictícies

Normalment, per tal d'estudiar el moviment d'un cos, serà convenient referir la seva posició a un sistema de referència. Habitualment, hi ha més d'un possible, i part de la feina al resoldre els exercicis és triar el que sigui més convenient. Sovint n'hi ha algun en el que les equacions del moviment s'escriuen de la forma més simple possible.

Sistemes de referència inercials i no inercials Direm que un sistema de referència és *inercial* si no està accelerat. Per contra, un sistema de referència és *no inercial* si està accelerat. La característica principal dels sistemes de referència no inercials és que en ells les lleis de Newton aparentment no es compleixen. Per que es compleixin cal introduir en el sistema forces que en realitat no existeixen. Per aquesta raó, forces s'anomenen *forces fictícies*. Les forces fictícies són:

- **Força d'inèrcia** Aquesta força apareix per exemple si volen descriure el que succeeix amb un pèndol penjat del sostre d'un vehicle quan aquest accelera. Desde dintre el cotxe, (que no és un sistema de referència inercial, ja que està accelerat) només podem explicar el fet que el pèndol quedi inclinat amb ajut d'una *força d'inèrcia* que fa que el pèndol s'oposi d'alguna manera a l'acceleració a que està sotmés. Si descrivim el problema desde fora del cotxe, a terra, quiets, que és un sistema de referència inercial, (això no és del tot cert, ¿per què?), aleshores el que raonem és que en realitat el pèndol s'inclina per proporcionar l'acceleració necessària per seguir al cotxe. No és necessari introduir cap força estranya.
- **Força centrífuga** Aquesta força apareix per exemple si volem descriure el moviment d'un cotxe quan agafa un revolt. Encara que la velocitat sigui constant, com la direcció d'aquesta canvia, necessàriament hi ha d'haver una acceleració. Desde dintre del cotxe pensem que hi ha una força que ens estira *cap a fora*, i l'anomenem força centrífuga. Si ens ho mirem des de l'exterior, el

que comprenem en realitat és que hi ha d'haver una força que faci possible que el cotxe descrigui la corba. Normalment aquesta força prové del fregament de les rodes amb el terra, encara que també es pot peraltar la corba, i d'aquesta manera, com veurem més endavant en els exercicis, s'aconsegueix que la *normal* proporcioni la. Com aquesta força va dirigida sempre cap el centre de l'arc que descriu el mòvil, s'anomena *força centrípeta*, i aquesta, sí que és real.

- **Força de Coriolis** Aquesta força fictícia sorgeix en sistemes de referència que giren al voltant d'un eix. No tindrem ocasió de trobar-la en els exercicis, però es comentarà breument a classe.

4.3 Forces de fregament

Suposem que tenim una taula de fusta i sobre ella tres cossos que tenen la mateixa massa i superfície de contacte amb la taula però estan fets de diferents materials. Suposem que un està fet de goma, un altre de vidre, i l'altre de fusta. Sembla clar que no serà igual de fàcil arrossegar un o altre. Quin creieu que costa més? I quin menys? El que controla aquestes diferències és la força de fregament, que en cada cas tindrà un valor diferent. La força de fregament apareix al intentar moure objectes en contacte. Té un valor màxim, que depèn de la *normal* i d'un coeficient experimental que es representa amb la lletra μ . En general és $0 \leq \mu \leq 1$. La força de fregament és pràcticament independent de la superfície en contacte. Ademés, hem de distingir entre un coeficient de fregament estàtic μ_s , quan encara no hem aconseguit posar en moviment l'objecte, i un dinàmic μ_d , quan ja està en moviment. En general és $\mu_s > \mu_d$, d'acord amb l'experiència habitual de que costa més posar en moviment un objecte, que seguir-lo movent després. La força de fregament sempre s'oposa al sentit del moviment que pretenem imposar als objectes.

4.4 El moment lineal

El moment lineal o *quantitat de moviment* d'un cos que té massa m i es mou amb velocitat v es defineix com $p = mv$. De la segona llei de Newton (en forma diferencial), es dedueix directament que, en absència de forces externes, el moment lineal és una quantitat conservada. Aquest resultat és molt útil en multitud de situacions. Per exemple, en un xoc de partícules, totes les forces són internes, de manera que es pot aplicar aquesta llei de conservació. El mateix succeeix en una explosió, o també en un avió a reacció, un coet, etc.

Quan tinguem un conjunt de cossos, el moment lineal del conjunt es calcula sumant els moments lineals de cadascun d'ells.

Exercicis

1. Dos blocs de masses $m_1 = 2\text{ kg}$, $m_2 = 1\text{ kg}$ estan tocant-se sobre una taula sense fricció. S'aplica una força horitzontal $F = 3\text{ N}$ al bloc m_1 . Trobeu la força de contacte entre els dos blocs. Si la força s'aplica al bloc m_2 quant valdrà la força de contacte?
2. Una caixa de massa m_1 s'estira mitjançant una corda de massa m_2 amb una força de mòdul F sobre una superfície polida. Trobeu l'acceleració del sistema. Determineu la força que la corda fa sobre la caixa. Dades: $m_1 = 3\text{ kg}$, $m_2 = 0,2\text{ kg}$, $F = 6\text{ N}$
3. Dins un ascensor hi ha una balança, i sobre aquesta hi ha una persona $m = 80\text{ kg}$. Trobeu la lectura de la balança si:
 - (a) l'ascensor puja amb velocitat constant
 - (b) l'ascensor puja amb acceleració $a = 3\frac{m}{s^2}$
 - (c) l'ascensor baixa amb acceleració $a = 4\frac{m}{s^2}$
 - (d) l'ascensor baixa amb $a = g$
4. Es fa girar un objecte de massa $m = 2\text{ kg}$ lligat amb una corda de longitud $l = 1,5\text{ m}$ i que està situat sobre una taula sense fregament. Trobeu la tensió a la corda si sabem que la velocitat angular és $\omega = 5\frac{rad}{s}$.
5. Es fa girar en un pla vertical un objecte de massa $m = 3\text{ kg}$ amb $\omega = 10\frac{rad}{s}$. Trobeu la tensió màxima i mínima de la corda. En quin punt de la trajectòria es dona cada una?
6. Una massa m_1 està lligada a una corda de longitud L_1 i s'uneix a una altra massa m_2 mitjançant una corda de longitud L_2 . El sistema es fa girar per l'extrem d'aquesta en un pla horitzontal sense fregament amb una freqüència de $f\text{ rev/s}$. Determineu les tensions a les cordes.
7. (Màquina d'Atwood). Dues masses m_1 , m_2 penjen d'una politja sense massa i sense fregament. Determineu l'acceleració del sistema.
8. Sobre un cos de massa $m = 3\text{ kg}$, situat sobre una taula, s'aplica una força horitzontal $F = 20\text{ N}$. Trobeu l'acceleració amb que es mourà si el coeficient de fregament entre la taula i l'objecte val $\mu = 0,2$. Quant val la normal?

9. Sobre un cos de massa $m = 5\text{kg}$, situat sobre una superfície amb $\mu = 0,3$, s'aplica una força $F = 15\text{N}$ que forma un angle $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Trobeu l'acceleració amb que es mourà. Quant val la normal en aquest cas?
10. Una plataforma d'un tren va carregada de caixes que tenen un coeficient de fregament amb el terra $\mu = 0,25$. Si el tren es mou amb $v = 50\frac{\text{km}}{\text{h}}$, quina és la distància més curta per a que pugui aturar-se sense que les caixes rellisquin?
11. Un cos de massa m_1 està situat sobre una taula i lligat a una corda de forma que aquesta passa per un forat de la taula i, a l'extrem de la corda, hi penja una altra massa m_2 . La primera massa té un moviment circular de forma que el sistema està en equilibri quan la distància de m_1 al forat és R . Es demana trobar la velocitat angular $\omega = \omega(m_1, m_2, R)$
12. Supposeu que tenim un cos situat sobre un pla inclinat un angle α respecte l'horitzontal. Si el coeficient de fregament és μ , trobeu l'acceleració amb la que baixa el cos.
13. Un triangle rectangle d'angles interiors $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{3}, \gamma = \frac{\pi}{6}$, es coloca sobre la seva hipotenusa en una taula horitzontal. Sobre el vèrtex superior es coloca una politja sense massa ni fregament de la qual *penjen* dues masses m_1, m_2 , a banda i banda de la politja. Els coeficients de fregament de m_1, m_2 amb la superfície del triangle són, respectivament, μ_1, μ_2 . Es demana trobar l'acceleració del sistema en les dues configuracions possibles. (*Podem suposar que és $m_1 > m_2$*)
14. Una carretera es peralta de forma que un cotxe movent-se a $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ pot fer una corba de **30,5** metres de radi quan hi ha gel a la carretera, és a dir, quan la fricció és pràcticament nul·la. Determineu l'interval de velocitats en el qual es pot moure si el coeficient de fricció és de 0,3.
15. (**Péndol cònic**). Una partícula de massa m està penjada d'una corda de longitud L i es mou amb velocitat constant en un cercle horitzontal de radi R . La corda forma un angle θ amb la vertical. Trobeu la tensió a la corda i la velocitat de la partícula.
16. En un parc d'atraccions, els participants se sostenen contra les parets d'un cilindre giratori mentre el terra s'enfonsa. Si el radi del cilindre és R , i el coeficient de fregament μ , trobeu la velocitat angular mínima ω_{\min} per tal que la gent no caigui.

17. Un cos de massa $m = 1\text{kg}$ i una altre de massa $m = 2\text{kg}$ es mouen l'un cap a l'altre amb la mateixa velocitat v . Xoquen i reboten, allunyant-se amb velocitats diferents. Compareu la variació de la quantitat de moviment i de la velocitat dels dos cossos.
18. Un vagó de càrrega de 10^4kg roda sobre una via horitzontal amb una velocitat $v = 2\frac{m}{s}$. Suposem que no hi ha fregament. Xoca amb un altre vagó estacionari de massa $m = 1,5 \cdot 10^4\text{kg}$. Els dos s'acoplen i roden amb una velocitat v . Trobeu aquesta velocitat.
19. Una caixa de massa $m = 0,3\text{kg}$ llisca sobre una superfície horitzontal sense fregament amb una velocitat $v = 2\frac{m}{s}$. Xoca amb una altra caixa de massa m desconeguda. Les dues caixes s'uneixen i es mouen juntes amb velocitat $v = 0,40\frac{m}{s}$ després del xoc. Trobeu la massa de la segona caixa.
20. Un peix de massa $m = 4\text{kg}$ està nedant cap a la dreta amb una velocitat $v = 1\frac{m}{s}$. S'empassa un altre peix de massa $m = \frac{1}{8}\text{kg}$ que neda cap a ell amb una velocitat $v = 3\frac{m}{s}$. Quina és la velocitat del peix gran immediatament després de menjar-se l'altre?
21. Una explosió trenca una roca en tres troços. Dos d'ells, de masses $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$, surten despedits formant un angle $\alpha = 90^\circ$ entre sí, amb velocitats $v_1 = 12\frac{m}{s}$, $v_2 = 8\frac{m}{s}$. El tercer fragment surt amb una velocitat $v = 40\frac{m}{s}$. Es demana determinar la direcció i sentit de la velocitat d'aquest tercer fragment. Trobeu també la massa total de la roca.
22. Dos astronautes de 70kg de massa causen inadvertidament una fuga a l'exterior de la nau espacial on treballen. L'aire que s'escapa per la fissura els empeny i els allunya al llarg d'una mateixa línia recta a $7\frac{cm}{s}$ i $10\frac{cm}{s}$. Suposeu que la nau és prou pesant per no moure's. L'astronauta que s'allunya més lentament porta un martell de 2kg de massa que llença al seu company, que a la vegada el llença a l'espai el més ràpid possible, donant al martell una velocitat de $15\frac{m}{s}$. Quina és la velocitat màxima amb que el primer home ha de llençar el martell si els dos volen tornar a la nau, i quina és la velocitat amb que el primer home torna a la nau?