1 Elements de sòlid rígid

1.1 Cinemàtica del moviment circular

Per recordar aquesta part podeu consultar la secció 3.3 dels apunts de 1r curs. El que necessitem bàsicament són les equacions del moviment

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \tag{1}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \tag{2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\varphi - \varphi_0) \tag{3}$$

amb les relacions $s = \varphi R$, $v = \omega R$ i $a = \alpha R$.

1.2 Energia cinètica de rotació

De la mateixa manera que vam definir l'energia cinètica de translació d'un objecte de massa m que es mou amb velocitat v com

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

en el cas de sòlid rígid, definim l'energia cinètica de rotació d'un objecte de moment d'inèrcia I, que gira amb velocitat angular ω al voltant d'un cert eix com

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

El moment d'inèrcia d'un cos depèn de la distribució de la massa en ell. Si el cos és homogeni, llavors depèn de la seva geometria. En general és complex calcular el moment d'inèrcia d'un objecte qualsevol ja que per distribucions contínues de massa s'ha de resoldre una integral, però per els casos més senzills es proporciona directament el seu valor.

1.3 Moment d'inèrcia

1.3.1 Definició

Suposem que tenim una distribució discreta de masses m_i situats en els punts P_i de l'espai cartesià i suposem que es troben girant al voltant de l'eix OZ amb la mateixa velocitat angular ω. En aquestes condicions, si calculem l'energia cinètica total de la distribució tindrem

$$E = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2$$

on els r_i representen la distància a l'eix OZ de cada partícula. Com que hem suposat que la velocitat angular ω és la mateixa per totes les partícules podem escriure

$$E = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

i anomenant $I \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2$, podem escriure

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Tal com hem dit abans, en el cas de cossos continus, el moment d'inèrcia s'ha de calcular amb una integral en comptes d'un sumatori tot i que típicament ens proporcionaran el valor del moment d'inèrcia com a part de les dades dels exercicis.

Exemple 1
Trobeu el treball que cal subministrar a un cilindre massís de moment d'inèrcia $I = 3\,kg \cdot m^2$ que es troba girant amb velocitat angular $n_0 = 1000\,min^{-1}$ si volem que giri a $n = 3000\,min^{-1}$. Calculeu la potència emprada si s'ha trigat 20 segons.

El treball demanat serà igual a la variació de l'energia cinètica de rotació del cilindre, llavors

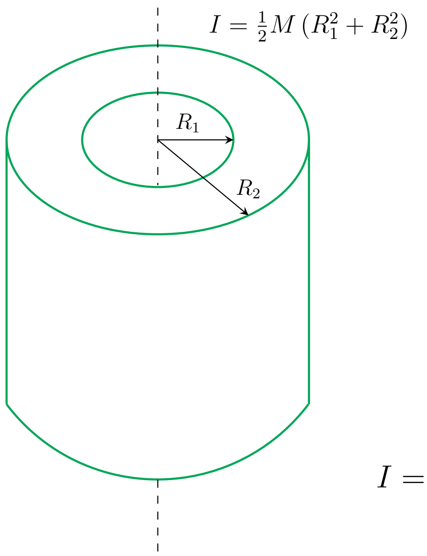
$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{2} I\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left(\left(\frac{3000\pi}{30}\right)^2 - \left(\frac{1000\pi}{30}\right)^2\right) = 1,316 \cdot 10^5\,J$$

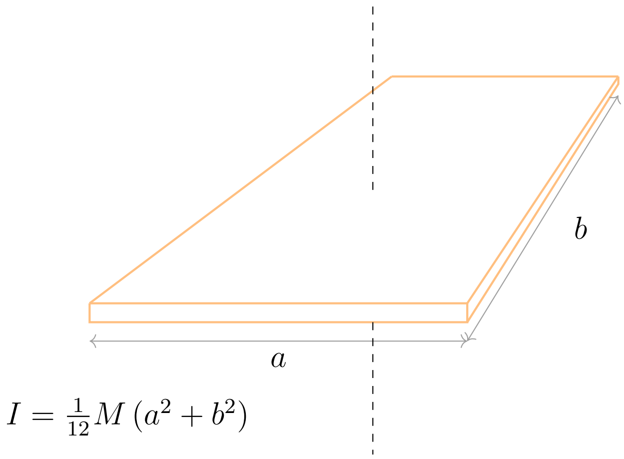
En quant a la potència

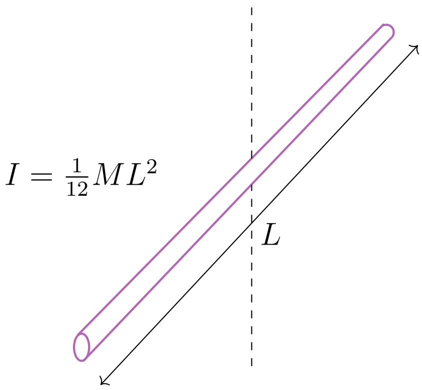
$$P = \frac{E}{t} = \frac{1,316 \cdot 10^5}{20} = 6,58 \cdot 3\,W$$

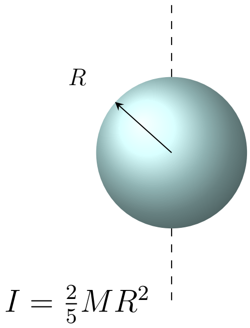
1.3.2 Casos típics

Considerem algunes distribucions de massa senzilles, com per exemple un cilindre buit de radis interior R_1 i exterior R_2 que gira al voltant del seu eix de simetria axial, una placa plana rectangular de dimensions a i b que gira respecte un eix perpendicular a la placa i que passa pel seu centre, una vareta de longitud L que gira respecte un eix perpendicular i que passa pel seu centre i una esfera de radi R que gira respecte un eix que passa per un diàmetre màxim qualsevol de l'esfera.









Per altres tipus d'objectes, el moment d'inèrcia es pot obtenir a partir dels anteriors. Per exemple, per un cilindre massís de radi R, el moment val

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

que és el mateix que tindríem si fem $R_1 = 0$ en l'expressió

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

De forma semblant, per una closca prima cilíndrica podem fer $R_1 = R_2$ en el resultat anterior per obtenir

$$I = MR^2$$

1.4 Teorema d'Steiner

Suposat conegut el moment d'inèrcia d'un objecte respecte un eix de simetria, i per tal de calcular el seu moment d'inèrcia respecte d'un altre eix que sigui paral·lel a l'anterior, podem fer servir el següent resultat, degut a *Jakob Steiner*

$$I' = I + Md^2$$

on d representa la distància entre els eixos considerats.

Exemple 2
Trobeu el moment d'inèrcia d'una vareta de massa M i longitud L que gira respecte un eix perpendicular a ella i que passa per un dels seus extrems.

Fent servir el resultat de la secció anterior i tenint en compte que els eixos de gir són paral·lels, podem aplicar el teorema d'Steiner per obtenir

$$I' = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

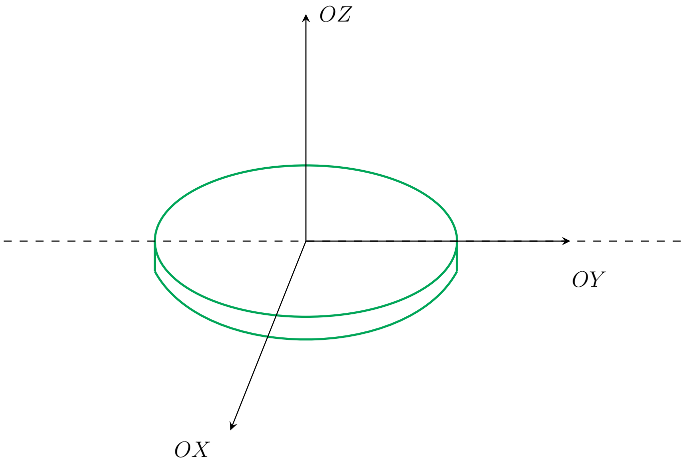
1.5 Teorema de la figura plana

Parlarem de figura plana quan per un objecte una de les seves dimensions és molt més petita que les altres, per exemple, per un disc de radi R podem considerar el seu gruix menyspreable en comparació amb el seu diàmetre. Suposant que l'eix perpendicular a la superfície és OZ podem escriure

$$I_z = I_x + I_y$$

Exemple 3
Trobeu el moment d'inèrcia d'un disc de radi R respecte un dels seus diàmetres. Podeu considerar conegut el resultat $I_z = \frac{1}{2}MR^2$

Representem la situació



Calcularem el moment d'inèrcia respecte el diàmetre que conté l'eix OY. Per simetria tenim,

$$I_x = I_y$$

llavors, fent servir el teorema anterior

$$I_z = I_x + I_y = 2I_y$$

d'on

$$I_y = \frac{1}{2}I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{4}MR^2$$

Exercici 1 Deduïu el moment d'inèrcia d'un cilindre de massa M radi R i altura h respecte un eix perpendicular al seu eix de simetria i que passa pel seu centre.

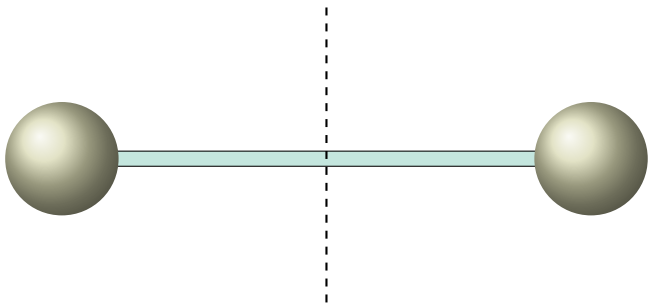
Exercici 2 Deduïu el moment d'inèrcia d'un cub de massa M i aresta a respecte un eix perpendicular al centre d'una de les cares .

1.6 Moments d'inèrcia d'objecte compostos

En el cas que tinguem un objecte compost a partir de les formes primitives anteriors, podem calcular el seu moment d'inèrcia sense més que sumar els moments d'inèrcia dels cossos que el formen. S'ha de tenir en compte que potser caldrà aplicar el teorema d'Steiner.

Exemple 4
Considereu el sòlid resultant d'unir una vareta de massa M i longitud L amb una esfera de massa M' radi R a cada extrem de la vareta. Trobeu el moment d'inèrcia d'aquest sòlid respecte un eix perpendicular a la vareta i que passa pel seu centre.

Cada esfera es troba girant respecte un eix que està a una distància $\frac{L}{2}+R$ del seu centre



de forma que el moment d'inèrcia del sistema compost es pot trobar com la suma del moment d'inèrcia de la vareta (que és conegut) més el de les esferes (cal aplicar Steiner a cada una d'elles),

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{2}{5}M'R^2 + 2M'\left(\frac{L}{2}+R\right)^2$$

1.7 Massa negativa?

Aquesta idea també es pot fer servir en el cas d'objectes parcialment buits. Veiem per exemple con obtenir el valor del moment d'inèrcia d'un cilindre de radis interior R_1 i exterior R_2. D'entrada ja sabem que el resultat haurà de ser

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

Anomenem M_1, M_2 les masses dels cilindres massissos de radis R_1 i R_2 respectivament. Llavors és clar que

$$M = M_2 - M_1$$

i com fent servir la densitat del material, podem escriure

$$\rho = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2}$$

on el volum de cadascun es pot calcular a partir de

$$V = \pi h R^2$$

i h és l'altura del cilindre, de forma que tenim

$$\frac{M_1}{\cancel{\pi h} R_1^2} = \frac{M_2}{\cancel{\pi h} R_2^2} \longrightarrow M_1 R_2^2 = M_2 R_1^2$$

Amb tota aquesta informació podem calcular

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} M \left(R_1^2 + R_2^2\right) = \frac{1}{2} (M_2 - M_1) \left(R_2^2 + R_1^2\right) \\
&= \frac{1}{2} M_2 \left(R_2^2 + R_1^2\right) - \frac{1}{2} M_1 \left(R_2^2 + R_1^2\right) \\
&= \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + \frac{1}{2} M_2 R_1^2 - \frac{1}{2} M_1 R_2^2 - \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \\
&= \frac{1}{2} M_2 R_2^2 + \cancel{\frac{1}{2} M_2 R_1^2} - \cancel{\frac{1}{2} M_1 R_2^2} - \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \\
&= \frac{1}{2} M_1 R_1^2 - \frac{1}{2} M_2 R_2^2
\end{aligned}$$

que interpretem com el moment d'inèrcia del cilindre de radi R_2 massís *menys* el moment d'inèrcia del cilindre de radi R_1.

Exercici 3 Sobre una de les cares d'un cub de costat $2a$ s'inscriu un cercle que servirà de guia per retallar un cilindre de l'interior del cub. Es demana calcular el moment d'inèrcia de la figura resultant respecte d'un eix que passa per una aresta del cub i és paral·lel a l'eix de simetria del cilindre.

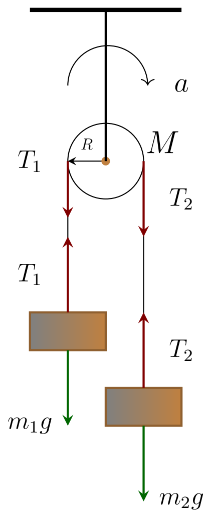
2 Dinàmica de rotació del sòlid rígid

En aquesta secció farem servir un resultat que donarem sense demostració, equivalent a la segona llei de Newton que havíem usat en altres temes, i que relaciona el moment resultant que es fa sobre un objecte amb el seu moment d'inèrcia i la seva acceleració angular

$$\Gamma = I\alpha$$

Exemple 5
Considereu una màquina d'Atwood amb masses m_1 i m_2 i tingueu en compte la massa M de la politja i el seu radi R per trobar l'acceleració del sistema quan es deixa anar des del repòs.

Representem la situació i decidim un sentit de gir per escriure les equacions per cada massa i la politja



La segona llei de Newton per la massa m_1 s'escriu

$$T_1 - m_1g = m_1a$$

per la massa m_2

$$m_2g - T_2 = m_2a$$

i per la politja

$$(T_2 - T_1)R = I\alpha$$

Noteu que hem de tenir en compte els parells acció - reacció de les tensions i no podem suposar que aquestes valen el mateix tal com fèiem al curs anterior.

Les tres equacions anteriors es poden escriure com una sola segons

$$[m_2g - m_2a - (m_1a + m_1g)]\, R = I\alpha$$

tenint en compte la relació entre l'acceleració angular i la lineal per la politja podem escriure

$$[m_2g - m_2a - (m_1a + m_1g)]\, R = I\frac{a}{R}$$

reordenant termes i traient factor comú

$$m_2g - m_1g = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right) a$$

d'on

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Finalment, com per un disc de massa M i radi R el moment d'inèrcia val

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

tenim, en funció de les dades de l'exemple

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

Com veiem, el resultat no depèn del radi de la politja.

Exemple 6
Calculeu el parell necessari que cal aplicar a una roda de moment d'inèrcia $I = 2\,kgm^2$ que gira amb velocitat $n = 1500\,min^{-1}$ per aturar-la en un temps de 10 segons. Suposeu que la roda frena amb velocitat constant.

Tota l'energia cinètica de rotació de la roda es transformarà en calor a través del treball que li fa el parell aplicat, llavors

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \Gamma\varphi$$

Calculem l'acceleració angular de la roda

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - \frac{1500\pi}{30}}{10} = -5\pi\, rad/s^2$$

L'espai angular total recorregut es pot calcular llavors com

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1500\pi}{30} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 5\pi \cdot 10^2 = 250\pi \, rad$$

de forma que el parell demanat val

$$\Gamma = \frac{I\omega_0^2}{2\varphi} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1500\pi}{30}\right)^2}{2 \cdot 250\pi} = -31,4159 \, N \cdot m$$

Alternativament, aplicant la segona llei de Newton un cop sabem l'acceleració angular

$$\Gamma = I\alpha = 2 \cdot (-5\pi) = -10\pi = -31,4159 \, N \cdot m$$

Exercici 4 Un volant amb un moment d'inèrcia al voltant del seu eix de valor $I = 0,9 \, kgm^2$ gira a $n_0 = 5000 \, min^{-1}$ gràcies a l'acció d'un motor. Es desconnecta el motor i s'observa que el volant triga $t = 1 \, min$ a quedar-se en repòs a causa d'un parell de fricció que se suposa constant. Determineu:
a) L'acceleració angular del volant.
b) El nombre de voltes n que farà el volant abans d'aturar-se.
c) L'energia mecànica dissipada en aquest procés E_{diss}.