Resum de temes de matemàtiques no vists a 1r de Batxillerat

Artur Arroyo i Pascual

https://artur-sjo.github.io/index.html

Col·legi Sant Josep Obrer

C. Covadonga, s/n 08906 L'Hospitalet del Llobregat

Darrera revisió 3/04/2021

Resum

Per diverses raons, hi ha una sèrie de temes de la matèria de matemàtiques de 1r de Batxillerat (nombres complexos, còniques, probabilitat i estadística) que tradicionalment han quedat fora del temari. Donat que aquests temes poden ser necessaris per alguna altra matèria al llarg del curs de 1r o 2n de batxillerat o fins i tot, pels primer cursos universitaris, es presenten aquí de forma no exhaustiva, per si poden ser útils.

Índex

1 Nombres complexos

1.1 Motivació

Quan volíem resoldre equacions de segon grau trobàvem que el nombre de solucions depenia del signe del discriminant, és a dir l'equació

$$ax^2 + bx + c = 0$$

té solucions

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

i si anomenem $\Delta \equiv b^2 - 4ac$, el *discriminant*, teníem que quan $\Delta > 0$ hi havia dues solucions reals i diferents, quan $\Delta = 0$ hi havia dues solucions reals iguals i quan $\Delta < 0$ no hi havia solució.

Els nombres complexos s'introdueixen per poder dotar de solució a aquestes equacions en aquest darrer cas.

Exemple 1.1.1 *Si apliquem la fórmula de l'equació de segon grau a*

$$x^2 + x + 1 = 0$$

trobem

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

on $\sqrt{-3}$ no és un nombre real. Si forcem una mica les coses i anomenem

$$i \equiv \sqrt{-1}$$

podem escriure les solucions de l'equació anterior com

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

solucions que tenen la forma

$$z \equiv a + bi$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$ El nombre a s'anomena *part real* i el nombre b *part imaginària* del nombre complex z.

La qüestió que se'ns planteja ara és si es poden fer coses interessants amb aquest tipus de nombres, i la resposta és afirmativa, tal com veurem a continuació.

1.2 Operacions

Els nombres complexos, tal com els hem definit, es poden sumar (i restar)

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

Exemple 1.2.1 *Donats* $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 3 + 4i$*; calculeu* $z_1 + z_2$ *i* $z_1 + z_2$

Tenim

$$z_1 + z_2 = 3 - 4i + 3 + 4i = 6$$

i

$$z_1 - z_2 = 3 - 4i - (3 + 4i) = -8i$$

Notem que el resultat de la suma és un nombre real i que el resultat de la resta és un nombre *imaginari pur*.

Els nombres complexos també es poden multiplicar

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= ac - bd + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2 *Donats* $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + 7i$*; calculeu* $z_1 \cdot z_2$

Sempre que multipliquem nombres complexos és útil fer les distributives, no aplicar el resultat anterior com una formula

$$\begin{aligned}(2 - 5i) \cdot (3 + 7i) &= 6 + 14i - 15i - 35i^2 \\ &= 6 - i - 35(-1) \\ &= 41 - i\end{aligned}$$

També es poden dividir. Hem de multiplicar i dividir pel conjugat* del denominador

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i\end{aligned}$$

Notem l'ús que s'ha fet quan ha calgut del resultat $i^2 = -1$.

*El conjugat de $z = a + bi$ es defineix com $\bar{z} = a - bi$

Exemple 1.2.3 *Donats* $z_1 = 9 - 5i$, $z_2 = 3 + 4i$; *calculeu* z_1/z_2

Fem

$$\begin{aligned}\frac{9-5i}{3+4i} &= \frac{9-5i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\\ &= \frac{(9-5i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}\\ &= \frac{-7-51i}{3^2+4^2}\\ &= \frac{-7}{25}+\frac{-51}{25}i\end{aligned}$$

També podem calcular potències d'un nombre complex (fent servir el binomi de Newton)

Exemple 1.2.4 *Donat* $z = 3 - 7i$, *calculeu* z^3

Escrivim el desenvolupament i calculem

$$\begin{aligned}(3-7i)^3 &= 1\cdot 3^3\cdot(7i)^0 - 3\cdot 3^2\cdot(7i)^1 + 3\cdot 3^1\cdot(7i)^2 - 1\cdot 3^0\cdot(7i)^3\\ &= 27 - 27\cdot(7i) + 9\cdot(49\cdot(-1)) - (343\cdot(-i))\\ &= -414 + 154i\end{aligned}$$

Un resultat que serà prou útil són les potències de la unitat imaginària

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = -1 \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

que com veiem es repeteixen cíclicament, això dona sentit a exercicis de l'estil

Exemple 1.2.5 *Calculeu* i^{2021}

El que farem és fer la divisió euclidiada de 2021 entre 4, que és l'ordre de idempotència de la unitat imaginària, per obtenir

$$2021 = 505\cdot 4 + 1$$

de forma que podem escriure

$$i^{2021} = i^{505\cdot 4+1} = i^{505\cdot 4}\cdot i^1 = (i^4)^{505}\cdot i^1 = 1^{505}\cdot i^1 = i$$

Dit d'una altra manera, al calcular i^n farem la divisió euclidiana de n entre 4 per trobar el quocient q i el residu r

$$n = q\cdot 4 + r$$

i llavors podrem dir

$$i^n = i^{q\cdot 4+r} = i^{q\cdot 4}\cdot i^r = (i^4)^q\cdot i^r = 1^q\cdot i^r = i^r$$

i com el residu només pot ser $0, 1, 2$ ó 3, tenim fàcilment el valor de la potència.

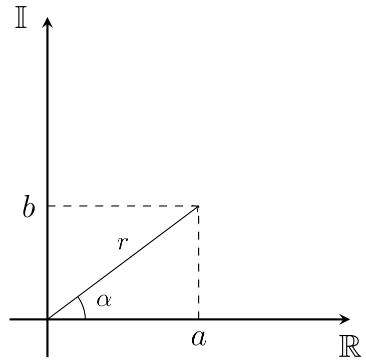
1.3 Forma polar d'un nombre complex

De les operacions anteriors hem vist com el quocient i les potències dels nombres complexos anaven adquirint un grau de complexitat més alt. La raó és que fins ara hem treballat amb el que s'anomena la *forma binòmica* d'un nombre complex

$$z = a + bi$$

Hi ha altres formes de representar els nombres complexos que, com veurem, resulten especialment útils per fer segons quines operacions amb ells.

Considerem uns eixos cartesians on a l'eix de les abscisses hi representarem la part real dels nombres complexos, i a l'eix de les ordenades, la part imaginària. Per abús del llenguatge, anomenarem aquests eixos *eix real* i *eix imaginari* respectivament. Llavors, qualsevol nombre complex $z = a + bi$ es pot representar per un punt (*afix*) d'aquest pla (anomenat *pla d'Argand*) amb les coordenades (a, b). De forma alternativa, podem caracteritzar aquest punt amb el *radi vector* r i *argument* α, que no és més que l'angle que forma r amb el sentit creixent de l'eix real.



La relació entre els valors de a i b, i r i α, es pot trobar fàcilment com

$$\begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{cases}$$

El canvi de coordenades invers és

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

D'aquesta manera, el nombre complex $z = a + bi$ es pot representar com $z = r_\alpha$, i les operacions de producte i quocient de nombres complexos abans definides, queden ara segons

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta} \qquad \frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}$$

Exemple 1.3.1 *Donats* $z_1 = 6_{30^\circ}$ *i* $z_2 = 2_{10^\circ}$*, calculeu* $z_1 \cdot z_2$ *i* z_1/z_2

Tenim

$$6_{30^\circ} \cdot 2_{10^\circ} = 12_{40^\circ}$$

i

$$\frac{6_{30^\circ}}{2_{10^\circ}} = 3_{20^\circ}$$

Com veiem, ara és quasi trivial calcular productes i quocients de nombres complexos. En quant a les potències, farem servir el següent resultat

$$(r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha}$$

Exemple 1.3.2 *Donat* $z = 2_{\frac{\pi}{2}}$*, calculeu* z^{10}

Aplicant el resultat anterior

$$\left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^{10} = 2^{10}_{10\cdot\frac{\pi}{2}} = 1024_{5\pi} = 1024_{\pi}$$

Veiem ara un exemple una mica més complert

Exemple 1.3.3 *Donats* $z_1 = \sqrt{3} + i$ *i* $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$*, calculeu*

$$z_1^3 + z_2^5$$

En aquest cas convé passar els nombres complexos a forma polar per calcular les potències i després, tornar a passar a forma binòmica per poder-los sumar, ja que en forma polar no es poden sumar ni restar.

Passem doncs z_1 a forma polar

$$\begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ \end{cases}$$

i calculem la potència que li toca

$$z_1^3 = (2_{30^\circ})^3 = 8_{90^\circ}$$

de forma semblant, passem z_2 a forma polar

$$\begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \\ \alpha = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 120^\circ \end{cases}$$

i la potència necessària segons l'enunciat

$$z_2^5 = (2_{120°})^5 = 8_{600°} = 8_{240°}$$

Ara podem passar z_1^3 a forma binòmica

$$\begin{cases} a = 8\cos 90° = 8 \cdot 0 = 0 \\ b = 8\sin 90° = 8 \cdot 1 = 8 \end{cases}$$

$$z_1^3 = 8i$$

i el mateix per z_2^5

$$\begin{cases} a = 8\cos 120° = 8 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = -4 \\ b = 8\sin 120° = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$z_1^3 = -4 + 4\sqrt{3}i$$

finalment,

$$z_1^3 + z_2^5 = 8i + (-4 + 4\sqrt{3}i) = -4 + (4\sqrt{3} - 8)i$$

1.4 Arrels d'un nombre complex

Quan haguem de calcular l'arrel n d'un nombre complex hem de tenir en compte que en té exactament n. És a dir

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha + 360° \cdot k}{n}} \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

Exemple 1.4.1 *Donat $z = 8_{60°}$, calcular les seves arrels cúbiques.*

Tenim

$$\sqrt[3]{8_{60°}} = \begin{cases} \sqrt[3]{8}_{\frac{60° + 360° \cdot 0}{3}} = 2_{20°} \\ \sqrt[3]{8}_{\frac{60° + 360° \cdot 1}{3}} = 2_{140°} \\ \sqrt[3]{8}_{\frac{60° + 360° \cdot 2}{3}} = 2_{260°} \end{cases}$$

És important notar que els afixos de les arrels *enèsimes* d'un nombre complex es disposen segons els vèrtexs d'un polígon de n costats.

1.5 Forma trigonomètrica d'un nombre complex

Fent servir la relació entre la forma binòmica i polar dels nombres complexos podem escriure

$$z = a + bi = r\cos\alpha + ir\sin\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

que es coneix com a forma trigonomètrica. Aquesta forma és especialment útil per deduir les fórmules per $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$. Veiem-ho amb un exemple.

Exemple 1.5.1 *Calculeu l'expressió per* $\cos 5\alpha$ *en funció de* $\sin\alpha$ *i* $\cos\alpha$*.*

Considerem un nombre complex qualsevol en forma trigonomètrica

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

i calculem la seva potència cinquena. Del que vam veure sobre les potències en forma polar sabem que

$$(r_\alpha)^5 = (r^5)_{5\alpha} = r^5(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)$$

ara, apliquem el binomi de Newton al nombre complex en forma trigonomètrica

$$\begin{aligned}
(r_\alpha)^5 &= [r(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^5 \\
&= r^5\left[\cos\alpha + i\sin\alpha\right]^5 \\
&= r^5\left[1\cdot(\cos\alpha)^5(i\sin\alpha)^0 + 5(\cos\alpha)^4(i\sin\alpha)^1 + 10(\cos\alpha)^3(i\sin\alpha)^2 +\right. \\
&\left. + 10(\cos\alpha)^2(i\sin\alpha)^3 + 5(\cos\alpha)^1(i\sin\alpha)^4 + 1(\cos\alpha)^0(i\sin\alpha)^5\right] \\
&= r^5\left[\cos^5\alpha + 5i\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha - 10i\cos^2\alpha\sin^3\alpha\right. \\
&\left. + 5\cos\alpha\sin^4\alpha + i\sin^5\alpha\right] = r^5(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)
\end{aligned}$$

d'on es veu, igualant parts reals per una banda i parts imaginàries per l'altra, que

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$$
$$\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha$$

1.6 Forma exponencial del nombres complexos

A partir de la forma trigonomètrica es defineix la forma exponencial d'un nombre complex com

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \equiv re^{i\alpha}$$

Les operacions producte, quocient i potenciació amb aquesta forma són evidents a partir de les propietats de la funció exponencial

$$re^{i\alpha} \cdot se^{i\beta} = (r \cdot s)e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \left(\frac{r}{s}\right) e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$\left(re^{i\alpha}\right)^n = r^n e^{in\alpha}$$

Com a cas particular de la forma exponencial dels nombres complexos, tenim la identitat, deguda a Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

que relaciona les cinc constants notables de les matemàtiques més importants.

2 Còniques

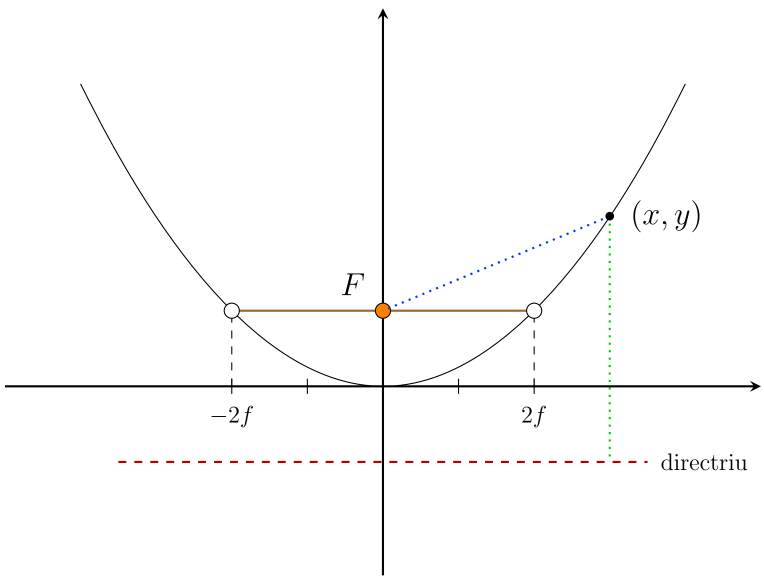
Les còniques són corbes que reben aquest nom donat que es poden pensar com la intersecció d'un pla i un con. Si el pla és paral·lel a la base del con, tenim una circumferència. Si inclinem el pla sense que arribi a ser paral·lel a la generatriu del con obtenim una el·lipse. Si el pla és paral·lel a la generatriu del con, la intersecció dona una paràbola i si el pla és perpendicular a la base del con, la intersecció és una hipèrbola.

2.1 La circumferència

Podem trobar un estudi detallat a la presentació corresponent.

2.2 La paràbola

La paràbola com a corba es defineix analíticament com el lloc geomètric dels punt que es troben a la mateixa distància d'una recta, anomenada *directriu* i un punt extern a la recta, anomenat *focus* o *punt focal* (F) de la paràbola. Anomenem *vèrtex* de la paràbola al punt de la corba que es troba a la mínima distància del focus (i de la generatriu). A la distància del vèrtex al punt focal li direm *distància focal, f*. Si suposem que el vèrtex d'una paràbola es troba a l'origen de coordenades, i la distància focal satisfà $f > 0$, llavors la generatriu serà la recta $y = -f$ i podem representar la situació com



Si (x, y) és un punt qualsevol de la paràbola, la seva distància a la generatriu serà $y + f$ i al punt focal $\sqrt{x^2 + (y - f)^2}$. Llavors, imposant la condició que aquestes distàncies siguis iguals per tot punt de la paràbola arribem a

$$y + f = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}$$

d'on

$$y^2 + 2yf + f^2 = x^2 + (y - f)^2$$

i

$$\cancel{y^2} + 2yf + \cancel{f^2} = x^2 + \cancel{y^2} - 2fy + \cancel{f^2}$$

agrupant termes

$$4yf = x^2$$

i finalment

$$y = \frac{x^2}{4f}$$

Conegudes les coordenades del punt focal f, automàticament tenim dos punts més de la paràbola, ja que per $x = \pm 2f$ tenim

$$y = \frac{(\pm 2f)^2}{4f} = f$$

la línea que uneix aquests punts s'anomena *latus rectum*.

Si el vèrtex de la paràbola es troba en un punt arbitrari (a, b), podem generalitzar l'equació anterior

$$y = \frac{x^2}{4f}$$

segons

$$y = \frac{(x - a)^2}{4f} + b$$

Anomenem *eix de simetria* a la recta vertical $x = a$. Si la distància focal satisfà $f < 0$, llavors la directriu es troba per sobre d'ell i la paràbola té les *banyes* cap avall.

Paràbola horitzontal. L'equació

$$x = \frac{(y - a)^2}{4f} + b$$

descriu una paràbola *tombada* (notem que ara l'eix de simetria de la paràbola és la recta horitzontal $y = a$). Hem de tenir present que així definida, la corba no és una funció.

Exemple 2.2.1 *Identifiqueu el vèrtex, eix de simetria, punt focal, equació de la directriu, domini i imatge de les paràboles* $P_1 \equiv y - 4 = \frac{1}{16}(x-3)^2$, $P_2 \equiv y^2 - 4y + 2x - 8 = 0$

Per P_1 es veu directament que el vèrtex és el punt $(3,4)$ i l'eix de simetria és la recta $x = 3$. La distància focal es troba fàcilment ja que és

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4f} \rightarrow f = 4$$

llavors, les coordenades del punt focal seran $F = (3,8)$ i la recta directriu coincideix amb l'eix d'abscisses, de forma que té com a equació $y = 0$. El domini de la funció que representa l'equació de la paràbola és $\mathbb{R}$ i el conjunt imatge és $[4,\infty)$. (Breu recordatori sobre aquestes qüestions aquí.)

* * *

Per P_2 fem una sèrie de passos que ens facilitarà respondre al que ens demanen

$$y^2 - 4y + 2x - 8 = 0$$

completem quadrats

$$y^2 - 4y + 4 - 4 + 2x - 8 = 0$$

$$(y-2)^2 - 4 + 2x - 8 = 0$$

d'on podem escriure

$$x - 6 = -\frac{1}{2}(y-2)^2$$

Veiem que es tracta d'una paràbola *horitzontal* on el vèrtex és el punt $(6,2)$ i l'eix de simetria és la recta $y = 2$. La distància focal es troba fàcilment ja que és

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{4f} \rightarrow f = -\frac{1}{2}$$

Notem que el signe que acompanya la distància focal ens informa que les banyes de la paràbola van cap a l'esquerra. Llavors, les coordenades del punt focal seran $F = (5.5,2)$ i la recta directriu té com a equació $x = 6.5$. El domini de la correspondència (ara no és una funció) que representa l'equació de la paràbola és $(-\infty, 6]$ i el seu conjunt imatge és $\mathbb{R}$.

Exemple 2.2.2 *Trobeu l'equació d'una paràbola sabent que el seu vèrtex és al punt* $(-2,4)$ *i el punt focal a* $(0,4)$.

Abans que res mirem de saber l'orientació de la paràbola. En aquest cas és fàcil veure que és horitzontal perquè vèrtex i punt focal es troben a la mateixa altura (mateixa ordenada) i que té les branques cap a la dreta ja que el focus es troba a la dreta del vèrtex. L'equació doncs, serà de la forma

$$x = \frac{(y-a)^2}{4f} + b$$

amb les dades de l'enunciat i sabent que la distància focal (entre el focus i el vèrtex) és 2,

$$x = \frac{(y+2)^2}{4 \cdot 2} + 4$$

és a dir

$$x = \frac{(y+2)^2}{8} + 4$$

Exemple 2.2.3 *Trobeu l'equació d'una paràbola sabent que té el punt focal a* $(-2,4)$ *i la seva recta directriu és* $y = 9$.

Com que la directriu es horitzontal ja sabem que la paràbola serà vertical. Per una altra banda, al estar el punt focal per sota de la directriu sabem que la paràbola té les branques cap avall (recordem que això afecta a un signe de l'equació). El vèrtex es troba a la mateixa distància del focus i de la directriu, per tant les seves coordenades seran $(-2, 6.5)$ i la distància focal $f = 2,5$. L'equació serà doncs de la forma

$$y = -\frac{(x-a)^2}{4f} + b$$

amb les dades de l'enunciat

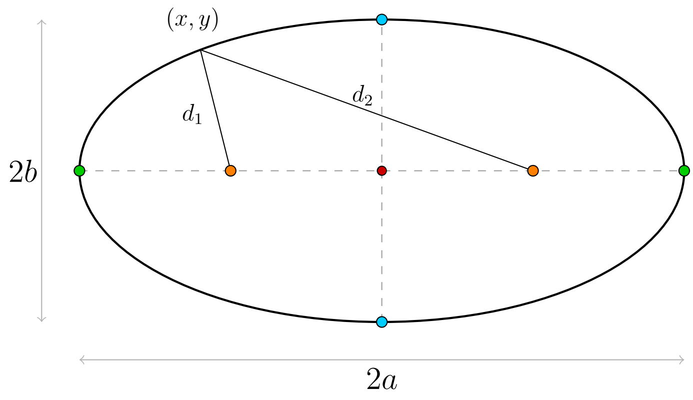
$$y = -\frac{(x+2)^2}{4 \cdot 2,5} + 6,5$$

que es pot escriure finalment com

$$y = -\frac{(x+2)^2}{10} + 6,5$$

2.3 L'el·lipse

Situem dos punts (els anomenarem *focus* de l'el·lipse) al pla. L'el·lipse és el lloc geomètric dels punts del pla que compleixen la condició següent: la suma de la seva distància a dos punts fixos del pla és constant,



$$d_1 + d_2 = \text{constant} = 2a$$

La longitud a s'anomena *semieix major* i en les el·lipses horitzontals és parallel a l'eix de les x. En les el·lipses verticals és paral·lel a l'eix de les y. La longitud b s'anomena *semieix menor* i és perpendicular al semieix major. Al dibuix hem identificat els **vèrtexs** i els **co-vèrtexs**. L'equació d'una el·lipse horitzontal amb semieix major a i semieix menor b i centrada a l'origen de coordenades s'escriu com

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aquesta s'anomena forma *canònica* de l'el·lipse. En aquest cas els punts focals se situen als punts $(c, 0)$, $(-c, 0)$ i es verifica que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Per una altra banda es defineix l'excentricitat, e de l'el·lipse com

$$e = \frac{c}{a}$$

Notem que quan $e = 0$, l'el·lipse degenera en una circumferència.

Si el centre de l'el·lipse horitzontal és un punt qualsevol del pla (p, q) l'equació serà

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

En el cas d'una vertical, l'equació s'escriu

$$\frac{(y-q)^2}{a^2} + \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$$

Exemple 2.3.1 *Trobeu els vèrtexs, co-vèrtexs, punts focals, domini i rang de l'el·lipse*

$$9x^2 + 49y^2 = 441$$

Dividim l'equació per 441

$$\frac{9x^2}{441} + \frac{49y^2}{441} = 1$$

ara *baixem* els coeficients dels numeradors

$$\frac{x^2}{\frac{441}{9}} + \frac{y^2}{\frac{441}{49}} = 1$$

que es pot escriure com

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$$

o de forma que siguin evidents els valors dels semieixos

$$\frac{x^2}{7^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

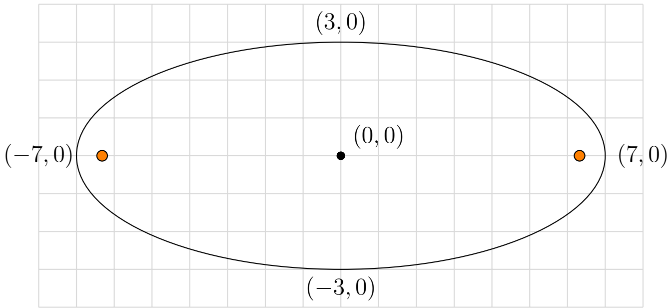
Per tant veiem que es tracta d'una el·lipse *horitzontal*, ja que el semieix major és $a = 7$ i el menor, $b = 3$. També és evident que es troba centrada a l'origen de coordenades. A partir d'aquí és trivial trobar els vèrtexs $(\pm 7, 0)$ i els co-vèrtexs $(0, \pm 3)$. Els punts focals es poden trobar a partir de

$$a^2 = b^2 + c^2$$

d'on

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

A partir de la informació dels vèrtexs i co-vèrtexs és evident que el domini de la corba és l'interval $[-7, 7]$ i que el rang és l'interval $[-3, 3]$



Exemple 2.3.2 *Trobeu els vèrtexs, co-vèrtexs, punts focals, domini i rang de l'el·lipse*

$$4x^2 + y^2 + 24x + 2y = -33$$

Per poder trobar còmodament la informació que ens demanen cal escriure l'equació en la seva forma *canònica*. Completant quadrats

$$(2x)^2 + 24x + 6^2 - 6^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 = -33$$

llavors podem escriure

$$(2x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 6^2 + 1^2 - 33$$

$$(2x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

per poder veure clarament les coordenades del centre de l'el·lipse

$$\big(2(x + 3)\big)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

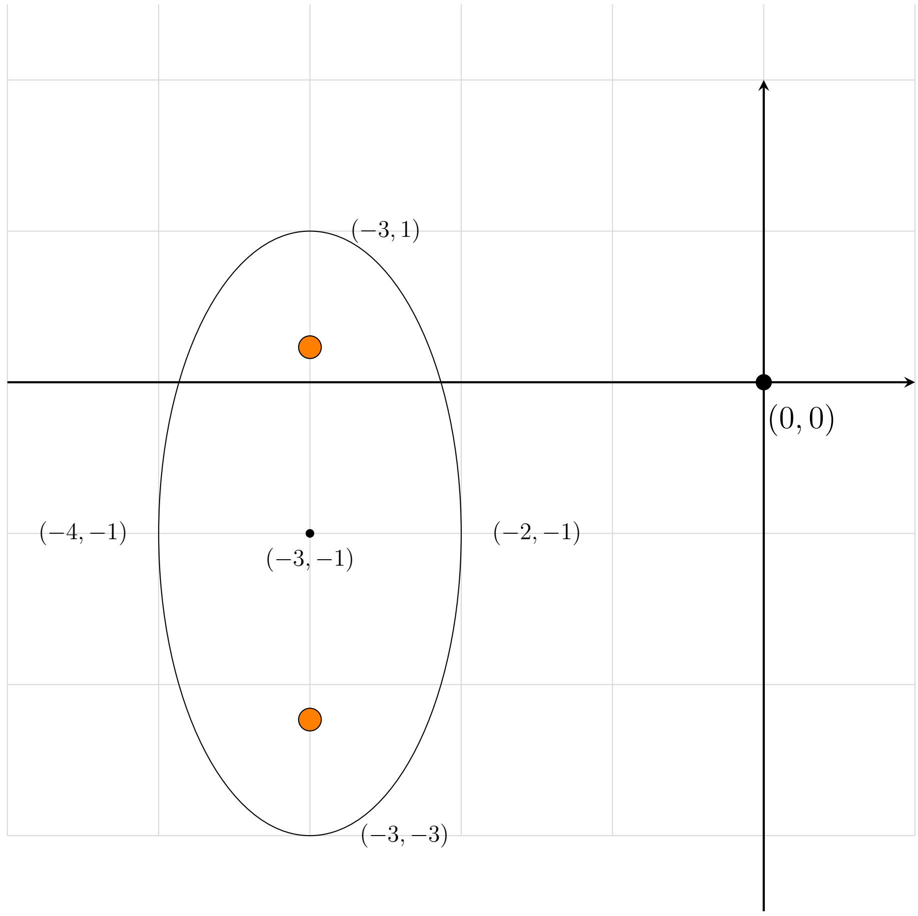
$$4(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

ara, dividint per 4

$$\frac{(x + 3)^2}{1} + \frac{(y + 1)^2}{2^2} = 1$$

El centre de l'el·lipse és al punt $(-3, -1)$ i l'el·lipse és *vertical* ja que el semieix que correspon a la variable x, $(a = 1)$ és més petit que el corresponent a la variable y, $(b = 4)$. Els vèrtexs es poden trobar tenint en compte les coordenades del centre i el valor dels semieixos, i seran doncs $(-2, -1)$ i $(-4, -1)$.

De forma semblant, pels *co-vèrtexs* tenim $(-3,1)$ i $(-3,-3)$



Per localitzar els punts focals calculem primer la distància focal

$$a^2 = b^2 + c^2$$

d'on

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

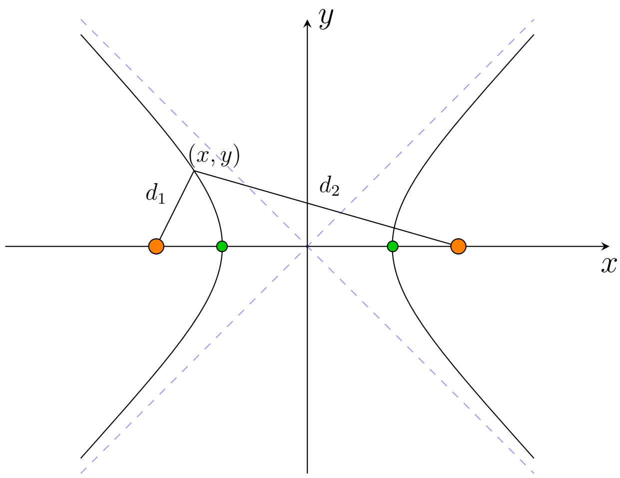
ara és clar que els punts focals estaran situats a $(-3, -1 \pm \sqrt{3})$ El domini és el conjunt $[-4,-2]$ i el rang el conjunt $[-3,1]$.

2.4 La hipèrbola

La hipèrbola és el lloc geomètric dels punts del pla tal que la quantitat

$$|d_1 - d_2| = 2a$$

on d_1 i d_2 són les distàncies d'un punt (x, y) qualsevol de la hipèrbola als dos punts fixos, anomenats punts focals, de forma semblant al cas de l'el·lipse. La distància $2a$ coincideix amb els *vèrtexs* de la hipèrbola



L'equació de la hipèrbola *horitzontal* centrada a l'origen s'escriu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si el centre és al punt (p, q) l'equació anterior s'escriu com

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Els punts focals es troben a $(\pm c, 0)$ Podem relacionar a i c amb *l'eix conjugat* $2b$ mitjançant

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Les *asímptotes* de la hipèrbola centrada en (p, q) tenen com equació

$$y - q = \pm\frac{b}{a}(x - p)$$

Anomenem *excentricitat* de la hipèrbola a la quantitat

$$e = \frac{c}{a}$$

De forma semblant al cas de l'el·lipse, l'equació d'una hipèrbola *vertical* amb centre (p, q) és

$$\frac{(y-q)^2}{a^2} - \frac{(x-p)^2}{b^2} = 1$$

Exemple 2.4.1 *Trobeu el centre, punts focals i equacions de les asímptotes de la hipèrbola*

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$$

Podem manipular fàcilment l'equació per escriure-la en forma canònica

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \rightarrow \frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{144}{9}} - \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1$$

i finalment

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Llavors tenim que el centre és el punt $(0, 0)$, els punts focals es troben a $(\pm c, 0)$ amb

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

i les equacions de les asímptotes són

$$y = \pm\frac{3}{4}x$$

Exemple 2.4.2 *Trobeu el centre, punts focals i equacions de les asímptotes de la hipèrbola*

$$49y^2 - 25x^2 + 98y - 100x + 1174 = 0$$

La major dificultat d'aquest exemple és completar quadrats. Abans, a l'exemple 2.3.2 hem vist amb deteniment el procés.

Comencem afegint els termes que permeten completar els quadrats i traient factor comú

$$49y^2 + 98y + 49 - 49 - 25x^2 - 100x + 100 - 100 + 1174 = 0$$

$$49(y^2 + 2y + 1) - 49 - 25(x^2 - 4x + 4) + 100 + 1174 = 0$$

completem quadrats

$$49(y+1)^2 - 25(x-2)^2 = -1225 \rightarrow 25(x-2)^2 - 49(y+1)^2 = 1225$$

anem transformant l'equació en la seva forma canònica

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1225}{25}} - \frac{(y+1)^2}{\frac{1225}{49}} = 1 \to \frac{(x-2)^2}{49} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

d'on finalment

$$\frac{(x-2)^2}{7^2} - \frac{(y+1)^2}{5^2}$$

Ara ja podem extreure fàcilment la informació que ens cal. El centre és el punt $(2,-1)$, la distància focal c

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74}$$

llavors els punts focals es troben a

$$(p \pm c, q) = (2 \pm \sqrt{74}, -1)$$

i les equacions de les asímptotes són

$$y+1 = \pm\frac{5}{7}(x-2)$$