MDL 9

1/

(1) Załóżmy reprezentację grafu przy pomocy list.

Idea: Kolorujemy (oznaczamy -1 lub 1) rekurencyjnie w głąb grafu.

colors[n] - pomocnicza tablica — początkowo same zera; == 0 gdy wierzchołek nie był jeszcze odwiedzony

Wierzchołki numerujemy 0, 1, .., n-1

```
DFS(v):            <- ~~pb~~ obecny wierzchołek
  for u in L(v):   <- lista sąsiadów v
    if (colors[u] == 0)            // ~~u~~ nie był odwiedzony
      colors[u] := -(colors[v])    // ~~u~~ u przeciwny kolor od sąsiada v
      ~~if (DFS(u))~~
      return DFS(u)                // uruchomiony wgłąb rekurencyjnie
    else if (colors[u] == colors[v])  // sąsiednie wierzchołki tego samego koloru ↯
      return false

  return true      // jeśli pokolorowaliśmy wszystkie wierzchołki to spójna składowa jest grafem dwudzielnym
```

DFS(v) należy uruchomić na wszystkich wierzchołkach V (gdyby nie był spójny)

$O(|V| + |E|) = O(n+m)$

kolorowanie przy pomocy tablicy n-elem; przeglądanie list sąsiedztw

(3) G jest drzewem $\iff \forall u,v \in V \ \exists! \ u\text{-}v$ ścieżka
$G(V,E)$

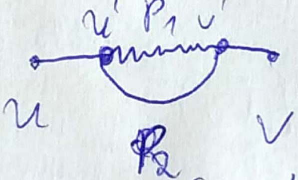
$\Rightarrow$ Skoro G jest drzewem to G jest spójny, z def

$\forall u,v \ \exists \ u\text{-}v$ ścieżka

Pokażemy że jest dokładnie jedna $u\text{-}v$ ścieżka

Załóżmy że istnieją dwie ścieżki z u do v: P_1 i P_2

Ale wtedy suma P_1 i P_2 zawiera cykl, a drzewo z definicji jest acykliczne ↯ sprzeczność



Zatem istnieje dokładnie jedna $u\text{-}v$ ścieżka

$\Leftarrow$ G jest grafem, $\exists! \ u\text{-}v$ ścieżka dla dowolnych $u,v \in V$

Zatem z definicji G jest spójny.

Jest też acykliczny, bo gdyby istniał cykl między dowolnymi wierzchołkami x,y to istniałaby więcej niż dokładnie jedna $x\text{-}y$ ścieżka.

G spójny i acykliczny jest więc drzewem

(4) $d(u,v)$ - odległość u i v

$r(v) = \max\{d(v,u) : u \in V\}$

$r(w) = \min\{r(v); v \in V\}$ - wierzchołek centralny - w

$r(G) = r(w)$ - promień grafu

a) Teza: Zbiór wierzchołków centralnych drzewa o n wierzchołkach ~~składa~~ składa się z jednego wierzchołka lub pary wierzchołków sąsiednich $\equiv P(n)$

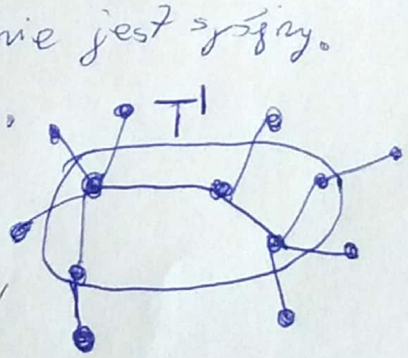
D-d (indukcja po liczbie liści grafu - G)

1° jeśli $n=1$ lub $n=2$ to wszystkie wierzchołki drzewa zgodnie z definicją są centralne 

2° Załóżmy że nasza teza zachodzi dla dowolnego k wierzchołków $(P(k))$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

3° Weźmy dowolne drzewo o $n+1$ wierzchołkach T.
Stwórzmy drzewo T' przez usunięcie wszystkich liści z drzewa T. Wiemy że T' ma przynajmniej jeden wierzchołek (bo nie tracimy spójności w.p.p. istniałyby dwie ścieżki przechodzące przez usunięty liść -> ale wtedy pozostały graf nie jest spójny.

Dla każdego $r(v)$ w grafie T, u - jest liściem.



Więc $r(T) - 1 = r(T')$, bo usunęliśmy liście

$r(v)$ jest większe dla liści w grafie T, $v \in V(T)$, niż dla wierzchołków wewnętrz (sąsiednich),

więc $r(v)$ wierzchołki v dla których $r(v)$ jest najmniejsze są w T' (wierzchołki centralne)

Z założenia indukcyjnego T' składa się z 1 lub 2 wierzchołków centralnych więc dla T (ma je wspólne) teza zachodzi. ∎

(5) ~~Algorytm~~ Algorytm:

Wybieramy dowolny wierzchołek v w drzewie T.

$r(u)$ Przy pomocy BFS znajdujemy u - najdalszy wierzchołek z v.

$r(v)$ Ponownie liczymy najdalszy wierzchołek z ~~w~~ - powiedzmy w.

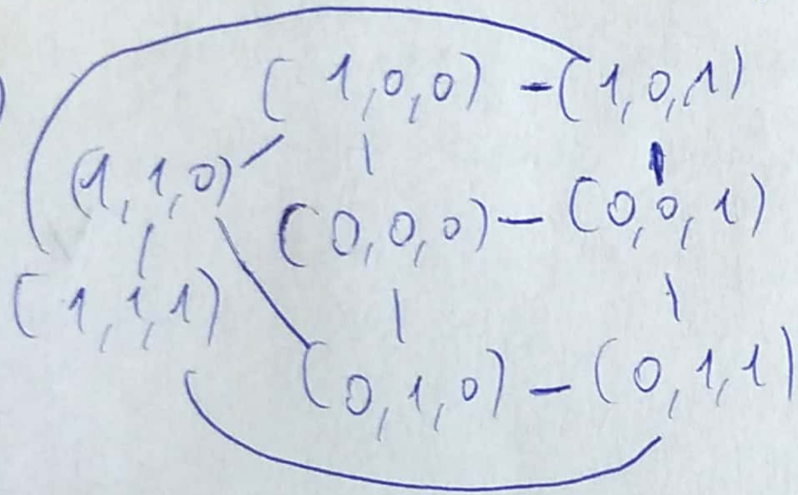
Wtedy $r(T) = d(v, w)$

Gdy wyznaczymy $r(T)$ ~~to~~ na ścieżce $v - w$, wierzchołki „po środku" są centralne konkretnej jeśli ścieżka ma nieparzystą liczbę wierzchołków n to $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ - wierzchołek jest centralny

parzystą liczbę wierzchołków $-n$ to $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2}+1$ są centralne.

Złożoność $\approx 2 \cdot O(|V|+|E|) = O(|V| + |E|) = O(n+m)$

6



Obserwacje:

Dowolny wierzchołek (ciąg) łączy się z wierzchołkami których liczba jedynek w ciągu różni się o jeden.

Zsumujmy ciągi po współrzędnych np. $\sum(0,0,0)=0$ $\sum(0,1,1)=2$ itp

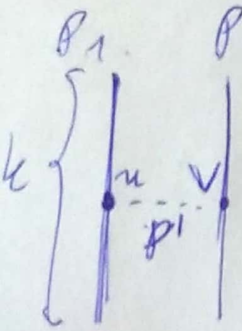
Stwórzmy podział |V| na dwa zbiory t. że $\forall e \in E$ $e=\{a,b\}$, $a \in A$, $b \in B$

Wszystkie wierzchołki o parzystych sumach przyporządkowujemy do zbioru A, a o nieparzystych do B. A i B to rozłączne zbiory i żadne z wierzchołków A lub B nie są parami sąsiadujące, więc graf jest dwudzielny.

(8) W grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny ~~...~~ wierzchołek

Weźmy dwie najdłuższe ścieżki P_1, P_2. Powiedzmy, że są długości k.

Załóżmy że P_1 i P_2 nie mają wspólnego wierzchołka



Skoro graf jest spójny to dla dowolnej pary wierzchołków t.że $p_1 \in P_1$, $p_2 \in P_2$ istnieje $p_1 - p_2$ ścieżka.

Niech P_1 oznacza ścieżkę $u_0 - u_1 - \dots - u_k$

P_2 oznacza ścieżkę $v_0 - v_1 - \dots - v_k$

p' oznacza ścieżkę ~~$u_0 - u_1 - u_k - v_0 - v_1 - \dots - v_n$~~

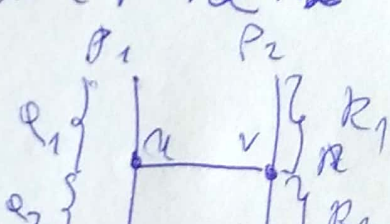
krawędź

z u_0 do v_k przez $u - v$

np. u_k v_0

gdzie u - oznacza ostatni wierzchołek na ścieżce P_1, który jest też na P', a

gdzie v - oznacza pierwszy wierzchołek z P' na P_2

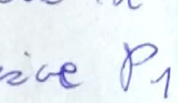


Podzielmy P_1 na dwie ścieżki Q_1, Q_2

P_2 na dwie ścieżki R_1, R_2

dł. ścieżki

$|Q_1| \geq \frac{k}{2}$ lub $|Q_2| \geq \frac{k}{2}$ bo gdyby obie były mniejsze od $\frac{k}{2}$ to $|P_1| = |Q_1 + Q_2| < k$ a to ścieżka długości k. ↯



Podobnie $|R_1| \geq \frac{k}{2}$ lub $|R_2| \geq \frac{k}{2}$

Załóżmy bez straty ogólności, że $|Q_1| \geq \frac{k}{2}$ i $|R_1| \geq \frac{k}{2}$. (4 przypadki)

Weźmy ścieżkę zbudowaną z Q_1, $\{u, v\}$, R_1. Długość takiej ścieżki

długość = 1

to $|Q_1| + 1 + |R_1| \geq k+1 \Rightarrow$ sprzeczność bo najdłuższa ścieżka ma dł. k. ∎

(9) $G=(V,E)$, $\overline{G}=(V,E')$ t. że $\{u,v\}\in E' \iff \{u,v\}\notin E$

a) Jeśli G jest spójny $\Rightarrow$ to kończymy

b) Załóżmy że G nie jest spójny

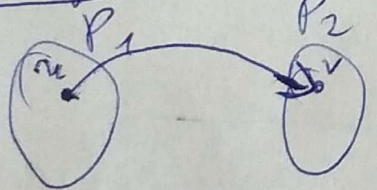
Czyli $\exists\, u,v\in V$ t. że nie istnieje u-v ścieżka,

czyli istnieją przynajmniej dwie spójne składowe grafu G

Pokażemy że $\overline{G}$ jest spójny.

Weźmy dowolne $u,v\in V$. Pokażemy że istnieje wtedy u-v ścieżka

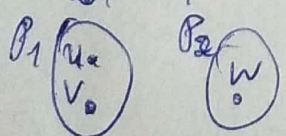
1 przypadek: u,v znajdują się w dwóch różnych spójnych składowych G: P_1 i P_2



Wtedy $\{u,v\}\notin E \Rightarrow \{u,v\}\in E'$

Więc mamy u-v ścieżkę w $\overline{G}$

2 przypadek: u,v znajdują się w tej samej spójnej składowej G



Weźmy dowolny $w\notin P_1$

$$\left.\begin{array}{l} uw\notin E \Rightarrow uw\in E' \\ wv\notin E \Rightarrow wv\in E \end{array}\right\}\ u\text{-}w\text{-}v \text{ - ścieżka z } u \text{ do } v \text{ w } \overline{G}$$

G nie jest spójny $\Rightarrow$ $\overline{G}$ jest spójny ■