(2) a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|$, $a_0 = a_1 = 1$

$(a_{n+1})^2 = a_n^2 + a_{n-1}^2$

$y_n := a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{y_n}$

$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$ – fibonacci

$y_{n} = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}$

gdy $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, a dla $y_0 = y_1 = 1$, przesunięty o jeden

więc:

$y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2} = fib(n+2)$

$$\boxed{a_n = \sqrt{y_n} = \sqrt{fib(n+1)}}$$

spr

$a_0 = 1 = \sqrt{fib(1)}$

$a_1 = 1 = \sqrt{fib(2)}$

$a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt2 = \sqrt{fib(3)}$

$a_3 = \sqrt{2+1} = \sqrt3 = \sqrt{fib(4)}$

$a_4 = \sqrt{3+2} = \sqrt5 = \sqrt{fib(5)}$

$a_5 = \sqrt{5+3} = \sqrt8 = \sqrt{fib(6)}$

b) $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2+3}$, $b_0 = 8$

$(b_{n+1})^2 = b_n^2 + 3$

$y_n = b_n^2 \Rightarrow b_n = \sqrt{y_n}$, $y_{n+1} = y_n + 3$

$E\langle y_n\rangle = \langle y_{n+1}\rangle = \langle y_n + 3\rangle = \langle y_n\rangle + \langle 3\rangle$

$(E-1)\langle y_n\rangle = \langle 3\rangle$ $\quad \alpha n + \beta$

$(E-1)^2\langle y_n\rangle = \langle 0\rangle \rightarrow$ $y_0: n=0 \Rightarrow \beta = 64$

$y_1: n=1 \Rightarrow \alpha + \beta = 67 \Rightarrow \alpha = 3$

$y_n = 3n + 64$

$$\boxed{b_n = \sqrt{3n+64}}$$

Spr: $b_1 = \sqrt{b_0^2+3} = \sqrt{67}$ ✓

$b_2 = \sqrt{67+3} = \sqrt{70}$ ✓

2.2

c) $c_{n+1} = (n+1) c_n + \underbrace{(n^2+n)}_{n(n+1)} c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$

$\cancel{:(n+1)}$ Dzielimy przez $(n+1)!$ obie strony

$$\frac{c_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c_n}{n!} + \frac{c_{n-1}}{(n-1)!}$$

$y_n = \frac{c_n}{n!}$, $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$, $y_0 = 0, y_1 = 1$

$y_{n+1} = fib(n)$

$c_n = n!\, y_n = n!\, fib(n)$

$$c_{n+1} = (n+1)!\, fib(n+1)$$

Spr:

$c_0 = 0$, $c_1 = 1$ $\qquad 0!\, fib(0) = 0$, $1!\, fib(1) = 1$

$c_2 = 2c_1 + 2c_0 = 2$ $\qquad 2!\, fib(2) = 2$

$c_3 = 3c_2 + 6c_1 = 12$ $\qquad 3!\, fib(3)! = 6 \cdot 2 = 12$

$c_4 = 4c_3 + 12c_2 = 48 + 12 \cdot 2 = 72$ $\qquad 4!\, fib(4) = 24 \cdot 3 = 72$

$k \in \mathbb{N}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

(4) ~~$m(m-1)\dots$~~

Chcemy pokazać $k! \mid \underbrace{\cancel{n}(n+1)\dots(n+k-1)(n+k)}_{\text{to jest } \frac{(n+k)!}{n!}}$

ale $\dfrac{(n+k)!}{n!\,k!} = \dbinom{n+k}{k}$ czyli liczbę naturalną $\left(\text{bo } k \in \mathbb{N},\ n+k \geq k\right)$

Więc wynika z tego że $k! \mid \dfrac{(n+k)!}{n!} \Rightarrow k! \mid \overbrace{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}^{k\text{ - wyrazów}}$

$\blacksquare$

⑥ $a_0 = 2$

$a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \quad , n > 0$

$b_n = a_n^2$

$b_n = 2b_{n-1} + 1$

$E\langle b_n\rangle = \langle 2b_n + 1\rangle = 2\langle b_n\rangle + \underbrace{\langle 1\rangle}_{(E-1)}$

$(E-2)(E-1)\langle b_n\rangle = \langle 0\rangle$

$\alpha 2^n + \beta$

$a_0 = 2 \Rightarrow b_0 = 4$

$b_1 = 2\cdot 4 + 1 = 9$

$\begin{cases} \alpha 2^0 + \beta = 4 \\ \alpha 2^1 + \beta = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 4 - \alpha \\ 2\alpha + 4 - \alpha = \alpha + 4 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 5 \end{cases}$

$5\cdot 2^n - 1 = a_n^2$

$n > 0, \; a_n = \sqrt{5\cdot 2^n - 1}$

Spr:

$a_0 = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$ ✓

$a_1 = \sqrt{5\cdot 2^1 - 1} = 3 \;, \; 3^2 = 2\cdot 4 + 1 = 9$ ✓

$a_2 = \sqrt{5\cdot 2^2 - 1} = \sqrt{19} \;, \; \sqrt{19}^2 = 2\cdot 3^2 + 1 = 19$ ✓

$a_3 = \sqrt{5\cdot 2^3 - 1} = \sqrt{39}, \; (\sqrt{39})^2 = 2\cdot(\sqrt{19})^2 + 1 = 39$ ✓

7) 24, $n=1$ 2/

$24^2+1=577$, $n=2$

$24^3+3\cdot 24=13896$, $n=3$

$\underbrace{24^4}_{\text{bez } a}+\underbrace{\binom{4}{2}24^2}_{2a}+\underbrace{1}_{4a}=335233$, $n=4$

Niech szukane E_n – liczba wyrazów złożonych z n liter 25 literowego alfabetu gdzie mamy parzystą liczbę wystąpień a

Wprowadźmy O_n – liczba wyrazów gdzie 'a' występuje nieparzyście

Gdy dostawiamy n-tą literę do $(n-1)$-wyrazowego ciągu to jeśli

I) 'a' występuje parzystą liczbę razy w ciągu $(n-1)$-literowym

Możemy dostawić dowolną literę oprócz a (24)

II) 'a' występuje w ciągu $(n-1)$-wyrazowym nieparzystą liczbę razy

dostawiamy 'a'

i w ten sposób tworzymy wyraz o parzystej liczbie wystąpień 'a'

Czyli $E_n = \overset{(II)}{O_{n-1}} + \overset{(I)}{24E_{n-1}}$ (1)

Analogicznie można wyprowadzić $O_n = E_{n-1} + 24O_{n-1}$ (2)

Wiemy też że $E_n + O_n = 25^n$ (3) $\rightarrow$ wszystkie wyrazy

wyliczamy O_{n-1} z (1) i wstawiamy do 2, a O_n wstawiamy do (3)

Otrzymujemy $E_n + E_{n-1} + 24(E_n - 24E_{n-1}) = 25^n$

$25E_n - 575E_{n-1} = 25^n$

$E_n - 23E_{n-1} = 25^{n-1} \Rightarrow E_n = 25^{n-1} + 23E_{n-1}$

$\begin{cases} a_1 = 24 \\ a_n = 25^{n-1} + 23a_{n-1}, & n>1 \end{cases}$ $E\langle a_n\rangle = 25^n + 23\langle a_n\rangle$

$(E-25)$

$(E-25)(E-23)\langle a_n\rangle = \langle 0\rangle$

$\begin{cases} \alpha 25 + \beta 23 = 24 \\ \alpha 25^2 + \beta 23^2 = 577 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \overset{E_n}{a_n} = \frac{1}{2}(25^n + 23^n)$

Spr: $E_1 = 24, E_2 = 577, E_3 = 13896, E_4 = 335233$

(8) a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, $a_0 = a_1 = 0$

$E^2\langle a_n\rangle = 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle + \underbrace{3^n}_{E-3}\underbrace{-1}_{E-1}$

$(E^2-2E-1)(E-3)(E-1) = (E-1)^3(E-3)$

$a_n = \cancel{\alpha+\beta+\gamma}\ \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta 3^n$

$a_2 = 2a_1 - a_0 + 3^0 - 1 = 0$

$a_3 = 2a_2 - a_1 + 3^1 - 1 = 2$

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \Rightarrow \alpha = -\delta \\ \alpha + \beta + \gamma + 3\delta = 0 \Rightarrow \beta + \gamma = 2\alpha \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma + 9\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 9\gamma + 27\delta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = -\frac{1}{2} \\ \delta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$ $\quad a_0 = a_1 = 1$

$E^2\langle a_n\rangle = 4E\langle a_n\rangle - 4\langle a_n\rangle + \underbrace{n2^{n+1}}_{(E-2)^2}$

$(E^2 - 4E - 4)(E-2)^2\langle a_n\rangle = 0$

$(E-2)^4\langle a_n\rangle = 0$

$a_n = \cancel{\alpha 2^n + \beta}\ 2^n(\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3)$

c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$ $\quad a_0 = a_1 = 1$

$E^2\langle a_n\rangle = \cancel{E\langle a_n\rangle - 2}\frac{1}{2^{n+1}} - 2E\langle a_n\rangle - \langle a_n\rangle$

$(E^2 + 2E + 1)\langle a_n\rangle = \frac{1}{2^{n+1}}$ $\quad (E - \frac{1}{2})$

$\cancel{E^2 + 2E +}(E+1)^2(E - \frac{1}{2})$

$a_n = (-1)^n\alpha + \frac{1}{2^n}$

n - wyrazowe:

9

$\underbrace{\qquad}_{n-1}\overset{\neq 0}{\downarrow}0$ - z_n - ciągi kończące się zerem

$\underbrace{\qquad}_{n-1}\overset{\neq 1}{\downarrow}1$ - j_n - ciągi kończące się jedynką

$\underbrace{\text{dowolne}}_{n-1}\,2$ - d_n - ciągi kończące się dwójką

$$c_n = z_n + j_n + \overset{=c_{n-1}}{d_n}$$

$$= (j_{n-1} + d_{n-1}) + (z_{n-1} + \overset{c_{n-2}}{d_{n-1}}) + c_{n-1}$$

$$= (z_{n-1} + j_{n-1} + d_{n-1}) + d_{n-1} + c_{n-1}$$

$$= c_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-1} = 2c_{n-1} + c_{n-2}$$

$c_0 = 1, c_1 = 3, c_2 = 7$

01, 10, 12, 21, 22, 02, 20

$$E^2\langle c_n\rangle = 2E\langle c_n\rangle + \langle c_n\rangle$$

$$(E^2 - 2E - 1)\langle c_n\rangle = 0$$

$$(E - (1-\sqrt{2}))(E + (1+\sqrt{2}))\langle c_n\rangle = 0$$

$$c_n = \alpha(1-\sqrt{2})^n + \beta(1+\sqrt{2})^n$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha\,\cancel{(1-\sqrt{2})} + \beta\,\cancel{(1+\sqrt{2})} \\ 3 = \alpha(1-\sqrt{2}) + \beta(1+\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \qquad \beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$$c_n = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(1-\sqrt{2})^n + \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)(1+\sqrt{2})^n =$$

$$\underline{\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1}\right)}$$