MDL - lista 3

① Pogrupujemy $2n$ w n zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$

Jest ich tyle co liczb nieparzystych w $[1, 2n]$ czyli n

$$A_x = \{2^i x : \overset{x=2k+1, k \in \mathbb{N}}{i \in \mathbb{N}, 2^i x \le 2n}\}$$

czyli np. dla $n=4$ mamy $2n=8$, A_1, A_3, A_5, A_7

$\{1,2,4,8\} \in A_1$, $\{3,6\} \in A_3$, ~~A~~ $\{5\} \in A_5$, $\{7\} \in A_7$

Przyporządkowaliśmy każdą liczbę ze zbioru $[1,2n]$ do któregoś z n zbiorów A (jeśli liczba jest nieparzysta to ma „własny" zbiór, a jeśli jest parzysta to można ją przedstawić jako iloczyn parzystej i nieparzystej)

Mamy wybrać $n+1$ liczb, więc z zasady szufladkowej Dirichleta ~~wybierzemy~~ przynajmniej dwie liczby, które wybierzemy będą w tym samym zbiorze A_i co oznacza że jedna z nich dzieli drugą z nich $(2^i x \mid 2^j x)$, $i<j$

(bo jest ich n)

■

(2) Dla dwóch punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2) punkt środka odcinka je łączący $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

dla $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$, $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$ są całkowite gdy

x_1, ~~x~~ - parzyste $\quad x_1$ - nieparzyste
x_2 - parzyste $\quad x_2$ - nieparzyste } ta sama parzystość na tej samej współrzędnej obu punktów

podobnie y -||-

Mamy 4 możliwości

$$(x_1, y_1) \to \begin{cases} x\text{-}P & y\text{-}NP \\ x\text{-}P & y\text{-}P \\ x\text{-}NP & y\text{-}NP \\ x\text{-}NP & y\text{-}P \end{cases}$$

4 możliwości, a 5 punktów. Więc z zasady szufladkowej Dirichleta dwa punkty będą miały tę samą parzystość, a środek odcinka je łączącego będzie punktem kratowym ∎

MDL - Lista 3

(3) Dla $n=1$ oczywiste bo $1|x, x \in \mathbb{N}$

$n \geq 2$ Weźmy sumy:

$A_1 = a_1$

$A_2 = a_1 + a_2$

$\vdots$

$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Jeśli któraś z tych sum daje resztę z dzielenia przez n ~~r~~ równą 0 to dzieli się przez n i nie trzeba nic pokazywać.

W p.p. n sum daje reszty z przedziału $1, 2, \ldots, n-1$.

Więc z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwie sumy dające takią resztę z dzielenia przez n. Załóżmy że to A_k, A_m, $k < m$

Sumy

~~$A_m - A_k \equiv_n 0$~~

$A_m \equiv_n c \wedge A_k \equiv_n d$, gdzie $c = d$ (te same reszte)

$\Downarrow$

$A_m - A_k \equiv_n 0$ czyli $n \mid A_m - A_k$,

a $A_m - A_k$ to jakiś podciąg $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_m$

$k+1 = i$, $m = j$, - z treści zadania

MDL - Lista 3

(5) Sumujemy n liczb, gdzie każda z nich należy do $\{-1, 0, 1\}$.
Wynik jest więc z z zakresu $[-n, n]$.
W tym zakresie mamy $2n+1$ liczb bo $n \in \mathbb{N}$ i 0 jest możliwością / możliwych wyników

Policzmy ile sum wykonamy na szachownicy $n \times n$:

n - wiersze
n - kolumny
2 - przekątne (pomijamy krótsze przekątne, ale one nie zmieniają wyniku bo mają sumę $|S| < n$)

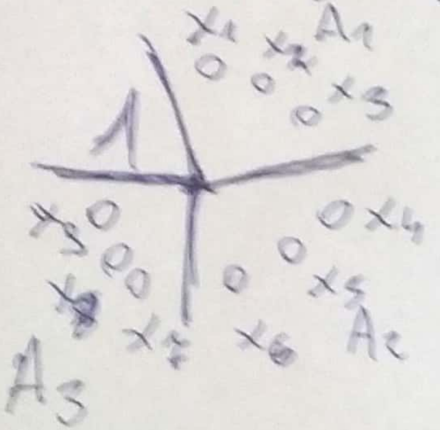
$2n+2$ - sum, a $2n+1$ - liczb

Z zasady szufladkowej Dirichleta przynajmniej dwie sumy będą takie same

$\blacksquare$

(6) $1+2+\dots+10 = \frac{(10)(11)}{2} = 55$

Stawiamy ~~gdzie~~ dokładnie '1', a pozostałe liczby ustawiamy po 3.



$x_1+x_2+\dots+x_9 = 55-1=54$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3<18 \\ x_4+x_5+x_6<18 \\ x_7+x_8+x_9<18 \end{array}\right\} \rightarrow x_1+\dots+x_9<54 \ ↯$$

Zatem przynajmniej jedna z tych trójek musi być taka, że

$x_i+x_{i+1}+x_{i+2}=18$

(7) Weźmy dowolny wspólny dzielnik d : $\frac{a}{NWD(a,b)} \to x$, $\frac{b}{NWD(a,b)} \to y$!

Chcemy pokazać że $d=1$ (wtedy x i y są względnie pierwsze)

$$d \mid \frac{a}{NWD(a,b)} \Rightarrow d\,NWD(a,b) \mid a$$

$$d \mid \frac{b}{NWD(a,b)} \Rightarrow d\,NWD(a,b) \mid b$$

czyli $d \cdot NWD(a,b)$ dzieli a oraz b, ale $NWD(a,b)$ to
największy wspólny dzielnik a i b czyli

$$d\,NWD(a,b) \leq NWD(a,b) \Rightarrow d=1$$

■