① RPIS-2

a) $\Omega \in \Sigma$

$\Omega \setminus \Omega \in \Sigma$

$\emptyset \in \Sigma$

b) $A_k \in \Sigma$, $k=(1,2,\dots,)$ $\Rightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$

$(\Omega \setminus A_k) \in \Sigma$ i też $(\Omega \setminus (A_1 \cap A_2)) = (\Omega \setminus A_1) \cup (\Omega \setminus A_2)$

$\bigcap A_k = \Omega \setminus (\Omega \setminus \bigcap A_k) = \Omega \setminus (\bigcup \underbrace{(\Omega \setminus A_i)}_{\in \Sigma})$

więc $\bigcup (\Omega \setminus A_i) \in \Sigma$

i dopełnienie $\Omega \setminus (\bigcup (\Omega \setminus A_i))$ też należy do Σ!

(2) $\Omega = \{a, b, c\}$ $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

σ - ciało

a) $\emptyset \in \Sigma$ $\Omega \in \Sigma$

$\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$

bo $\{a\} \in \Sigma \Rightarrow \{b, c\} \in \Sigma$!

$\{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$

$\{\emptyset, \Omega, \{c\}, \{a, b\}\}$

b) f: X, Y t. że X jest zm. losową a Y nie

$\Omega = \{a, b, c\}$ i $\Sigma = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$

$X(a) = 1$, $X(b) = 1$, $X(c) = 1$

$Y(a) = 1$, $Y(b) = 2$, $Y(c) = 2$

$X^{-1}((-\infty, 1]) = \Omega \in \Sigma$

$Y^{-1}((-\infty, 1]) = \{a\} \notin \Sigma$

③ $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, $S = \{1,4\}$, σ - ciało zawierające S

$\{\emptyset, \Omega, \{1,4\}, \{2,3,5\}\}$ $\quad \{1,4\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{2,3,5\} \in \mathcal{F}$

(4) $EX = \sum x_i p_i$

$F(t) = F_x(t) = P(X<t)$

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.1	0.3

$2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.3 =$

$3{,}5$

Dystrybuanta

	$(-\infty, 2\rangle$	$\langle 2,3\rangle$	$\langle 3,4\rangle$	$\langle 4,5\rangle$	$\langle 5,+\infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.6	0.7	1

RPIS-2

5

x	$(-\infty, -2]$	$(-2, 3]$	$(3, 5]$	$(5, +\infty)$
$F(x)$	0	0.2	0.7	1

⑥ X - dyskretny

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$\sum (a x_i + b) p_i = \sum a x_i p_i + \sum b p_i$$

$$= a \underbrace{\sum x_i p_i}_{E(X)} + b \underbrace{\sum p_i}_{1}$$

$$= aE(X) + b$$

7. $E(aX+b) = aE(X)+b$ w ciągłym

$\int_R x f(x) dx$

f. prawdopodobieństwa

$$\int_R (ax+b) f(x) dx = a\int_R x f(x) dx + b\int_R 1 f(x) \quad \Bigg| \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{-\infty} f(x) = 1}_{def}$$

$$= aE(x) + b$$

RPIS - 3 3/4

8 a) $B(p,q+1) = B(p,q)\frac{q}{p+q}$

$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$, $p>0, q>0$

~~1-t~~ „przez części" po t $B(p,q+1)$

$\int_0^1 \left(\frac{t^p}{p}\right)'(1-t)^{q}dt = \underbrace{\left[\frac{t^p}{p}(1-t)^q\right]_0^1}_{0} - \int \frac{t^p}{p}\left(-q(1-t)^{q-1}\right)dt$

$\frac{q}{p}\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt$ // rozbiać na sumę

$\frac{q}{p}\int_0^1 t^{p-1}\left[(1-t)^{q-1}(1-(1-t))\right]dt =$

$\frac{q}{p}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} - t^{p-1}(1-t)^{q}dt$

$\frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1)$

$\Rightarrow \frac{p+q}{\cancel{p}}B(p,q+1) = \frac{q}{\cancel{p}}B(p,q)$

$\Rightarrow B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$

~~b) $B(p,q+1)+B(p+1,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt + \int_0$~~

8) b) $B(p,q) = B(p,q+1) + B(p+1,q)$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

Rozpisujemy RHS

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q}\,dt + \int_0^1 t^{p}(1-t)^{q-1}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q} + t^{p}(1-t)^{q-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\left[(1-t)+t\right]dt$$

$$= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = B(p,q) \ \blacksquare$$

RPIS - 2

$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)$, $p,q \in \mathbb{R}^+$

def: $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$

$\Gamma(p) = (n-1)!$ (L 1 z3)

Czyli chcemy $\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = B(p,q)$: Teza

D-d (indukcja po q) { p dowolne $\mathbb{N}$)

Baza ($q = 1$)

$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^0\,dt = \frac{t^p}{p}\Big|_0^1 = \frac{1}{p} = P_{\text{rawa}}$

$L = \frac{(p-1)!(1-1)!}{(p+1-1)!} = \frac{1}{p} = L_{\text{ewa}}$ $\checkmark$

Zał. że teza zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$

Pokażemy że dla dowolnego $n+1$: ($q = n+1$) zachodzi

$B(p,n+1) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^n\,dt =$

$(1-t)^n \quad t^{p-1}$

$-n(1-t)^{n-1} \quad \frac{t^p}{p}$

przez części

$= \underbrace{\left[\frac{t^p}{p}(1-t)^n\right]_0^1}_{0} - \int -\frac{n}{p}(1-t)^{n-1}t^p\,dt =$

$= \frac{n}{p}\int_0^1 t^{(p+1)-1}(1-t)^{n-1} \overset{\text{zał. ind}}{=} \frac{n}{p}\,\frac{(p+1-1)!\,(n-1)!}{(p+1+n-1)!}$

$B(p+1,n)$

$= \frac{n}{p} \cdot \frac{p!\,(n-1)!}{(p+n)!} = \frac{(p-1)!\,n!}{(p+(n+1)-1)!}$ ■