② $G=(V,E)$

Minimalne cięcie to E' t. że $E' \subseteq E$ i $G(V,E-E')$ nie jest spójny i $\forall u \subseteq E'$ $G(V,E-u)$ jest spójne

T: G spójny ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi

$\Rightarrow$ Weźmy dowolne minimalne cięcie M i ono dzieli G na dwie spójne składowe M_1 i M_2.

Skoro G zawiera cykl Eulera to wszystkie wierzchołki mają stopień parzysty (tak byśmy mogli ~~wy~~ wejść i wyjść z każdego) oraz $\forall v \in V$ $deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$

Suma stopni odpowiednio w M_1 i M_2 jest parzysta (bo $\forall v \in V$ $deg(v) = 2|E|$)

Z tego wynika że w minimalnym cięciu też musiało być parzyście krawędzi (tak by suma stopni parzysta + parzysta + ~~parzysta~~ $\sqcup$ była parzysta)

$\Leftarrow$ Jeśli ~~każde~~ minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi to stopnie wierzchołków grafu są parzyste. A skoro G jest spójny i ma wierzchołki o stopniach parzystych to zawiera cykl Eulera

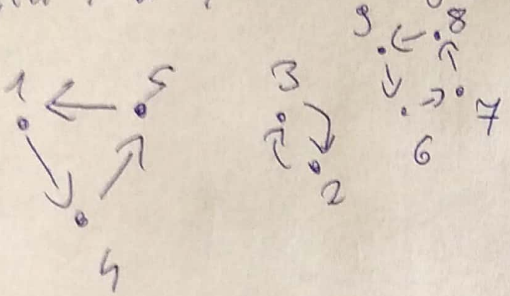
$\blacksquare$

Weźmy dowolny wierzchołek. Rozspójenie grafu od tego wierzchołka bierze minimalne cięcie, które z zał. ma parzystą liczbę krawędzi, więc ten wierzchołek ma parzysty stopień.

MDL-12

(4) Ile jest nieidentycznych grafów o ~~n~~ wierzchołkach 1...n, bez pętli i krawędzi równoległych, $\forall v \in V$ deg in (v) = deg out $(v) = 1$

np



(1, 4, 5) (2, 3) (6, 7, 8, 9)

|||

(5, 1, 4)

|||

(4, 5, 1)

Zbudujmy bijekcję $G: V \to V'$, gdzie V - wierzchołki 1...n

$G(v) = u$ wtedy gdy $(v, u) \in G$,

Każdemu wierzchołkowi przypisujemy inny (np. nie $1 \to 1$)

np

$1 \to 4$
$2 \to 3$
$3 \to 2$
$4 \to 5$
$5 \to 1$
$6 \to 7$
$7 \to 8$
$8 \to 9$
$9 \to 6$

jest 1-1 bo nie przypisujemy już przypisanego (tak by deg in = 1)

jest "na" bo jest 1-1, ze zbioru n elem. na n elem.

Liczba takich funkcji to liczba nieporządków

(nie chcemy przypisania $1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3 \dots, n \to n$)

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n!}$$

$$n!\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots\right)$$

(8) $G(V,E)$

$\forall_{v \in V} \deg(v) = 3$

T: G zawiera cykl ~~Euler~~ o parzystej długości.

D-d: Niech S - najdłuższa ścieżka w grafie G

$v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_n$ - wierzchołki na S

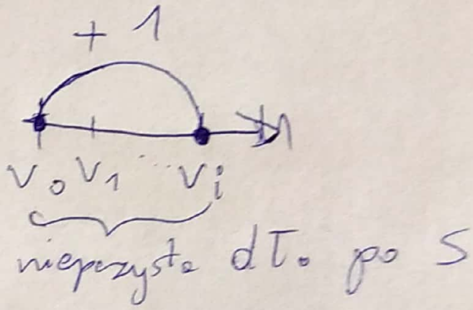
Z tego że $\forall_v \deg(v) = 3$ $\exists \{v_0, v_i\} \in E$ oraz $\exists \{v_0 v_j\} \in E$ t. że

$2 \le i \le j \le n$ i v_i oraz v_j należą do S bo inaczej

istniałaby dłuższa ścieżka (np $v_i + S$).

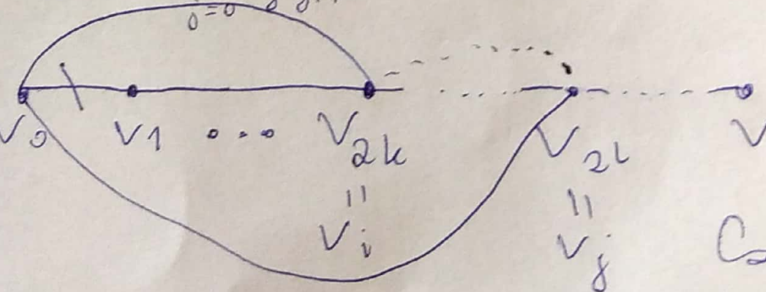
Rozważmy przypadki:

- i jest nieparzyste wtedy idziemy z v_0 do v_i po S i wracamy z v_i do v_0, to jest cykl parzystej długości



- j jest nieparzyste, analogicznie j.w.
- i oraz j są parzyste

Wtedy $\underbrace{S - v_0v_i}_{(\sum_{j=0} v_jv_{j+1})} + v_0v_i + v_0v_j$ - cykl parzystej długości



idziemy z v_0 do v_j

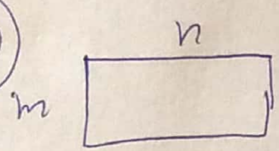
z v_j do v_i ścieżką S i

z v_{2k} do v_0

Czyli $\underbrace{dł(S(v_i, v_j)}_{parzysta} + 2$

Zatem G zawiera cykl parzystej długości ∎

10



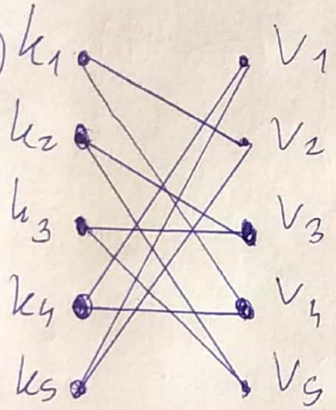
$m \times n$
$m<n$ wierszy. Czy można rozszerzyć do $(m+1) \times n$?

np

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
1	2	4	5	3
3	4	1	2	5
5	1	2	3	4

Niech:
k_i - i-ta kolumna prostokąta łacińskiego $k_i \in K$
v_i - liczba i $v_i \in V$
Mamy 2 zbiory. Zbudujmy graf $G=(V \cup K, E)$ dwudzielny, gdzie $\{k_i, v_j\} \in E \iff$ liczba j nie znajduje się w kolumnie i

np



Szukanie możliwego nowego wiersza to szukanie skojarzenia doskonałego w grafie G.
Pokażemy że istnieje takie skojarzenie dla $m<n$
Każde k_i ma $n-m$ krawędzi incydentnych
Każde v_i ma $n-m$ krawędzi incydentnych
Jeśli wybierzemy $X \subseteq K$ ($X \subseteq V$ analogicznie), o mocy $|X| = x$ to mamy (wliczając powtórzenia) $x(n-m)$ krawędzi sąsiedztwa
Czyli $|N(X)| \geq |X|$ bo inaczej istniałby $v \in V$ t. że wychodzi z niego więcej niż $n-m$ krawędzi ↯ sprzeczność.
Więc spełniony jest ~~warunek~~ Halla, czyli dla $n>m$ istnieje skojarzenie doskonałe, więc można dodać nowy wiersz...