MDL - Lista 4

1/3

① 71^{71}, dwie ostatnie cyfry to $71^{71} \bmod 100$

$25 \perp 4$, $100 = 25 \cdot 4$:

Z Chińskiego Twierdzenia o Resztach:

- $71^{71} \equiv_4 3^{71} \equiv_4 (3 \cdot 3^{70}) \equiv_4 3 \cdot \overset{(1)^{35}}{\overset{\equiv_4}{(9)^{35}}} \equiv_4 3 \cdot 1^{35} \equiv_4 \boxed{3}$

- $71^{71} \equiv_{25} (-4)^{71} \equiv_{25} (-4)^{(2 \cdot 5 \cdot 7 + 1)} \equiv (-4)(-4)^{2 \cdot 5 \cdot 7} \equiv (-4)\left(\left((-4)^5\right)^2\right)^7$

$4^5 = 1024 \Rightarrow 4^5 \equiv -1 \pmod{25}$

$-(4^5) = (-4)^5 \equiv 1 \pmod{25}$

$71^{71} \equiv_{25} (-4)\left((1)^2\right)^7 \equiv_{25} -4 \equiv_{25} \boxed{21}$

$x \equiv_{100}$

21	$21 \equiv_4 1$
46	$46 \equiv_4 2$
$\boxed{71}$ $\leftarrow$	$71 \equiv_4 \boxed{3}$
96	$96 \equiv_4 \boxed{0}$

Więc $71^{71} \bmod 100 = 71$

Inaczej: $(70+1)^{71} = \underbrace{1^{71} + \binom{71}{1} 1^{70} \cdot 70}_{71} + \underbrace{\binom{71}{2} \cdot 1^{63} \cdot 70^2 + \ldots}_{\substack{\text{każdy wyraz podzielny} \\ \text{przez 100 bo} \\ (7 \cdot 10)^k,\ k \geq 2}}$

② $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 3 \mod 7 \\ x \equiv 4 \mod 13 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = 5k+2$

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
2	7	12	$\underline{17 \equiv_{7} 3}$

$\begin{cases} x \equiv 17 \pmod{35} \\ x \equiv 4 \pmod{13} \end{cases}$ $x = 35l + 17$

$l = 0$

$17 \equiv_{13} 4$

↙

~~$x \equiv 17 \mod (35 \cdot 13)$~~

$$\boxed{\begin{array}{l} x \equiv 17 \mod (455) \\ \\ 455m + 17 \quad , m \in \mathbb{N} \end{array}}$$

③ D-d (przez kontrapozycję):

Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą i pokażemy że z tego wynika że 2^n-1 też nie jest pierwsze.

Skoro n nie jest pierwsze to $\exists_{a,b\in\mathbb{Z}} |a|>1 \wedge |b|>1 \quad ab=n$

(*) Wtedy $2^n-1 = 2^{ab}-1 = (2^a)^b-1 = (2^a-1)(2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\ldots+1)$

$(x^n-1) = (x-1)(x^{n-1}+\ldots+1) = x(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^0)-1(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x^0)$

$= x^n + \underbrace{x^{n-1}-x^{n-1}}_{0} + \underbrace{x^{n-2}-x^{n-2}}_{0} + \ldots + \underbrace{x-x}_{0} - 1$

Uzasadnienie wzoru (*)

$x>1,\ y>1 \Rightarrow \quad 1 < 2^a-1 < 2^n-1$, czyli 2^a-1 jest dzielnikiem 2^n-1. Czyli 2^n-1 nie jest liczbą pierwszą

$a((2^a)^{b-1}+2^{a(b-2)}+\ldots+1)>0$

różnym od 1 i 2^n-1

■

MDL – 4 3/3

zał: $\boxed{\text{Dla } n>1}$ (bo dla $n=1$, $a=4$, ~~4~~ $4-1$ jest pierwsze ale $a\neq 2$)

⑤ a^n-1 jest pierwsze $\Rightarrow a=2$

załóżmy że a^n-1 jest liczbą pierwszą, wtedy z def:

$a^n-1 \in \mathbb{N}$ czyli $a^n-1>0 \Rightarrow a^n>1 \Rightarrow a>0$ dla n nieparzystych

$$(a^n-1) = (a-1)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1)}_{>0}$$

Czyli $(a-1)|(a^n-1)$

Skoro a^n-1 jest pierwsze to mamy dwa możliwe dzielniki

$\swarrow$ $\searrow$

$a-1=1$

$\boxed{a=2}$

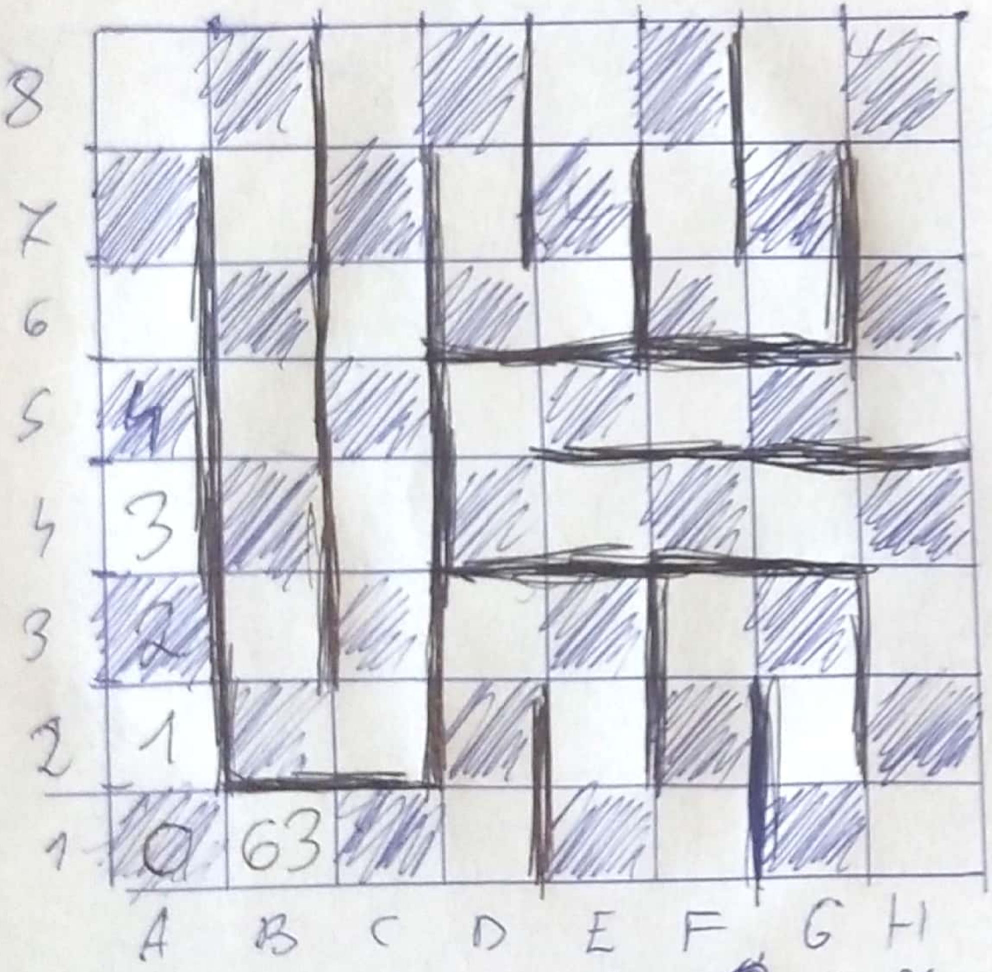
$a-1 = a^n-1 \rightarrow$ dla $n=1$

Wtedy $(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1)=1$

ale skoro $a>0$ i $n>1$ to ten przypadek nie zachodzi

∎

⑩



Rysujemy dowolną ścieżkę która kończy się pole obok pola startowego. Ponumerujemy tą ścieżkę od A1 - 0 do B1 - 63

Usunięcie dwóch pól różnych kolorów sprawi że ścieżka podzieli się na dwie ścieżki o parzystej liczbie elementów, bo na polach o numerach tej samej parzystości mamy ten sam kolor

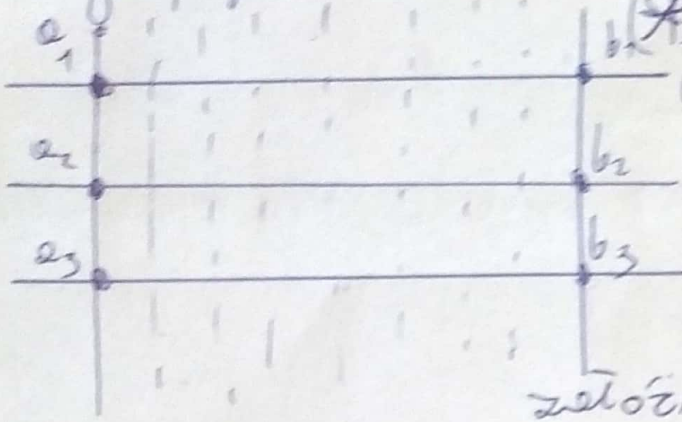
np: jeśli usuniemy pole 2 i 7 to otrzymamy ścieżki, $(3 \to \dots \to 6)$ i $(8 \to 9 \to \dots \to 63 \to 0 \to 1)$ (mod 64)

(mod 64) $l \in \mathbb{N}$

Ogólnie usuwamy a i $a+2l+1$ i dostajemy ścieżki $\underbrace{(a+1 \to \dots \to a+2l)}_{\text{parzysta l. el}}$, $\underbrace{(a+2l+2 \to \dots \to a)}_{\text{parzysta l. el}}$, operujemy w mod 64

Więc w każdym przypadku da się pokryć taką szachownicę dominami.

⑪ Jeśli wyrysujemy trzy proste równoległe oraz dwie przecinające je, proste prostopadłe:



(*) Punkty przecięcia mają kolor P lub M (P - Pistacjowy, M - Morelowy)

Jeśli założymy że kolory na tych samych wysokościach/prostych poziomych są takie same (tj $k(a_i) = k(b_i)$), to bez straty ogólności załóżmy że mamy w danej trójce: dwa wystąpienia P i jedno M. Wybieramy wtedy prostokąt o wierzchołkach koloru P.

Aby znaleźć dwie takie proste na których $k(a_i) = k(b_i)$ należy wziąć 9 prostych prostopadłych. Będziemy mieli wtedy 9 takich trójek, a kolorowań trójki jest $2^3 = 8$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta, będą istniały dwie trójki o takim samym kolorowaniu. Gdy wybraliśmy dwie takie pionowe linie postępujemy jak wyżej i znajdujemy prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru

∎