② A_6 – liczby $\overset{\in \mathbb{N}}{\downarrow}$ podzielne przez 6 z $1, 2, \ldots, 800$

A_7 – liczby podzielne przez 7 z $1, 2, \ldots, 800$

A_8 – liczby podzielne przez 8 z $1, 2, \ldots, 800$

$$X = A_6 \cup A_8 \setminus ((A_6 \cap A_7) \cup (A_8 \cap A_7))$$

nie podzielne przez 7, ale ~~nie~~ podzielne przez 6 lub 8

$|A_6| = 133 \quad |\{1 \cdot 6, 2 \cdot 6, \ldots, 133 \cdot 6\}|$

$|A_8| = 100 \quad |\{1 \cdot 8, 2 \cdot 8, \ldots, 100 \cdot 8\}|$

$|\{24, 48, \ldots, \underset{\overset{\parallel}{792}}{33 \cdot 24}\}| = 33$

$$|A_6 \cup A_8| \overset{\text{z zas. wł.-wył.}}{=} |A_6| + |A_8| - |A_6 \cap A_8| = 200$$

$$|(A_6 \cap A_7) \cap (A_8 \cap A_7)| = |A_6 \cap A_7| + |A_8 \cap A_7| - |A_6 \cap A_7 \cap A_8| = (*)$$

$19 = |\{42, 84, \ldots, \underset{798}{13 \cdot 42}\}| \quad 14 = |\{56, 112, \ldots, \underset{784}{14 \cdot 56}\}| \quad 4 = |\{168, 336, 504, 672\}|$

$(*) = 19 + 14 - 4 = 29$

$$|X| = 200 - 29 = \underline{171}$$

$$|\{x : x \in \mathbb{N}, 1 \le x \le 800, 7 \nmid x \wedge (6 | x \vee 8 | x)\}| = 171$$

(3) A – takie ustawienia że 'e' są w bloku (wszystkie obok siebie)
B – -||- 'b' -||-
C – -||- 'c' -||-
Ω – wszystkie ustawienia
X – ustawienia w których nie ma żadnego bloku

$X = \Omega \setminus (A \cup B \cup C)$

$|X| = |\Omega| - |A \cup B \cup C| \to$ zasada wł - wył

$$|\Omega| = \underbrace{\binom{9}{2}}_{'e'}^{36} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{'b'}^{35} = 1260$$

ustawiamy nierozróżnialne między sobą 'c'

$|A| = \binom{5}{2} \cdot \underset{'e'}{6} = 60$ bloku 'e' na jednej z 6 pozycji (ustawiamy dowolnie c $\binom{5}{2}$ a potem pomiędzy ciąg 'e')

$|B| = \underbrace{\binom{6}{2}}_{'c'} \cdot \underset{'b'}{7} = 105$

$|C| = \underbrace{\binom{7}{3}}_{'e'} \cdot \underset{'c'}{8} = 280$

$|A \cap B| = 3 \cdot 2 + \underbrace{2 \cdot 2 + 2 \cdot 1}_{} = 12$

eeee..... i symetria ceeee..... i symetria cceeeebbb i symetria

$|A \cap C| = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$ podobnie jak wyżej

$|B \cap C| = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 30$

$|A \cap B \cap C| = 3! = 6$ (kolejność 3 bloków)

$|X| = |\Omega| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|) =$

$= 1260 - (60 + 105 + 280^{+6} - (12 + 20 + 30))$

$= 1260 - (451 - 62) = 1260 - 389 = \underline{871}$

(4) A - permutacje ciągu n-elementowego

$|A| = n!$

A_i - zbiór takich permutacji że $i \in N$, jest na swoim miejscu

Wtedy nieporządki z zadania określa wzór:

$$d_n = A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= A \setminus \left(\bigcup_{i \in N} A_i\right)$$

Korzystamy ze wzoru na sumę zbiorów z zasady wł.-wył.:

$$n! - \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, |I| = k} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)$$

$$n! - \left(n \cdot (n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n}{n-1} 1! \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{0}(0!)\right)$$

$$n! - \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i}(n-i)!\right) \qquad \boxed{\frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot (n-i)! = \frac{n!}{i!}}$$

$$n! - \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{n!}{i!}\right) = n! - n!\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!}\right) = n!\left(1 - \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!}\right)\right)$$

$$n!\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)\right) =$$

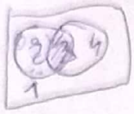
$$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right) = d_n$$

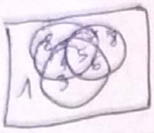
7) n - okręgów

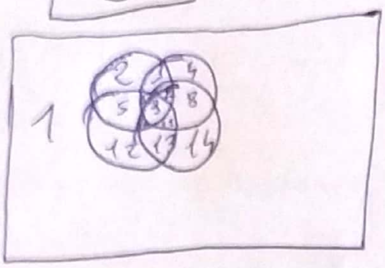
O_i - na ile obszarów dzieli płaszczyznę maksymalnie, i okręgów

$O_0 = 1$

$O_1 = 2$ 

$O_2 = 4$ 

$O_3 = 8$ 

$O_4 = 14$ 

n-ty okrąg przecina $n-1$ okręgów. Każdy z tych okręgów zostaje przecięty w dwóch punktach. Więc dodanie kolejnego okręgu dodaje $2(n-1)$ punktów przecięcia które dzielą obszary, trzeba jeszcze dodać obszary które były wcześniej, więc rekurencyjnie mamy wzór:

→ (np. O_4: 6 punktów przecięcia, +6 obszarów)

$O_0 = 1$, $O_1 = 2$

$$O_n = 2(n-1) + O_{n-1} = \quad (n>1)$$

$$= 2(n-1) + 2(n-2) + O_{n-2} =$$

$$= 2(n-1) + 2(n-2) + \dots + 2\underbrace{(n-(n-1))}_{=1} + \underbrace{O_1}_{=2}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) + 2 = 2\sum_{i=1}^{n-1} i + 2 = 2\frac{(n-1)n}{2} + 2 = (n-1)n + 2$$

$(1+2+\dots+n-1 = (n-1)+\dots+2+1)$

$$O_n = n^2 - n + 2$$

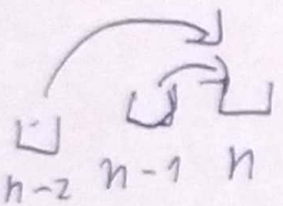
(10) $n=1 \to 1 : (1)$

$n=2 \to 2 : (1,1)\ (2)$

$n=3 \to 3 : (1,1,1)\ (1,2)\ (2,1)$

$n=4 \to 5 : (1,1,1,1)\ (1,1,2)\ (1,2,1)\ (2,1,1)\ (2,2)$

Na n-ty stopień można wejść ze stopnia $(n-1)$-ego lub $(n-2)$-ego. Wszystkie możliwości określa



więc wzór rekurencyjny: (S_i – na ile sposobów schody z i stopni)

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, \ n \geq 2$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ F_2 & F_3 & F_{n+1} \end{array}$$ – wyrazy ciągu Fibonacciego

a wiadomo że $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

czyli $S_n = F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$

(11)

A - wszystkie możliwości zaproszenia 3 osób z 7 przez 7 dni

$|A| = \left[\binom{7}{3}\right]^7$

A_i - Układ zaproszeń w którym i-ta osoba nie została wcale zaproszona przez 7 dni

Wtedy szukamy

$A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_7)$

z zasady wł-wył:

$\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset = I \subseteq \{1,2,\dots,7\}, |I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$

$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_7| = \underbrace{7}_{\text{wybór } i} \cdot \binom{6}{3}^7$ wybieramy z 6 osób, bez tej i z A_i

$|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_i \cap A_j| + \dots = \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3}^7$

wybieramy osoby i, j, z pozostałych 5 układamy zaproszenia

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}^7$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots + |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \dots = \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7 \Rightarrow$ 3 te same osoby codziennie

Kolejne przecięcia są zerowe bo nie da się wysłać przynajmniej 3 zaproszeń mając do dyspozycji mniej niż 3 osoby

Więc $A - (A_1 \cup A_2 \cup \dots A_7) = \binom{7}{3}^7 - \sum_{k=1}^{4} (-1)^{k-1} \binom{7}{k} \left[\binom{7-k}{3}\right]^7$

$= \sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{7}{k} \binom{7-k}{3}^7 = 55\,\cancel{5}\,88\,723\,370$

(według WolframAlpha)