(1) Dla układu liniowo niezależnego $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ utworzymy liniowo niezależny $\{g_0, g_1, \dots, g_n\}$ t. że $(g_i, g_j)_N = 0$ $i \neq j$

$$\begin{cases} g_0 := f_0 \\ g_k := f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, g_j)_N}{(g_j, g_j)_N} g_j & k>0 \end{cases}$$

D-d: (indukcja po k)

Baza: $g_0 := f_0$, $\{g_0\}$ - układ ortogonalny ✓

$$g_1 := f_1 - \underbrace{\frac{(f_1, g_0)_N}{(g_0, g_0)_N}}_{\text{const.}} g_0$$

$(a,b)_N = (b,a)_N$

$(a-b, c)_N = (a,c)_N + (b,c)_N$

$$(g_0, g_1)_N = (g_1, g_0)_N = \left(g_0, f_1 - \frac{(f_1, g_0)_N}{(g_0, g_0)_N} g_0\right)_N =$$

$$(g_0, f_1)_N - \frac{(f_1, g_0)_N}{(g_0, g_0)_N} (g_0, g_0)_N = (g_0, f_1)_N - (g_0, f_1)_N = \underline{0}$$

Załóżmy że $g_0, g_1, g_2, \dots, g_{k-1}$ są ortogonalne. Pokażemy, że g_k jest czyli $\forall i<k$ $(g_i, g_k) = 0$

$$(g_i, g_k)_N = \left(g_i, f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, g_j)_N}{(g_j, g_j)_N} g_j\right)_N$$

$$= (g_i, f_k)_N - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, g_j)_N}{(g_j, g_j)_N} (g_i, g_j)_N$$ (podobnie jak dla g_1)

$(g_i, g_j) = 0$ dla $j \neq i$ $(j \leq k-1)$ - zał. indukcyjne

czyli

$$(g_i, g_k) = (g_i, f_k)_N - \frac{(f_k, g_i)_N}{\cancel{(g_i, g_i)_N}} \cancel{(g_i, g_i)_N} = 0$$

co należało pokazać ■

(2) P_k $(1 \leq k \leq N)$, P_k - k-ty wielomian ort. wzgl. $(\cdot,\cdot)_N$

T: $\forall w$, $w \in \Pi_{k-1}$, $(w, P_k)_N = 0$

skoro $w \in \Pi_{k-1}$ to można zapisać w jako kombinację liniową $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$

$w = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{k-1} P_{k-1}$

Wtedy $(w, P_k)_N = (\alpha_0 P_0 + \ldots + \alpha_{k-1} P_{k-1}, P_k)_N =$

$(\alpha_0 P_0, P_k)_N + (\alpha_1 P_1, P_k)_N + (\alpha_2 P_2, P_k)_N + \ldots + (\alpha_{k-1} P_{k-1}, P_k)_N =$

$\alpha_0 (P_0, P_k)_N + \alpha_1 (P_1, P_k)_N + \ldots + \alpha_n (P_{k-1}, P_k)_N = 0$

z ortogonalności P_k, $(P_i, P_j)_N = 0$ $i \neq j$

czyli pokazaliśmy że $(w, P_k)_N = 0$ $\blacksquare$

(5) $\{P_k\}$ $(f,g)_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$

$P_0(x) \equiv 1$ $P_1(x) = x - c$ $P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$

$c_k = \frac{(x\, P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}$ $d_k = \frac{(P_{k-1}\ P_{k-1})}{(P_{k-2}\ P_{k-2})}$ zapamiętane z c_k i c_{k-1}

tylko dzielenie

1° $P_0(x) \equiv 1$ koszt 0

2° $P_1(x) = x - c_1$

$(P_0, P_0)_N \equiv N+1$ → koszt 1 dodawanie

$(xP_0, P_0)_N = \sum_{k=0}^{N} x_k$ → N dodawań

+ 1 dzielenie na c_1

+1 odejmowanie

N+3

3° $P_1(x_i)$ → N+1 odejmowań (tablicowane $x_i - c_1$)

$(P_1, P_1)_N = \sum_{k=0}^{N} P_1^2(x_k)$ → (N+1) mnożeń (N) dodawań

$(xP_1, P_1)_N = \sum_{k=0}^{N} x_i \underbrace{P_1^2(x_k)}_{\text{zapamiętane}}$ → (N+1) mnożeń N dodawań

+1 dzielenie (na c_2)

+1 dzielenie (na d_2)

+2 odejmowanie

+2 mnożenie

(na wzór P_k)

5N+9

4° $P_2(x_i)$ → (po 2 mnożenia i odejmowanie na punkt) → 2N+2 odej 2N+2 mnożeń

$(P_2, P_2)_N = \sum_{k=0}^{N} P_2^2(x_k)$ → (N+1) mnożeń N dodawań

$(xP_2, P_2)_N = \sum_{k=0}^{N} xP_2^2(x_k)$ → (N+1) mnożeń N dodawań

+1 dzielenie (c_3)

+1 dzielenie (d_3)

+2 odej. } wzór P_2

+2 mnoż

8N+12

itd.

operacje	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	...
+	0	N+1	2N	2N	2N	...
−	0	1	N+3	2N+4	2N+4	...
*	0	0	2N+4	4N+6	4N+6	...
/	0	1	2	2	2	...
razem	0	N+3	5N+9	8N+12	8N+12	...

(5) $Q_0(x)=1$

$Q_1(x)=x-c_1$

$Q_k(x)=(x-c_k)Q_{k-1}(x)-d_kQ_{k-2}(x) \quad k=2,3,\ldots,$

c_k, d_k - stałe

$B_{m+2}:=B_{m+1}:=0$

$B_k:=a_k+(x-c_{k+1})B_{k+1}-d_{k+2}B_{k+2} \quad (k=m,m-1,\ldots,0)$

wynik $:=B_0$

T: $B_0=\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x)$

D-d:

$a_k=B_k-(x-c_{k+1})B_{k+1}+d_{k+2}B_{k+2}$

więc:

$$\sum_{k=0}^{m} a_kQ_k(x)=\sum_{k=0}^{m}(B_k-(x-c_{k+1})B_{k+1}+d_{k+2}B_{k+2})Q_k=$$ (dzielimy na 3 sumy)

$$\sum_{k=0}^{m}B_kQ_k-\sum_{k=0}^{m-1}(x-c_{k+1})B_{k+1}-\underline{(x-c_{m+1})\overset{=0}{B_{m+1}}}+\sum_{k=0}^{m-2}d_{k+2}B_{k+2}Q_k+\underline{\overset{=0}{B_{m+1}}(\ldots)}+\underline{\overset{=0}{B_{m+2}}(\ldots)}$$

$$\sum_{k=0}^{m}B_kQ_k-\sum_{k=0}^{m-1}(x-c_{k+1})B_{k+1}+\sum_{k=0}^{m-2}d_{k+2}B_{k+2}Q_k$$ (chcemy po m-1 wyrazów)

$$B_0Q_0+B_1Q_1-(x-c_1)B_1Q_0+\sum_{k=2}^{m}B_kQ_k-\sum_{k=1}^{m-1}(x-c_{k+1})B_{k+1}Q_k+\sum_{k=0}^{m-2}d_{k+2}B_{k+2}Q_k=$$

$$B_0+B_1(\underbrace{Q_1-(\overset{=Q_1}{x-c_1})}_{0})+\sum_{k=2}^{m}(B_kQ_k-(x-c_k)B_kQ_{k-1}+d_kB_kQ_{k-2})$$

$$=B_0+0+\sum_{k=2}^{m}[B_k(\underbrace{Q_k\underbrace{-(x-c_k)\cancel{B_k}Q_{k-1}+d_k\cancel{B_k}Q_{k-2}}_{-Q_k}}_{0})]=\underline{B_0}$$

$Q_m(x)$

$a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}=0$ i $a_m=1$

⑥ P_0, P_1, P_2 ort. na $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$x_j = -10 + 5j \quad D_4 = \{-10, -5, 0, 5, 10\}$

I sposób (wzór rek.):

$P_0 \equiv 1$

$P_1 \equiv x - c_1$

$P_k \equiv (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$

$c_k = \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}$

$d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N}$

$P_0(x) \equiv 1$

$c_1 = \frac{(xP_0, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} = \frac{-10-5+0+5+10}{5} = 0$

$P_1(x) \equiv x - c_1 = x$

$c_2 = \frac{(xP_1, P_1)_4}{(P_1, P_1)_4} = \frac{\sum_{k=0}^{4} (x_k)^3}{} = 0$

$d_2 = \frac{(P_1, P_1)_4}{(P_0, P_0)_4} = \frac{\sum_{k=0}^{4} (x_k)^2}{5} = \frac{100+25+25+100}{5} = 50$

$P_2(x) = (x - c_2) \underset{x}{\underset{\parallel}{P_1(x)}} - d_k \underset{1}{\underset{\parallel}{P_0(x)}} = x^2 - 50$

II sposób: (ortogonalizacja):

$P_0(x) \equiv f_0(x) \equiv 1$

$P_k(x) \equiv f_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, P_j)_4}{(P_j, P_j)_4} P_j$

$P_1(x) = f_1 - \frac{(f_1, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} = x - \overset{-10-5+0+5+10}{0} = x$

$P_2(x) = f_2 - \frac{(f_2, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} P_0 - \frac{(f_2, P_1)_4}{(P_1, P_1)_4} P_1 =$

$x^2 - \frac{100+25+25+100}{5} \cdot 1 - \underset{=0}{\frac{-1000-125+125+1000}{-}} =$

$x^2 - 50$

7

	-10	-5	0	5	10
h	3	-5	-1	-5	3

$w_2^* \in \Pi_2$

$$\sum_{j=0}^{4} [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2 \to \min.$$

$$w_k^* = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \quad a_k = \frac{(h, P_k)_N}{(P_k, P_k)_N}$$

$$\left.\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= x^2 - 50 \end{aligned}\right\} \text{z 6 zad.}$$

$$a_0 = \frac{3-5-1-5+3}{5} = -1$$

$$a_1 = \frac{-30+25+0\cdot 1-25+30}{-} = 0$$

$$(h, P_2)_4 = 3(100-50) - 5(25-50) - 1(0-50) - 5(25-50) + 3(100-50)$$

$$150 + 125 + 50 + 125 + 150 = 600$$

$$(P_2, P_2)_4 = \sum_{k=0}^{4} (x_k^2 - 50)^2 = 2500 + 625 + 2500 + 625 + 2500 = 8750$$

$$a_2 = \frac{600}{8750} = \frac{12}{175}$$

$-\frac{24}{17} - \frac{1}{7}$

$$w_2^* = (-1)\cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{12}{175}(x^2 - 50) = \frac{12}{175}x^2 - \frac{31}{7}$$