indeks: 317328

Zadanie 0.

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Szukamy rozkładu $Z = X + Y$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Dokonujemy zamiany zmiennych:

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ V = Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = Z - Y = Z - V \\ Y = V \end{cases} \quad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$g(z,v) = f_{XY}(x(z,v), y(z,v)) \cdot |J|$$

X i Y są niezależne więc $f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$g(z,v) = f_X(z-v)\, f_Y(v) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \exp\left(-\frac{((z-v)-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} \exp\left(-\frac{(v-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

Szukany rozkład to: $\int_{-\infty}^{\infty} g(z,v)\,dv = g_Z(z)$

$$g(z,v) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2 \sigma_1 \sigma_2} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2((z-v)-\mu_1)^2 + \sigma_1^2(v-\mu_2)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)$$

Zajmijmy się najpierw licznikiem wykładnika (pomijam znak)

$$\sigma_2^2[z^2 - 2zv + v^2 - 2\mu_1(z-v) + \mu_1^2] + \sigma_1^2(v^2 - 2\mu_2 v + \mu_2^2)$$

Całkujemy po v więc je wyciągamy

$$v^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2v(\sigma_2^2 z - \sigma_2^2\mu_1 + \sigma_1^2\mu_2) + \sigma_2^2(z^2 - 2\mu_1 z + \mu_1^2) + \sigma_1^2\mu_2^2$$

$$v^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2v(\sigma_2^2(z-\mu_1) + \sigma_1^2\mu_2) + \underbrace{\sigma_2(z-\mu_1)^2 + \sigma_1^2\mu_2^2}_{k}$$

k ± reszta składników

Chcemy dopełnić do wzoru skróconego mnożenia:

ten: $v^2 - 2vb = v^2 - 2vb + b^2 - b^2 = (v-b)^2 - b^2$

Obecnie mianownik to: $2\sigma_1^2\sigma_2^2 \to \dfrac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Dzielimy licznik i mianownik przez $\sigma_1^2+\sigma_2^2$

$$b = \frac{\sigma_2^2(z-\mu_1) + \sigma_1^2\mu_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Czyli obecny licznik to:

$$(v-b)^2 - b^2 + \frac{k}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

Czyli obecnie:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\exp\left(-\frac{(v-b)^2 - b^2 + \frac{k}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\left(\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)}\right)dv$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}$$

Zauważamy że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}} \exp\left(\frac{-(v-b)^2}{2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2}\right)dv = 1$$

Dlatego, że w b nie ma zmiennej v, czyli to całka po gęstości rozkładu normalnego $N\left(b, \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$

Zostaje nam:

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{\frac{k}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - b^2}{2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2}\right)dv$$

Niech $\cancel{b = \frac{u}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}$ $b = \frac{u}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ i niech $\sigma_1^2+\sigma_2^2 = \sigma_3^2$, $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \sigma_3$

Zajmijmy się wykładnikiem (bez minusa):

$$\frac{\frac{k}{\sigma_3^2} - \left(\frac{u}{\sigma_3^2}\right)^2}{2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3}\right)^2} = \frac{\sigma_3^2 k - u}{2(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2}$$

$$\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\overbrace{(\sigma_2^2(z-\mu_1)^2+\sigma_1^2\mu_2^2)}^{k} - (\overbrace{\sigma_2^2(z-\mu_1)+\sigma_1^2\mu_2}^{u})^2}{2(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2}$$

Skrajne wyrazy kwadraty się upraszczają:

$$\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(z-\mu_1)^2 + \sigma_2^2\sigma_1^2\mu_2^2 - 2\sigma_2^2\sigma_1^2(z-\mu_1)\mu_2}{2(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2} = \quad // \sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$\frac{(z-\mu_1)^2 + \mu_2^2 - 2(z-\mu_1)\mu_2}{2\sigma_3^2} = \quad // \text{wzór skróconego mnożenia}$$

$$\frac{[(z-\mu_1)-\mu_2]^2}{2\sigma_3^2} = \frac{[z-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$$ – wykładnik (bez -)

Finalnie

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{[z-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right) dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{[z-(\mu_1+\mu_2)]^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)$$

Czyli $Z \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$