(2) $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 2$, $\varepsilon>0$, $a,b\in\mathbb{R}$ (a,b)

Policzymy $\int_a^b f(x)dx$ złożonym wzorem trapezów (bo mamy f'')

$I(f) = T_n(f) + R_n^T(f)$ ← błąd $\qquad h := \frac{b-a}{n}$

$T_n(f) = h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(t_k)$, $R_n^T(f) = \frac{-(b-a)h^2}{12} \underbrace{f''(\eta)}_{<2 \text{ z zał.}}$

Czyli musimy ustalić n

$$|R_n^T| = \left|\frac{-(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta)\right| < \left|\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot 2\right| = \frac{(b-a)^3}{6n^2} < \varepsilon$$

$$n^2 > \frac{(b-a)^3}{6\varepsilon}$$

Algorytm:

$n := \left\lceil \sqrt{\frac{(b-a)^3}{2}} \right\rceil$ ← sufit

$h := \frac{b-a}{n}$

$T := h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(a+hk)$ ← $t_k = a + hk$

Zwróć T

(3) $\int_{-\pi/5}^{\pi/2} \cos(3x - \pi/3)\,dx$, S_n - wzór Simpsona, $R_n \le 10^{-8}$

$\approx -0,09736276 \leftarrow \frac{\sin(3x - \frac{\pi}{3})}{3} + C$

$h := \frac{b-a}{n}$

$R_n = \frac{-h^4}{180}(b-a) f^{(4)}(\eta)$

cos -> -sin -> -cos -> sin -> cos

$f^{(4)}(x) = \underbrace{\cos(3x - \frac{\pi}{3})}_{\le 1} \cdot 3^4$

$b - a = \frac{7}{10}\pi$

$|R_n| \le \frac{(b-a)^5 \cdot 3^4}{180 n^4} = \frac{7^5 \pi^5 \cdot 3^4}{10^5 \cdot 180 n^4} \le 10^{-8}$

$n^4 \ge 10^3 \cdot 7^5 \pi^5 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{180}$

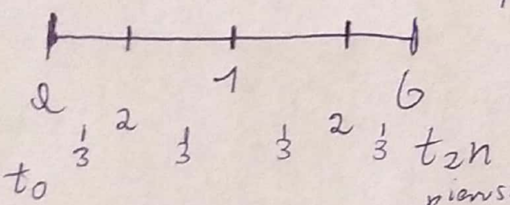
$n \ge 220$

(4) $T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right]$

gdzie $M_n(f) = h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right) \quad h_n = \frac{b-a}{n}$

$T_{2n} = h_{2n} \sum_{k=0}^{2n}{}'' f(t_k)$ – wzór trapezów (złożony)

Posumujmy osobno wyrazy o parzystych i nieparzystych indeksach



Mając T_n w T_{2n} nie trzeba liczyć wszystkich $f(t_k)$

pierwszy i ostatni wyraz o parzystym indeksie

$$T_{2n} = h_{2n} \sum_{k=0}^{n}{}'' f(t_{2k}) + h_{2n} \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1})$$

$$\boxed{h_n = \frac{b-a}{n} \ \wedge \ h_{2n} = \frac{b-a}{2n} \Rightarrow \frac{1}{2} h_n = h_{2n}}$$

$t_1, t_3, \ldots, t_{2n-1}$

$$T_{2n} = \underbrace{\frac{1}{2} h_n \sum_{k=0}^{n}{}'' (t_{2k})}_{\frac{1}{2} T_n} + \underbrace{\frac{1}{2} h_n \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1})}_{\frac{1}{2} M_n}$$

$a + \frac{2k}{2} h_n$
$a + k h_n$

$\to t_{2k-1} = a + (2k-1) h_{2n}$
$a + \frac{2k-1}{2} h_n$

Obliczamy 1-szą kolumnę z tego wzoru

Kolejne kolumny ze wzoru rekurencyjnego:

$$T_{i,j} = \frac{4^i T_{i-1,j+1} - T_{i-1,j}}{4^i - 1}$$

Można liczyć pamiętając tylko ostatnią kolumnę by zaoszczędzić pamięć.

$T_1 - T_{00}$
$T_2 - T_{01} \quad T_{10}$
$T_4 - T_{02} \quad T_{11} \quad T_{20}$
$T_8 - T_{03} \quad T_{12} \quad T_{21} \quad T_{30}$

Czyli obliczając $T_{i,j}$ potrzebujemy $\underbrace{T_{i-1,j+1}}_{\text{możemy nadpisać}}$, oraz $T_{i-1,j}$

⑥ Mamy policzyć $T_{11,0}$. Wartości funkcji potrzebujemy do policzenia pierwszej kolumny. $T_{11,0}$ odpowiada $T_{2^{11}}$

$x_0, x_1, \dots, x_{2048}$ – 2049 punktów

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5}{2048} \qquad n = 2^{11} = 2048 \qquad \int_{-1=a}^{4=b}$$

$$x_i = \cancel{-1} + a + hi$$

$$= -1 + \frac{5}{2048} i$$

7

$$\begin{cases} T_{0k} = T_{2^k} \\ T_{mk} = \dfrac{4^m T_{m-1\,k+1} - T_{m-1\,k}}{4^m - 1} \end{cases}$$

Chcemy pokazać, że ciąg elementów dowolnej kolumny jest zbieżny do $\int_a^b f(x)$

D-d (indukcja po m):

Dla $m=0$ mamy złożony wzór trapezów ($T_{0k} = T_{2^k}$), co pokazaliśmy w Zadaniu 1, że zbiega $\lim_{n\to\infty} T_{0,n} = I = \int_a^b f(x)dx$

Załóżmy że ciąg elementów $(m-1)$-kolumny zbiega do $\int_a^b f(x)$

Pokażemy, że ~~m-ta~~ ciąg elementów (m)-tej zbiega do I

$$\lim_{k\to\infty} T_{m,k} = \frac{4^m \lim(T_{m-1\,k+1}) - \lim(T_{m-1,k})}{4^m - 1} =$$

$$= \frac{4^m I - I}{4^m - 1} = \frac{(4^m - 1) I}{4^m - 1} = I$$

■