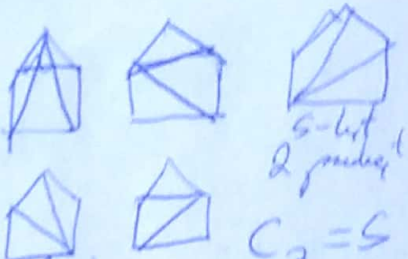
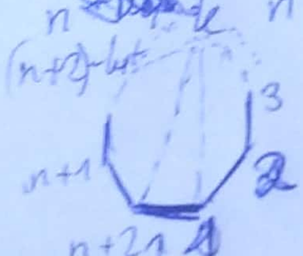
①

n = 1
3-kąt
0 przekątnych
$C_1 = 1$

n = 2
4-kąt
1 przekątna
$C_2 = 2$



n = 3
5-kąt
2 przekątne
$C_3 = 5$



n-kąt n-1 przekątne

Wybieramy przekątną z punktu ~~1~~ n+2 do punktu k

Mamy (n-1) możliwości (oprócz 1, n+2)

Zauważmy, że wybranie takiej przekątnej dzieli nasz (n+2)-kąt na k-kąt i $(n+2)-k+1 = (n+3-k)$-kąt

spr: $(n+2) + 2 - 1 = k + ((n+3) - k)$, czyli zgadza się liczba boków
dwa boki z przekątnej; baza [n+2, 1]

Liczymy te ~~mniejsze~~ k-kąty i (n+3-k)-kąty rekurencyjnie

$$d_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} d_k d_{n+3-k} = \underbrace{d_2 d_{n+1} + d_3 d_n + \dots + d_{n+1} d_2}_{\text{liczby Catalana}}$$

$d_1 = d_2 = 1$ (wybór figury tylko z jednej strony naszych przekątnych)
$d_3 = 1$

~~Zauważmy~~ Z tego wynika, że $d_{n+2} = C_n$ ■

zał: każdy wierzchołek 0 lub 2 synów
wierzchołek wewnętrzny - dwóch synów

② n=0  1

n=1  1

n=2   2

Ogólnie (dla n): Mamy n wierzchołków, jeden z nich jest korzeniem drzewa. Pozostałe (n-1) trzeba rozdzielić na lewe i prawe poddrzewo. Możemy dać 0 z lewej (n-1) z prawej, 1 z lewej (n-2) z prawej itd.

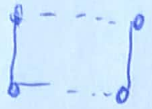
d_n - ~~ilość~~ liczba drzew binarnych z zadania z n - wierzchołkami wewnętrznymi

$$d_n = \sum_{i=0}^{n-1} d_i d_{n-i-1} = c_n$$ - liczby Catalana

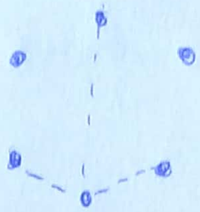
③ $n=0 : 1$

$n=1$:

$n=2$:



$n=3$:



1 sposób

2 sposoby

$c_3 = c_2 c_0 + c_1 c_1 + c_0 c_2 = 5$

Ogólnie: Mamy $2n$ osób

Wybieramy dowolną osobę. Możemy ją połączyć z n osobami, dlatego, że aby każda osoba wykonała uścisk to po połączeniu po obu stronach prostej musi być parzysta liczba ludzi.

Jeśli wybierzemy osobę tak by po prawej stronie prostej zostało 0 osób to po lewej zostanie $(n-1)$-par.

Podobnie -//- zostały 2 osoby to po lewej zostanie $(n-2)$-par

-//- $(n-1)$-pary to po lewej zostanie 0 osób

Skoro dzielimy na sumę mniejszych podproblemów to można je wyliczać rekurencyjnie

$c_0 = 1$

$c_1 = 1$

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i c_{n-i}$$ – liczba Catalana

Czyli n par osób może wykonać C_n uścisków.

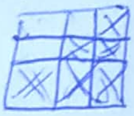
④ $n=1$:

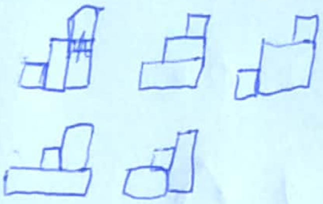
1 sposób

$n=2$:

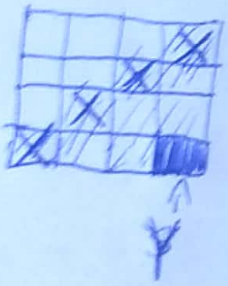
2 sposoby

$n=3$

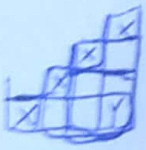




5 sposobów

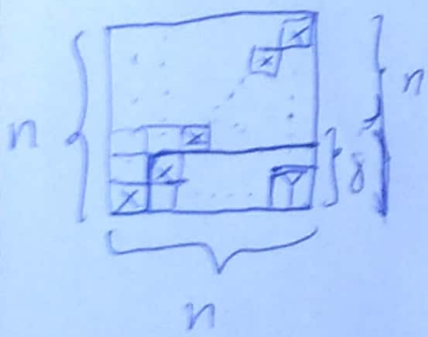


Oznaczamy pola na przekątnej X, takich jest n.
Pole w prawym dolnym rogu oznaczamy Y.
Zauważmy że któryś z prostokątów zawierających X musi też zawierać Y. Gdyby tak nie było mielibyśmy n prostokątów zawierających X i n+1 niezawierających X, a chcemy pokryć macierz n prostokątami



Z tego wiemy że nasza macierz będzie redukować się do przynajmniej o 1 mniejszej macierzy

Ustalmy wysokość prostokąta zawierającego Y jako $j \in \mathbb{N}$, $j \in [1, n]$. Ma on wtedy wymiary $j \times (n-j+1)$, bo musi też zawierać odpowiadający tej wysokości X.



Wybranie tego prostokąta odcieli macierz schodkową na ten prostokąt oraz schodki mniejszy $(n-j)\times(n-j)$ i $(j-1)\times(j-1)$

Czyli S_n – na ile sposobów można podzielić macierz n na schodkowy

n prostokątów

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} S_{n-j}S_{j-1}=\sum_{j=0}^{n-1} S_j S_{n-j-1}, \quad S_0=S_1=1$$

Więc $S_n = C_n$ – Liczby Catalana

MDL-7

⑤ $(\overset{a_0}{0}, \overset{a_1}{0}, \overset{a_2}{0}, \overset{a_3}{1}, \overset{a_4}{3}, 7, 15, 31, \ldots)$

$a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$a_3 = 1 \qquad a_n = 2a_{n-1} + 1$

$a_n = 2^{n-2} - 1 \;, n \geq 2$

$$A = x^3 + 3x^4 + 7x^5 + 15x^6 + 31x^7 + \ldots + a_n x^n$$

$$-3xA = 0 - 3x^4 - 9x^5 - 21x^6 - 45x^7 + \ldots + (-3x)a_{n-1}x^{n-1}$$

$$+2x^2A = 0 + 0 + 2x^5 + 6x^6 + 14x^7 + \ldots + (+2x^2)a_{n-2}x^{n-2}$$

$$\cancel{x}^3 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots + \underbrace{a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2}}$$

$$2^{n-2} - 1 \quad -3(2^{n-3} - 1) + 2(2^{n-4} - 1)$$

$$2 \cdot 2^{n-3} - \underline{1} - 3 \cdot 2^{n-3} + \underline{3} + 2^{n-3} \underline{- 2}$$

$$\underline{2^{n-3}(2 - 3 + 1) = 0}$$

$$A - 3xA + 2x^2A = x^3$$

$$A(1 - 3x + 2x^2) = x^3$$

$$\boxed{A = \frac{x^3}{1 - 3x + 2x^2}}$$

⑦ a) na dowolne składniki: $(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+\ldots)$

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$$

b) różne nieparzyste

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots$$

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+x^{2i-1})$$

c) mniejsze od m

$$\underbrace{(1+x+x^2+\ldots)}_{\text{składnik 1}}\underbrace{(1+x^2+\ldots)}_{\text{składnik 2}}\cdots\underbrace{(1+x^{(m-1)}+x^{2(m-1)}+\ldots)}_{(m-1)\text{-szy}}$$

$$\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{1-x^i}$$

d) różne potęgi 2

$$\underset{2^0}{(1+x)}\;\underset{2^1}{(1+x^2)}\;\underset{2^2}{(1+x^4)}\;\underset{2^3}{(1+x^8)}$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1+x^{2^i})$$