$$① \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} =$$

$$\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = P \quad \blacksquare$$

5) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$ (1)

D-d (przez indukcję po n):

(baza) $n := 0 \Rightarrow (a+b)^0 = 1$, $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ✓

krok: Załóżmy że (1) zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Pokażemy że (1) zachodzi dla $n+1$ czyli:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} = \underset{(i=n+1)}{a^{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + \underset{(i=0)}{b^{n+1}}$$

Lemat z wykładu: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $0 \le k < n$. Analogicznie dla $i = k-1$:

$1 \le i < n+1$

$$\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$$

$$L = (a+b)^{n+1} \overset{\text{zał. ind.}}{=} (a+b)\left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right) a^i b^{n+1-i} + b^{n+1} = \quad \text{(Lemat)}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} = P$$

$L = P$ ∎

MDL - ARTUR JANKOWSKI

(7) $n=0 \to 1$, $n=1 \to 2$, $n=2 \to 6$, $n \to 3 = 20$, $n \to 4 \to 70$

~~Ścieżka~~ Drogę dla szachownicy $n+1$ to ciąg liter:

G - oznacza ruch o jedno pole w górę

P - -//- prawo

Ciąg ten ma długość $(2n)$ liter, gdzie n liter to P i n liter to G

np: dla szachownicy 3×3 mamy $2 \cdot 2 = 4$ liter czyli ciąg

$|\{GGPP, PPGG, GPGP, PGPG, GPPG, PGGP\}| = 6$

~~jest~~ to ścieżki wieży z lewego dolnego rogu.

Uwaga: np dla ścieżki GGPP, jeśli wieża przejdzie 2 razy o 1 pole w prawo, a od razu przejdzie 2 pole w jednym ruchu to te ścieżki ~~jest nierozr~~ są nierozróżnialne.

Zatem musimy wybrać pozycje dla n liter z $2n$ możliwości. Takie same litery (nierozróżnialne): mamy więc $\binom{2n}{n}^{*}$ możliwości.

Zwinięcie sumy:

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Skorzystajmy z tożsamości Cauchy'ego z 3 zadania

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i},$$

Weźmy do wzoru $m := n$ i $r := n$. Wtedy

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$ Z wykładu wiemy, że $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, $0 \le i \le n$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}^{*}$$

Zatem skoro pokazaliśmy że mamy $\binom{2n}{n}$ możliwości wyboru takich dróg ~~ścieżki~~ dla $(n+1)\times(n+1)$ co jest zwinięciem sumy $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ - to też ten wzór opisuje liczbę dróg.

$\blacksquare$

MDL - Lista 2 ARTUR JANKOWSKI

(8) 1) $n^2 \in O(n^3)$ ✓

$\exists c>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n>n_0\ \underset{n^2}{\underset{||}{f(n)}} \le c\,\underset{n^3}{\underset{||}{g(n)}}$

$n^2 \le c n^3$

$n^2 - cn^3 \le 0$

$n^2(1-c) \le 0$ np: $c=1 \Rightarrow L=0$

2) $n^3 \in n^{2.99}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{(g(n))} = \infty$ to $f(n) \notin O(g(n))$ ✗

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^{2.99}} = \lim_{n\to\infty} n^{0.01} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Zatem $n^3 \notin n^{2.99}$

3) $2^{n+1} \in O(2^n)$ ✓

$2^{n+1} - c2^n \le 0$

$2^n(2-c) \le 0$ np: $c=2 \to L=0$

4) $(n+1)! \in O(n!)$ ✗

$(n+1)! < cn!$

$\cancel{n!}(n+1) < c\cancel{n!}$, ale n dowolne $\mathbb{N}$, nie istnieje stała $c \ge n$.

Zatem $(n+1)! \notin O(n!)$

5) $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$ ✓ $\log_2 x < x,\ x>0$

$\log_2 n = \log_2(\sqrt{n})^2 = 2\log_2\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$

$\log_2 n < 2\sqrt{n}$ czyli dla $c=2$ zachodzi $\exists c>0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n>n_0\ f(n) \le c\,g(n)$

$\log_2 n \in O(\sqrt{n})$

6) $\sqrt{n} \notin O(\log_2 n)$ ✗

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log_2 n} \overset{L-H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}\ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}\ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\ln 2} \cdot n^{1/2} \to \infty$

zatem $\sqrt{n} \notin O(\log_2 n)$

(5) MDL-LISTA ARTUR JANKOWSKI

idea (przykład): $n=8$, $k=3$

$$a_n = 1 \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1 \sqcup 1$$

B_{n-1}: 1 2 3 4 5 6 7

dla wyboru $X \subseteq B_{n-1}$, $X = \{2, 5\} \leftarrow k-1$ wyborów z B_{n-1}

$$s_1\, 1\, 1\, s_2\, 1\, 1\, 1\, s_3\, 1\, 1\, 1\, s_4 \rightarrow \underbrace{2+3+3}_{k=3 \text{ cyfry}} = 8$$

a_n - ciąg złożony z n jedynek, $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$

$B_n = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ - pozycje do wstawienia separatora.

1-sza pomiędzy 1-szą, a 2 jedynką w ciągu a_n, pozycja i-ta pomiędzy i-tym i $(i+1)$-szym elementem a_n.

Nie wstawiamy nigdy separatora przed ciągiem a_n bo wtedy któryś ze składników sumy byłby zerowy.

Aby podzielić ciąg a_n na k ~~...~~ części należy wstawić $k-1$ separatorów (s) (+2 na krańcach). Elementy ~~...~~ Kolejki

$C_{i_k}^{k}$ - podciągi zbudowane z powyższego podzielenia.

a^{i} ~~...~~ podciąg c^i leży pomiędzy s_i, a s_{i+1}.

Czyli musimy wybrać z $n-1$ pozycji na separatory, $k-1$ pozycji aby podzielić ciąg a_n na k podciągów niepustych

$$\binom{n-1}{k-1} \swarrow \blacksquare$$

MDL - ARTUR JANKOWSKI

(10) Z: $k < l$, f, g - wielomiany

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

T: $f(n) = o(g(n))$

D-d: $f(n) = o(g(n)) \iff \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^k(\overset{\to a_k}{a_k} + \overbrace{a_{k-1} x^{-1} + \ldots + a_0 x^{-k}}^{\to 0})}{\cancel{x^k}(b_l x^{l-k} + b_{l-1} x^{l-k-1} + \ldots + b_0 x^{-k})}$$

stąd, bo $l - k > 0$, $l > k$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_k + \ldots \to a_k}{b_l x^{l-k} \to \infty} = 0$$

Więc skoro $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ to $f(x) = o(g(x))$