ANL - 6 1/4

(1) $w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n} a_0 x^i$

$w_n := a_n$
$w_k := w_{k+1}x + a_k$
$(k=n-1, n-2, \dots, 0)$
$w(x)=w_0$

np. dla 3: α_i – dodawanie, β – mnożenie, $\alpha_3=0$

$$fl(w)=(((a_3(1+\alpha_3)x(1+\beta_3)+a_2)(1+\alpha_2)x(1+\beta_2)+a_1)(1+\alpha_1)x(1+\beta_1)+a_0)(1+\alpha_0)$$

$$\underbrace{a_3x^3\prod_{i=0}^{3}(1+\alpha_i)\prod_{i=1}^{3}(1+\beta_i)}_{\lesssim 7\cdot 2^{-t}}+\underbrace{a_2x^2\prod_{i=0}^{2}(1+\alpha_i)\prod_{i=1}^{2}(1+\beta_i)}_{\lesssim 5\cdot 2^{-t}}+\underbrace{a_1x\prod_{i=0}^{1}(1+\alpha_i)(1+\beta_1)}_{\lesssim 3\cdot 2^{-t}}+\underbrace{a_0(1+\alpha_0)}_{\lesssim 2^{-t}}$$

ogólnie:

$$fl(w)=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i x^i\prod_{k=0}^{i}(1+\alpha_k)\prod_{k=1}^{i}(1+\beta_k)\right) \quad (1)$$

$$fl(w)=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i x^i \underbrace{(1+\alpha_0)}_{\le 2^{-t}}\underbrace{\prod_{k=1}^{i}\left[(1+\alpha_k)(1+\beta_k)\right]}_{\lesssim (2i)2^{-t}}\right)$$

$$1+E=(1+\alpha_0)\prod_{k=1}^{i}\left[(1+\alpha_k)(1+\beta_k)\right]$$

$$|E|\lesssim(2i+1)2^{-t}$$

$$fl(w)\approx\sum_{i=0}^{n}(\underbrace{a_i(1+E)}_{\hat{a}_i}x^i)=\sum_{i=0}^{n}\hat{a}_i x^i$$

dokładny wynik dla mało zaburzonych danych

② Postać potęgowa: $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Postać Newtona: $\sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$

$$\begin{cases} W_n(x) = b_n \\ W_i(x) = W_{i+1}(x)(x-x_i) + b_i \quad (1) \\ \qquad i = n-1, n-2, \dots, 0 \end{cases}$$

Wtedy $W_0 = w(x)$

Wielomiany pomocnicze

$$W_i(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k x^{k-i}, \quad i = (n, n-1, \dots, 0)$$

$$W_n(x) = a_n x^{n-n} = a_n$$

$$W_{n-1}(x) = a_{n-1} + a_n x$$

$$W_{n-2}(x) = a_{n-2} + a_{n-1} x + a_n x^n$$

$$\vdots$$

$$W_0(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

ze wzoru (1): $a_n = b_n$ i

$$W_i(x) = W_{i+1}(x)(x-x_i) + b_i =$$

$$\sum_{k=i+1}^{n} a_k x^{k-i} - \sum_{k=i+1}^{n} a_k x^{k-(i+1)} x_i + b_i =$$

$$a_n x^{n-i} + \sum_{k=i+1}^{n-1} a_k x^{k-i} - \left(\sum_{k=i+2}^{n} a_k x^{k-(i+1)} x_i + a_{i+1} x_i\right) + b_i =$$

$$a_n x^{n-i} + \sum_{k=i+1}^{n-1} a_k x^{k-i} - \left(\sum_{k=i+1}^{n-i} a_{k+1} x^{k-i} x_i\right) + \left(b_i - (a_{i+1} x_i)\right) =$$

$$\underbrace{a_n x^{n-i}}_{\text{najwyższa potęga}} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n-i} (a_k - a_{k+1} x_i) x^{k-i}}_{\text{środkowe wyrazy}} + \underbrace{\left(b_i - (a_{i+1} x_i)\right)}_{\text{stała } (a_0)}$$

$$\begin{cases} a_n = b_n \\ a_i = b_i - a_{i+1} x_i \\ a_k = a_k - a_{k+1} x_i, \quad k = i+1, i+2, \dots, n-i \end{cases}$$

5/(5)

2 — 2 - b[n] - tablica wsp. postaci Newtona, dane
- x[n] - odpowiednie punkty

```
a[n] = b[n]
for (i = n-1; i ≥ 0; i = i-1) {
    a[i] = b[i]
    for (k = i; k ≤ n-1; k = k+1)
        a[k] = a[k] - x[i] • a[k+1]
}
return a
```

③ $w(x) = \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \ldots + c_n T_n(x)$

$$\begin{cases} B_{n+2} = B_{n+1} = 0 \\ B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + c_k \quad (k = n, n-1, \ldots, 0) \end{cases}$$

Wtedy $w(x) = \frac{B_0 - B_2}{2}$

$$w(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' c_k T_k(x)$$

$$w(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' (\overbrace{B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}}^{c_k}) T_k(x) =$$

$$= {\sum_{k=0}^{n}}' B_k T_k(x) - {\sum_{k=0}^{n}}' 2x B_{k+1} T_k(x) + {\sum_{k=0}^{n}}' (B_{k+2})(T_k(x)) =$$

$B_{n+1} = 0$
$B_{n+2} = 0$

$$= {\sum_{k=0}^{n}}' B_k T_k(x) - 2x {\sum_{k=0}^{n-1}}' B_{k+1} T_k(x) + {\sum_{k=0}^{n-2}}' B_{k+2} T_k(x) =$$

pierwsze dwa wyrazy z pierwszej sumy pierwszy z drugiej pozostawiamy) z trzeciej

$$\underbrace{\frac{1}{2} B_0 T_0(x) + B_1 T_1(x)} - x B_1 T_0(x) - \frac{1}{2} B_2 T_0(x) +$$

$$+ {\sum_{k=0}^{n-2}}' B_{k+2} T_{k+2}(x) - 2x {\sum_{k=0}^{n-2}}' B_{k+2} T_{k+1}(x) + {\sum_{k=0}^{n-2}}' B_{k+2} T_k(x) =$$

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$

$$\frac{1}{2} B_0 + \cancel{B_1 x} - \cancel{B_1 x} - \frac{1}{2} B_2 + {\sum_{k=0}^{n-2}}' B_{k+2} (\underbrace{T_{k+2}(x) - 2x T_{k+1}(x) + T_k(x)}_{=0})$$

$T_{k+2}(x) = 2x T_{k+1}(x) - T_k(x)$

$$\underline{\frac{1}{2}(B_0 - B_2)}$$

5) T_n, $n = 0, 1, \ldots$

$T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$

$T_k(x) = 2x T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \quad k = \{2, 3, \ldots\}$

$T_2(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) =$

$16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x =$

$16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 2x(16x^5 - 20x^3 + 5x) - (8x^4 - 8x^2 + 1) =$

$32x^6 - 40x^4 + 10x^2 - 8x^4 + 8x^2 - 1 =$

$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

---

6) $W(n)$:= „dla $T_n(x)$ $(n \geq 1)$, współczynnik przy x^n to 2^{n-1}, a przy x^{n-1} to 0" $\quad n = 0 \Rightarrow 1$

D-d (indukcja)

$W(1)$: $T_1(x) = \underbrace{1}_{2^{1-1}} \cdot x^1 + 0 \cdot x^0 \quad \checkmark$

$W(2)$: $T_2(x) = \underbrace{2}_{2^{2-1}} x^2 - 1 \cdot 0 x^1 \quad \checkmark$

Załóżmy własność $W(i)$ $\forall i \in \mathbb{N}_+$ $i \leq n$. Pokażmy $W(n+1)$

$T_{n+1}(x) \stackrel{def}{=} 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) = 2x(2^{n-1} x^n + 0 x^{n-1} + \ldots) - (2^{n-2} x^{n-1} + 0 x^{n-2} \ldots)$

$= \underbrace{2^n}_{2^{n+1-1} = 2^n} x^{n+1} + \underline{0} \cdot x^n$

Co należało pokazać, więc na mocy indukcji $W(n)$ jest spełnione $\forall n \in \mathbb{N}_+$ ∎

i) $|T_n(x)| \le 1$:

Wiemy że $|T_n(x)| = |\cos(n \cdot \arccos x)|$

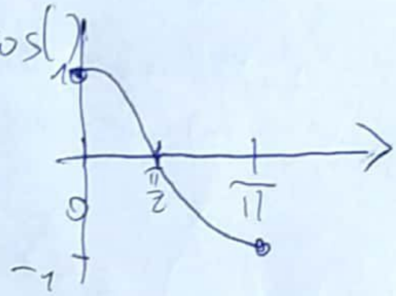
ale $\forall x, \cos x \in (-1,1)$ więc $|T_n(x)| \le 1$

ii) $|T_n(x)| = 1$

$|\cos(a)| = 1$, dla $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$n \arccos x = k\pi$ $\quad / \ T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$\arccos x = \frac{k\pi}{n}$ $\quad / \circ \cos()$



$x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ $\leftarrow$ dziedzina

$0 \le \frac{k\pi}{n} \le \pi$

$0 \le k \le n$

czyli $n+1$ punktów ekstremalnych $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$

T_j (cos-funkcja malejąca na $[0,\pi]$)

$1 = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n = -1$

iii) $T_{n+1} = \cos((n+1)\arccos x) = 0$

$\cos(x) = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$(n+1)\arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad // n+1$

$\arccos x = \dfrac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n+1}$ $\quad / \circ \cos()$

$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$

$\cancel{0 \le x_k \le \pi}$ $\quad 0 \le \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \le \pi$

$\cancel{0 \le}$ $\quad 0 \le 2k+1 \le 2n+2$

$-1 \le 2k \le 2n+1$

$-\frac{1}{2} \le k \le n + \frac{1}{2}$ ale $k \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z}$ $\quad k \in [0,n]$ $\quad 0 \le k \le n \rightarrow n+1$ miejsc zerowych

6) ~~a~~ Istnienie: chcemy żeby $\underset{\Pi_n}{\forall_{i \le n}}$ $L_n(x_i) = y_i$ — węzły

Rozważmy wzór $\lambda_i(x) = \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Liczymy $\lambda(x_k)$. Mamy dwa przypadki $(x_k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$

I) $k = i$

$$\lambda_i(x_k) = \lambda_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1$$

II) $k \ne i$

$$\lambda_i(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots \overbrace{(x_k - x_k)}^{0} \cdots (x_k - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_n)} = 0$$

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k \lambda_k(x_i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \ne i}}^{n} y_k \underbrace{\lambda_k(x_i)}_{=0\ (II)} + y_i \underbrace{\lambda_i(x_i)}_{=1\ (I)} = y_i$$

Zatem dla x_i, y_i, $L_n(x)$ jest wielomianem interpolującym

Jednoznaczność: Weźmy dowolne dwa wielomiany stopnia n;
$P(x), Q(x)$, które $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $P(x_i) = Q(x_i)$
Chcemy pokazać że wtedy muszą to być takie same wielomiany
Weźmy wielomian $R(x) := P(x) - Q(x)$
$R(x)$ jest stopnia co najwyżej n, jako różnica wielomianów stopnia n
Wiemy z założenia że dla $i \in \{1, \dots, n\}$ $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = 0$
Czyli $R(x)$ ma $n+1$ miejsc zerowych x_i, ale skoro jest stopnia co najwyżej n to $R(x) \equiv 0$
czyli $P(x) - Q(x) \equiv 0 \Rightarrow P(x) = Q(x)$
Czyli interpolacja Lagrange'a jest jednoznaczna

(7)

k	0	1	2	3
x_k	-3	-2	0	4
y_k	0	2	6	-10

$L_3(x) = \lambda_0 \underbrace{y_0}_{0} + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + y_3 \lambda_3$

$\lambda_0(x) = -$ (% 0)

$\lambda_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+3)(x)(x-4)}{(-2+3)(-2+0)(-2-4)} = \frac{1}{12}(x+3)(x-4)x$

$\lambda_2(x) = \frac{(x+3)(x-4)(x+2)}{(3)\cdot(-4)\cdot(2)} = -\frac{1}{24}(x+3)(x+2)(x-4)$

$\lambda_3(x) = \frac{(x+3)(x+2)x}{(7)(6)(4)} = \frac{1}{168}(x+3)(x+2)x$

$L_3(x) = \frac{1}{6}(x+3)(x-4)x - \frac{1}{4}(x+3)(x+2)(x-4) - \frac{10}{168}(x+3)(x+2)(x)$

$-\frac{x^3}{7} - \frac{5x^2}{7} + \frac{8x}{7} + 6 = -\frac{1}{7}(x+4)^3 + (x+4)^2 - \frac{6}{7}$

(8) a) Π_5, sześć punktów, z jednoznaczności $L_5(x) = f(x)$

b) $x_0 = -1$ $f(x) = 2020x^5 + 1977x^4 - 1410x^3 + 1945x - 1791$

$y_0 = f(-1) = -2369$

$x_1 = 0$ $y_1 = f(\overset{x_1}{0}) = -1791$

$x_2 = 1$ $y_2 = f(\overset{x_2}{1}) = 2741$

$L_2(f) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	-2369	-1791	2741

$\lambda_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x-1)}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{1}{2}(x)(x-1)$

$\lambda_1 = \frac{(x-1)(x+1)}{-1}$

$\lambda_2 = \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}x(x+1)$

$L_2(f) = -\frac{2369}{2}x(x-1) + 1791\underbrace{(x-1)(x+1)}_{=x^2-1} + \frac{2741}{2}x(x+1)$

$= 1977x^2 + 2555x - 1791$

$$⑨ \quad \lambda_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j} \quad k=0,1,\dots n, \quad w(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \lambda_k(x)$$

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$

Weźmy $f(x) \equiv 1$, z jednoznaczności $\overset{x_0,\dots,x_n}{w(x)\in\Pi_n}$

$$1=f(x)\equiv \underset{\substack{\uparrow \\ \text{interpolacja}}}{L_n}(f) = \sum_{k=0}^{n} \overset{=1}{f(x_k)} \lambda_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \quad ■$$

b) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j=0), \\ 0 & (j=1,2,\dots,n) \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^j, & (j=1,2,\dots,n) \quad (\text{I}) \\ 1, & (j=0) \quad (\text{II}) \end{cases}$$

I) $f(x)=x^j$, $w(x)\equiv x^j$, $j\neq 0$, $\underset{w(x)\in\Pi_n}{x_0,\dots,x_n, n\geq j}$

$$x_j \neq ▮ \quad x^j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) x_k^j$$

W szczególności $x:=0$

$$0^j = 0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j$$

II) $f(x)=1$, $w(x)$, $j=0$

z a) $\rightarrow$ $1 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) x_k^j$, $\quad x_k^j = x_k^0 = 1$

W szczególności:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0) x_k^j$$