(4) a) Po pokolorowaniu algorytmem podzielmy wierzchołki na klasy równoważności względem relacji bycia tego samego koloru. Zauważmy, że każde dwie klasy muszą być połączone, bo inaczej mogłyby być tego samego koloru. Skoro mamy k kolorów to jest k klas czyli

$$\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$ krawędzi pomiędzy nimi musi być (przynajmniej)

b) skoro użyto ~~k kolorów to~~ conajmniej $\lambda'(G)$ kolorów do pokolorowania G to z poprzedniego podpunktu ($k = \lambda'(G)$) liczba krawędzi wynosi:

$$\binom{G(\lambda')}{2} = \frac{G(\lambda')(G(\lambda')-1)}{2}$$

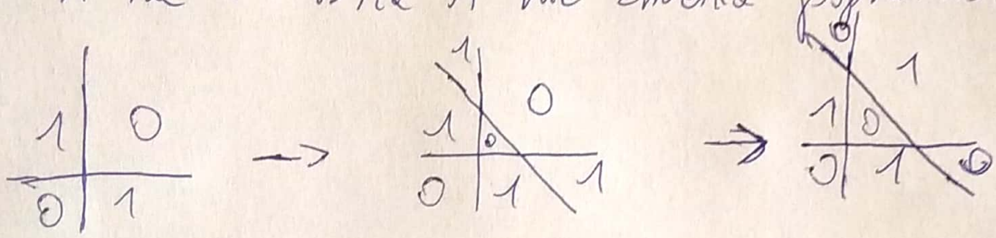
$\blacksquare$

(7)

T: Obszary wyznaczone przez dowolną (skończoną) liczbę prostych na płaszczyźnie da się pokolorować 2 kolorami tak że żadne dwa obszary o tym samym kolorze nie mają wspólnego boku.

D-d: Nazwijmy dwa kolory A i B. Zauważmy że zamienienie wszystkich A na B i B na A nie zmienia poprawności kolorowania. $A/B \to B/A$

np:



indukcja (n - liczba prostych):

1° $n=0$, obszar można pokolorować jednym kolorem.

2° Załóżmy że teza dla n zachodzi

3° Pokażmy że obszar wyznaczony przez $n+1$ prostych da się pokolorować.

Weźmy dowolny taki obszar. Zabierzmy jedną prostą. Powstały obszar można (z zał. ind.) pokolorować 2 kolorami. Stawiamy z powrotem $(n+1)$-prostą. Obecnie wszystkie obszary mające wspólny bok z $(n+1)$-szą prostą mają taki sam kolor. Zamieniamy, więc kolory po jednej ze stron i otrzymujemy kolorowanie płaszczyzny dla $n+1$ prostych ∎

(8) $2n$ uczniów, każdy ma n przyjaciół, n ławek

Stwórzmy graf, gdzie wierzchołki oznaczają uczniów, a bycie przyjaciółmi u i v oznaczamy krawędzią $\{u, v\}$

$G(V, E)$

Zauważmy że skoro każdy uczeń ma n przyjaciół to:

$\forall v \in V \ deg(v) \geq n$

1° Jeśli $n = 1$ to 2 przyjaciół można posadzić w jednej ławce

2° Jeśli $n > 1$ to mamy przynajmniej 4 uczniów i minimalny stopień $\delta(G) = n \geq \frac{|V|}{2} = \frac{2n}{2} = n$

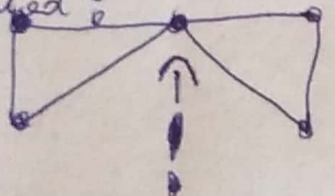
więc z tw. Diraca G zawiera cykl Hamiltona

Teraz jasne jest, że można usadzić ich na przynajmniej dwa sposoby (przesuwając wybory uczniów z cyklu o jeden).

∎

(10) $\deg(v) \geq \left(\frac{n-1}{2}\right)$ nie wystarcza w Tw. Diraca

Kontrprzykład:



$$\left(\frac{n-1}{2}\right) = 2 \qquad \delta(G) = 2$$

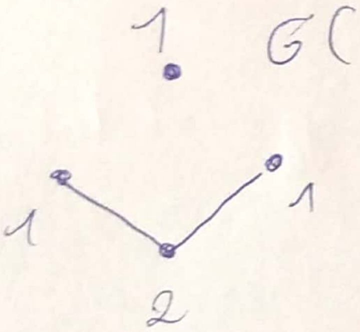
$\deg(v) \leq \frac{n-1}{2}$ ale nie ma cyklu Hamiltona w grafie G.

12) T: $\chi'(G)\,\chi'(\bar{G}) \geq n$

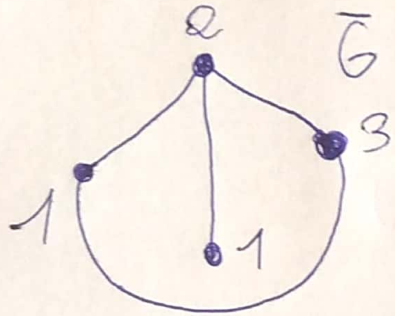
$\bar{G}$ - dopełnienie G, χ' - liczba chromatyczna

Z wykładu wiemy, że dla kliki K_n: $\chi'(K_n)=n$

np.



$G(V,E)$



$\bar{G}(V,E')$

Weźmy graf $G^*(V, E \cup E')$, zauważmy że to klika na N wierzchołkach. Pokolorujmy ją przy użyciu kolorowań G i $\bar{G}$.

Weźmy dowolny $v \in V$. Niech $k(v)$ - oznacza kolor v w grafie G.
$\bar{k}(v)$ - oznacza kolor v w grafie $\bar{G}$.

W grafie G^* v przypisujemy kolor $\{k(v), \bar{k}(v)\}$

(skoro kolorowanie k i $\bar{k}$ są dobre to żaden sąsiad v nie ma takiego samego koloru)

Mamy więc $n = \chi'(K_n) \leq \chi'(G) \cdot \chi'(\bar{G})$ ∎