1) $\langle a_n \rangle = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$

$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$

Chcemy $s_n = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_3, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n, \dots)$

$$A(x) \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) = a_0(1 + x + x^2 + \dots) + a_1 x (1 + x + x^2 + \dots) + \dots =$$

$$= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \dots + (a_0 + a_1 + \dots + a_n)x^n + \dots$$

Czyli $A(x)\left(\frac{1}{1-x}\right)$ to f. tworząca s_n

② a)
$a_n = (0, 1, 4, 9, \dots) = n^2$

$$\frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\cancel{1} + \cancel{0x} + 2x + \dots + nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad / \cdot x$$

$$\frac{d}{dx}\left(x + 2x^2 + \dots + nx^n\right) = \frac{1}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

$$1 + 4x + 9x^2 + \dots = \frac{x+1}{(1-x)^3} \quad / \cdot x$$

$$0 + x + 4x^2 + 9x^3 + \dots = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

b) $a_n = (0, 1, 8, 27, \dots) = n^3$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \quad \Leftarrow \text{z poprzedniego podpunktu}$$

$$// \left[\frac{d}{dx}(\;)\right] \cdot x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$$

$$\frac{[x(x+1)]'(1-x)^3 - x(x+1)[(1-x)^3]'}{(1-x)^6}$$

$$\frac{(2x+1)(1-x)^3 - (x^2+x)(-3(1-x)^2)}{(1-x)^6}$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!\, n!} x^n = \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)x^n = \frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k}\right)^{(k)}$$

$x^k + x^{k+1} + x^{k+2} + \dots$ k-ta pochodna

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{x^k}{1-x}\right)^{(k)}$$

np: $\binom{n+5}{5} x^5 = (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)x^5$

$$(x^{n+k})' = (n+k)\, x^{n+k-1}$$

$$(x^{n+k})^{(k)} = (n+k)\cdots(n+1)x^n$$

3 a) $a_n = \begin{cases} n, & n \text{ parzyste} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$

$(0, 1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots)$

$(0, 0, 2, 0, 4, \dots)$

$A(x) = 2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \dots$

$\frac{1}{1-x^2} = \cancel{1}\, 1 + x^2 + x^4 + \dots \quad / \frac{d}{dx}[\ ]$

$\frac{2x}{1-x^2} = 2x + 4x^3 + \dots \quad / \cdot x$

$\cancel{\frac{2x^2}{1-x^2} = 2x^2 + 4x^4 + \dots}$

$(0, 1, 0, \frac{1}{3}, \dots) - \int_0^x (1 + x^2 + x^4 + \dots)$

$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

$\int \left(\frac{1}{1-x^2}\right) dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

$\int \frac{1}{1-x^2} = \int \frac{A}{1-x} + \int \frac{B}{1+x} = \frac{(A-B)x + (A+B)}{1-x^2} \qquad \begin{cases} 0 = A - B \\ 1 = A + B \end{cases} \to \frac{1}{2} = A = B$

$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{1+x} dx \right) = \frac{1}{2}\left(\ln(|1+x|) + \ln|1-x| \right) + C$

finalnie: $\boxed{\frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$

b) $\int \frac{1}{1-x} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \to x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

$(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots)(1 + x^2 + x^3 + \dots) =$

$x + x^2 + \frac{x^2}{2} + x^3 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots =$

$1x + (1 + \frac{1}{2})x^2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 + \dots + (1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n})x^n$ — cel $(0, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots, 1 + \dots + \frac{1}{n})$

finalnie $\boxed{\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

(4) $b_n = (a_0, 0, 0, e_3, 0, 0, e_6)$ $\qquad c^3 = 1$

$e_n = (e_0, e_1, e_2, e_3, \dots)$ $\qquad (c-1)(c^2+c+1)=0$

$c_1 = 1 \qquad c = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1$ itd. $\quad c_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \quad c_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 = 1 = c_1$ itd.

rozwiązania są cykliczne

Weźmy $e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \dots$

$A(x), A\left(\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)(x)\right) = e_0 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} e_1 x + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} e_2 x^2 + e_3 x^3 + \dots$

$A\left(\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)(x)\right) = e_0 + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} e_1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} e_2 + e_3 x^3 + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} e_4 x^4 + \dots$

$$\frac{A(x) + A\left(\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)x\right) + A\left(\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)x\right)}{3} = \underbrace{\frac{3e_0 x}{3}}_{=e_0} + \underbrace{\frac{1+\left(\frac{-1+\sqrt{5}i}{2}\right)+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)}{3}}_{=0} e_1 x$$

$$+ \frac{1+\left(-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)+\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)}{3} e_2 x^2 + \underbrace{\frac{3e_3}{3}}_{=e_3} x^3 + \dots \text{ cykliczne}$$

czyli $b_{3k} = e_{3k}$

oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$

Funkcja tworząca b_n jest $\frac{A(x) + A\left(\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)x\right) + A\left(\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)x\right)}{3}$

⑥ $\langle x_k \rangle, \langle y_k \rangle \in V$, $\{0,1\} \in x_k, y_k$

$$\overbrace{(1,1,0,0,1,\ldots,1,1,0,\ldots,0,1,0)}^{c}$$
$$(1,1,0,0,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0,1,0)$$

ciągi zerojedynkowe, długości k

$$\{x_k, y_k\} \in Q_k \iff \exists_c \left[(x_c \neq y_c) \wedge \forall_{\bar{c} \neq c} (x_{\bar{c}} = y_{\bar{c}}) \right]$$

wierzchołki są sąsiednie, gdy różnią się tylko jedną współrzędną

Dla dowolnego ciągu k-elem, ciągów różniących się dokładnie jedną współrzędną jest k

Wierzchołków jest 2^k – tyle co ciągów 0-1, k-długości

$\uparrow \{0,1\}$

Wiemy że $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ (z wykładu)

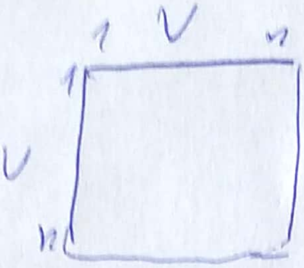
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wierzchołków}}}{2^k} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sąsiadów}}}{k} = 2|E| \Rightarrow |E| = 2^{k-1} k$$

Ma 2^k wierzchołków i $2^{k-1}k$ krawędzi.

(8) Macierz sąsiedztwa M

$M[i,j]=1 \iff \{i,j\} \in E$

$|V|=n \quad |E|=m$



Lista

$L(v)$ – lista sąsiadów wierzchołka v

$\forall v \in V \; L(v)$

a) oblicz stopień wierzchołka i, $deg(v_i)$

Macierz – dla grafu nieskierowanego: $O(|V|)$ – przejście po wierszu lub kolumnie i zsumowanie

– dla grafu skierowanego: $O(2|V|)$ – kolumna i ~~macierz~~ wiersz – suma elementów

~~Macierz sąsiedztwa~~ Lista – dla grafu nieskierowanego: Policzenie $|L(v_i)|$ $= deg(v_i)$ czyli tyle co stopień i operacji

– dla grafu skierowanego: Dla każdego elementu $v_{j \neq i}$ sprawdzić czy zawiera v_i na liście $L(v_j)$ oraz dla listy v_i policzyć długość $O(|E| + deg(v_i))$

b) przeglądaj wszystkie krawędzie

Macierz – $O(n^2)$ – każdy element n^n

Lista – $O(|E|)$ – dla każdej listy jej elementy

c) sprawdź czy (u,v) krawędzią

Macierz – $M[u,v] = O(1)$

Lista – $O(deg(v_u))$ – przeglądamy listę $L(v_u)$, pesymistycznie całą

d) usuń (u,v)

Macierz – $O(1)$ – $M[u,v] = M[u,v] - 1$

Lista – $O(deg(v_u))$ – przeglądamy listę, jak znajdziemy v_v to przepinamy wskaźniki w $O(1)$

e) wstaw (u,v)

Macierz – $O(1)$ jeśli v już jest w grafie $M[u,v] = M[u,v]+1$

– $O(n^2)$ w.p.p., budujemy nową tablicę

Lista – dopinamy na końcu $L(v_u)$ w $O(1)$