Solución - Certamen 1 Electromagnetismo 2022 Recuperativo

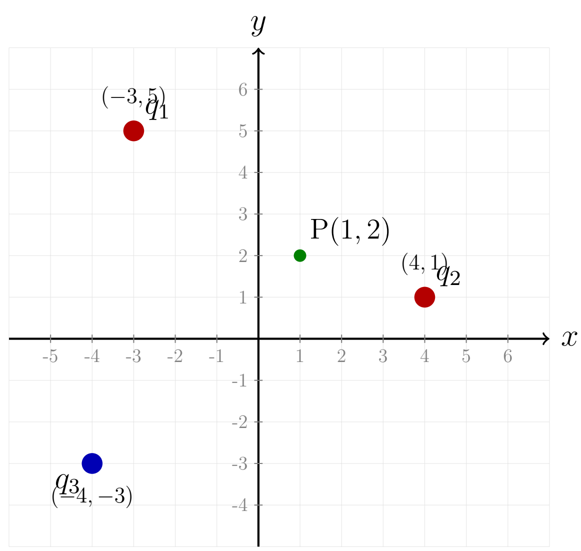
Electromagnetismo Asistente

Problema 1: Cargas Puntuales (30 puntos)

Enunciado

Tres cargas puntuales se ubican en un sistema de referencia:

- $q_1 = 1{,}5$ nC en $(-3, 5)$ cm
- $q_2 = 3{,}5$ nC en $(4, 1)$ cm
- $q_3 = -1{,}8$ nC en $(-4, -3)$ cm



Datos Numéricos

$$
\begin{aligned}
&q_1 = 1{,}5 \text{ nC} = 1{,}5 \times 10^{-9} \text{ C} \quad \text{en } \vec{r}_1 = (-0{,}03, 0{,}05) \text{ m}\\
&q_2 = 3{,}5 \text{ nC} = 3{,}5 \times 10^{-9} \text{ C} \quad \text{en } \vec{r}_2 = (0{,}04, 0{,}01) \text{ m}\\
&q_3 = -1{,}8 \text{ nC} = -1{,}8 \times 10^{-9} \text{ C} \quad \text{en } \vec{r}_3 = (-0{,}04, -0{,}03) \text{ m}\\
&K = 9 \times 10^{9} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}
$$

Parte (a): Fuerza eléctrica neta sobre q_2 (16 puntos)

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

Análisis Cualitativo

- $q_1 \to q_2$: Ambas positivas $\Rightarrow$ **Repulsiva**
- $q_3 \to q_2$: Signos opuestos $\Rightarrow$ **Atractiva**

Cálculo de $\vec{F}_{12}$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0{,}04 - (-0{,}03), 0{,}01 - 0{,}05) = (0{,}07, -0{,}04) \text{ m}$$
$$||\vec{r}_{12}|| = \sqrt{(0{,}07)^2 + (-0{,}04)^2} = \sqrt{0{,}0049 + 0{,}0016} = \sqrt{0{,}0065} = 0{,}0806 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{Kq_1q_2}{||\vec{r}_{12}||^3}\vec{r}_{12} = \frac{(9\times10^9)(1{,}5\times10^{-9})(3{,}5\times10^{-9})}{(0{,}0806)^3}(0{,}07, -0{,}04)$$
$$\vec{F}_{12} = \frac{4{,}725\times10^{-8}}{5{,}236\times10^{-4}}(0{,}07, -0{,}04)$$
$$\vec{F}_{12} = 9{,}024\times10^{-5}\cdot(0{,}07, -0{,}04)$$
$$\vec{F}_{12} = \boxed{(6{,}32\hat{x} - 3{,}61\hat{y})\times10^{-6} \text{ N}}$$

Cálculo de $\vec{F}_{32}$

$$\vec{r}_{32} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = (0{,}04 - (-0{,}04), 0{,}01 - (-0{,}03)) = (0{,}08, 0{,}04) \text{ m}$$
$$||\vec{r}_{32}|| = \sqrt{(0{,}08)^2 + (0{,}04)^2} = \sqrt{0{,}0064 + 0{,}0016} = \sqrt{0{,}008} = 0{,}0894 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{32} = \frac{Kq_3q_2}{||\vec{r}_{32}||^3}\vec{r}_{32} = \frac{(9\times10^9)(-1{,}8\times10^{-9})(3{,}5\times10^{-9})}{(0{,}0894)^3}(0{,}08, 0{,}04)$$
$$\vec{F}_{32} = \frac{-5{,}67\times10^{-8}}{7{,}147\times10^{-4}}(0{,}08, 0{,}04)$$
$$\vec{F}_{32} = -7{,}934\times10^{-5}\cdot(0{,}08, 0{,}04)$$
$$\vec{F}_{32} = \boxed{(-6{,}35\hat{x} - 3{,}17\hat{y})\times10^{-6} \text{ N}}$$

Nota: El signo negativo indica atracción (fuerza hacia q_3).

Fuerza Neta

$$F_x = (6{,}32 - 6{,}35) \times 10^{-6} = -0{,}03 \times 10^{-6} \text{ N}$$
$$F_y = (-3{,}61 - 3{,}17) \times 10^{-6} = -6{,}78 \times 10^{-6} \text{ N}$$

RESULTADO - Fuerza sobre q_2

$$\vec{F}_{neta} = (-0{,}03\hat{x} - 6{,}78\hat{y}) \times 10^{-6} \text{ N}$$
$$||\vec{F}_{neta}|| = 6{,}78 \times 10^{-6} \text{ N} = 6{,}78 \ \mu\text{N}$$
$$\theta \approx -90^\circ \text{ (casi vertical hacia abajo)}$$

Parte (b): Campo eléctrico neto en P(1,2) cm (14 puntos)

El punto P está en $\vec{r}_P = (0{,}01, 0{,}02)$ m.

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Campo $\vec{E}_1$ (de q_1 en P)

$$\vec{r}_{1P} = \vec{r}_P - \vec{r}_1 = (0{,}01 - (-0{,}03), 0{,}02 - 0{,}05) = (0{,}04, -0{,}03) \text{ m}$$
$$||\vec{r}_{1P}|| = \sqrt{(0{,}04)^2 + (-0{,}03)^2} = 0{,}05 \text{ m}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{Kq_1}{||\vec{r}_{1P}||^3}\vec{r}_{1P} = \frac{(9 \times 10^9)(1{,}5 \times 10^{-9})}{(0{,}05)^3}(0{,}04, -0{,}03)$$
$$\vec{E}_1 = \frac{13{,}5}{1{,}25 \times 10^{-4}}(0{,}04, -0{,}03) = 1{,}08 \times 10^5 \cdot (0{,}04, -0{,}03)$$
$$\vec{E}_1 = \boxed{(4320\hat{x} - 3240\hat{y}) \text{ N/C}}$$

Campo $\vec{E}_2$ (de q_2 en P)

$$\vec{r}_{2P} = \vec{r}_P - \vec{r}_2 = (0{,}01 - 0{,}04, 0{,}02 - 0{,}01) = (-0{,}03, 0{,}01) \text{ m}$$
$$||\vec{r}_{2P}|| = \sqrt{(-0{,}03)^2 + (0{,}01)^2} = \sqrt{0{,}001} = 0{,}03162 \text{ m}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Kq_2}{||\vec{r}_{2P}||^3}\vec{r}_{2P} = \frac{(9 \times 10^9)(3{,}5 \times 10^{-9})}{(0{,}03162)^3}(-0{,}03, 0{,}01)$$
$$\vec{E}_2 = \frac{31{,}5}{3{,}162 \times 10^{-5}}(-0{,}03, 0{,}01) = 9{,}962 \times 10^5 \cdot (-0{,}03, 0{,}01)$$
$$\vec{E}_2 = \boxed{(-29886\hat{x} + 9962\hat{y}) \text{ N/C}}$$

Campo $\vec{E}_3$ (de q_3 en P)

$$\vec{r}_{3P} = \vec{r}_P - \vec{r}_3 = (0{,}01 - (-0{,}04), 0{,}02 - (-0{,}03)) = (0{,}05, 0{,}05) \text{ m}$$
$$||\vec{r}_{3P}|| = \sqrt{(0{,}05)^2 + (0{,}05)^2} = 0{,}05\sqrt{2} = 0{,}0707 \text{ m}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Kq_3}{||\vec{r}_{3P}||^3}\vec{r}_{3P} = \frac{(9 \times 10^9)(-1{,}8 \times 10^{-9})}{(0{,}0707)^3}(0{,}05, 0{,}05)$$
$$\vec{E}_3 = \frac{-16{,}2}{3{,}536 \times 10^{-4}}(0{,}05, 0{,}05) = -4{,}583 \times 10^4 \cdot (0{,}05, 0{,}05)$$
$$\vec{E}_3 = \boxed{(-2291\hat{x} - 2291\hat{y}) \text{ N/C}}$$

Campo Total

$$E_x = 4320 - 29886 - 2291 = -27857 \text{ N/C}$$
$$E_y = -3240 + 9962 - 2291 = 4431 \text{ N/C}$$

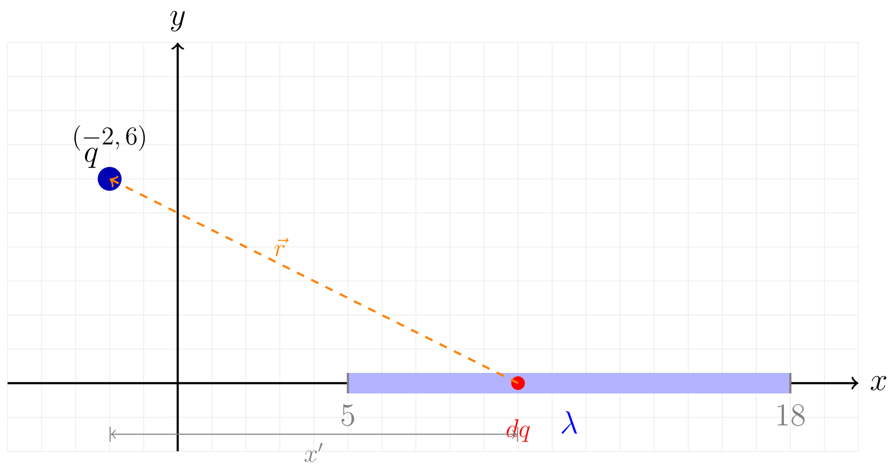
RESULTADO - Campo en P(1,2)

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{total} &= (-27857\hat{x} + 4431\hat{y}) \text{ N/C} \\
&= (-2{,}79\hat{x} + 0{,}44\hat{y}) \times 10^4 \text{ N/C} \\
||\vec{E}_{total}|| &= \sqrt{(27857)^2 + (4431)^2} = 28207 \text{ N/C} \approx 2{,}82 \times 10^4 \text{ N/C} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{4431}{-27857}\right) = 170{,}96^\circ
\end{aligned}$$

Problema 2: Barra con Carga Distribuida (29 puntos)

Enunciado

Una barra con densidad lineal de carga uniforme $\lambda = 3{,}6$ [nC/m] se ubica sobre el eje x, entre $x = 5$ [cm] y $x = 18$ [cm]. En el punto $(-2, 6)$ [cm] se ubica una carga puntual $q = -16$ [nC].



Datos Numéricos

$$\begin{aligned}
\lambda &= 3{,}6 \text{ nC/m} = 3{,}6 \times 10^{-9} \text{ C/m} \\
x_1 &= 5 \text{ cm} = 0{,}05 \text{ m}, \quad x_2 = 18 \text{ cm} = 0{,}18 \text{ m} \\
\text{Punto P} &= (-2, 6) \text{ cm} = (-0{,}02, 0{,}06) \text{ m} \\
q &= -16 \text{ nC} = -16 \times 10^{-9} \text{ C} \\
K &= 9 \times 10^{9} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}$$

Parte (a): Campo eléctrico de la barra en P (22 puntos)

Configuración Geométrica

Un elemento diferencial de carga $dq = \lambda\, dx'$ se ubica en $(x', 0)$ donde $x' \in [0{,}05, 0{,}18]$ m. El punto P está en $(-0{,}02, 0{,}06)$ m.

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_P - \vec{r}_{dq} = (-0{,}02 - x', 0{,}06 - 0) = (-0{,}02 - x', 0{,}06) \\
||\vec{r}||^2 &= (-0{,}02 - x')^2 + (0{,}06)^2 = (x' + 0{,}02)^2 + 0{,}0036
\end{aligned}$$

Campo Diferencial

$$d\vec{E} = \frac{K\, dq}{||\vec{r}||^3}\vec{r} = \frac{K \lambda\, dx'}{[(x' + 0{,}02)^2 + 0{,}0036]^{3/2}} \cdot (-0{,}02 - x', 0{,}06)$$

Sustitución de Variables

Sea $u = x' + 0{,}02$, entonces $du = dx'$.
Cuando $x' = 0{,}05 \Rightarrow u_1 = 0{,}07$ m
Cuando $x' = 0{,}18 \Rightarrow u_2 = 0{,}20$ m
Sea $a = (0{,}06)^2 = 0{,}0036$ m^2

$$d\vec{E} = \frac{K\lambda\, du}{(u^2+a)^{3/2}} \cdot (-u, 0{,}06)$$

Integración de Componentes

Componente E_x:

$$E_x = -K\lambda \int_{0{,}07}^{0{,}20} \frac{u\, du}{(u^2+a)^{3/2}}$$

Usando la integral $\displaystyle\int \frac{u\, du}{(u^2+a)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2+a}}$:

$$\begin{aligned}
E_x &= -K\lambda \left[-\frac{1}{\sqrt{u^2+a}}\right]_{0{,}07}^{0{,}20} \\
E_x &= K\lambda \left[\frac{1}{\sqrt{u^2+0{,}0036}}\right]_{0{,}07}^{0{,}20} \\
E_x &= K\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{0{,}04+0{,}0036}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}0049+0{,}0036}}\right) \\
E_x &= K\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{0{,}0436}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}0085}}\right) \\
E_x &= K\lambda \left(\frac{1}{0{,}2088} - \frac{1}{0{,}0922}\right) \\
E_x &= K\lambda(4{,}789 - 10{,}846) = -6{,}057 \cdot K\lambda
\end{aligned}$$

$$E_x = -6{,}057 \times (9 \times 10^9) \times (3{,}6 \times 10^{-9}) = -196{,}2 \text{ N/C}$$

Componente E_y:

$$E_y = K\lambda \cdot 0{,}06 \int_{0{,}07}^{0{,}20} \frac{du}{(u^2+a)^{3/2}}$$

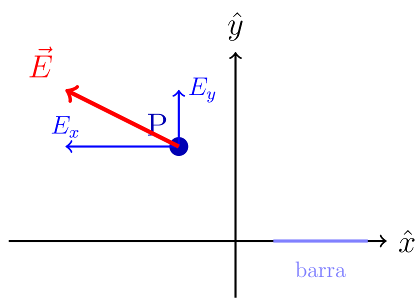
Usando la integral $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+a)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{u^2+a}}$:

$$
\begin{aligned}
E_y &= 0{,}06 \cdot K\lambda \left[\frac{u}{0{,}0036\sqrt{u^2 + 0{,}0036}} \right]_{0{,}07}^{0{,}20} \\
E_y &= \frac{0{,}06 \cdot K\lambda}{0{,}0036} \left(\frac{0{,}20}{\sqrt{0{,}0436}} - \frac{0{,}07}{\sqrt{0{,}0085}} \right) \\
E_y &= 16{,}667 \cdot K\lambda \left(\frac{0{,}20}{0{,}2088} - \frac{0{,}07}{0{,}0922} \right) \\
E_y &= 16{,}667 \cdot K\lambda(0{,}9578 - 0{,}7592) \\
E_y &= 16{,}667 \times 0{,}1986 \times K\lambda = 3{,}310 \cdot K\lambda
\end{aligned}
$$

$$
E_y = 3{,}310 \times (9 \times 10^9) \times (3{,}6 \times 10^{-9}) = 107{,}2 \text{ N/C}
$$

RESULTADO - Campo de la Barra en P

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{barra} &= (-196{,}2\hat{x} + 107{,}2\hat{y}) \text{ N/C} \\
||\vec{E}_{barra}|| &= \sqrt{(196{,}2)^2 + (107{,}2)^2} = 223{,}6 \text{ N/C} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{107{,}2}{-196{,}2} \right) = 151{,}3^\circ
\end{aligned}
$$



Parte (b): Fuerza eléctrica sobre q (7 puntos)

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= q \cdot \vec{E}_{barra} \\
\vec{F} &= (-16 \times 10^{-9}) \cdot (-196{,}2\hat{x} + 107{,}2\hat{y}) \\
\vec{F} &= (3{,}14\hat{x} - 1{,}72\hat{y}) \times 10^{-6} \text{ N}
\end{aligned}
$$

RESULTADO - Fuerza sobre q

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (3{,}14\hat{x} - 1{,}72\hat{y}) \times 10^{-6}\ \mathrm{N} \\ &= (3{,}14\hat{x} - 1{,}72\hat{y})\ \mu\mathrm{N} \\ \|\vec{F}\| &= \sqrt{(3{,}14)^2 + (-1{,}72)^2} \times 10^{-6} = 3{,}58\ \mu\mathrm{N} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{-1{,}72}{3{,}14}\right) = -28{,}7^\circ\end{aligned}$$

Interpretación Física

La carga q es negativa, por lo tanto la fuerza tiene dirección **opuesta** al campo eléctrico:

- El campo apunta hacia el segundo cuadrante ($-\hat{x}$, $+\hat{y}$)
- La fuerza apunta hacia el cuarto cuadrante ($+\hat{x}$, $-\hat{y}$)
- La carga negativa es atraída hacia la barra positiva

Solución generada por Electromagnetismo Asistente