Solución - Certamen 1 Electromagnetismo 02/10/2024

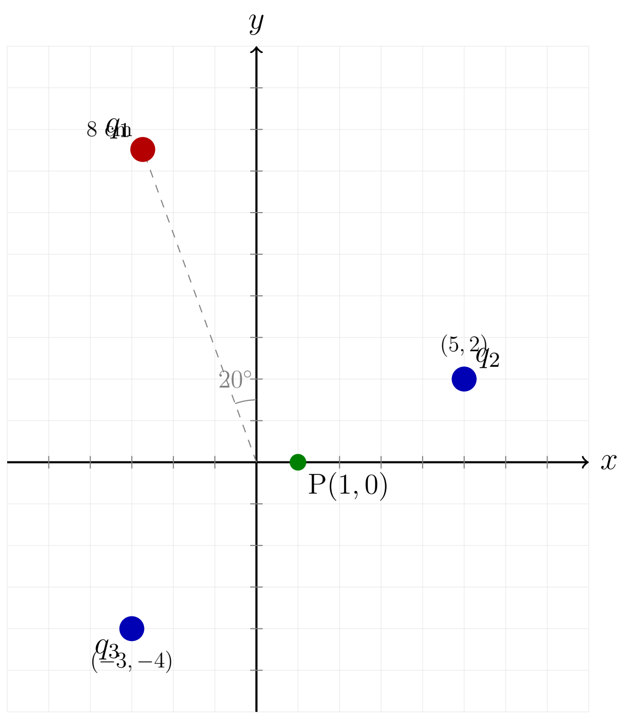
Electromagnetismo Asistente

Problema 1: Tres Cargas Puntuales (29 puntos)

Enunciado

Tres cargas puntuales se ubican en un sistema de referencia:

- $q_1 = 11{,}8$ nC a 8,0 cm del origen, formando 20° con el eje y
- $q_2 = -31{,}5$ nC en $(5, 2)$ cm
- $q_3 = -10{,}3$ nC en $(-3, -4)$ cm



Datos Numéricos

Posición de q_1 (a 8 cm del origen, 20° desde el eje y):

$$x_1 = -8\sin(20^\circ) = -8 \times 0{,}342 = -2{,}736 \text{ cm} = -0{,}02736 \text{ m}$$
$$y_1 = 8\cos(20^\circ) = 8 \times 0{,}940 = 7{,}518 \text{ cm} = 0{,}07518 \text{ m}$$

$$
\begin{aligned}
&q_1 = 11{,}8 \text{ nC} = 11{,}8 \times 10^{-9} \text{ C} \quad \text{en } \vec{r}_1 = (-0{,}02736, 0{,}07518) \text{ m} \\
&q_2 = -31{,}5 \text{ nC} = -31{,}5 \times 10^{-9} \text{ C} \quad \text{en } \vec{r}_2 = (0{,}05, 0{,}02) \text{ m} \\
&q_3 = -10{,}3 \text{ nC} = -10{,}3 \times 10^{-9} \text{ C} \quad \text{en } \vec{r}_3 = (-0{,}03, -0{,}04) \text{ m} \\
&K = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}
$$

Parte (a): Fuerza eléctrica neta sobre q_2

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

Análisis Cualitativo

- $q_1 \to q_2$: $q_1 > 0$, $q_2 < 0 \Rightarrow$ **Atractiva** (hacia q_1)
- $q_3 \to q_2$: $q_3 < 0$, $q_2 < 0 \Rightarrow$ **Repulsiva** (alejándose de q_3)

Cálculo de $\vec{F}_{12}$ (de q_1 sobre q_2)

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{12} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (0{,}05 - (-0{,}02736), 0{,}02 - 0{,}07518) \\
\vec{r}_{12} &= (0{,}07736, -0{,}05518) \text{ m} \\
||\vec{r}_{12}|| &= \sqrt{(0{,}07736)^2 + (-0{,}05518)^2} = \sqrt{0{,}00903} = 0{,}0950 \text{ m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= \frac{K q_1 q_2}{||\vec{r}_{12}||^3} \vec{r}_{12} \\
&= \frac{(9 \times 10^9)(11{,}8 \times 10^{-9})(-31{,}5 \times 10^{-9})}{(0{,}0950)^3} (0{,}07736, -0{,}05518) \\
&= \frac{-3{,}346 \times 10^{-6}}{8{,}574 \times 10^{-4}} (0{,}07736, -0{,}05518) \\
&= -3{,}903 \times 10^{-3} \cdot (0{,}07736, -0{,}05518) \\
\vec{F}_{12} &= \boxed{(-3{,}02\hat{x} + 2{,}15\hat{y}) \times 10^{-4} \text{ N}}
\end{aligned}
$$

Cálculo de $\vec{F}_{32}$ (de q_3 sobre q_2)

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{32} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = (0{,}05 - (-0{,}03), 0{,}02 - (-0{,}04)) \\
\vec{r}_{32} &= (0{,}08, 0{,}06) \text{ m} \\
||\vec{r}_{32}|| &= \sqrt{(0{,}08)^2 + (0{,}06)^2} = 0{,}10 \text{ m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{32} &= \frac{Kq_3q_2}{||\vec{r}_{32}||^3}\vec{r}_{32} \\
&= \frac{(9\times 10^9)(-10{,}3\times 10^{-9})(-31{,}5\times 10^{-9})}{(0{,}10)^3}(0{,}08, 0{,}06) \\
&= \frac{2{,}920\times 10^{-6}}{1{,}0\times 10^{-3}}(0{,}08, 0{,}06) \\
&= 2{,}920\times 10^{-3}\cdot(0{,}08, 0{,}06) \\
\vec{F}_{32} &= \boxed{(2{,}34\hat{x} + 1{,}75\hat{y})\times 10^{-4}\text{ N}}
\end{aligned}
$$

Fuerza Neta

$$
\begin{aligned}
F_x &= (-3{,}02 + 2{,}34)\times 10^{-4} = -0{,}68\times 10^{-4}\text{ N} \\
F_y &= (2{,}15 + 1{,}75)\times 10^{-4} = 3{,}90\times 10^{-4}\text{ N}
\end{aligned}
$$

RESULTADO - Fuerza sobre q_2

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{neta} &= (-0{,}68\hat{x} + 3{,}90\hat{y})\times 10^{-4}\text{ N} \\
||\vec{F}_{neta}|| &= \sqrt{(0{,}68)^2 + (3{,}90)^2}\times 10^{-4} = 3{,}96\times 10^{-4}\text{ N} \\
\theta &= \arctan\left(\frac{3{,}90}{-0{,}68}\right) = 99{,}9^\circ
\end{aligned}
$$

Parte (b): Campo eléctrico neto en P(1,0) cm

El punto P está en $\vec{r}_P = (0{,}01, 0)$ m.

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Campo $\vec{E}_1$ (de q_1 en P)

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{1P} &= \vec{r}_P - \vec{r}_1 = (0{,}01 - (-0{,}02736), 0 - 0{,}07518) = (0{,}03736, -0{,}07518) \text{ m} \\
||\vec{r}_{1P}|| &= \sqrt{(0{,}03736)^2 + (-0{,}07518)^2} = 0{,}0840 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{Kq_1}{||\vec{r}_{1P}||^3}\vec{r}_{1P} = \frac{(9\times 10^9)(11{,}8\times 10^{-9})}{(0{,}0840)^3}(0{,}03736, -0{,}07518) \\
&= \frac{106{,}2}{5{,}93\times 10^{-4}}(0{,}03736, -0{,}07518) = 1{,}791\times 10^5 \cdot (0{,}03736, -0{,}07518) \\
\vec{E}_1 &= \boxed{(6693\hat{x} - 13468\hat{y}) \text{ N/C}}
\end{aligned}$$

Campo $\vec{E}_2$ (de q_2 en P)

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{2P} &= \vec{r}_P - \vec{r}_2 = (0{,}01 - 0{,}05, 0 - 0{,}02) = (-0{,}04, -0{,}02) \text{ m} \\
||\vec{r}_{2P}|| &= \sqrt{(-0{,}04)^2 + (-0{,}02)^2} = 0{,}0447 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= \frac{Kq_2}{||\vec{r}_{2P}||^3}\vec{r}_{2P} = \frac{(9\times 10^9)(-31{,}5\times 10^{-9})}{(0{,}0447)^3}(-0{,}04, -0{,}02) \\
&= \frac{-283{,}5}{8{,}94\times 10^{-5}}(-0{,}04, -0{,}02) = -3{,}172\times 10^6 \cdot (-0{,}04, -0{,}02) \\
\vec{E}_2 &= \boxed{(126880\hat{x} + 63440\hat{y}) \text{ N/C}}
\end{aligned}$$

Campo $\vec{E}_3$ (de q_3 en P)

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{3P} &= \vec{r}_P - \vec{r}_3 = (0{,}01 - (-0{,}03), 0 - (-0{,}04)) = (0{,}04, 0{,}04) \text{ m} \\
||\vec{r}_{3P}|| &= \sqrt{(0{,}04)^2 + (0{,}04)^2} = 0{,}0566 \text{ m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_3 &= \frac{Kq_3}{||\vec{r}_{3P}||^3}\vec{r}_{3P} = \frac{(9\times 10^9)(-10{,}3\times 10^{-9})}{(0{,}0566)^3}(0{,}04, 0{,}04) \\
&= \frac{-92{,}7}{1{,}81\times 10^{-4}}(0{,}04, 0{,}04) = -5{,}12\times 10^5 \cdot (0{,}04, 0{,}04) \\
\vec{E}_3 &= \boxed{(-20480\hat{x} - 20480\hat{y}) \text{ N/C}}
\end{aligned}$$

Campo Total

$$E_x = 6693 + 126880 - 20480 = 113093 \text{ N/C}$$
$$E_y = -13468 + 63440 - 20480 = 29492 \text{ N/C}$$

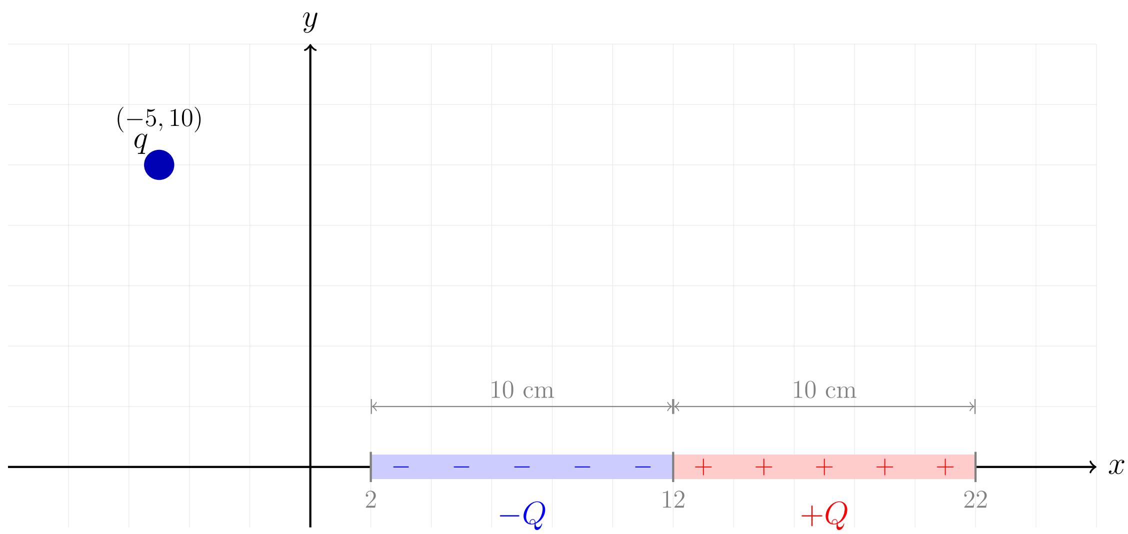
RESULTADO - Campo en P(1,0)

$$\vec{E}_{total} = (1{,}13 \times 10^5 \hat{x} + 2{,}95 \times 10^4 \hat{y}) \text{ N/C}$$
$$||\vec{E}_{total}|| = \sqrt{(113093)^2 + (29492)^2} = 1{,}17 \times 10^5 \text{ N/C}$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{29492}{113093}\right) = 14{,}6^\circ$$

Problema 2: Dos Líneas de Carga (30 puntos)

Enunciado

Dos líneas de carga de 10,0 cm de longitud y cargas iguales pero de signo contrario, $Q = 50{,}0$ nC, se ubican juntas sobre el eje x. El extremo izquierdo de la línea negativa está en $x = 2{,}0$ cm. Una carga puntual $q = -7{,}0\ \mu$C se ubica en P$(-5, 10)$ cm.



Datos Numéricos

$$
\begin{aligned}
L &= 10{,}0 \text{ cm} = 0{,}10 \text{ m} \\
Q &= 50{,}0 \text{ nC} = 50{,}0 \times 10^{-9} \text{ C} \\
q &= -7{,}0\ \mu\text{C} = -7{,}0 \times 10^{-6} \text{ C} \\
\vec{r}_P &= (-0{,}05, 0{,}10) \text{ m} \\
K &= 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}
$$

Línea negativa: desde $x_1 = 0{,}02$ m hasta $x_2 = 0{,}12$ m
Línea positiva: desde $x_3 = 0{,}12$ m hasta $x_4 = 0{,}22$ m

Parte (a): Densidad lineal de carga λ

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{50{,}0 \times 10^{-9}}{0{,}10}$$

RESULTADO

$$\lambda_+ = +500 \text{ nC/m} = +5{,}0 \times 10^{-7} \text{ C/m}$$
$$\lambda_- = -500 \text{ nC/m} = -5{,}0 \times 10^{-7} \text{ C/m}$$

Parte (b): Campo eléctrico total en P(-5, 10) cm

Campo de la Línea Negativa

Para un elemento $dq = \lambda_{-} dx'$ en posición $(x', 0)$ donde $x' \in [0{,}02, 0{,}12]$ m:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_P - (x', 0) = (-0{,}05 - x', 0{,}10) \\ ||\vec{r}||^2 &= (x' + 0{,}05)^2 + 0{,}01 \end{aligned}$$

Sea $u = x' + 0{,}05$, $a = 0{,}01$ m^2: - Cuando $x' = 0{,}02$: $u_1 = 0{,}07$ m - Cuando $x' = 0{,}12$: $u_2 = 0{,}17$ m

Componente $E_x^{(-)}$:

$$\begin{aligned} E_x^{(-)} &= -K\lambda_{-} \int_{0{,}07}^{0{,}17} \frac{u\, du}{(u^2 + 0{,}01)^{3/2}} = -K\lambda_{-} \left[-\frac{1}{\sqrt{u^2 + 0{,}01}} \right]_{0{,}07}^{0{,}17} \\ &= K\lambda_{-} \left(\frac{1}{\sqrt{0{,}0389}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}0149}} \right) = K\lambda_{-}(5{,}07 - 8{,}19) \\ &= (9 \times 10^9)(-5 \times 10^{-7})(-3{,}12) = +14040 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Componente $E_y^{(-)}$:

$$\begin{aligned} E_y^{(-)} &= K\lambda_{-} \cdot 0{,}10 \int_{0{,}07}^{0{,}17} \frac{du}{(u^2 + 0{,}01)^{3/2}} = \frac{0{,}10 \cdot K\lambda_{-}}{0{,}01} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + 0{,}01}} \right]_{0{,}07}^{0{,}17} \\ &= 10 \cdot K\lambda_{-} \left(\frac{0{,}17}{0{,}197} - \frac{0{,}07}{0{,}122} \right) = 10 \cdot K\lambda_{-}(0{,}863 - 0{,}574) \\ &= 10 \times (9 \times 10^9)(-5 \times 10^{-7})(0{,}289) = -13005 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Campo de la Línea Positiva

Para $x' \in [0{,}12, 0{,}22]$ m, sea $u = x' + 0{,}05$: - Cuando $x' = 0{,}12$: $u_3 = 0{,}17$ m - Cuando $x' = 0{,}22$: $u_4 = 0{,}27$ m

Componente $E_x^{(+)}$:

$$\begin{aligned} E_x^{(+)} &= K\lambda_{+} \left(\frac{1}{\sqrt{0{,}0829}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}0389}} \right) = K\lambda_{+}(3{,}47 - 5{,}07) \\ &= (9 \times 10^9)(5 \times 10^{-7})(-1{,}60) = -7200 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Componente $E_y^{(+)}$:

$$\begin{aligned} E_y^{(+)} &= 10 \cdot K\lambda_{+} \left(\frac{0{,}27}{0{,}288} - \frac{0{,}17}{0{,}197} \right) = 10 \cdot K\lambda_{+}(0{,}938 - 0{,}863) \\ &= 10 \times (9 \times 10^9)(5 \times 10^{-7})(0{,}075) = 3375 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Campo Total

$$E_x = E_x^{(-)} + E_x^{(+)} = +14040 - 7200 = +6840 \text{ N/C}$$
$$E_y = E_y^{(-)} + E_y^{(+)} = -13005 + 3375 = -9630 \text{ N/C}$$

RESULTADO - Campo en P

$$\begin{aligned}\vec{E}_{total} &= (6840\hat{x} - 9630\hat{y}) \text{ N/C} \\ &= (0{,}68\hat{x} - 0{,}96\hat{y}) \times 10^4 \text{ N/C} \\ ||\vec{E}_{total}|| &= \sqrt{(6840)^2 + (9630)^2} = 11810 \text{ N/C} \approx 1{,}18 \times 10^4 \text{ N/C}\end{aligned}$$

Parte (c): Fuerza eléctrica sobre q

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}_{total} = (-7{,}0 \times 10^{-6})(6840\hat{x} - 9630\hat{y})$$

RESULTADO - Fuerza sobre q

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (-0{,}0479\hat{x} + 0{,}0674\hat{y}) \text{ N} \\ &= (-47{,}9\hat{x} + 67{,}4\hat{y}) \text{ mN} \\ ||\vec{F}|| &= \sqrt{(47{,}9)^2 + (67{,}4)^2} = 82{,}7 \text{ mN} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{67{,}4}{-47{,}9}\right) = 125{,}4^\circ\end{aligned}$$

Interpretación Física

La carga q es negativa, por lo tanto la fuerza es **opuesta** al campo. Como el campo apunta hacia el cuarto cuadrante ($+\hat{x}$, $-\hat{y}$), la fuerza apunta hacia el segundo cuadrante ($-\hat{x}$, $+\hat{y}$).

Solución generada por Electromagnetismo Asistente