Solución - Problema de Fuerza Eléctrica

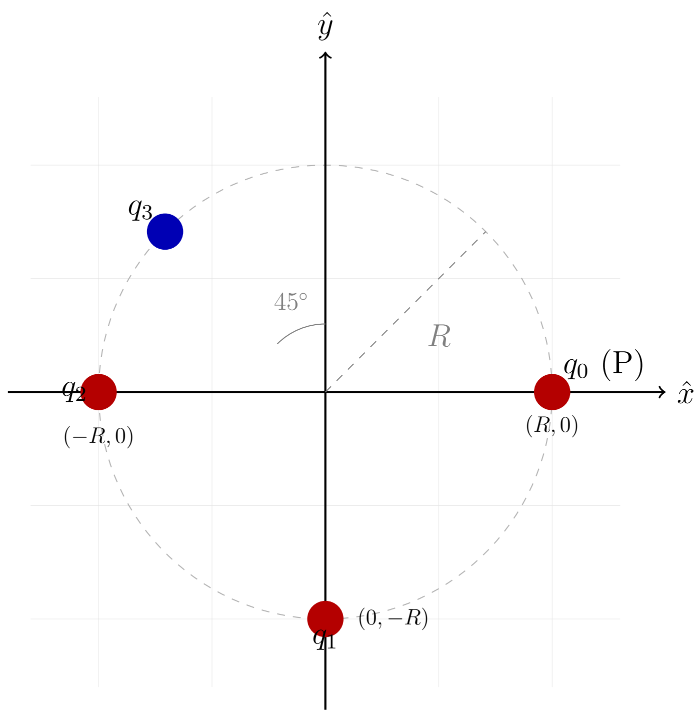
Electromagnetismo Asistente

Enunciado del Problema

Dada la siguiente configuración de cargas eléctricas dispuestas sobre un círculo de radio R:

- $q_1 = q_2 = 2Q$
- $q_3 = -Q$
- $q_0 = Q$ (ubicada en el punto P)

Con $Q = 10$ nC y $R = 25$ cm, determinar la fuerza que experimenta la partícula q_0.



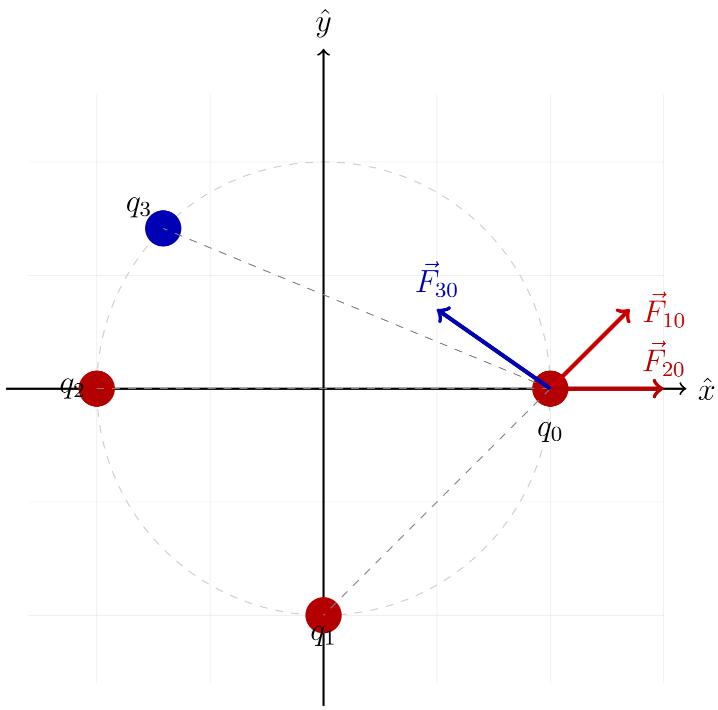
Análisis Cualitativo

La carga q_0 (positiva) interactúa con las cargas q_1, q_2 y q_3:

- **Interacción** $q_1 \leftrightarrow q_0$: Ambas cargas son positivas ($q_1 = 2Q > 0$, $q_0 = Q > 0$), por lo tanto la fuerza $\vec{F}_{10}$ es **repulsiva**.

- **Interacción** $q_2 \leftrightarrow q_0$: Ambas cargas son positivas ($q_2 = 2Q > 0$, $q_0 = Q > 0$), por lo tanto la fuerza $\vec{F}_{20}$ es **repulsiva**.
- **Interacción** $q_3 \leftrightarrow q_0$: Las cargas tienen signos opuestos ($q_3 = -Q < 0$, $q_0 = Q > 0$), por lo tanto la fuerza $\vec{F}_{30}$ es **atractiva**.

Diagrama de Fuerzas sobre q_0



Datos Numéricos

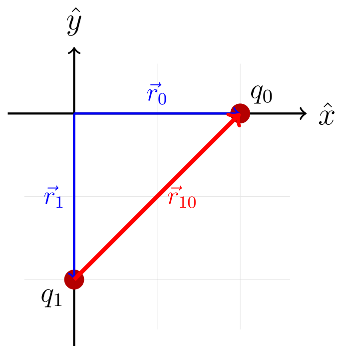
$$
\begin{aligned}
Q &= 10 \text{ nC} = 10 \times 10^{-9} \text{ C} \\
R &= 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m} \\
K &= 9 \times 10^{9} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= Q = 10 \times 10^{-9} \text{ C} \\
q_1 &= q_2 = 2Q = 20 \times 10^{-9} \text{ C} \\
q_3 &= -Q = -10 \times 10^{-9} \text{ C}
\end{aligned}
$$

Posiciones:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_0 &= R\hat{x} = (0.25, 0) \text{ m} \\
\vec{r}_1 &= -R\hat{y} = (0, -0.25) \text{ m} \\
\vec{r}_2 &= -R\hat{x} = (-0.25, 0) \text{ m} \\
\vec{r}_3 &= -\frac{R}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{R}{\sqrt{2}}\hat{y} = (-0.177, 0.177) \text{ m}
\end{aligned}
$$

Cálculo de $\vec{F}_{10}$ (Fuerza de q_1 sobre q_0)



Construcción del vector de posición relativo:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 + \vec{r}_{10} &= \vec{r}_0 \\
\vec{r}_{10} &= \vec{r}_0 - \vec{r}_1 \\
\vec{r}_{10} &= (0.25\hat{x}) - (-0.25\hat{y}) \\
\vec{r}_{10} &= (0.25\hat{x} + 0.25\hat{y}) \text{ [m]}
\end{aligned}
$$

Magnitud:

$$
\begin{aligned}
||\vec{r}_{10}|| &= \sqrt{(0.25)^2 + (0.25)^2} \\
||\vec{r}_{10}|| &= 0.25\sqrt{2} \text{ m} = 0.354 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{10} = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_0}{||\vec{r}_{10}||^3} \cdot \vec{r}_{10}$$

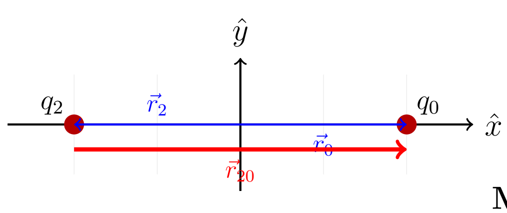
$$\vec{F}_{10} = \frac{(9 \times 10^9)(20 \times 10^{-9})(10 \times 10^{-9})}{(0.25\sqrt{2})^3} \cdot (0.25\hat{x} + 0.25\hat{y})$$

$$\vec{F}_{10} = \frac{1.8 \times 10^{-6}}{0.0442} \cdot (0.25\hat{x} + 0.25\hat{y})$$

$$\vec{F}_{10} = 4.07 \times 10^{-5} \cdot (0.25\hat{x} + 0.25\hat{y})$$

$$\vec{F}_{10} = \boxed{(1.02 \times 10^{-5}\hat{x} + 1.02 \times 10^{-5}\hat{y}) \text{ [N]}}$$

Cálculo de $\vec{F}_{20}$ (Fuerza de q_2 sobre q_0)



Construcción del vector de posición relativo:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_2 + \vec{r}_{20} &= \vec{r}_0 \\
\vec{r}_{20} &= \vec{r}_0 - \vec{r}_2 \\
\vec{r}_{20} &= (0.25\hat{x}) - (-0.25\hat{x}) \\
\vec{r}_{20} &= 0.50\hat{x} \text{ [m]}
\end{aligned}
$$

Magnitud:

$$||\vec{r}_{20}|| = 0.50 \text{ m} = 2R$$

Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{20} = \frac{K \cdot q_2 \cdot q_0}{||\vec{r}_{20}||^3} \cdot \vec{r}_{20}$$

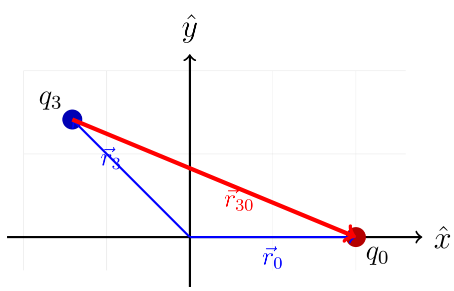
$$\vec{F}_{20} = \frac{(9 \times 10^9)(20 \times 10^{-9})(10 \times 10^{-9})}{(0.50)^3} \cdot (0.50\hat{x})$$

$$\vec{F}_{20} = \frac{1.8 \times 10^{-6}}{0.125} \cdot (0.50\hat{x})$$

$$\vec{F}_{20} = 1.44 \times 10^{-5} \cdot (0.50\hat{x})$$

$$\vec{F}_{20} = \boxed{7.20 \times 10^{-6}\hat{x} \text{ [N]}}$$

Cálculo de $\vec{F}_{30}$ (Fuerza de q_3 sobre q_0)



Construcción del vector de posición relativo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 + \vec{r}_{30} &= \vec{r}_0 \\ \vec{r}_{30} &= \vec{r}_0 - \vec{r}_3 \\ \vec{r}_{30} &= (0.25\hat{x}) - \left(-\frac{0.25}{\sqrt{2}}\hat{x} + \frac{0.25}{\sqrt{2}}\hat{y}\right) \\ \vec{r}_{30} &= \left(0.25 + \frac{0.25}{\sqrt{2}}\right)\hat{x} - \frac{0.25}{\sqrt{2}}\hat{y} \\ \vec{r}_{30} &= (0.427\hat{x} - 0.177\hat{y}) \text{ [m]} \end{aligned}$$

Magnitud:

$$\begin{aligned} ||\vec{r}_{30}|| &= \sqrt{(0.427)^2 + (-0.177)^2} \\ ||\vec{r}_{30}|| &= 0.462 \text{ m} \end{aligned}$$

Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{30} = \frac{K \cdot q_3 \cdot q_0}{||\vec{r}_{30}||^3} \cdot \vec{r}_{30}$$

$$\vec{F}_{30} = \frac{(9 \times 10^9)(-10 \times 10^{-9})(10 \times 10^{-9})}{(0.462)^3} \cdot (0.427\hat{x} - 0.177\hat{y})$$

$$\vec{F}_{30} = \frac{-9.0 \times 10^{-7}}{0.0986} \cdot (0.427\hat{x} - 0.177\hat{y})$$

$$\vec{F}_{30} = -9.13 \times 10^{-6} \cdot (0.427\hat{x} - 0.177\hat{y})$$

$$\vec{F}_{30} = \boxed{(-3.90 \times 10^{-6}\hat{x} + 1.62 \times 10^{-6}\hat{y}) \text{ [N]}}$$

Nota: El signo negativo en q_3 produce una fuerza en dirección opuesta a $\vec{r}_{30}$, consistente con una fuerza atractiva.

Cálculo de la Fuerza Neta $\vec{F}_{neta}$

La fuerza neta sobre q_0 es la suma vectorial de todas las fuerzas:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \vec{F}_{30}$$

Componente en $\hat{x}$:

$$F_x = (1.02 \times 10^{-5}) + (7.20 \times 10^{-6}) + (-3.90 \times 10^{-6})$$
$$F_x = 1.35 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Componente en $\hat{y}$:

$$F_y = (1.02 \times 10^{-5}) + (0) + (1.62 \times 10^{-6})$$
$$F_y = 1.18 \times 10^{-5} \text{ N}$$

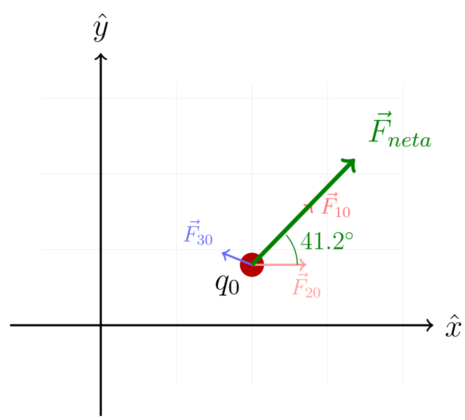
RESULTADO FINAL

$$\vec{F}_{neta} = (1.35 \times 10^{-5}\hat{x} + 1.18 \times 10^{-5}\hat{y}) \text{ [N]}$$

$$||\vec{F}_{neta}|| = \sqrt{(1.35)^2 + (1.18)^2} \times 10^{-5} = 1.79 \times 10^{-5} \text{ N}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{1.18}{1.35}\right) = 41.2^\circ \text{ (respecto al eje } +x)$$

Diagrama Final de la Fuerza Resultante



Solución generada por Electromagnetismo Asistente