Solución - Certamen 1 Electromagnetismo 2021
Forma A

Electromagnetismo Asistente

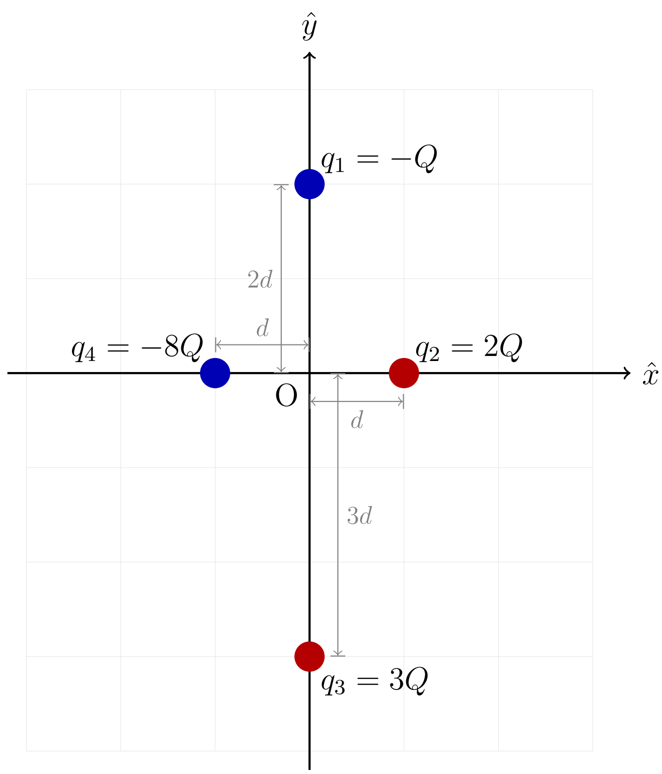
Problema 1: Cargas Puntuales (30 puntos)

Enunciado

Cuatro cargas puntuales se ubican sobre los ejes de un sistema de referencia con las siguientes cargas y posiciones:

- $q_1 = -Q$ en $(0, 2d)$
- $q_2 = 2Q$ en $(d, 0)$
- $q_3 = 3Q$ en $(0, -3d)$
- $q_4 = -8Q$ en $(-d, 0)$

Con $Q = 40{,}0$ [nC] y $d = 7{,}0$ [cm].



Datos Numéricos

$$
\begin{aligned}
Q &= 40{,}0 \text{ nC} = 40{,}0 \times 10^{-9} \text{ C} \\
d &= 7{,}0 \text{ cm} = 0{,}07 \text{ m} \\
K &= 9 \times 10^{9} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}
$$

Valores de las cargas:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= -Q = -40 \times 10^{-9} \text{ C} \\
q_2 &= 2Q = 80 \times 10^{-9} \text{ C} \\
q_3 &= 3Q = 120 \times 10^{-9} \text{ C} \\
q_4 &= -8Q = -320 \times 10^{-9} \text{ C}
\end{aligned}
$$

Posiciones:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (0, 2d) = (0, 0{,}14) \text{ m} \\
\vec{r}_2 &= (d, 0) = (0{,}07, 0) \text{ m} \\
\vec{r}_3 &= (0, -3d) = (0, -0{,}21) \text{ m} \\
\vec{r}_4 &= (-d, 0) = (-0{,}07, 0) \text{ m}
\end{aligned}
$$

Parte (a): Fuerza eléctrica neta sobre q_4 (20 puntos)

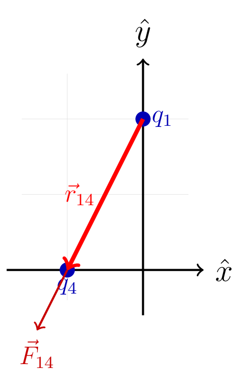
La fuerza neta sobre q_4 es:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}$$

Análisis Cualitativo

- $q_1 \to q_4$: $q_1 = -Q < 0$, $q_4 = -8Q < 0 \Rightarrow$ **Repulsiva**
- $q_2 \to q_4$: $q_2 = 2Q > 0$, $q_4 = -8Q < 0 \Rightarrow$ **Atractiva**
- $q_3 \to q_4$: $q_3 = 3Q > 0$, $q_4 = -8Q < 0 \Rightarrow$ **Atractiva**

Cálculo de $\vec{F}_{14}$ (Fuerza de q_1 sobre q_4)



Vector de posición relativo:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{14} &= \vec{r}_4 - \vec{r}_1 \\
\vec{r}_{14} &= (-0{,}07, 0) - (0, 0{,}14) \\
\vec{r}_{14} &= (-0{,}07\hat{x} - 0{,}14\hat{y}) \text{ m}
\end{aligned}
$$

Magnitud:

$$
\begin{aligned}
||\vec{r}_{14}|| &= \sqrt{(-0{,}07)^2 + (-0{,}14)^2} \\
&= \sqrt{0{,}0049 + 0{,}0196} = \sqrt{0{,}0245} \\
&= 0{,}1565 \text{ m} = d\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{14} = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_4}{||\vec{r}_{14}||^3} \cdot \vec{r}_{14}$$

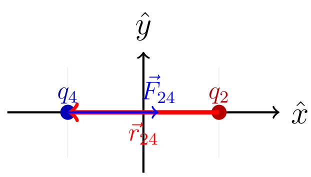
$$\vec{F}_{14} = \frac{(9 \times 10^9)(-40 \times 10^{-9})(-320 \times 10^{-9})}{(0{,}1565)^3} \cdot (-0{,}07\hat{x} - 0{,}14\hat{y})$$

$$\vec{F}_{14} = \frac{1{,}152 \times 10^{-4}}{3{,}838 \times 10^{-3}} \cdot (-0{,}07\hat{x} - 0{,}14\hat{y})$$

$$\vec{F}_{14} = 30{,}02 \cdot (-0{,}07\hat{x} - 0{,}14\hat{y})$$

$$\vec{F}_{14} = \boxed{(-2{,}10\hat{x} - 4{,}20\hat{y}) \times 10^{-3}\ \mathrm{N}}$$

Cálculo de $\vec{F}_{24}$ (Fuerza de q_2 sobre q_4)



Vector de posición relativo:

$$\vec{r}_{24} = \vec{r}_4 - \vec{r}_2$$
$$\vec{r}_{24} = (-0{,}07, 0) - (0{,}07, 0)$$
$$\vec{r}_{24} = -0{,}14\hat{x}\ \mathrm{m} = -2d\hat{x}$$

Magnitud:

$$||\vec{r}_{24}|| = 0{,}14\ \mathrm{m} = 2d$$

Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{24} = \frac{K \cdot q_2 \cdot q_4}{||\vec{r}_{24}||^3} \cdot \vec{r}_{24}$$

$$\vec{F}_{24} = \frac{(9 \times 10^9)(80 \times 10^{-9})(-320 \times 10^{-9})}{(0{,}14)^3} \cdot (-0{,}14\hat{x})$$

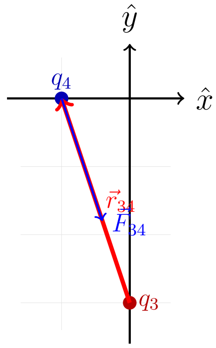
$$\vec{F}_{24} = \frac{-2{,}304 \times 10^{-4}}{2{,}744 \times 10^{-3}} \cdot (-0{,}14\hat{x})$$

$$\vec{F}_{24} = -83{,}97 \cdot (-0{,}14\hat{x})$$

$$\vec{F}_{24} = \boxed{11{,}76 \times 10^{-3}\hat{x}\ \mathrm{N}}$$

Nota: El signo positivo en $\hat{x}$ indica atracción hacia q_2.

Cálculo de $\vec{F}_{34}$ (Fuerza de q_3 sobre q_4)



Vector de posición relativo:

$$\vec{r}_{34} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3$$
$$\vec{r}_{34} = (-0{,}07, 0) - (0, -0{,}21)$$
$$\vec{r}_{34} = (-0{,}07\hat{x} + 0{,}21\hat{y})\text{ m}$$

Magnitud:

$$\begin{aligned} ||\vec{r}_{34}|| &= \sqrt{(-0{,}07)^2 + (0{,}21)^2} \\ &= \sqrt{0{,}0049 + 0{,}0441} = \sqrt{0{,}049} \\ &= 0{,}2214\text{ m} = d\sqrt{10} \end{aligned}$$

Aplicando la Ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{34} = \frac{K \cdot q_3 \cdot q_4}{||\vec{r}_{34}||^3} \cdot \vec{r}_{34}$$

$$\vec{F}_{34} = \frac{(9 \times 10^9)(120 \times 10^{-9})(-320 \times 10^{-9})}{(0{,}2214)^3} \cdot (-0{,}07\hat{x} + 0{,}21\hat{y})$$

$$\vec{F}_{34} = \frac{-3{,}456 \times 10^{-4}}{1{,}086 \times 10^{-2}} \cdot (-0{,}07\hat{x} + 0{,}21\hat{y})$$

$$\vec{F}_{34} = -31{,}82 \cdot (-0{,}07\hat{x} + 0{,}21\hat{y})$$

$$\vec{F}_{34} = \boxed{(2{,}23\hat{x} - 6{,}68\hat{y}) \times 10^{-3}\text{ N}}$$

Nota: La fuerza apunta hacia q_3 (atractiva).

Fuerza Neta sobre q_4

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}$$

Componente $\hat{x}$:

$$F_x = (-2{,}10 + 11{,}76 + 2{,}23) \times 10^{-3}$$
$$F_x = 11{,}89 \times 10^{-3}\text{ N}$$

Componente $\hat{y}$:

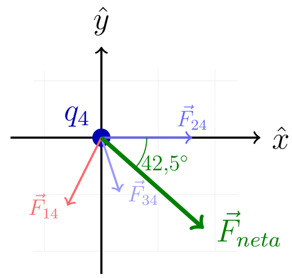
$$F_y = (-4{,}20 + 0 - 6{,}68) \times 10^{-3}$$
$$F_y = -10{,}88 \times 10^{-3}\text{ N}$$

RESULTADO - Fuerza sobre q_4

$$\vec{F}_{neta} = (11{,}89\hat{x} - 10{,}88\hat{y}) \times 10^{-3}\ \text{N}$$

$$||\vec{F}_{neta}|| = \sqrt{(11{,}89)^2 + (-10{,}88)^2} \times 10^{-3} = 16{,}12 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-10{,}88}{11{,}89}\right) = -42{,}5^\circ\ (\text{respecto a } +\hat{x})$$



Parte (b): Campo eléctrico neto en el origen (10 puntos)

El campo eléctrico en el origen es la suma de los campos producidos por cada carga:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

donde $\vec{E}_i = \frac{Kq_i}{||\vec{r}_{0i}||^3}\vec{r}_{0i}$ y $\vec{r}_{0i}$ es el vector del origen a la carga q_i.

Campo de cada carga en el origen

Campo $\vec{E}_1$ (de $q_1 = -Q$ en $(0, 2d)$):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{01} &= (0, 2d) - (0, 0) = 2d\hat{y} \\ ||\vec{r}_{01}|| &= 2d = 0{,}14 \text{ m} \\ \vec{E}_1 &= \frac{K(-Q)}{(2d)^2}\hat{y} = -\frac{KQ}{4d^2}\hat{y} \end{aligned}$$

Campo $\vec{E}_2$ (de $q_2 = 2Q$ en $(d, 0)$):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{02} &= (d, 0) - (0, 0) = d\hat{x} \\ ||\vec{r}_{02}|| &= d = 0{,}07 \text{ m} \\ \vec{E}_2 &= \frac{K(2Q)}{d^2}\hat{x} = \frac{2KQ}{d^2}\hat{x} \end{aligned}$$

Campo $\vec{E}_3$ (de $q_3 = 3Q$ en $(0, -3d)$):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{03} &= (0, -3d) - (0, 0) = -3d\hat{y} \\ ||\vec{r}_{03}|| &= 3d = 0{,}21 \text{ m} \\ \vec{E}_3 &= \frac{K(3Q)}{(3d)^2}(-\hat{y}) = -\frac{KQ}{3d^2}\hat{y} \end{aligned}$$

Campo $\vec{E}_4$ (de $q_4 = -8Q$ en $(-d, 0)$):

$$\begin{aligned} \vec{r}_{04} &= (-d, 0) - (0, 0) = -d\hat{x} \\ ||\vec{r}_{04}|| &= d = 0{,}07 \text{ m} \\ \vec{E}_4 &= \frac{K(-8Q)}{d^2}(-\hat{x}) = \frac{8KQ}{d^2}\hat{x} \end{aligned}$$

Campo Total

Componente $\hat{x}$:

$$E_x = \frac{2KQ}{d^2} + \frac{8KQ}{d^2} = \frac{10KQ}{d^2}$$

Componente $\hat{y}$:

$$E_y = -\frac{KQ}{4d^2} - \frac{KQ}{3d^2} = -KQ\left(\frac{1}{4d^2} + \frac{1}{3d^2}\right) = -\frac{7KQ}{12d^2}$$

Valores Numéricos

$$\frac{KQ}{d^2} = \frac{(9\times10^9)(40\times10^{-9})}{(0{,}07)^2} = \frac{360}{4{,}9\times10^{-3}} = 7{,}347\times10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_x = 10\times 7{,}347\times10^4 = 7{,}347\times10^5\ \mathrm{N/C}$$
$$E_y = -\frac{7}{12}\times 7{,}347\times10^4 = -4{,}286\times10^4\ \mathrm{N/C}$$

RESULTADO - Campo en el Origen

$$\vec{E}_{total} = (7{,}35\times10^5\hat{x} - 4{,}29\times10^4\hat{y})\ \mathrm{N/C}$$

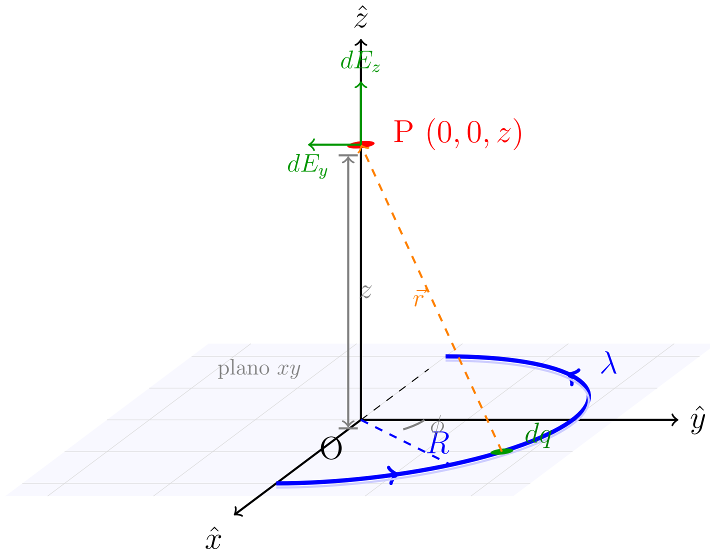
$$||\vec{E}_{total}|| = \sqrt{(7{,}35\times10^5)^2 + (-4{,}29\times10^4)^2} = 7{,}36\times10^5\ \mathrm{N/C}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-4{,}29\times10^4}{7{,}35\times10^5}\right) = -3{,}34^\circ$$

Problema 2: Semianillo con Carga (29 puntos)

Enunciado

Un semianillo (mitad de una circunferencia) posee una densidad de carga lineal uniforme $\lambda = 18{,}0$ [μC/m] y un radio $R = 30{,}0$ [cm].



Datos Numéricos

$$\begin{aligned}
\lambda &= 18{,}0\ \mu\text{C/m} = 18{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C/m} \\
R &= 30{,}0\ \text{cm} = 0{,}30\ \text{m} \\
z &= 21{,}0\ \text{cm} = 0{,}21\ \text{m} \\
K &= 9 \times 10^{9}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2
\end{aligned}$$

Parte (a): Campo eléctrico en el eje del semianillo (19 puntos)

Configuración Geométrica

El semianillo se encuentra en el plano xy, extendiéndose desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi$ (en la región $y \geq 0$). Un elemento diferencial de carga se ubica en:

$$\vec{r}' = R\cos\phi\,\hat{x} + R\sin\phi\,\hat{y}$$

El punto de observación P está en el eje z:

$$\vec{r}_P = z\,\hat{z}$$

Elemento Diferencial de Carga

$$dq = \lambda \cdot dl = \lambda \cdot R\,d\phi$$

Vector de Separación

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}' = -R\cos\phi\,\hat{x} - R\sin\phi\,\hat{y} + z\,\hat{z}$$

$$||\vec{r}|| = \sqrt{R^2\cos^2\phi + R^2\sin^2\phi + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Nota: La distancia $||\vec{r}||$ es constante para todos los elementos del semianillo.

Campo Diferencial

$$d\vec{E} = \frac{K\,dq}{||\vec{r}||^3}\vec{r}$$

$$d\vec{E} = \frac{K\lambda R\,d\phi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(-R\cos\phi\,\hat{x} - R\sin\phi\,\hat{y} + z\,\hat{z}\right)$$

Integración de Componentes

Componente $\hat{x}$:

$$E_x = \int_0^{\pi} \frac{-K\lambda R^2\cos\phi}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\phi = \frac{-K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[\sin\phi\right]_0^{\pi}$$

$$E_x = \frac{-K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}(0-0) = \boxed{0}$$

Por simetría, las contribuciones en $\hat{x}$ se cancelan.

Componente $\hat{y}$:

$$E_y = \int_0^{\pi} \frac{-K\lambda R^2\sin\phi}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\phi = \frac{-K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}$$

$$E_y = \frac{-K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[-(-1)-(-1)\right] = \frac{-K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\cdot 2$$

$$E_y = \boxed{\frac{-2K\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

Componente $\hat{z}$:

$$E_z = \int_0^{\pi} \frac{K\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\phi = \frac{K\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[\phi\right]_0^{\pi}$$

$$E_z = \boxed{\frac{\pi K\lambda Rz}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

Valores Numéricos

$$R^2 + z^2 = (0{,}30)^2 + (0{,}21)^2 = 0{,}09 + 0{,}0441 = 0{,}1341 \text{ m}^2$$
$$(R^2 + z^2)^{3/2} = (0{,}1341)^{3/2} = 0{,}0491 \text{ m}^3$$

Componente E_y:

$$E_y = \frac{-2 \times (9 \times 10^9) \times (18 \times 10^{-6}) \times (0{,}30)^2}{0{,}0491}$$
$$E_y = \frac{-2 \times 9 \times 18 \times 0{,}09 \times 10^3}{0{,}0491}$$
$$E_y = \frac{-29{,}16 \times 10^3}{0{,}0491} = -5{,}94 \times 10^5 \text{ N/C}$$

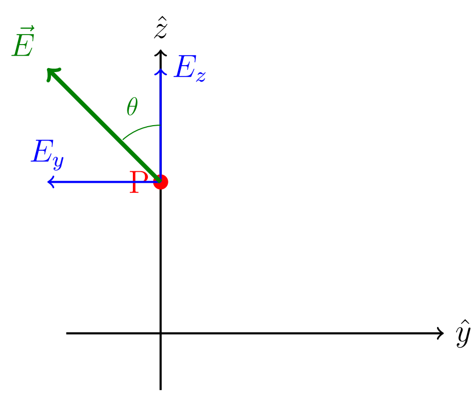
Componente E_z:

$$E_z = \frac{\pi \times (9 \times 10^9) \times (18 \times 10^{-6}) \times (0{,}30) \times (0{,}21)}{0{,}0491}$$
$$E_z = \frac{\pi \times 9 \times 18 \times 0{,}063 \times 10^3}{0{,}0491}$$
$$E_z = \frac{32{,}06 \times 10^3}{0{,}0491} = 6{,}53 \times 10^5 \text{ N/C}$$

RESULTADO - Campo Eléctrico del Semianillo

$$\vec{E} = (-5{,}94 \times 10^5 \hat{y} + 6{,}53 \times 10^5 \hat{z}) \text{ N/C}$$

$$||\vec{E}|| = \sqrt{(5{,}94)^2 + (6{,}53)^2} \times 10^5 = 8{,}83 \times 10^5 \text{ N/C}$$



Parte (b): Fuerza sobre la carga puntual (10 puntos)

Se ubica una carga puntual $q = -22{,}0$ [μC] en el punto P.

$$q = -22{,}0\ \mu\text{C} = -22{,}0 \times 10^{-6}\ \text{C}$$

La fuerza eléctrica sobre la carga es:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Cálculo de Componentes

Componente $\hat{y}$:

$$F_y = q \cdot E_y = (-22{,}0 \times 10^{-6}) \times (-5{,}94 \times 10^5)$$
$$F_y = 13{,}07\ \text{N}$$

Componente $\hat{z}$:

$$F_z = q \cdot E_z = (-22{,}0 \times 10^{-6}) \times (6{,}53 \times 10^5)$$
$$F_z = -14{,}37\ \text{N}$$

RESULTADO - Fuerza sobre q

$$\vec{F} = (13{,}07\hat{y} - 14{,}37\hat{z})\ \text{N}$$

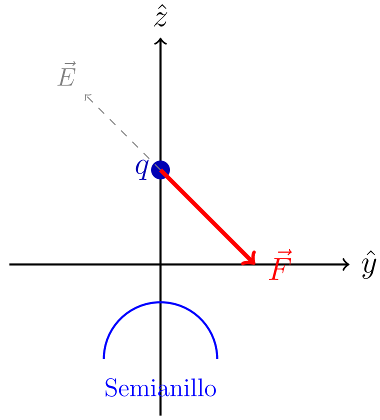
$$||\vec{F}|| = \sqrt{(13{,}07)^2 + (-14{,}37)^2} = 19{,}42\ \text{N}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{-14{,}37}{13{,}07}\right) = -47{,}7^\circ\ \text{(respecto a } +\hat{y}\text{)}$$

Interpretación Física

La carga q es negativa, por lo tanto la fuerza tiene dirección **opuesta** al campo eléctrico:

- El campo apunta hacia $-\hat{y}$ y $+\hat{z}$
- La fuerza apunta hacia $+\hat{y}$ y $-\hat{z}$
- La carga negativa es atraída hacia el semianillo (componente $-\hat{z}$)
- Y empujada hacia el lado opuesto del semicírculo (componente $+\hat{y}$)



Solución generada por Electromagnetismo Asistente