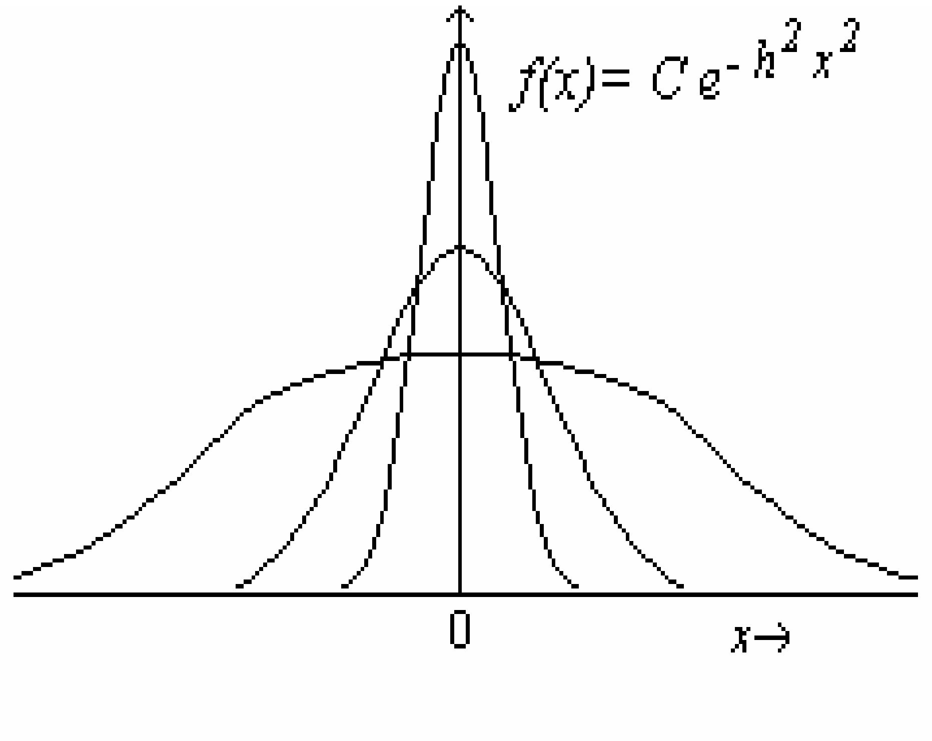
Universidade Federal da Bahia
Instituto de Física
Departamento de Física da Terra e do Meio Ambiente

TEXTOS DE LABORATÓRIO

T E O R I A D E E R R O S



Física I

SALVADOR, BAHIA
2011

Prefácio

Esta apostila é destinada aos alunos dos laboratórios dos Cursos de Física Geral e Experimental I. Ela foi elaborada para que o aluno menos preparado possa, ao lê-la, assimilar facilmente o conteúdo das matérias e, conseqüentemente, provocar o interesse pelo curso.

Nela está incluída uma introdução à Teoria dos Erros, na qual são apresentados conceitos básicos e essenciais desta teoria, além de roteiros e de uma breve descrição teórica dos experimentos a serem desenvolvidos durante o curso.

Esta apostila tem como objetivo ensinar aos estudantes a prática e os métodos de medidas diretas e indiretas, com instrumentos simples, dando-lhes segurança no que devem entender por medir grandezas físicas.

No texto, são preservados os aspectos que professores e alunos usuários, da primeira versão da apostila com dois volumes intitulados "Teoria dos Erros" e "Mecânica" (**Roberto Max de Argollo, Clemiro Ferreira, Tereza Sakai, 1998**) e da segunda versão da apostila intitulada "Textos de Laboratório" (**Francisco Clodorian Fernandes Cabral, Alexandre Barreto Costa e Alberto Brum Novaes**, **Diva Andrade da Silva**, **Antonio Silva Souza (Bello)** e **Friedrich W. Gutmann, 2006),**consideraram desejáveis ao mesmo tempo em que incorporaram certo número de modificações e atualizações. Nessa versão elaborada por **Alexandre Barreto Costa e Francisco Clodorian Fernandes Cabral,** com a colaboração dos técnicos Roque Cesário e Elias Santos, foram feitas novas correções e reordenados os assuntos contidos na mesma, de maneira a melhorar a compreensão dos mesmos.

Aos professores e alunos:

Este texto introduz os conceitos básicos e os parâmetros essenciais da teoria de erros e contém algumas aplicações práticas de interesse dos trabalhos de laboratório de Física Geral. Um estudo mais aprofundado poderá ser feito na bibliografia citada.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - TEORIA DOS ERROS

CAPITULOII – ANÁLISE GRÁFICA

CAPÍTULO I

TEORIA DE ERROS

PARTE 1- CONCEITOS BÁSICOS

1 - Introdução

As determinações experimentais envolvem medidas e como as medidas estão sempre sujeitas a alguma incerteza, é preciso fazer-se alguma estimativa dessas incertezas antes que os resultados possam ser interpretados ou usá-los. Assim, quando medimos uma grandeza um certo número de vezes, os valores obtidos provavelmente não serão idênticos devido aos erros experimentais.

Surgem, então, as questões: qual o número que se deve adotar como o valor mais representativo da grandeza medida? Com que grau de confiança pode-se afirmar que o número adotado representa este valor?

Assim, para analisar os resultados de uma experiência torna-se necessário, portanto, fixarem-se critérios para escolher o valor representativo e seu domínio de flutuação, e estabelecer-se o nível de confiança a tal domínio. Tais questões são objetos de estudos da teoria dos erros.

Tendo-se pois, uma série de medidas de uma grandeza, com a teoria de erros, procuramos responder às questões:

1. Qual o valor mais representativo da grandeza?
2. Que medida de dispersão usar para definir um intervalo de variação para a medida?
3. Como se associar uma chance de reprodutibilidade (nível de confiança) a um dado intervalo?
4. Como propagar os erros associados às grandezas medidas a outras grandezas calculadas a partir delas, através de expressões matemáticas?

2 – Grandezas, dimensão e unidades

Uma **grandeza física** é uma propriedade de um corpo, ou particularidade de um fenômeno, **susceptível de ser medida**, ou seja, à qual se pode atribuir um valor numérico. As grandezas podem ser vetoriais ou escalares, conforme será mostrado na parte teórica do curso.

Cada grandeza está associada a uma única dimensão, e esta dimensão pode ser expressa em diferentes unidades.

As grandezas estudadas neste curso (geométricas, cinemáticas e dinâmicas), são expressas em função de três grandezas fundamentais: comprimento [L], massa [M] e tempo [T]. Convencionalmente, na escrita das equações dimensionais, as grandezas são postas entre colchetes. Por exemplo, a equação dimensional da aceleração g devida à gravidade é escrita como

$$[g] = [L]\,[T]^{-2}\,.$$

Se uma dimensão — dimensão é o expoente de uma grandeza fundamental — é zero ela não precisa ser escrita. Por exemplo, a constante elástica k duma mola pode ser obtida pela relação entre uma força e um comprimento. Assim, sua equação dimensional é escrita como:

$$[k] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}\,[L]^{-1} = [M]\,[T]^{-2}.$$

- Ao por os valores das grandezas numa equação, atente para que todos eles estejam num mesmo sistema de unidades.

- Valor recomendado para g em Salvador, medido no Ano Geofísico Internacional:

$$g_{\text{local}} = 9{,}7833 \text{ m/s}^2 \text{ ou } g_{\text{local}} = 978{,}33 \text{ cm/s}^2$$

Tabela 1 - Dimensões e unidades nos sistemas CGS e SI (MKS) das principais grandezas de Mecânica

Grandeza	Dimensão L M T	Sistema CGS		Sistema MKS	
		Unidade	Nome	Unidade	Nome
Comprimento	[L]	Cm	centímetro	m	metro
Massa	[M]	G	grama	kg	quilograma
Tempo	[T]	S	segundo	s	segundo
Área	$[L]^2$	cm^2	—	m^2	—
Volume	$[L]^3$	cm^3	—	m^3	—
Velocidade	$[L]\,[T]^{-1}$	cm/s	—	m/s	—
Aceleração	$[L]\,[T]^{-2}$	cm/s^2	—	m/s^2	—
Força	$[M]\,[L]\,[T]^{-2}$	$g\ cm\ s^{-2}$	dina (dyn)	$kg\ m\ s^{-2}$	Newton (N)
Energia	$[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$	$g\ cm^2\ s^{-2}$	erg	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Joule (J)
Potência	$[M]\,[L]^2\,[T]^{-3}$	$g\ cm^2\ s^{-3}$	erg/s	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Watt (W)
Pressão	$[M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$	$g\ cm^{-1}\ s^{-2}$	dyn/cm^2	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	Pascal (P)
Torque	$[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$	$g\ cm^2\ s^{-2}$	dyn·cm	$kg\ m^2\ s^{-2}$	N·m

3-Medidas diretas e indiretas

As grandezas podem ser medidas direta ou indiretamente, havendo, em cada caso, um modo diferente de tratar seus valores e os erros a eles associados.

Medidas diretas são as obtidas por simples comparação utilizando-se instrumentos de medida já calibrados para tal fim. Neste tipo de medida devemos distinguir dois casos: (i) a medida é feita através de uma única determinação onde o valor numérico ou é lido numa escala (régua, paquímetro, cronômetro, balança, etc.) ou é fornecido diretamente como no caso de massas aferidas. (ii) a medida é obtida através de várias determinações onde o valor numérico é dado pelo Valor Mais provável (definido posteriormente na seção 5).

Medidas indiretas são todas aquelas relacionadas com as medidas diretas por meio de definições, leis e suas conseqüências. Neste tipo de medidas o valor numérico assim como a dimensão e a unidade correspondentes, são encontradas através de expressões matemáticas que as ligam as medidas diretas envolvidas. Exemplo é a determinação do volume dum cilindro a partir da medida de suas dimensões.

4 – Classificação de erros

As medidas experimentais são ordinariamente acompanhadas de alguma incerteza e esta incerteza limita o objetivo de se conhecer o valor verdadeiro da grandeza. Têm-se, assim, os erros, os quais podem ser classificados nos seguintes tipos:

Erros grosseiros são aqueles cometidos devido à falta de atenção ou de prática do operador. Deste tipo são os erros cometidos em operações matemáticas, enganos na leitura ou escrita de dados, ou engano na leitura duma escala. A possibilidade de ocorrência desses erros pode ser bastante reduzida pela atenção do operador e pela repetição das medidas e dos cálculos.

Erros sistemáticos são aqueles decorrentes de causas constantes e se caracterizam por ocorrerem sempre com os mesmos valores e sinal. São deste tipo os erros devidos a aparelhos descalibrados, a métodos falhos, ao uso de equações incompletas, a condições ambientais inadequadas aos instrumentos de medida e a hábitos errados do operador. O modo de eliminarem-se esses erros, ou reduzi-los a um mínimo, é trabalhar com instrumentos calibrados os instrumentos devem estar "zerados" e, quando for o caso, com a calibração corrigida para as condições ambientais — com métodos corretos e equações adequadas. No caso de se ter medidas afetadas por um erro sistemático e se conheça seu valor e sinal, é possível eliminá-lo, já que ele entra com valor e sinal iguais em todas as medidas.

Erros acidentais são aqueles devidos a causas fortuitas. Também chamados de erros aleatórios ou estatísticos, eles resultam do somatório de pequenos erros independentes e incontroláveis afetando o observador, o instrumento de medida, o objeto a ser medido e as condições ambientais. São causas desses erros, por exemplo, a variação do "milímetro" ao longo duma reta milimetrada; a flutuação dos instrumentos de medida ligados na rede elétrica; a estimativa que o observador faz na leitura de dados, as pequenas variações da grandeza medida quando comparadas à sensibilidade do arranjo experimental (no caso de a variação da grandeza ser bem maior que a sensibilidade do arranjo experimental, a diferença entre as medidas deve ser atribuída à própria variação da grandeza). Sendo esses erros originados por um grande número de causas, todas elas provocando variações, para mais e para menos, de intensidade dentro da sensibilidade do arranjo experimental, eles obedecem a leis matemáticas bem definidas e podem ser tratados pela teoria estatística.

5 – Algarismos significativos

Definição**:** Numa medida, são ditos significativos todos os algarismos contados a partir do primeiro não nulo (diferente de zero), ou seja, o zero a esquerda não conta como significativo. Pelo menos um algarismo duvidoso é incluído no resultado de uma medida, mesmo que ele seja zero.

Exemplos: o número 35 tem dois algarismos significativos; o número 3,50 tem três; o número 0,047 tem dois; o número $2,8 \times 10^4$ tem dois (somente os algarismos em frente à potência de 10 são significativos).

Ao medir o comprimento do objeto da figura abaixo, usando uma régua milimetrada, é possível, neste caso, apresentar esta medida com no máximo três algarismos, ou seja, 29,4mm ou 2,94 cm. Neste resultado, os dois primeiros algarismos (2 e 9) temos certeza, enquanto que o algarismo 4 já é duvidoso, sendo estimando visualmente. Associar a esta medida um quarto algarismo, é errado, uma vez que este é desconhecido para a régua milimetrada.

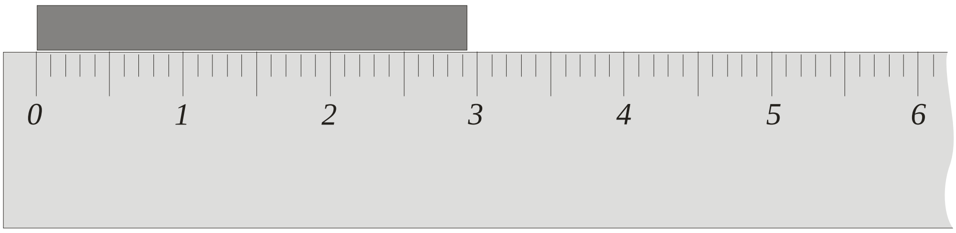


Fig. 1

Toda medida contém geralmente uma margem de erro e, por isso, o resultado da medida deve ser escrito com um número de algarismos significativos tal que procure representar a precisão obtida para a medida. O último algarismo registrado é o duvidoso, porque ele é o algarismo sujeito as incertezas.

Regras de aproximação de algarismos significativos**:** Às vezes é necessário fazer uma aproximação de um resultado de acordo com o número de significativos das medidas que lhes deram origem. Deste modo os dígitos excedentes são arredondados, usando-se os seguintes critérios:

1- Se o primeiro dígito desprezado for um número variando entre 0 e 4, o anterior não será alterado;
2- Se for de 5 a 9, o anterior é acrescido de uma unidade.

Regras de operações com algarismos significativos**:** Nas operações com algarismos significativos deve-se preservar a precisão do resultado final. Valem, então, as seguintes regras:

1- Na multiplicação e divisão o resultado final deve ser escrito com um número de significativos igual ao do fator com menor número de significativos.

Exemplos:

$3{,}7 \times 4{,}384 = 16$; $0{,}632 \div 0{,}20 = 3{,}2$; $4{,}40 \times 6242 = 2{,}75 \text{ x } 10^4$.

2- Em operações envolvendo inverso de números e multiplicação por fatores constantes, o número de significativos deve ser preservado no resultado.

Exemplos:

$\frac{1}{248} = 0{,}00403$; $2 \times 6{,}23 = 12{,}5$; $4\pi \times 13{,}5 = 170$.

3- Na soma e subtração o resultado final terá um número de decimais igual ao da parcela com menos decimais.
Exemplos:

$3{,}4 + 0{,}256 - 2{,}22 = 1{,}4$; $34 + 2{,}92 - 0{,}5 = 36$; $0{,}831 - 6{,}26\text{x}10^{-3} - 0{,}79 = 0{,}03$

6 – População e Amostra

Os Conceitos de população e amostra são fundamentais para entender vários conceitos da teoria de erros que serão utilizados no decorrer deste curso. Fórmulas matemáticas iguais possuem diferentes enfoques com relação a estes conceitos.

***População*:** As medidas e contagens em estatística, para terem sentido, devem ser limitadas a certo grupo ou conjunto de objetos ou elementos chamados em estatística de população. As populações podem ser classificadas em finitas e infinitas, conforme seja finito ou infinito o número de objetos ou elementos que as compõem. Exemplo de uma população finita é o número de eleitores na Bahia (este número é limitado). Exemplo de uma população infinita é a medida da massa de um objeto (pode-se fazer um número ilimitado de medidas).

Amostra: É uma parte de uma população estatística que foi tomada ao acaso e usada como base para fazer-se estimativas e tirar-se conclusões sobre a população. Assim, quando desejamos medir a massa dum objeto, na impossibilidade de medirmos todos os valores possíveis, o que fazemos é medir alguns valores e, a partir deles, inferir o valor da massa.

7 - Valor mais representativo de uma grandeza

Consideremos agora a seguinte questão: se são feitas *n* medidas de uma grandeza, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, todas igualmente confiáveis, isto é, observadas nas mesmas condições, mas nem todas com o mesmo valor devido aos erros acidentais, qual o valor que melhor representa a grandeza? Podemos resolver esta questão utilizando o método dos mínimos quadrados, proposto por Legendre, em 1806, como segue.

Seja x_i o resíduo da medida X_i, definido como:

$$x_i = X_i - X \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{01}$$

onde X é um valor qualquer. O método dos mínimos quadrados diz que o valor X mais representativo das medidas X_i é um valor $\overline{X}$ tal que reduz a soma dos quadrados dos resíduos a um mínimo. Esta soma é dada por,

$$\mathrm{U}(X) \equiv \sum_i x_i^{\,2} = \sum_i \left(X_i - X\right)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n \ , \tag{02}$$

onde, por conveniência, fizemos o somatório dos quadrados dos resíduos igual a $\mathrm{U}(X)$.

A representação gráfica de U($\overline{X}$) *versus* $\overline{X}$ é uma parábola com a abertura voltada para cima. As coordenadas U_0 e $\overline{X}$ de seu vértice dão, respectivamente, o valor mínimo de U($\overline{X}$) e, de acordo com o método dos mínimos quadrados, o valor mais representativo das medidas X_i.

Desenvolvendo o quadrado de U($\overline{X}$), vem:

$$U(\overline{X}) = \sum_i X_i^2 - 2\,\overline{X} \sum_i X_i + n\,\overline{X}^2. \tag{03}$$

O valor $\overline{X}$ que faz U($\overline{X}$) um mínimo é obtido pela condição dU/d$\overline{X}$ = 0. Então:

$$\frac{dU}{d\overline{X}} = -2\sum_i X_i + 2n\,\overline{X} = 0. \tag{04}$$

O resultado é:

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{05}$$

$\overline{X}$ é, assim, a **média aritmética** dos n valores medidos X_i.

8 – Valor verdadeiro, valor mais provável, erro e desvio

Utilizando o conceito de população e amostra, os resultados obtidos no item 7 passam a ter um sentido. A média aritmética será chamada de **valor verdadeiro** quando inserida no conceito de população e de **valor mais provável** para o conceito de amostra. Do mesmo jeito, o resíduo será denominado **erro** quando inserida no conceito de população e de **desvio** para o conceito de amostra

O *valor verdadeiro*, μ (letra grega, lê-se mi), dos N elementos de uma **população** é definido como o **valor mais representativo da população**, o qual, de acordo com a Eq. (05), é a média aritmética desses N elementos, ou seja,

$$\mu = \frac{\sum_i X_i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots N. \tag{06}$$

As populações mais comuns na Física (medidas de comprimento, massa, tempo) são infinitas e, nestes casos, μ é definido como a média aritmética de uma série infinita de medidas.

O valor verdadeiro assim definido não é uma variável aleatória, mas uma constante, cujo valor se busca estimar. Ele é um parâmetro estatístico importante na teoria da medida, ainda que sua determinação exata seja, em geral, hipotética.

O *valor mais provável* (*v.m.p.)*, $\overline{X}$, de uma **amostra** com n elementos, de acordo com a Eq. (05), é a média aritmética dos n valores, ou seja,

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{07}$$

Como veremos adiante, na distribuição de Gauss, o *v.m.p.* $\overline{X}$ é uma estimativa do valor verdadeiro μ e é a melhor estimativa que se pode obter dele sem se fazer medida adicional. A média aritmética (ou *vmp*) deverá ser escrita com um significativo a mais que as medidas (isto se justifica já que a média é mais exata que as medidas individuais e para, nas operações matemáticas, reduzirmos os erros sistemáticos, dando, assim, maior segurança ao resultado).

O *erro*, e_i, de uma medida X_i é a diferença entre este valor e o valor verdadeiro da grandeza, ou seja:

$$e_i = X_i - \mu. \tag{08}$$

Exceto em alguns casos triviais, o valor verdadeiro é desconhecido e, portanto, o módulo do erro é hipotético. Contudo, este é um conceito útil na teoria de erros.

O *desvio*, d_i, de uma medida X_i é a diferença entre este valor e o valor mais provável, ou seja:

$$d_i = X_i - \overline{X}. \tag{09}$$

O desvio assim definido tem duas propriedades importantes. A primeira se refere à soma dos quadrados dos desvios é um mínimo, como vimos no item 6. O valor desta soma será usado adiante no cálculo de algumas grandezas e uma expressão conveniente para calculá-la, pode ser obtida quadrando-se a Eq. (09) e tomando-se a soma de seus termos. Então,

$$\sum_i d_i^2 = \sum_i X_i^2 - 2\,\overline{X}\sum_i X_i + n\,\overline{X}^2 . \qquad (10)$$

Pela Eq. (05), tem-se que $\Sigma_i X_i = n\overline{X}$. Então,

$$\sum_i d_i^2 = \sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_i X_i^2 - n\overline{X}^2 . \qquad (11)$$

A segunda propriedade, por sua vez, é a soma algébrica dos desvios é zero e isto decorre da própria definição do valor médio. De fato, tomando-se o somatório dos desvios na Eq. (09) e considerando a Eq. (05), vem:

$$\sum_i d_i = \sum_i X_i - n\,\overline{X} = n\,\overline{X} - n\,\overline{X} = 0 \qquad (12)$$

9 – Discrepância e Discrepância relativa

A discrepância é a diferença entre dois valores medidos de uma grandeza, tal como a diferença entre os valores obtidos por dois estudantes ou a diferença entre o valor encontrado por um estudante e um recomendado ou tabelado. É incorreto usar-se os termos erro ou desvio para representar tais diferenças.

A discrepância relativa, **Δ,** (letra grega, lê-se delta) entre duas medidas X' e X'' de uma grandeza é definida pela relação (em %)

$$\Delta = \left|\frac{X' - X''}{X''}\right| 100. \qquad (13)$$

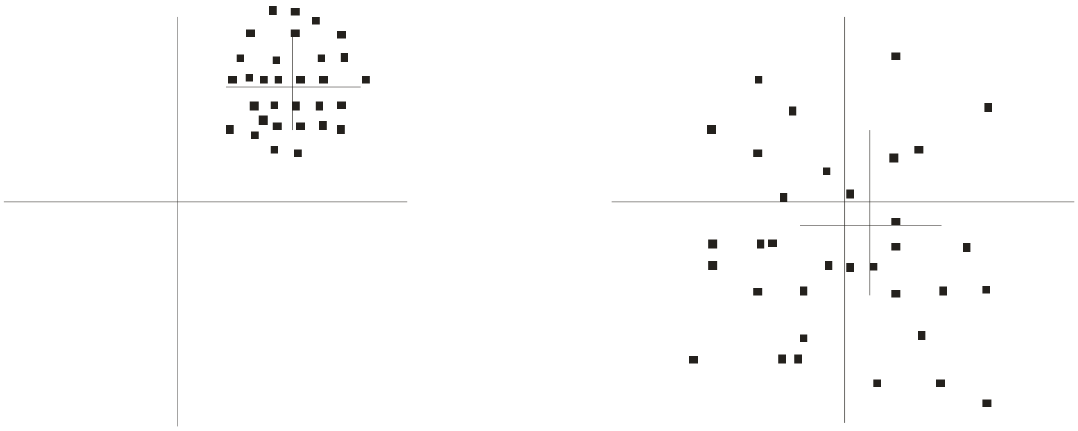
X' e X'' podem ser os valores obtidos por dois observadores, ou X' pode ser um valor obtido por um observador e X'' um valor tabelado ou recomendado da grandeza.

10 – Exatidão e precisão

Exatidão é uma medida de quão próximo o valor experimental está do valor verdadeiro. A exatidão tem a ver com os erros sistemáticos e uma medida é dita ser tão mais exata quanto menores forem estes erros. A exatidão de uma medida X' pode ser avaliada pela discrepância relativa (Eq. 13), onde X'' é o valor verdadeiro da grandeza (alguns poucos casos em que ele é conhecido) ou um valor recomendado. A exatidão é tanto maior quanto menor for a discrepância relativa.

Precisão é uma medida de quão concentradas estão as medidas experimentais em torno do valor mais provável. A precisão tem a ver com os erros aleatórios e uma medida é dita ser tão mais precisa quanto menor forem estes erros.

Uma distinção entre exatidão e precisão está ilustrada na Fig. 2, onde são mostrados alvos com marcas de balas de dois rifles fixados rigidamente e mirando o centro de cada alvo. Em ambos os casos, o centro de fogo (valor mais provável) está sistematicamente deslocado do centro do alvo (valor verdadeiro), menos em (b) do que em (a). Diz-se, então, que a exatidão em:



(a) (b)

Figura 2

(b) é maior do que em (a). Já a dispersão dos tiros (valores individuais distribuídos aleatoriamente) é menor em (a) do que em (b). Diz-se, então, que a precisão é maior em (a) do que em (b).

PARTE 2- TRATAMENTO DE ERROS EXPERIMENTAIS

11-FREQÜÊNCIA E PROBABILIDADE

Inicialmente, definamos freqüência e probabilidade, dois conceitos importantes na teoria estatística.

A freqüência , na estatística, está dividida em:

A Freqüência absoluta de um acontecimento é o número de vezes que o mesmo ocorreu. Assim, se um dado é lançado 30 vezes e ocorre 8 duques, a freqüência absoluta do "duque" é 8.

Freqüência relativa, ou simplesmente **freqüência**, é a relação entre o número de vezes que o acontecimento ocorreu e o número de vezes que ele poderia ter ocorrido, podendo ser expressa em %. Assim, no exemplo acima, a freqüência do "duque" é 8/30 , ou 26,7 %.

A probabilidade é definida, pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de resultados possíveis de um determinado evento. Assim, considerando as probabilidades P de sucesso e Q de falha são dadas, respectivamente, por

$$P = \frac{p}{p+q} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{q}{p+q} \; .$$

onde: p *é* o número que um dado evento pode ocorrer e q o número de modos do evento falhar.

O valor da probabilidade nunca pode exceder à unidade, ou seja, a soma das probabilidades de todos os eventos possíveis deve ser igual à unidade sendo interpretada como “certeza”. Neste caso,

$$P + Q = 1.$$

Exemplo: a probabilidade de ocorrer um duque num único lançamento de um dado com 6 faces é 1/6 e a de não ocorrer o duque é 5/6. A soma destas probabilidades é igual à unidade. Embora a probabilidade de ocorrer um duque seja 1/6, isso não implica que em 30 lançamentos ocorram 5 duques (30 x 1/6). Na verdade, pode ocorrer qualquer número entre 0 e 30, porque quando o número de lançamentos é pequeno não há uma relação clara entre freqüência e probabilidade. No entanto, quando o número de lançamentos cresce indefinidamente, o número de "duques" tenderá a aproximar-se do previsto pela probabilidade. Daí a lei de Jacques Bernouille: quando o número de experiências tende a infinito, a freqüência tende à probabilidade. Esta lei, chamada de "Lei dos Grandes Números", vale para acontecimentos aleatórios em que uma dada ocorrência independe inteiramente da anterior.

A **freqüência** está relacionada ao conceito de “**amostra**” enquanto que a **probabilidade** está associada ao conceito de ”**população**”.

12-REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE MEDIDAS COMO UMA DISTRIBUIÇÃO

A representação gráfica de medidas também se relaciona com o conceito de amostra (freqüências) e população (probabilidade) sendo que, o gráfico de distribuição de freqüências é o **histograma** e o de probabilidade é dado, neste caso, pela **distribuição de Gauss.**

HISTOGRAMA

Os histogramas são os gráficos mais adequados para a descrição de dados oriundos de variáveis quantitativas. Eles mostram as freqüências de observações para cada valor ou conjunto de valores da variável que se deseja descrever. Neste gráfico, no eixo das abscissas (X), são marcados intervalos de medidas e no eixo das ordenadas (Y) a **freqüência absoluta** (podendo ser expresso também com freqüências relativas) com que as medidas ocorrem em cada intervalo. A sua distribuição depende diretamente da largura dos intervalos, sendo conveniente escolhê-los de maneira que, os intervalos próximos do valor mais provável tenham uma freqüência absoluta maior que 10.

A sua construção segue os seguintes passos (*Opcional):

1-Ordenar os valores em ordem crescente e determinar a Amplitude Total: ***R***

$$\boldsymbol{R} = \textbf{Maior medida – Menor medida} \qquad (14)$$

2- Como os dados são agrupados em intervalos, faz–se necessário escolher o número de intervalos – ***K***. Há vários critérios para determinar o número de dentre os quais:

2.1-Fórmula de Sturges: $K = 1 + 3{,}33 \log n$

2.2-Raiz quadra do número de medidas ou seja : $K = \sqrt{n}$

2..3- Regra empírica, dada pela tabela abaixo:

Tabela 1

Número de medidas (*n*)	**Número de Intervalos (K)**
Menor que 25	5 ou 6
Entre 25 e 50	De 7 a 14
Maior do que 50	De 15 a 20

Onde n é o número de medidas que se deseja representar.

3- Achar o tamanho dos intervalos (iguais):

$$h \cong R \div K \qquad (15)$$

Com base nos valores dos parâmetros obtidos, pode-se construir um histograma,

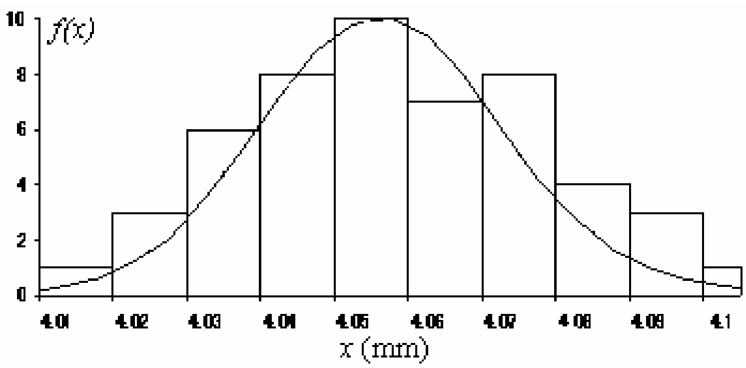


Figura 3

À proporção que o número de medidas aumenta, o tamanho do intervalo tenderá a diminuir. Sendo que, quando o número de medidas tende a infinito o tamanho do intervalo tenderá a ser zero o gráfico de freqüências (histograma) tenderá, para o nosso tipo de amostras, a uma curva continua de probabilidade Gaussiana descrita pela função de Gauss (Figura 3).

Se fizermos outra série medidas, é muito provável que o histograma construído com elas não coincida com o anterior. Em outras palavras, as freqüências de medidas por intervalo nesta segunda série poderão diferir daquelas da primeira, significando que a distribuição das freqüências da série está sujeita ao que se denomina de *flutuação estatística*. Se repetirmos o processo com 5.000 medidas, verificaremos que as flutuações serão bem menores. Então, podemos concluir que quando o número de medidas crescer indefinidamente e os intervalos forem permanentemente reduzidos, o histograma tenderá a uma curva contínua. Essa curva é denominada *curva de distribuição normal* ou *curva de Gauss* e se essa curva possuir uma representação analítica, esta função é denominada *função densidade de probabilidade normal ou função de Gauss.*

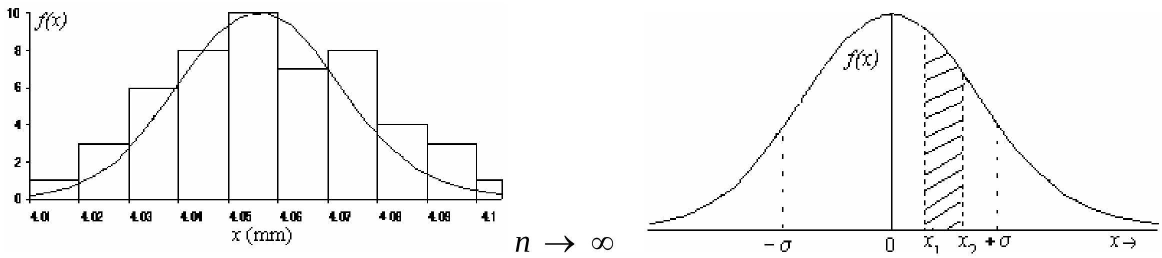


Figura 4

13 - A Função de Gauss

Na seção anterior, vimos que quando o número de observações é suficientemente grande, pode-se tomar a freqüência de ocorrência das medidas pela probabilidade delas ocorrerem.

Se para um grande número de medidas construirmos um gráfico no qual as abscissas sejam os desvios x — as diferenças entre os valores medidos e o valor médio das medidas — e as ordenadas sejam as freqüências com que esses desvios ocorrem, obtemos uma curva do tipo mostrado na Fig. 2. Ela é denominada *curva normal* ou *curva de Gauss.* Sua expressão analítica, chamada de *função densidade de probabilidade normal*, ou, simplesmente, *função de Gauss* é

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \tag{16}$$

O gráfico de $f(x)$ contra x, onde $x=(x_i-\mu)$ dá a diferença entre o valor do dado e o valor verdadeiro, é mostrado na Fig. 5. Vemos que a curva é simétrica em relação a um valor central máximo e tende assintoticamente a zero.

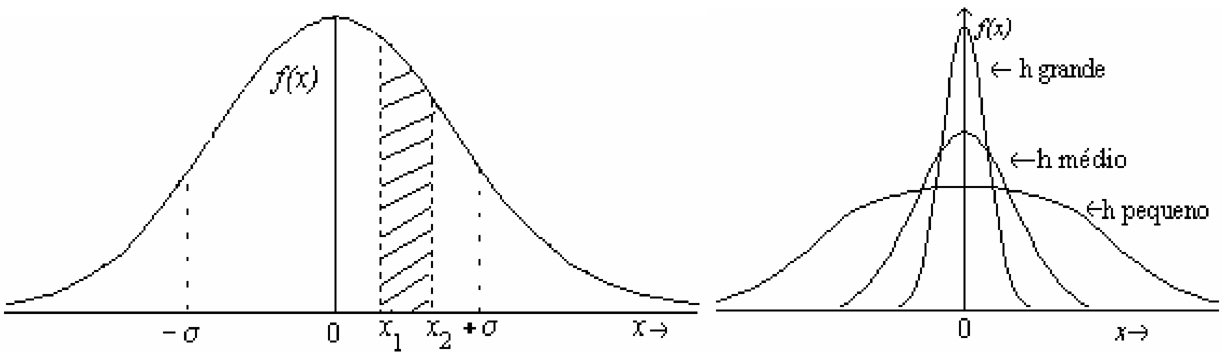


Figura 5

O valor da ordenada na origem é dado por $f(0) = h/\sqrt{\pi}$. Vê-se, então, que quanto maior for o número de medidas iguais ao valor verdadeiro, maior será *h*. Na Fig. 5, são dadas três curvas de Gauss com diferentes índices de precisão. As três curvas têm a mesma área, mas diferentes valores de *h*. A forma mais estreita da curva indica que o conjunto medidas da população estão mais próximas do valor verdadeiro da grandeza medida, ou seja, os valores estão menos dispersos. Uma menor dispersão indica uma alta precisão e um valor maior de *h*. Inversamente, um *h* pequeno indica medidas de baixa precisão e a curva é achatada. Por isso, Gauss denominou *h* de *índice de precisão.*

14- Medidas de dispersão

Tendo-se chegado à expressão do *v.m.p.* de uma série de medidas, a segunda questão proposta na Seção 1 é encontrar o erro que se está cometendo, ou seja, a dispersão a que está sujeita o *v.m.p.* É necessário, pois, definir-se grandezas que possam ser avaliadas numericamente e que representem as propriedades de interesse visualizadas no gráfico. Em particular, desejamos uma grandeza que tenha relação com a largura da curva de Gauss, já que ela é uma indicação da precisão das medidas. A seguir, veremos algumas dessas grandezas.

Desvio quadrático médio:De acordo com a Eq. (02), U_0 é a soma dos quadrados dos desvios em relação à média, ou seja,

$$U_0 = \sum_i (X_i - \overline{X})^2 \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{17}$$

Define-se como *desvio quadrático médio*, *dqm*, o valor médio de U_0, ou seja

$$dqm = \frac{U_0}{n}. \tag{18}$$

Como já vimos, U_0 representa o valor mínimo para a soma dos quadrados dos desvios. Já a raiz do *dqm* dá uma indicação de como uma particular série de *n* valores desvia de seu *v.m.p.*

Raiz do desvio quadrático médio. Vimos que o desvio quadrático médio, *dqm*, representa o valor mínimo para a média aritmética dos quadrados dos desvios. Podemos, então, utilizar a raiz do desvio quadrático médio, s', como um desvio para a grandeza. A expressão para s', é:

$$s' = \sqrt{\frac{\sum_i d_i^{\,2}}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}{n}} \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{19}$$

Uma expressão alternativa, é obtida substituindo-se na Eq. (19), o somatório $\sum_i d_i^2$ pela expressão obtida na Eq. (11). Fazendo-se a substituição, vem:

$$s' = \sqrt{\frac{\sum_i X_i^{\,2} - n\,\overline{X}^2}{n}} \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{20}$$

Infelizmente, apesar de s' ter uma grande importância teórica, ele não tem uma maior significância como desvio, porque ele indica apenas como uma particular série de *n* valores desviam de seu *v.m.p.*. Não se sabe, porém, se ele sistematicamente depende ou não do número de medidas na série. Ademais, uma nova de série *n* medidas geralmente não produz nem um *v.m.p.* idêntico ao primeiro, nem uma mesma série de desvios, devido às flutuações estatísticas.

Raiz do erro quadrático médio. Uma grandeza mais significativa para a medida da dispersão, devido a sua conexão direta com a função de Gauss, é a raiz do erro quadrático médio, σ (letra grega, lê-se sigma).

A relação de σ com os parâmetros da função de Gauss é

$$\sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}}, \tag{21}$$

ou seja, σ é inversamente proporcional ao índice de precisão *h(Figura*. Ele é, então, uma indicação da precisão da medida. Ou seja, quanto maior O erro quadrático médio, *eqm*, é definido como a média aritmética dos quadrados dos erros de todos os *N* elementos da população. Ele representa, portanto, o *dqm* de uma medida individual em torno da média da população, ou seja, do valor verdadeiro. O quadrado σ^2 é também denominado *variância*.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i e_i^{\,2}}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{N}}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i e_i^{\,2}}{N} = \frac{\sum_i (X_i - \mu)^2}{N} \tag{22}$$

Desvio padrão. Vimos que, apesar da valia de σ como medida de dispersão do *v.m.p.*, sua determinação é hipotética pela impossibilidade de fazermos todas as medidas da população. O melhor que podemos fazer é tomar uma série finita de medidas e, usando-a como uma amostra da população, calcular a melhor estimativa para σ. Pode-se mostrar que, para uma série de *n* medidas a melhor estimativa de σ é o desvio padrão s, dado pela expressão:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i d_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}{n-1}}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{23}$$

Analogamente à Eq. (20) obtêm-se,

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i X_i^{\,2} - n\,\overline{X}^2}{n-1}}, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{24}$$

Entre s' e s, a diferença numérica é geralmente pequena, mas a distinção é importante conceitualmente. O fato de s ser maior do que s' é esperado, pois se viu que este é obtido com a soma dos quadrados dos desvios em torno da média da amostra, a qual mostramos ter um valor mínimo. Desde que a média da população geralmente não coincide com a da amostra, a soma dos quadrados dos desvios de uma amostra finita em torno da média da população não é um mínimo. Também, é interessante notar que o aparecimento do fator *n* – 1 deve-se ao fato de haver apenas *n* – 1 desvios funcionalmente independentes, já que existe a relação de condição segundo a qual a soma dos quadrados dos desvios é um mínimo. Ademais, quando *n* =1 o conceito de desvio perde o significado.

15 – Nível de confiança com o desvio padrão

Definida a medida de dispersão (consideramos o desvio padrão), a terceira questão posta na Seção 1 é como se associar uma chance de reprodutibilidade a um intervalo de variação definido para a medida, mantidas as condições de medição. Em outras palavras, definir um intervalo [$\overline{X}$ ± α s], onde α é uma constante a ser definida pela lei de distribuição de tal modo que uma nova medida X tenha uma dada chance de jazer neste intervalo.

Usando a Eq. (16), substituindo X pelo erro "*e*"(Eq. 08) o valor de $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ dado pela Eq. (21), a expressão resultante permite calcular a probabilidade de uma medida jazer num dado intervalo. Assim, a probabilidade P(X_1, X_2) de uma medida jazer no intervalo [X_1, X_2] é:

$$\mathrm{P}(X_1, X_2) = \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx. \tag{25}$$

Para o intervalo [μ -σ, μ + σ], a integral da Eq. (25) vale 0,6826. Isso significa que se deve esperar que 68,26 % das medidas jazam neste intervalo. Temos, assim, para σ um significado qualitativo (indicação da precisão da medida), um geométrico (± σ são os pontos de inflexão da curva de Gauss) e um quantitativo (68,26 % das medidas jazem no intervalo [μ ± σ].

Para os intervalos [μ ± 2σ] e [μ ± 3σ] as probabilidades são, respectivamente, 0,9545 e 0,9973. Isto significa que se deve esperar que 95,45 % das medidas jazam no intervalo [μ ± 2σ] e 99,73 %, praticamente todas as medidas, jazam no intervalo [μ ± 3σ].A probabilidade definida pela Eq. (21), expressa em %, denomina-se *nível de confiança, n.c.* Assim, diz-se que o *n.c.* para o intervalo [μ ± σ] é 68,26 %.

O problema é que não se conhece nem μ nem σ . O que se conhece são suas aproximações $\overline{X}$ e s. A função densidade de probabilidade é gaussiana para $\overline{X}$, mas não é para *s*. Então, não se deve esperar que probabilidades para intervalos definidos por s sejam as mesmas para os intervalos definidos por σ.

Quando o número de medidas é suficientemente grande (digamos, maior que 20) podemos tomar σ por s sem muito erro e, neste caso, os níveis de confiança são obtidos através da Eq. (25).

A Tabela 2 dá os níveis de confiança para os intervalos $[\overline{X} \pm \alpha\, s]$ para $n > 20$, ou seja, dá os valores de α pelo qual se deve multiplicar s para se ter um intervalo com um dado *n.c.*

Quando $n < 20$, as probabilidades não podem ser obtidas através da Eq. (25), já que não é mais possível substituir σ por s . Os valores para α, neste caso, são obtidos através de uma outra distribuição devida a Student. A Tabela 3 apresenta esses valores de α em função do número de medidas n e para os níveis de confiança de 60 %, 90 % e 95 %. Por exemplo, para $n = 5$, o intervalo com um *n.c.* de 95 % é dado por $[\overline{X} \pm 2{,}776\ s]$.

16-Rejeição de dados:

Algumas vezes numa série de medidas ocorrerem valores que diferem bastante do conjunto. A questão que se coloca é se esses valores aparentemente anômalos devem ser rejeitados.

Em casos onde se sabe ter havido perturbações físicas durante a medição (queda de tensão, trompaço na mesa, etc.), as medidas devem ser rejeitadas, ainda que elas pareçam concordar com as outras. Em outras situações, onde não se tem conhecimento de perturbações, a rejeição duma medida é uma questão polêmica. Contudo, um critério comumente usado é rejeitarem-se as medidas cujos desvios em relação ao *v.m.p.* sejam maiores ou menores que três vezes o desvio padrão. A justificativa para esse critério pode ser deduzida das Tabelas 2 e 3, onde se constata que, para cinco ou mais medidas, todas elas praticamente jazem no intervalo $[\overline{X} \pm 3s]$, sendo praticamente zero a probabilidade de uma medida jazer fora deste intervalo.

Uma vez eliminada a medida anômala, novo *v.m.p.* e novo desvio padrão devem ser calculados com as medidas restantes.

Tabela 2

Valores de α para $n > 20$

Nível de confiança *n.c.* (%)	α
50,00	0,670
60,00	0,842
68,26	1,000
90,00	1,645
95,00	1,960
95,45	2,000
99,73	3,000

Tabela 3

Valores de α para $n \leq 20$

n	Nível de confiança, *n.c.* (%)		
	60%	90%	95%
2	1,376	6,314	12,706
3	1,061	2,920	4,306
4	0,978	2,353	3,182
5	0,941	2,132	2,776
6	0,920	2,015	2,571
7	0,906	1,943	2,447
8	0,896	1,895	2,365
9	0,889	1,860	2,306
10	0,883	1,833	2,262
15	0,868	1,761	2,145
20	0,861	1,729	2,093

17-Limite de erro instrumental, desvio avaliado e desvio relativo

O *limite do erro instrumental* (*l.e.i.*) dum instrumento de medição com escala de leitura contínua (réguas, micrômetro, medidores com ponteiro) é definido como a menor fração da menor divisão da escala que pode ser estimada visualmente. Um olho humano normal é capaz de distinguir dois pontos distantes de 0,1 *mm* numa distância de 25 *cm* (distância normal de leitura). Então, para instrumentos com a largura das divisões menores da escala da ordem de 1*mm* pode-se tomar com segurança o *l.e.i.* como $\pm$ 0,2 unidades dessas divisões. Por exemplo, pode-se tomar o *l.e.i.* duma régua milimetrada de boa qualidade como $\pm 0{,}2$ *mm*. Todavia, a depender da qualidade da escala e da regularidade das divisões, este valor pode chegar a $\pm 0{,}5$ *mm* (réguas de plástico) e mesmo a ± 1*mm* (trenas e escalas de pedreiro); para um micrômetro, cuja menor divisão da escala é 0,01 *mm*, o *l.e.i.* é $\pm 0{,}002$ *mm*; para um amperímetro com menor divisão da escala de 0,1 mA, o *l.e.i.* pode ser

$\pm 0{,}02$ mA a $\pm 0{,}05$ mA a depender da qualidade da escala, se esta é espelhada, se a leitura é feita com lupa, etc. (para essa estimativa admite-se que o amperímetro tenha capacidade suficiente para responder a variações da ordem de 0,02 mA ou 0,05 mA, o que não decorre da menor divisão da escala, mas da capacidade de resposta do instrumento, a qual é fornecida pelo fabricante. Se a sensibilidade do amperímetro for , por exemplo, 0,1 mA , o correto é tomar-se o *l.e.i.* como $\pm 0{,}1$mA). Para larguras maiores, o operador deve estabelecer um *l.e.i.* com apenas um algarismo significativo tal que lhe dê segurança que o valor da medida jaz no intervalo por este definido.

Nos instrumentos com escala de leitura descontínua (escala com vernier, cronômetros mecânicos),o *l.e.i.* é estabelecido pelo fabricante e normalmente corresponde à menor medida (que geralmente corresponde à menor divisão do instrumento) possível de ser feita no instrumento. Assim, em instrumentos dotados de vernier, como o paquímetro, o *l.e.i.* é a própria natureza (menor divisão) do instrumento. Para um cronômetro mecânico que marca em intervalos de 0,1 *s* toma-se o *l.e.i.* igual a este valor. Em medidores digitais o *l.e.i.* é, geralmente, é uma unidade do último dígito mostrado no visor.

Desvio avaliado : Quando se vai realizar uma medida, a primeira providência do operador é definir o *desvio avaliado* (s_a) associado à medida a ser feita, para assim conhecer a posição do algarismo duvidoso. Por exemplo, se o desvio avaliado para medidas feitas com uma régua milimetrada for de $\pm 0{,}5$ *mm* os valores deverão conter a casa dos décimos de milímetro, sendo, então, dos tipos 30,5 *mm* , 46,58 *cm* , 4,00 *cm*; se para medidas com uma balança o desvio avaliado é $\pm 0{,}1$ g, os valores serão do tipo 4,5 g , 23,8 g , 200,0 g .

A definição do desvio avaliado deve levar em conta o *l.e.i.* do instrumento de medida utilizado, o objeto a ser medido, o processo de medida e, em alguns casos, as condições ambientais. Seu valor é nunca menor do que o do *l.e.i.* do instrumento de medida, podendo ser igual a este se as condições de medida forem favoráveis. Por exemplo, se a medida a ser feita é a da largura de um objeto que tem arestas bem definidas e a régua pode encostar-se ao objeto, pode-se tomar o desvio avaliado igual ao *l.e.i.* da régua. Entretanto, se o objeto possuir contornos abaulados, o correto é tomar-se o desvio avaliado maior que o *l.e.i.* Igualmente, se a corrente elétrica que está sendo medida oscila, deve-se avaliar a amplitude de oscilação para definir o desvio avaliado, o qual será maior que o *l.e.i.*

O desvio avaliado deve ser usado como desvio da medida nos casos de se fazer poucas medidas (até três), quando as medidas repetidas têm o mesmo valor, ou quando o desvio padrão calculado para uma série de medidas for menor que ele.

O *desvio relativo* S, da medida de uma grandeza é definido como a relação entre a dispersão *s* utilizada para a medida (desvio avaliado, desvio padrão, etc., vistos anteriormente) e o valor *X* no caso de apenas uma determinação (ou o *v.m.p* no caso de uma série de medidas), expresso em %. Sua expressão é

$$S(\%) = \frac{s}{X} \times 100\,. \tag{26}$$

A precisão de uma medida pode ser avaliada pelo desvio relativo, podendo ser também utilizado para comparar a precisão entre medidas diferentes. Este desvio tem significado somente quando as medidas são referidas a um referencial zero que tenha significado físico. Quando o referencial é arbitrário, o desvio relativo perde o sentido quando os desvios individuais forem apreciáveis em comparação ao valor da medida.

18 – Propagação de erros independentes

Até aqui tratamos com medidas diretas. Trataremos, agora, os erros relativos às medidas indiretas, ou seja, aquelas calculadas através de expressões matemáticas envolvendo grandezas medidas diretamente.

Suponhamos que uma grandeza R é calculada a partir das grandezas medidas X e Y, através duma expressão matemática $R = R(X,Y)$. Pela lógica, R terá um erro que irá depender dos erros das grandezas medidas X e Y. (Esses erros devem ser compatíveis, ou seja, se, por exemplo, um representa um desvio padrão, os outros devem ser também desvios-padrão.) A relação entre o erro de R e os de X e Y é determinado pelo cálculo diferencial. Há duas situações limites. Numa delas — a mais comum — o erro de X não tem qualquer relação com o de Y e, neste caso, eles são ditos ser *independentes*. Por exemplo: suponhamos que a velocidade de um objeto seja determinada medindo o tempo de percurso e a distância percorrida por ele. Não há razão para supor que se o tempo for muito grande a distância será também muito grande. Sendo assim, estas variáveis são consideradas *independentes* uma da outra.

Trataremos, agora, dos erros relacionados às medidas indiretas, ou seja, aquelas calculadas através de expressões matemáticas envolvendo grandezas medidas diretamente. Suponhamos que uma grandeza R é calculada a partir das grandezas medidas X e Y através duma expressão matemática $R = R(X,Y)$. Nos experimentos realizados aqui no laboratório, as grandezas medidas são *independentes*, ou seja, o erro de uma grandeza medida diretamente não varia com a outra.

Valor mais provável de uma medida indireta: Considerando uma função $R = R(X,Y)$ o valor médio da função é obtido substituindo o valor mais provável das grandezas medidas diretamente na relação matemática que expressa a grandeza indireta ou seja:

$$\overline{R} = R(\overline{X},\overline{Y})$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são os valores médios das grandezas medidas diretamente.

Fórmula para propagação de erros independentes: Quando os erros são independentes, os coeficientes de correlação entre as grandezas X e Y são nulos, assim, para duas grandezas X e Y temos:

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^2 s_X{}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial Y}\right)^2 s_Y{}^2}\ , \tag{27}$$

onde as derivadas são tomadas nos pontos $X = \overline{X}$ e $Y = \overline{Y}$. Vamos agora obter expressões especiais para algumas funções que aparecem com mais freqüência em trabalhos de laboratório.

Produto de fatores elevados a diferentes potências.

Seja $R = A\ X^p\ Y^q$, onde p e q são valores reais conhecidos e A é uma constante ou número. As derivadas parciais de R nos pontos $\overline{X}$ e $\overline{Y}$, são

$$\frac{\partial R}{\partial X} = Ap\overline{X}^{\,p-1}\overline{Y}^{\,q} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial Y} = Aq\overline{X}^{\,p}\overline{Y}^{\,q-1},$$

as quais, substituídas na Eq. (27) resulta em

$$s_R = \sqrt{(Ap\overline{X}^{\,p-1}\overline{Y}^{\,q})^2 s_X{}^2 + (Aq\overline{X}^{\,p}\overline{Y}^{\,q-1})^2 s_Y{}^2} \tag{28}$$

Uma expressão mais conveniente para o cálculo de s_R, neste caso, é obtida dividindo-se a Eq. (28) pelo *v.m.p.* de R, ou seja, por $\overline{R} = A\overline{X}^{\,p}\overline{Y}^{\,q}$. O resultado é

$$s_R = \overline{R}\sqrt{p^2\left(\frac{s_X}{\overline{X}}\right)^2 + q^2\left(\frac{s_Y}{\overline{Y}}\right)^2}\ , \tag{29}$$

Vê-se que quanto maior for o valor absoluto do expoente da grandeza mais potencialmente ela contribuirá para o desvio de R.

Nos casos particulares de produto ou quociente simples ($R = A X \cdot Y$, ou $R = A X \div Y$), onde $p = \pm 1$ e $q = \pm 1$, a Eq. (29) reduz-se a:

$$s_R = \overline{R}\sqrt{\left(\frac{s_X}{\overline{X}}\right)^2 + \left(\frac{s_Y}{\overline{Y}}\right)^2} \qquad (30)$$

Soma ou diferença.

Seja $R = bX \pm cY$, onde b e c são constantes reais . As derivadas parciais de R são

$$\frac{\partial R}{\partial X} = b \qquad e \qquad \frac{\partial R}{\partial Y} = \pm c$$

Portanto, pela Eq. (27), tem-se

$$s_R = \sqrt{b^2 s_X{}^2 + c^2 s_Y{}^2} \text{ , ou } s_R = \sqrt{s_X{}^2 + s_Y{}^2} \text{ se } |b| = |c| = 1. \qquad (31)$$

19-Regras para representação do valor e do desvio de uma medida:

1-O desvio padrão, tanto da medida direta quanto da medida indireta, deverá ser expresso com dois algarismos significativos;
2- O desvio avaliado deverá ser escrito com um algarismo significativo;
3-O valor da medida deverá sempre ter o mesmo número de casas decimais que o desvio. Seja ele o desvio padrão ou avaliado;
4-O desvio tem a mesma unidade que a medida.

Exercícios resolvidos:

Exemplo 1– O diâmetro D de uma esfera de aço é medido 6 vezes com um micrômetro, obtendo-se os seguintes valores :

D (mm) = 6,458; 6,450; 6,463; 6,454; 6,457; 6,451.

Calcule o *v.m.p.* $\overline{D}$ do diâmetro, o desvio padrão s_D e o desvio padrão relativo S_D .

Solução:

Valor mais provável : $\overline{D} = \dfrac{\Sigma D}{n} = \dfrac{38{,}733}{6} = 6{,}4555 \; mm$.

Desvio padrão : $s_D = \sqrt{\dfrac{\Sigma D_i^2 - n\overline{D}^2}{6-1}} = \sqrt{\dfrac{1{,}175\times 10^{-4}}{5}} = \pm 0{,}00484767 \; mm$.

$$s_D = \pm\ 0{,}0048 \; mm.$$

Desvio relativo: $S_D = \dfrac{s_D}{\overline{D}} \times 100 = \dfrac{0{,}0048}{6{,}4555} \times 100 = 0{,}074\%$

Note que os desvios foram escritos com dois significativos, que é a regra a ser usada em nossos trabalhos. Coerentemente, o *v.m.p.* deve ser escrito com dois algarismos duvidosos. O número de significativos para expressar o *v.m.p.* é definido pelo desvio padrão. Neste caso, $\overline{\mathrm{D}}$ deve ser escrito como 6,4555 *mm* e seus dois últimos algarismos (55) são duvidosos. Caso o desvio padrão fosse $\pm 0{,}048$ *mm*, $\overline{\mathrm{D}}$ deveria ser escrito como 6,456 *mm* e os duvidosos seriam 56.

Exemplo 2- Para a série de 51 medidas de comprimento, em *mm*, apresentadas abaixo, calcule o valor mais provável e o desvio padrão.

4,008	4,025	4,033	4,039	4,044	4,049	4,051	4,057	4,062	4,065	4,068	4,078	4,087
4,018	4,027	4,033	4,039	4,044	4,049	4,053	4,058	4,063	4,066	4,070	4,081	4,090
4,019	4,027	4,038	4,039	4,047	4,050	4,054	4,058	4,064	4,067	4,073	4,081	4,104
4,023	4,031	4,039	4,043	4,048	4,051	4,054	4,059	4,065	4,067	4,076	4,086	

Solução:

Utilizando as Eqs. (05) e (16), obtemos para o valor mais provável *v.m.p*, o desvio padrão *s*:
v.m.p.= 4,05333... *mm*; $s = \pm 0{,}0205948...$ *mm*. s = ± 0,021 *mm*,
Coerentemente, o *vmp* = 4,053 *mm*.

Exemplo 3 **-** Expresse a medida do diâmetro do Exemplo 1 com um *n.c.* de 95 % em termos do desvio padrão.

Solução:

Em termos do desvio padrão, o intervalo é dado por $D = \overline{D} \pm \alpha\, s$. Para $n = 6$ e um *n.c.* = 95 % , a Tabela 3 dá para o fator α , α= 2,571. Portanto, o produto αs é 2,571× 0,004848 = ± 0,01246 *mm*. A medida será, então, expressa como

$$D = 6{,}456 \pm 0{,}012 \ mm \ .$$

Este intervalo significa que uma nova medida, feita nas mesmas condições que as anteriores, tem uma chance de 95 % de ter seu valor no intervalo acima, ou seja, entre 6,444 *mm* e 6,468 *mm*.

Exemplo 4- A massa *m* da esfera do Exemplo 1 foi medida seis vezes, obtendo-se para $\overline{m}$ e s_m os valores: $\overline{m} = 1{,}100\ g$ e $s_m = \pm 0{,}012\ g$. Calcule (**a**) a densidade da esfera e (b) expresse o resultado com um *n.c.* de 95 % em termos do desvio padrão.

Solução:

(**a**) O *v.m.p.* $\overline{\rho}$ da densidade da esfera *é (* $\overline{D}$ será tomado em *cm)*

$$\overline{\rho} = \frac{6\overline{m}}{\pi \overline{D}^{\,3}} = \frac{6 \times 1{,}100}{\pi \times 0{,}64555^{\,3}} = 7{,}80916\ g/cm^3\ ;$$

o desvio padrão da medida da densidade s_ρ é calculado através da Eq. (24)

$$s_\rho = \overline{\rho}\ \sqrt{3^2 \left(\frac{s_D}{\overline{D}}\right)^2 + \left(\frac{s_m}{\overline{m}}\right)^2} = 7{,}80916\ \sqrt{5{,}08 \times 10^{-6} + 1{,}19 \times 10^{-4}} = \pm\ 0{,}08699\ g/cm^3$$

Os resultados para ρ são, portanto, $\overline{\rho} = 7{,}809\ g/cm^3$ e $s_\rho = \pm 0{,}087\, g/cm^3$ (s_ρ foi escrito com dois significativos e observe a coerência nas escritas dele e de $\overline{\rho}$). Verifique que, pelo valor das duas parcelas dentro da raiz, a medida da massa contribuiu mais para o desvio de ρ , apesar de D estar elevado ao cubo e, portanto, ter seu desvio multiplicado por três.

(**b**) Como são seis medidas de D e de m, $n = 6$; para um *n.c.* = 95 % a Tabela 3 nos dá α = 2,571. Então, αs_ρ= ±0,08699 × 2,571 = ±0,2237 g/cm^3. Portanto, para o *n.c.* de 95 % , ρ é expresso como: $\rho = 7{,}81 \pm 0{,}22\ g/cm^3$

Observe que ajustamos novamente o valor de $\overline{\rho}$ para manter a coerência na escrita de $\overline{\rho}$ e αs_ρ.

RESUMO CAPÍTULO 1

<u>Grandezas, dimensão e unidades</u>

Cada grandeza está associada a uma única dimensão, e esta dimensão pode ser expressa em diferentes unidades.

As grandezas estudadas neste curso (geométricas, cinemáticas e dinâmicas), são expressas em função de três grandezas fundamentais: comprimento [L], massa [M] e tempo [T]. Convencionalmente, na escrita das equações dimensionais, as grandezas são postas entre colchetes. Por exemplo, a equação dimensional da aceleração *g* devida à gravidade é escrita como

$$[g] = [L]\,[T]^{-2}\ .$$

- Ao por os valores das grandezas numa equação, atente para que todos eles estejam num **mesmo sistema de unidades**.
- **Valor recomendado para *g* em Salvador, medido no Ano Geofísico Internacional**:

$$g_{\text{local}} = 9{,}7833\ \text{m/s}^2 \ \text{ ou } \ g_{\text{local}} = 978{,}33\ \text{cm/s}^2$$

Tabela com as dimensões e unidades nos sistemas CGS e SI (MKS) das principais grandezas de Mecânica

Grandeza	Dimensão L M T	Sistema CGS Unidade	Nome	Sistema MKS Unidade	Nome
Comprimento	[L]	Cm	centímetro	m	metro
Massa	[M]	G	grama	kg	quilograma
Tempo	[T]	S	segundo	s	segundo
Área	$[L]^2$	cm^2	—	m^2	—
Volume	$[L]^3$	cm^3	—	m^3	—
Velocidade	$[L]\,[T]^{-1}$	cm/s	—	m/s	—
Aceleração	$[L]\,[T]^{-2}$	cm/s^2	—	m/s^2	—
Força	$[M]\,[L]\,[T]^{-2}$	$g\ cm\ s^{-2}$	dina (dyn)	$kg\ m\ s^{-2}$	Newton (N)
Energia	$[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$	$g\ cm^2\ s^{-2}$	erg	$kg\ m^2\ s^{-2}$	Joule (J)
Potência	$[M]\,[L]^2\,[T]^{-3}$	$g\ cm^2\ s^{-3}$	erg/s	$kg\ m^2\ s^{-3}$	Watt (W)
Pressão	$[M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$	$g\ cm^{-1}\ s^{-2}$	dyn/cm^2	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	Pascal (P)
Torque	$[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$	$g\ cm^2\ s^{-2}$	dyn·cm	$kg\ m^2\ s^{-2}$	N·m

Algarismos significativos

Definição: Numa medida, são ditos significativos todos os algarismos contados a partir do primeiro não nulo (diferente de zero), ou seja, o zero a esquerda não conta como significativo. Pelo menos um algarismo duvidoso é incluído no resultado de uma medida, mesmo que ele seja zero.

Regras de aproximação de algarismos significativos: Às vezes é necessário fazer uma aproximação de um resultado de acordo com o número de significativos das medidas que lhes deram origem. Deste modo os dígitos excedentes são arredondados, usando-se os seguintes critérios:

3- Se o primeiro dígito desprezado for um número variando entre 0 e 4, o anterior não será alterado;
4- Se for de 5 a 9, o anterior é acrescido de uma unidade.

Regras de operações com algarismos significativos:

1- Na multiplicação e divisão o resultado final deve ser escrito com um número de significativos igual ao do fator com menor número de significativos.

Exemplos: $3{,}7 \times 4{,}384 = 16$; $0{,}632 \div 0{,}20 = 3{,}2$; $4{,}40 \times 6242 = 2{,}75 \times 10^4$.

2- Em operações envolvendo inverso de números e multiplicação por fatores constantes, o número de significativos deve ser preservado no resultado.

Exemplos: $\frac{1}{248} = 0{,}00403$; $2 \times 6{,}23 = 12{,}5$; $4\pi \times 13{,}5 = 170$.

3- Na soma e subtração o resultado final terá um número de decimais igual ao da parcela com menos decimais.

Exemplos: $3{,}4 + 0{,}256 - 2{,}22 = 1{,}4$; $34 + 2{,}92 - 0{,}5 = 36$; $0{,}831 - 6{,}26\times10^{-3} - 0{,}79 = 0{,}03$

Medidas diretas e indiretas

Medidas diretas

São as obtidas por simples comparação utilizando-se instrumentos de medida já calibrados para tal fim.

O *valor mais provável (v.m.p.) de uma medida direta*, $\overline{X}$, de uma **amostra** com *n* elementos, é a média aritmética dos n valores, ou seja,

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i}{n}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

O Desvio padrão da medida direta s é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i d_i^{\,2}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i X_i^{\,2} - n\overline{X}^{\,2}}{n-1}}, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

<u>Medidas indiretas</u>

São todas aquelas relacionam as medidas diretas por meio de fórmulas matemáticas.

-Propagação de erros (Medidas Indiretas)

Suponhamos que uma grandeza R é calculada a partir das variáveis medidas diretamente X e Y através duma expressão matemática $R = R(X,Y)$. Então, R tem um erro como resultado dos erros de X e Y.

O Valor mais provável de uma medida indireta, considerando uma função $R = R(X,Y)$, é obtido substituindo o valor mais provável das variáveis medidas diretamente na relação matemática que expressa a medida indireta ou seja:

$$\overline{R} = R(\overline{X}, \overline{Y})$$

onde $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são os valores médios das variáveis medidas diretamente.

O desvio padrão de uma medida indireta para um *R(X,Y)*, quando as medidas diretas são independentes, é definido por:

$$s_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^2 s_X^{\,2} + \left(\frac{\partial R}{\partial Y}\right)^2 s_Y^{\,2}},$$

onde as derivadas são tomadas nos pontos $X = \overline{X}$ e $Y = \overline{Y}$ e s_x e s_y são os desvios padrões das variáveis medidas diretamente. A fórmula de propagação de erros independentes terá o número de termos, na soma dentro da raiz, igual ao número de variáveis medidas diretamente.

Expressões simplificadas:

1-Produto de fatores elevados a diferentes potências (utilizada em fórmulas quem tem multiplicação e/ou divisão).

Seja $R = A\ X^p\ Y^q$, onde p e q são valores reais conhecidos e A é uma constante ou número. O resultado é

$$s_R = \overline{R}\sqrt{p^2\left(\frac{s_X}{\overline{X}}\right)^2 + q^2\left(\frac{s_Y}{\overline{Y}}\right)^2},$$

2-Soma ou diferença.

Seja $R = bX \pm cY$, onde b e c são constantes reais . Usando a definição :

$$s_R = \sqrt{b^2 s_X^{\,2} + c^2 s_Y^{\,2}}, \text{ ou } s_R = \sqrt{s_X^{\,2} + s_Y^{\,2}} \quad \text{se } |b| = |c| = 1.$$

<u>Nível de confiança com o desvio padrão</u>

Ao o desvio padrão é possível, definir um intervalo de confiança, [$\overline{X} \pm \alpha s$] ou [$\overline{X} - \alpha s$; $\overline{X} + \alpha s$], no qual uma medida *X*, tem uma determinada probabilidade de estar contida. A constante α é definida pela lei de distribuição, e seu valor depende da probabilidade atribuída .

Quando o número de medidas é suficientemente grande (digamos, maior que 20) podemos tomar σ por s sem muito erro e, neste caso, os níveis de confiança são obtidos através da distribuição de Gauss.

Quando $n < 20$, não é mais possível substituir σ por s. Os valores para α, neste caso, são obtidos através da distribuição de Student.

Rejeição de dados

O critério comumente usado é rejeitar-se as medidas cujos desvios em relação ao *v.m.p.* sejam maiores que três vezes o desvio padrão. A justificativa para esse critério é que, para cinco ou mais medidas, todas elas praticamente jazem no intervalo [$\overline{X} \pm 3s$], sendo praticamente zero a probabilidade de uma medida jazer fora deste intervalo. Uma vez eliminada a medida anômala, novo *v.m.p.* e novo desvio padrão devem ser calculados com as medidas restantes.

Limite de erro instrumental, desvio avaliado, desvio relativo e discrepância relativa

O *limite do erro instrumental* *(l.e.i.)* dum instrumento de medição com escala de leitura contínua (réguas, micrômetro, medidores com ponteiro) é definido como a menor fração da menor divisão da escala que pode ser estimada visualmente.

O *Desvio avaliado* deve ser usado como desvio da medida, nos casos de se fazer poucas medidas (até três), quando as medidas repetidas têm o mesmo valor, ou quando o desvio padrão calculado para uma série de medidas for menor que ele. O valor do desvio avaliado é nunca menor do que o do *l.e.i.* do instrumento de medida, podendo ser igual a este se as condições de medida forem favoráveis.

O *Desvio relativo* S, da medida de uma grandeza é definido como a relação entre a dispersão *s* utilizada para a medida (desvio avaliado, desvio padrão, etc., vistos anteriormente) e o valor *X* no caso de apenas uma determinação (ou o *v.m.p* no caso de uma série de medidas), expresso em %. Sua expressão é

$$S(\%) = \frac{s}{X} \times 100$$

A precisão de uma medida pode ser avaliada pelo desvio relativo, podendo ser também utilizado para comparar a precisão entre medidas diferentes. Este desvio tem significado somente quando as medidas são referidas a um referencial zero que tenha significado físico. Quando o referencial é arbitrário, o desvio relativo perde o sentido quando os desvios individuais forem apreciáveis em comparação ao valor da medida.

A *discrepância relativa*, Δ, (letra grega, lê-se delta) entre duas medidas X' e X'' de uma grandeza é definida pela relação (em %)

$$\Delta = \left| \frac{X' - X''}{X''} \right| 100.$$

X' e X'' podem ser os valores obtidos por dois observadores, ou X' pode ser um valor obtido por um observador e X'' um valor tabelado ou recomendado da grandeza.

Regras para representação do valor e do desvio de uma medida:

1-O desvio padrão, tanto da medida direta quanto da medida indireta, deverá ser expresso com dois algarismos significativos;
2- O desvio avaliado deverá ser escrito com um algarismo significativo;
3-O valor da medida deverá sempre ter o mesmo número de casas decimais que o desvio. Seja ele o desvio padrão ou avaliado;
4-O desvio tem a mesma unidade que a medida.

Exercícios Capítulo I

1. Faça a análise dimensional de:

a) Uma dada força F amortece com o tempo t na forma $F = F_o\, e^{-\lambda t}$. Escreva as equações dimensionais de F_o e do fator de amortecimento λ.

b) O período de oscilação duma mola espiral é dado por $T = \alpha \sqrt{M}$, onde M é a massa efetiva de vibração. Escreva a equação dimensional da constante α .

2. Numa aula prática cinco equipes realizaram medidas de pressão e expressaram seus resultados, usando o sistema MKS, nas seguintes unidades:
a) $N \cdot m^{-2}$ **b)** $J \cdot m^{-3}$ **c)** P **d)** $W \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ **e)** $W \cdot s \cdot m^{-3}$ .Do ponto de vista dimensional, diga quais resultados podem ser considerados corretos. Justifique.

3. Escreva os resultados das operações abaixo com o número correto de algarismos significativos.

a) $\dfrac{36{,}2 \times 4{,}00}{84{,}26} =$ **b)** $\dfrac{8{,}6 \times 3{,}1416}{0{,}1420} =$ **c)** $\dfrac{6{,}63 \times 10^{-34} \times 1{,}2 \times 10^{19}}{2{,}9979 \times 10^{8} \times 1{,}61 \times 10^{-19}} =$

d) $25{,}62 + 0{,}321 - 16{,}6 + 96 =$ **e)** $0{,}83 - 1{,}26 \times 10^{-4} - 0{,}795 - 6{,}32 \times 10^{-2} =$

4. Mediu-se um objeto com uma régua milimetrada utilizando-se um desvio avaliado de ± 0,4 mm. Diga quais medidas estão corretas, do ponto de vista do número de algarismos significativos.

a) 3,54 *mm* ; **b)** 4,30 *cm* ; **c)** 8,9 *mm* ; **d)** 0,873 *m* ; **e)** 4 *mm* ; **f)** 0,3452 *m* ; **g)** 0,456 *dm.*

5. Abaixo são dadas 33 medidas da massa m dum objeto, em g.

1,236	1,254	1,261	1,270	1,276	1,282	1,287	1,292	1,301	1,310	1,327
1,247	1,258	1,266	1,275	1,281	1,284	1,291	1,295	1,302	1,318	1,338
1,253	1.261	1,269	1,275	1,282	1,284	1,292	1,297	1,304	1,321	1,345

a)Calcule o *v.m.p.* $\overline{m}$ e o desvio padrão s_m da série de medidas acima.

b) Determine os intervalos $[\,\overline{m} - \alpha\, s_m\ ,\ \overline{m} + \alpha\, s_m\,]$ para os níveis de confiança de **(i)** 50,00 % , **(ii)** 68,26 % , **(iii)** 95,45 % e **(iv)** 99,73 % (veja Seção 15). Conte o número das medidas acima jazendo em cada um destes intervalos e compare esses números com os previstos pela distribuição de Gauss.

6. Dadas as séries de

A (cm) = 8,40 ; 8,36 ; 8,45 ; 8,38 ; 8,49 | B (g) = 7,69 ; 7,51 ; 7,47 ; 7,65 ; 7,70.

a) Calcule o valor mais provável e o desvio padrão de cada série.

b) Escreva-as as medidas A e B com um *n.c.* de **(i)** 90 % e **(ii)** 95 %. Calcule, então, o desvio relativo de cada medida nos dois intervalos e diga o que acontece com a precisão quando o *n.c* cresce.

7. Dados X = 0,57m, Y = 0,2kg e Z = 17,2cm, calcule R nas seguintes expressões e escreva o resultado com o número de algarismos significativos corretos (utilize as regras de operações com algarismos significativos).

i) R= X + Z **ii)** R= X – Z **iii)** R= X/Z **iv)** R= (X + Z) /Y **v)**R= ZY / X

8. Dadas as séries de

X (cm) = 8,40 ; 8,36 ; 8,45 ; 8,38 ; 8,49 | Y (g) = 7,69 ; 7,51 ; 7,47 ; 7,65 ; 7,70.

a) Calcule o valor mais provável e o desvio padrão de cada série.

b) Se Z= (17,2 ± 0,2)cm, calcule $\overline{R}$ e s_R nas seguintes expressões, utilizando os dados do item (*a*)

i) R= X + Z; **ii)** R= X – Z; **iii)** R= X/Z; **iv)** R= (X + Z) /Y; **v)**$R = Z^{1/2}\, Y^2$

9. Um disco de momento de inércia $I = (6{,}033 \pm 0{,}013) \times 10^{-3}$ kg·m² — em relação ao baricentro do disco — é feito girar pela ação duma massa $m = 50{,}0 \pm 0{,}1$ g presa na ponta dum cordão que se desenrola sem escorregar de um tambor de raio $r = (1{,}750 \pm 0{,}005) \times 10^{-2}$ m solidário ao disco. Solta, a massa desce de uma altura $h = 1{,}750 \pm 0{,}001$ m num tempo $t = 12{,}00 \pm 0{,}14$ s. Nessas condições, a energia rotacional E_R do disco é dada pela expressão $E_R = 2\, I\, h^2/(t^2\, r^2)$. Calcule E_R e seu desvio padrão.

10. Num experimento sobre conservação de energia mecânica, obteve-se para a energia inicial do sistema, $E_p = 0{,}8540 \pm 0{,}0012$ J e para as energias finais, $E_c = (2{,}223 \pm 0{,}056)\times 10^{-3}$ J, $E_R = 0{,}786 \pm 0{,}014$ J e $Q = (4{,}36 \pm 0{,}10)\times 10^{-2}$ J. Os desvios dados representam um desvio padrão. A lei de conservação é dada por $\sum E = E_P - E_c - E_R - Q = 0$.

a) Mostre que, com os dados acima, o desvio padrão de $\sum E$ reduz-se ao de E_R.

b) Verifique se, dentro de dois desvios, esses dados satisfazem à lei de conservação.

11. Para determinar-se o período de oscilação de um pêndulo oscilando em pequena amplitude, dispõe-se de um cronômetro cujas medidas têm um desvio avaliado é $s_a = \pm\ 0{,}1$ s.

a) Mostre que, se medirmos o tempo t de n oscilações, o período T e seu desvio s_T são dados por $T = t/n$ e $s_T = s_a / n$.

b) Mostre qual a forma mais precisa de determinar-se o período T: medir-se n vezes o tempo T — o período é o tempo de uma oscilação — e daí calcular-se T e s_T ; ou medir-se uma vez o tempo t de n oscilações e daí calcular-se T e s_T .

12. Num experimento sobre conservação de energia, obteve-se para as energias inicial e final do sistema, $E_i = 0{,}8540$ J, $s_i = \pm\ 0{,}0012$ J ; e $E_f = 0{,}8600$ J, $s_f = \pm\ 0{,}0025$ J . Verifique se, dentro de dois desvios padrões, esses dados satisfazem à lei de conservação $E_f - E_i = 0$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO I

1. a) $[F_0] = [M][L][T]^{-2}$; $\lambda = [T]^{-1}$; b) $[\alpha] = [T][M]^{-1/2}$.

2. a) Correto; b) Correto; c) Correto; d) Errado; e) Correto.

3. a) 1,72; b) $1{,}9 \times 10^2$; c) $1{,}6 \times 10^{-4}$; d) 105; e) -0,03.

4. a) Errado); b) Correto; c) Correto; d) Errado; e) Errado; f) Correto; g) Correto.

5. a) $\overline{m}$ = 1,285878 = 1,286g; S_m = 0,025809 = 0,026g

b) m = (1,286 ± 0,017)g → [1,269 ; 1,303]g ; n = 18 medidas = 54,5%.

m = (1,286 ± 0,026)g; → [1,260 ; 1,318]g ; n = 24 medidas = 72,7%.

m = (1,286 ± 0,056)g → [1,230 ; 1,342]g ; n = 32 medidas = 97,0%.

m = (1,286 ± 0,078)g. → [1,208 ; 1,364]g ; n = 33 medidas = 100%.

6. a) $\overline{A}$ = 8,416000 = 8,416cm; s_A =± 0,053198 =± 0,053cm.

$\overline{B}$ = 7,604000 = 7,60g; s_B = ±0,106677 =± 0,11g.

b) i) A = (8,42 ± 0,11)cm; S(%) = 1,31%; B = (7,60 ± 0,23)g; S(%) = 3,03%.; ii) A = (8,42 ± 0,15)cm; S(%) = 1,78%.
B = (7,60 ± 0,31)cm; S(%) = 4,08%.

7. i) R = X + Z = 74cm = 0,74m. ii) R = X - Z = 40cm = 0,40m. iii) R = X/Z = 3,3; iv) R = (X + Z)/Y = 4 x 10^2 cm/kg = 4m/kg; v) R = Z.Y/X = 0,06kg.

8. a) X = (8,416 ± 0,053)cm; Y = (7,60 ± 0,11)g .

b) Z = (17,2 ± 0,2)cm; i) R = X + Z = 25,62cm s_R = ±0,21cm.; ii) R = X - Z = -8,78cm; s_R = ±0,21cm; iii) R = X/Z = 0,4893; s_R =± 0,0065.; iv) R = (X + Z)/Y = 3,371cm/g; s_R = ±0,056cm/g; v) R = $Z^{½}.Y^2$ = 239,5$cm^{1/2}g^2$; s_R = ±7,1$cm^{1/2}g^2$.

9. $\overline{E}_R = 0{,}838J$; s_R = ±0,020 J.

10. a) $\sum \overline{E} = 0{,}022J$; s_Σ =±0,014 J. ; b) $\sum \overline{E} \pm 2s_\Sigma$ = (0,022 ± 0,028) J. Como : $-2s_\Sigma \le \sum \overline{E} \le +2s_\Sigma$ ou o zero ∈ ao intervalo (0,022 ± 0,028) J, a Lei de Conservação da Energia é satisfeita.

11. a)Temos, $T = \dfrac{t}{n}$, logo $s_T = \sqrt{(\partial T/\partial t)^2 s_a^2} = s_a/n = 0{,}1s/n$; b)1ª forma: $\overline{T} = \dfrac{\sum T_i}{n}$, $s_T = \sqrt{\dfrac{\sum (T_i - \overline{T})^2}{n-1}} \ge 0{,}1s$ então $S_1(\%) = \dfrac{s_T}{\overline{T}} \times 100 \ge \dfrac{0{,}1 \times 100}{\overline{T}}$; 2ª forma: $\overline{T} = \dfrac{t}{n}$, $s_T = 0{,}1s/n$. então $S_2(\%) = \dfrac{s_T}{\overline{T}} \times 100 \ge \dfrac{0{,}1 \times 100}{\overline{T}n}$; Como: $S_2(\%) < S_1(\%)$, então a segunda forma é mais precisa.

12. $\Delta\overline{E}$ = 0,0060 J; s_Δ = ±0,0028 J. Então $\Delta\overline{E} \pm 2\ s_\Delta$ = (0,0060 ± 0,0056)J. Como:0,0060J ∉ [- 0,0056J; +0,0056J], ou o zero ∉ ao intervalo [0,0060 ± 0,0056] J →[0,0004J; 0,0116J], a Lei de Conservação da Energia não é satisfeita.

CAPITULO II
ANÁLISE GRÁFICA DE DADOS EXPERIMENTAIS

Com a análise gráfica busca-se um modo rápido e conveniente de visualizar e interpretar relações existentes entre dados experimentais de grandezas relacionadas. De um gráfico, portanto, espera-se que ele possa ser fácil e rapidamente interpretado e que forneça o maior número possível de informações.

1 - REGRAS (GUIAS) PARA A REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.

- Ponha a variável independente no eixo das abscissas (eixo-x) e a variável dependente no eixo das ordenadas (eixo-y).
- O título do gráfico deve ser conciso, auto-explicativo e escrito no espaço branco superior do papel com a referência da grandeza dependente escrita em primeiro lugar. Exemplos: Relação entre o período e a órbita do satélite; Queda livre: tempo *versus* altura.
- Os símbolos (ou nomes) das grandezas devem ser escritos no meio dos espaços brancos, inferior e lateral esquerdo, com suas unidades entre parênteses. Exemplos: h***(m),*** Tempo (*s*).
- As escalas escolhidas devem ser tais que facilitem a leitura das coordenadas dos pontos nas subdivisões do papel de gráfico e apresentem alguma relação com a precisão dos dados. Os valores 1, 2, 5 e 10 são os melhores; 4 já apresenta alguma dificuldade; 3 , 7 e 9 devem ser evitados. As escalas não precisam ser iguais nos dois eixos e não é necessário que a interseção dos eixos represente o valor zero para uma, ou as duas variáveis.
- Use no máximo três dígitos para indicar os valores nas divisões principais. Se os valores são excessivamente grandes ou pequenos escolha uma unidade adequada, ou use fatores multiplicativos, os quais devem ser indicados no fim do eixo.
- Use um lápis bem apontado para locar o ponto e, em torno deste, desenhe um círculo de 2 a 3 *mm* de diâmetro (veja Fig. 6). Se várias curvas vão ser traçadas no mesmo gráfico use símbolos diferentes, como quadrados, triângulos, etc. Não escreva os valores das coordenadas dos pontos no papel de gráfico.

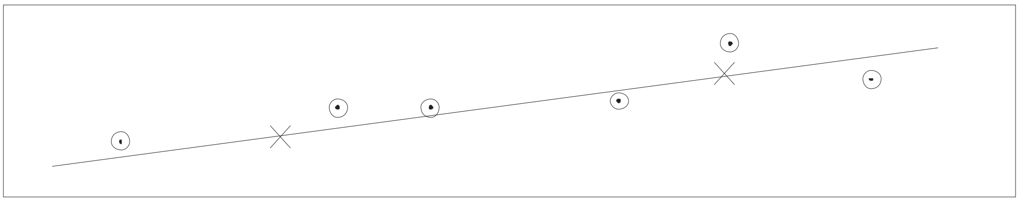


Figura 6

- Trace a melhor linha contínua através da média dos pontos. A curva não precisa passar necessariamente sobre os pontos. Se a linha for uma reta, trace-a usando pontos médios dum grupo de pontos. Locados (na Fig. 6 os x indica os pontos médios). Use linha interrompida para traçar os trechos extrapolados, isto é, aqueles fora da região medida.
- Leia as coordenadas dos pontos a serem usados no cálculo dos parâmetros com a melhor precisão possível. Esses pontos devem ser escolhidos não muito próximos entre si e, preferencialmente, em interseções da reta com cruzamentos das linhas do papel de gráfico de modo a reduzir erros de avaliação.

2 - INTERPOLAÇÃO E EXTRAPOLAÇÃO

A **interpolação** consiste em obter-se informações sobre pontos intermediários às medidas realizadas. Trata-se de um processo relativamente seguro e a precisão das medidas interpoladas são equivalentes as daquelas obtidas nas medidas.

Com a **extrapolação** procura-se obter informações sobre pontos fora do trecho das medidas realizadas. Este processo envolve algum risco, já que ele implica assumir-se como as grandezas se comportam fora do trecho medido. A precisão da medida extrapolada pode, também, ser mais precária, devido à incerteza na extensão da curva sem haver pontos de referência do lado a ser extrapolado.

3 - DETERMINAÇÃO GRÁFICA DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO LINEAR

O gráfico de uma função linear é uma reta. Logo, quando os dados experimentais de duas grandezas x e y são locados num papel linear e o gráfico resultante é uma reta, o fenômeno estudado é regido por uma lei cuja expressão analítica é:

$$\boldsymbol{y} = A\,\boldsymbol{x} + B, \tag{32}$$

Onde o parâmetro A representa o coeficiente angular da reta e o parâmetro B o coeficiente linear, definido como o ponto de interseção da reta com o eixo da ordenada em $x = 0$.

Resolvendo a Eq. (32) para os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), obtém-se para o coeficiente angular A ,

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{33}$$

onde os pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são pontos tomados no gráfico.

O coeficiente angular não deve ser confundido com a tangente trigonométrica do ângulo formado no gráfico pela reta com o eixo das abscissas. A tangente trigonométrica é um número puro por ser uma relação entre dois comprimentos e não possui sentido físico, desde que o ângulo muda quando se modificam as escalas. Já o coeficiente angular, como definido pela Eq. (33), independe das escalas adotadas e pode representar uma grandeza dimensional se as variáveis x e y representarem grandezas diferentes. Por exemplo, num gráfico de espaço contra o tempo, o coeficiente angular tem a dimensão de velocidade.

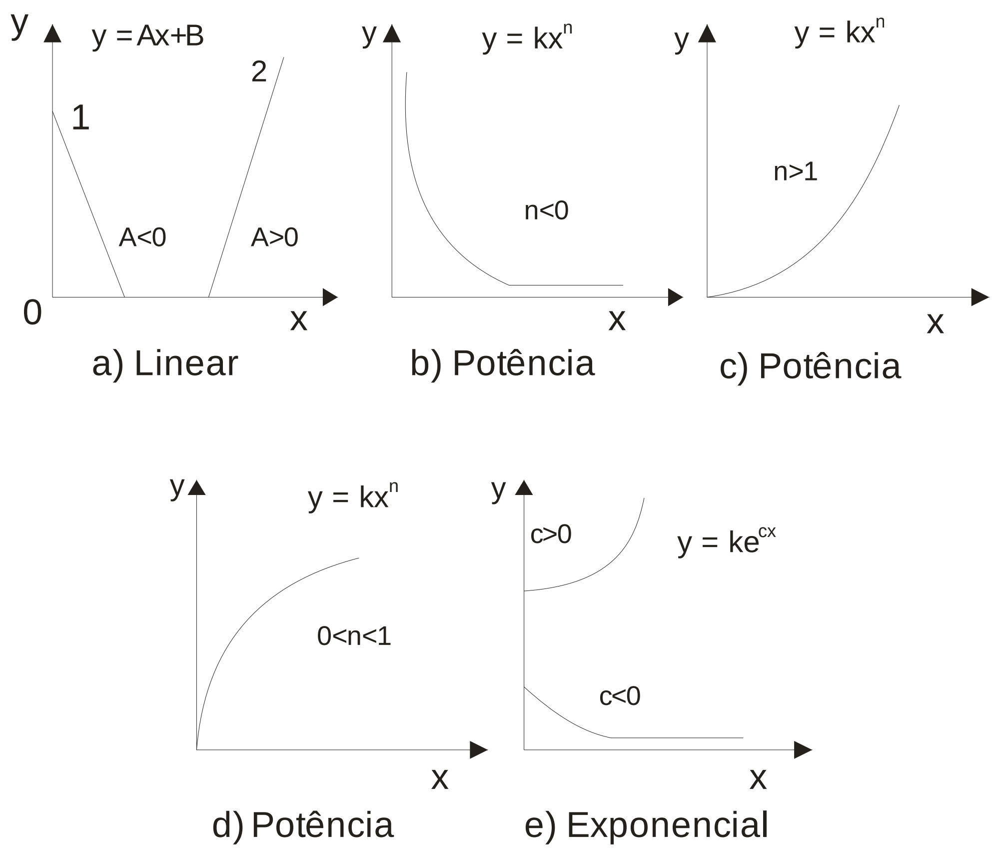


Figura 7

O parâmetro B é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo $x = 0$ e pode ser lido diretamente no gráfico. No caso de a reta não interceptar o eixo $x = 0$ nos limites do gráfico, B pode ser calculado através da Eq. (32) usando-se um par de pontos tirado do gráfico e o valor de A obtido pela Eq. (33). Na Fig. 7 (*a*) a reta 1 tem A negativo e o valor de B pode ser lido diretamente; a reta 2 tem A positivo e o valor de B tem que ser calculado, pois a interseção cai fora dos limites do gráfico. Tendo-se as coordenadas x_i , y_i duma reta, os parâmetros A e B podem ser calculados de modo mais preciso, inclusive com seus desvios padrões, utilizando-se o **método de ajuste pelos mínimos quadrados**. Esse método exige uma calculadora e deve ser usado sempre que possível, inclusive para fornecer os dados para se traçar a melhor reta ajustada aos pontos experimentais.

4- LINEARIZAÇÃO DE CURVAS

Um modo conveniente de obter-se os parâmetros de funções não lineares é através da linearização de curvas. A razão de procurar-se transformar gráficos não lineares em lineares é que a reta permite maior facilidade em seu traçado e maior precisão na determinação de seus parâmetros. Os tipos das funções que mais comumente expressam as leis físicas são os de potência e os exponenciais. Os gráficos de algumas dessas funções estão ilustrados na Figura 7.

Para esses tipos de função, dois métodos são comumente usados para linearização: o da **anamorfose** e o **logarítmico**. Há, ainda, o método das **diferenças tabulares** que se aplica a funções mais complexas. (Sobre este método veja Meiners, Harry F., *et alli* . Laboratory Physics. John Wiley, 1972.)

5- LINEARIZAÇÃO PELO MÉTODO DA ANAMORFOSE

O método de linearização por anamorfose é utilizado quando se conhece *a priori* o tipo da função que relaciona as grandezas envolvidas, ou quando se pode especular sobre esse tipo. Ele consiste em se fazer uma mudança de variável de modo a transformar uma função não linear numa função linear. Por exemplo, se duas grandezas z e t são relacionadas por uma função do tipo $z = \alpha t^n$, pode-se dizer que z varia diretamente com t^n. Se n é conhecido e se se faz $t^n \equiv$, o gráfico de z contra u resultará numa linha reta de equação $z = \alpha u$, cujo coeficiente angular α (o parâmetro da função $z = \alpha t^n$) é dado por

$$\alpha = \frac{z_2 - z_1}{u_2 - u_1}. \tag{34}$$

Numa outra situação, admita que há razões para supor-se que duas grandezas T e m obedeçam a uma relação funcional do tipo $T = k\sqrt{m}$. A partir desta hipótese, tenta-se a linearização fazendo-se o gráfico de T contra $\sqrt{m}$. Se o resultado é uma reta, isto significa que a hipótese é correta e, então, a constante k pode ser determinada através da Eq. (34).

6 - LINEARIZAÇÃO PELO MÉTODO LOGARÍTMICO

Este método aplica-se a funções de potência e exponenciais e consiste em tomar-se o logaritmo de ambos os membros da função que se deseja linearizar e construir-se o gráfico da expressão resultante.

Função potência

Sejam duas grandezas x e y que se relacionam por uma função de potência do tipo

$$y = k\,x^n. \tag{35}$$

Se se aplica o logaritmo decimal a ambos os membros desta equação, o resultado é a expressão:

$$\log y = \log k + n \log x. \tag{36}$$

Portanto, o gráfico de $\log y$ contra $\log x$ resultará numa reta, de equação idêntica à Eq. (32) (se se muda y por $\log y$ e x por $\log x$), cujo coeficiente angular n é dado por

$$n = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}, \tag{37}$$

onde as coordenadas dos pontos ($\log x_1$, $\log y_1$) e ($\log x_2, \log y_2$) são lidas diretamente no gráfico. O coeficiente linear da reta é log k e o valor de k, pela própria definição de logaritmo, é dado por $k = 10^{\log k}$.

Cabe, aqui, uma consideração sobre o valor de n obtido pela Eq. (37). Na maioria das equações que expressam fenômenos físicos os expoentes são, ou frações simples, ou números inteiros, tais como 2, 1/2, -2, -3/4, 1, etc. Então, o valor calculado de n deve ser aproximado, dentro do erro experimental, para inteiro ou relação entre inteiros. Por exemplo, 0,493 ≈ 1/ 2; -0,991 ≈ - 1; 1,49 ≈ 3/ 2; - 2,01 ≈ -2; 0,334 ≈ 1/ 3 ; - 1,486 ≈ - 3/2.

***Gráfico logarítmo em papel de gráfico log-log**:* O gráfico de uma função logarítmica do tipo da Eq. (36) é comumente construído em papel **log-log.** No papel log-log as escalas são logarítmicas decimais ao invés de linear e o papel pode conter uma ou mais décadas em cada eixo. Como cada década corresponde a uma ordem de grandeza, a escolha do papel é feita em função das faixas de variação das variáveis. Um tipo comum desse papel é o log-log (2x3 décadas); ele permite variações de duas ordens de grandeza no eixo das ordenadas e três no eixo das abscissas.

O gráfico logarítmico da Eq. (36) neste tipo de papel é feito locando-se y contra x. Para se calcular o coeficiente angular n, lê-se no gráfico as coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de um par de pontos, em seguida obtém-se os logaritmos dessas coordenadas (log x_1, log y_1, log x_2 e log y_2) para serem utilizados na Eq. (37). O valor de k é a ordenada da interseção da reta com o eixo $x = 1$ e pode ser lido diretamente no gráfico. No caso de a interseção não se dar nos limites do papel de gráfico, pode-se obter k pela Eq. (35) usando-se um par de valores tirado do gráfico e o valor de calculado de n sem arredondamento.

7 - MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS (*Opcional)

Melhor ajuste de uma reta

Freqüentemente, duas grandezas X e Y, ambas medidas diretamente, são relacionadas por uma expressão teórica $Y=Y(X)$ envolvendo parâmetros para serem avaliados a partir dos dados observados. O caso mais comum e mais simples é quando as grandezas podem ser relacionadas pela equação da linha reta

$$Y = AX + B \tag{38}$$

onde A é o coeficiente angular da reta e B sua interseção com o eixo-Y . O problema posto é ajustar a melhor linha reta aos pontos experimentais.

Se os pares medidos (X, Y) fossem valores "verdadeiros", cada par seria representado graficamente por um ponto e a reta passaria sobre todos eles. Mas como X e Y estão sujeitos a erros, a posição de cada ponto não é determinada exatamente. Então, ao invés do ponto ideal, tem-se uma elipse, de eixos s_X e s_Y, cujos centros não são esperados jazerem sobre uma linha reta, mas são esperados se distribuírem de cada lado dela.

O método dos mínimos quadrados sugere que a melhor reta é aquela para a qual a soma dos quadrados das distâncias dos centros das elipses à reta, medidas ao longo de alguma direção apropriada, é um mínimo. A direção apropriada depende dos desvios relativos de X e Y e de se essas grandezas têm ou não a mesma dimensão física

Uma situação bem mais simples resulta se admitirmos que uma das grandezas, digamos, a variável X, é medida exatamente, enquanto todos os erros estão concentrados na grandeza Y. Esta situação é representada graficamente por linhas verticais centradas nos pontos (X_i, Y_i). O desvio de Y_i (δY_i), é definido pela relação

$$\delta Y_i = Y_i - (A X_i + B) \tag{39}$$

Graficamente, o desvio δY_i é a distância vertical do ponto (X_i, Y_i) à reta procurada e as constantes A e B devem ser escolhidas de modo a fazer com que a soma dos quadrados de todos os desvios seja um mínimo. Assumindo, então, que todo o erro está concentrado em Y, o quadrado do desvio δY_i dado pela Eq. (39) é

$$\delta Y_i^2 = Y_i^2 + A^2 X_i^2 + B^2 + 2ABX_i - 2AX_iY_i - 2BY_i \; . \tag{40}$$

Se n é o número total de pares de valores, a soma dos quadrados dos desvios é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + nB^2 + A^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2B \sum_{i=1}^{n} (Y_i - AX_i) - 2A \sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i) \ , \quad (41)$$

e os valores de A e B que fazem a soma dos desvios um mínimo são obtidos fazendo-se as derivadas parciais com respeito a estas grandezas iguais a zero. Essas derivadas são (por simplicidade os índices do sinal de somatório estão omitidos)

$$\frac{\partial (\delta Y_i^2)}{\partial A} = 2A \sum X_i^2 + 2B \sum X_i - 2 \sum (X_i Y_i) = 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial (\delta Y_i^2)}{\partial B} = 2nB - 2 \sum Y_i + 2A \sum X_i = 0 \quad (43)$$

Resolvendo as Eqs. (42) e (43) simultaneamente, obtemos para A e B

$$A = \frac{n \sum (X_i Y_i) - \sum X_i \sum Y_i}{n \sum X_i^2 - \left(\sum X_i \right)^2} \quad (44)$$

$$B = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum (X_i Y_i)}{n \sum X_i^2 - \left(\sum X_i \right)^2} = \frac{1}{n} \left(\sum Y_i - A \sum X_i \right) \quad (45)$$

Os desvios padrões s_B e s_A são dados pelas expressões:

$$s_B = \sqrt{\frac{\sum Y_i^2 - B \sum Y_i - A \sum (X_i Y_i)}{n - 2}} \quad (46)$$

$$s_A = s_B \sqrt{\frac{n}{n \sum X_i^2 - \left(\sum X_i \right)^2}} \quad (47)$$

Nas somas indicadas nas expressões acima é necessário reter-se todos os algarismos significativos, o que torna as operações tediosas e praticamente, exige o uso de uma calculadora.

Exemplo 5 - Os dados abaixo são as medidas da distensão x duma mola espiral, para diferentes valores da força F nela aplicada, na região de elasticidade da mola onde vale a expressão F= kx. Determine k graficamente usando o método do ajuste dos mínimos quadrados.

F (gf)	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0
x (cm)	0,86	1,75	2,60	3,49	4,35	5,22	6,10	7,00	7,78

Solução:

Como a variável independente é a força F o gráfico a ser feito é de x contra F e, portanto, a equação a ser ajustada é $x = A \cdot F + B$. Assim, conhecendo-se A e B pode-se traçar a reta ajustada. Os valores da A e B e de seus desvios são dados pelas Eqs. (39), (40), (41) e (42) e os valores dos termos destas equações são:

$n = 9$	$\Sigma F = 450{,}00$ gf	$\Sigma F^2 = 28.500$ gf^2
$\Sigma x = 39{,}150$ *cm*	$\Sigma x^2 = 215{,}65150$ *cm*^{2}	$\Sigma F\cdot x = 2.479{,}100$ gf $\cdot$ *cm*

Os valores de A e B e seus desvios s_A e s_B calculados pelas equações acima são

A= 0,08693 *cm/*gf , $s_A = \pm\ 0{,}00033$ *cm/*gf , B=0,003 *cm* e $s_B = \pm\ 0{,}02$ *cm* .

B é evidentemente zero e k é o inverso de A, ou seja k=1/A e $s_k = (s_A/A)\ k$. Sendo assim,

k = 11,503 gf /*cm* e $s_k = \pm\ 0{,}044$ gf /*cm* .

Exemplo 6 - Os dados abaixo são os tempos de queda livre *t* dum objeto para diferentes alturas *h* de queda (*h* é a variável independente). Determine graficamente a equação empírica relacionando *t* e *h*.

t (*s*)	0,32	0,45	0,55	0,64	0,71	0,78
h (*m*)	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00

Solução:

Mostra-se teoricamente que a função relacionando *t* e *h* é do tipo $t = \alpha\ h^m$. Ela pode, então, ser linearizada de acordo com a expressão $\log t = \log \alpha + m \log h$, locando-se log *t* *versus* log *h* .Os termos a serem obtidos para calcularmos $\log \alpha$, $s_{\log\alpha}$, *m* e s_m através das Eqs. (39), (40), (41) e (42), são:

$n = 6$	$\Sigma \log h = 1{,}0511525$	$\Sigma (\log h)^2 = 0{,}5982472$
$\Sigma \log t = -1{,}5517419$	$\Sigma (\log t)^2 = 0{,}5038835$	$\Sigma \log h\cdot \log t = -0{,}0657750$

Com os valores acima, obtemos:

$m = 0{,}4977$ e $s_m = \pm\ 0{,}0024$; $\log \alpha = -0{,}3458$ e $s_{\log \alpha} = \pm\ 0{,}0015$.

Vemos que, praticamente, $m = 1/2$; α e s_α são obtidos pelas expressões (veja Eq. (49))

$$\alpha = 10^{\log \alpha} \qquad \text{e} \qquad s_\alpha = \alpha \ln 10\ s_{\log \alpha} \ ,$$

resultando, em:

$$\alpha = 10^{-\mathbf{0{,}3458}} = 0{,}4510\ \mathrm{s}\cdot m^{-1/2} \qquad \text{e} \qquad s_\alpha = 0{,}4510 \times \ln 10 \times 0{,}0015 = \pm\ 0{,}0016\ \mathrm{s}\cdot m^{-1/2}$$

A equação empírica procurada é, portanto (*t* dado em *s* e *h* em *m*)

$$t = 0{,}4510 \sqrt{h}\ .$$

Exercícios do Capítulo II

1. Numa representação gráfica de dados, em que eixo deve ser colocado, a variável dependente e a independente? Como deve ser escritos o título do gráfico e o nome das grandezas?
2. Como devem ser: escolhidas as escalas, indicados os valores, marcados os pontos e traçada a linha,; em um gráfico?
3. O que é interpolação e extrapolação?
4. Como é feita a determinação dos parâmetros de uma função linear?
5. Qual é o objetivo da linearização de curvas?
6. Explique a linearização pelo método da anamorfose.
7. Explique a linearização de uma função do tipo potência pelo método logarítimico.
8. Um viajante espacial pousa num planeta A, cuja gravidade não é conhecida. De posse de um cronômetro (lei = 0,2 s) e uma régua (lei = 0,1 cm) e vários pêndulos simples, com diferentes diâmetros médios (D), ele mediu o tempo de 25 oscilações (pequenas oscilações) para estes pêndulos (mostrados na tabela abaixo):

t (s)	25,6	36,0	44,8	52,0	57,6
D (cm)	10,2	20,3	31,4	42,3	51,8
T (s)	1,02	1,44	1,79	2,08	2,30
$\sqrt{D}$ ($cm^{1/2}$)	3,19	4,51	5,60	6,50	7,20

a) Demonstra-se que o período T de oscilação está relacionado com o diâmetro (D) do pêndulo pela seguinte equação: $T = 2\pi\sqrt{D/g_A}$ Verifique graficamente, com os dados acima, usando o método da anamorfose, a validade desta equação para o Planeta A.

b) Determine o valor da aceleração do gravidade deste Planeta.

9. O gráfico de uma certa força F(em newtons), que atua sobre uma partícula em função da distância X de acordo com a tabela abaixo:

F (N)	25,2	17,1	10,0	7,6	6,0
X (m)	0,54	0,70	1,00	1,20	1,40

Utilize o método logarítimico para determinar os parâmetros da função.

10. *Ache a equação da reta nas questões 8 e 9, utilizando o método dos mínimos quadrados (*opcional).

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DO CAPÍTULO II

Questões de 1 a 7: Leia o texto e responda;

Questão 8: a) Faça o gráfico T versus $\sqrt{D}$, se o resultado for uma reta a equação é válida $\left(T \approx 0{,}320\sqrt{D}\right)$;
b) $g_A \approx 386 cm/s^2$

Questão 9: Fazendo o gráfico no papel milimetrado tem-se que a função estudada é do tipo: $F = KX^n, n < 0$. Fazendo o gráfico logarítmico, acha-se: $n \approx -3/2$, substituindo um ponto contido na equação $F = KX^{-3/2}$, acha-se $K \approx 10Nm^{-3/2}$. Assim a equação é: $F = 10X^{-3/2}$

Questão 10: Utilizado mínimos quadrados (sem aproximações) na questão 8 obtêm-se: $T = 0{,}3197\sqrt{D} - 0{,}0004$; e na questão 9 obtêm-se: $F = 9{,}984X^{-1{,}5053}$;

BIBLIOGRAFIA

As referências seguintes foram usadas na preparação desta apostila e servirão ao leitor que desejar informações mais extensivas.

1. Apostila de Teoria de Erros e Mecânica, 1998. Argollo, R. M; Ferreira, C. e Sakai, T. – Dep. de Geofísica Nuclear – IF/UFBa.
2. Furtado, Nelson F., 1957. Sistemas de Unidades: Teoria dos Erros. Ao Livro Técnico Ltda.
3. Helene, Otaviano A .M. e Vitor R. Vanin, 1981. Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental. Editora Edgard Blücher Ltda.
4. Beers, Yardley, 1962. Theory of Error. Addison-Wesley. USA.
5. Wall, Cliford N., Raphael B. Levine e Fritjaf E. Christensen, 1972. Physics Laboratory Manual . Prentice-Hall.
6. Meiners, Harry F., Walter Eppenstein e Kenneth H. Moore, 1969. Laboratory Physics. John Wiley.
7. Helene, O., S .P. Tsai e R. R .P. Teixeira, 1991. O que é uma medida? Revista de Ensino de Física,**13**,12- 29.
8. Dionísio, P. H., 1991. Sensibilidade do Equipamento e Precisão da Medida. (Comentário sobre o artigo “O que é uma medida ?”.) Revista de Ensino de Física, **13**, 30-33.
9. Bacon, R.H., 1953. Am. J. Phys., **21**, 428.
10. Vuolo, José H. , 1992 . Fundamentos da Teoria de Erros. Editora Edgard Blücher Ltda.