Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №8

Сеточные методы для задачи теплопроводности

Выполнил: Габриелян А.Х.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Предисловие

Для решения задач теплопроводности существуют аналитические методы, однако решение некоторых неоднородных и нелинейных задач теплопроводности получить аналитическими методами не представляется возможным. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов. Это позволяет решать многие практические задачи. Появление высокопроизводительной вычислительной техники поспособствовало решению нестационарные пространственные задач.

2 Постановка задачи

Рассмотрим простейший случай уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

где k — положительная константа, а $x \in (0,a), t \in (0,T)$.

В качестве дополнительных условий зададим одно начальное и два граничных

$$u(x,0) = \mu(x),\ x \in [0,a]; \qquad \begin{matrix} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u(a,t) = \mu_2(t) \end{matrix} \quad t \in [0,T].$$

Решать эту задачу будем двумя сеточными методами явным и неявным.

2.1 Преобразование для применения двухслойных схем

Преобразуем исследуемое уравнение теплопроводности в $\frac{du}{dt} = \Lambda u + f$, где Λ — трёхдиагональная матрица с элементами: $a_{ii} = -\frac{2k}{h^2}, a_{i,i\pm1} = \frac{k}{h^2},\ i = 1,..n-1,\ n$ — количество узлов координатной сетки.

Решение $\hat{u}$ на следующем узле временной сетки можно найти через известное решение на текущем узле u с помощью одностадийной схемы Розенброка.

$$(E - \sigma\tau\Lambda)w = \Lambda u + f \tag{2}$$

Решая относительно w, получаем $\hat{u} = u + \tau Re(w)$.

2.2 Явная схема

Один из примеров явной схемы — это схема Розенброка с $\sigma = 0$. Традиционная формула записи имеет следующий вид

$$\frac{\hat{u_n} - u_n}{\tau} = \frac{k}{h^2}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + f(x_n, \hat{t}); \tag{3}$$

Данная схема является лишь условно устойчивой, для устойчивости должно выполняться условие $2k\tau \leq h^2$. Явная схема непригодна для вычислений на больших временных интервалах.

2.3 Неявная схема

Для получения неявной схемы нужно положить $\sigma = \frac{1+i}{2}$. Такая схема называется комплексной схемой Розенброка. Мы уже с ней сталкивались, разбирали принцип её работы, поэтому остановимся на её свойствах. Эта схема

- Безусловно устойчива по начальным данным
- Устойчива равномерно
- Устойчива по правой части
- Имеет полную погрешность аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$
- Асимптотически безусловно устойчива

3 Описание численного эксперимента

Будем брать решение $u(x, t)$ подставлять его в исходное уравнение, а так же в начальное и краевые условия, чтобы получить функции f, μ, μ_1, μ_2. Будем засекать время работы программ и выводить графики отклонения от точного решения. Дополнительно посмотрим, что будет выдавать явный метод при не соблюдении условия устойчивости. Во всех тестах берем $a = 1, T = 0.5, h = 0.01$.

4 Тесты

4.1 Тест 1

В этом тесте возьмём решение $u(x, t) = x^3 + t^3$. Тогда

$$f(x,t) = 3t^2 - 6x;\ \mu(x) = x^3;\ \mu_1(x) = t^3;\ \mu_2(x) = 1 + t^3; \tag{4}$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$ явный метод срабатывает за 0.87 секунды, неявный метод – за 3.26 секунды.

(см. следующую стр.)

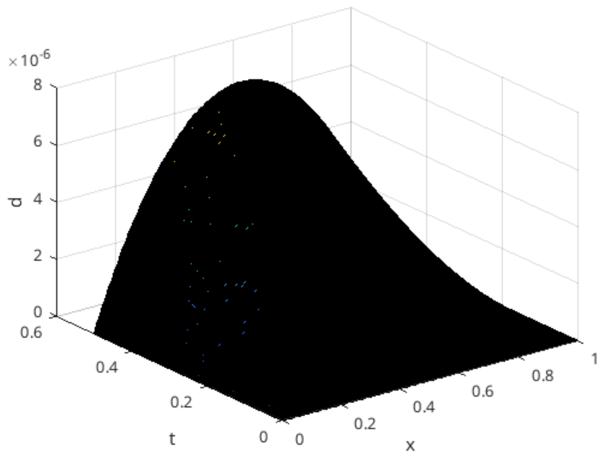


Рис. 1: График отклонения для явного метода

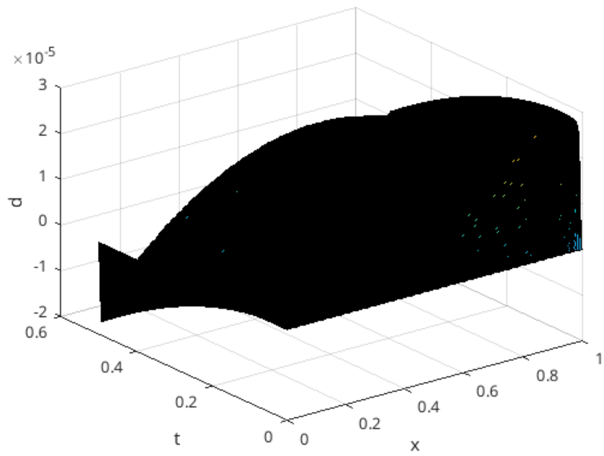


Рис. 2: График отклонения для неявного метода

Если выйти за пределы устойчивости: $\tau = 10^{-3}$, то явный метод расходится и срабатывает за 0.7 секунды, неявный метод же выдает близкое решение и срабатывает за 0.3 секунды.

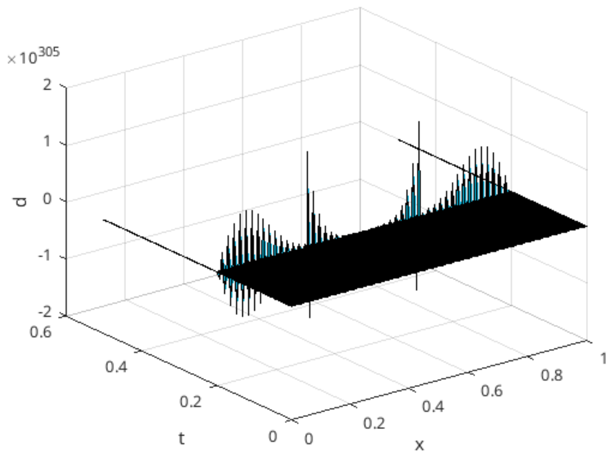


Рис. 3: График отклонения для явного метода

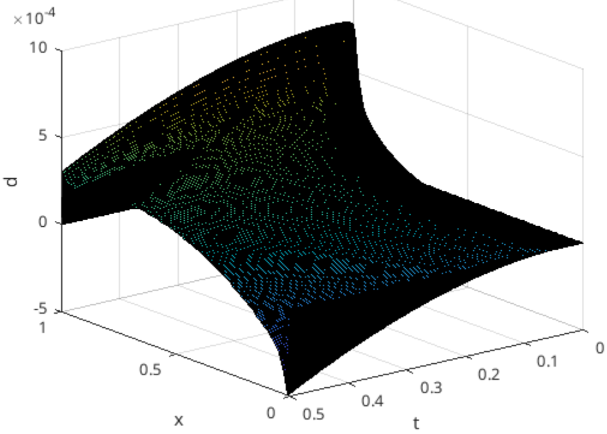


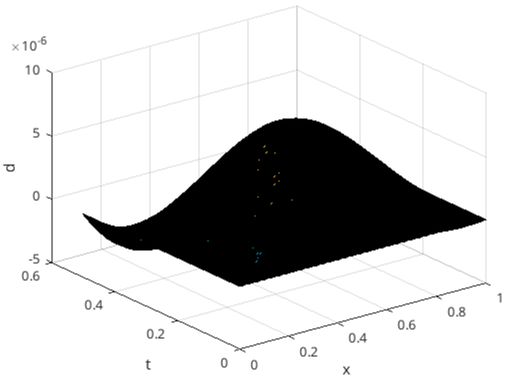
Рис. 4: График отклонения для неявного метода

4.2 Тест 2

В этом тесте возьмём решение $u(x,t) = \sin(2t+1)\cos(2x)$. Тогда

$$\begin{gathered} f(x,t) = 2\cos(2x)(\cos(2t+1) + 2\sin(2t+1)); \\ \mu(x) = \sin(1)\cos(2x);\ \ \mu_1(x) = \sin(2t+1);\ \ \mu_2(x) = \sin(2t+1)\cos(2a); \end{gathered} \tag{5}$$

При $\tau = \frac{h^2}{2k}$ явный метод срабатывает за 0.32 секунды, неявный метод – за 3.7 секунды.



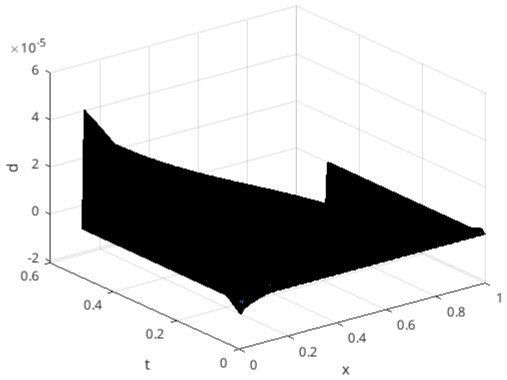
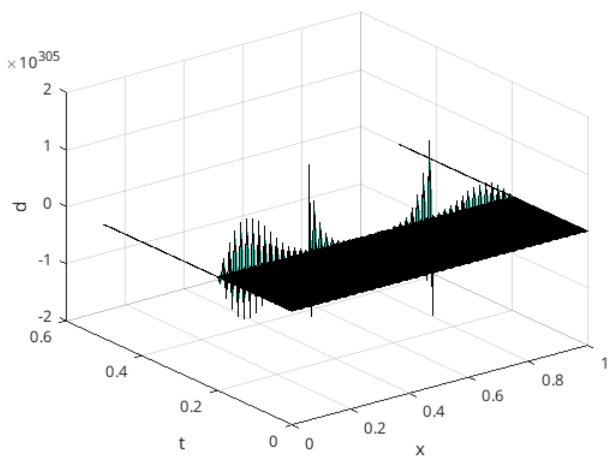


Рис. 5: График отклонения для явного метода

Рис. 6: График отклонения для неявного метода

Если выйти за пределы устойчивости: $\tau = 10^{-3}$, то явный метод расходится и срабатывает за 0.04 секунды, неявный метод же выдает близкое решение и срабатывает за 0.48 секунды.



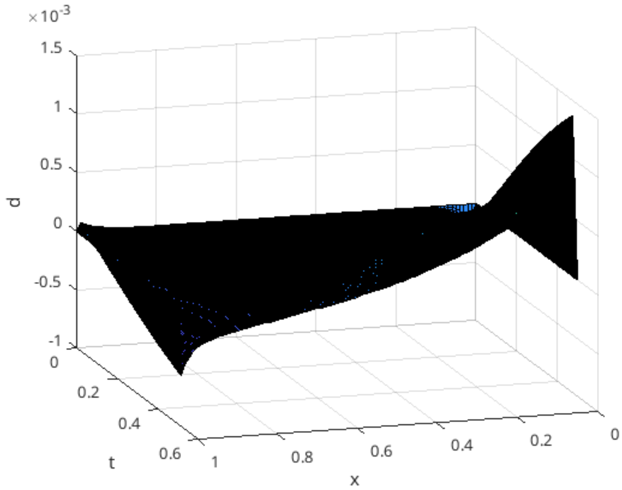


Рис. 7: График отклонения для явного метода

Рис. 8: График отклонения для неявного метода

5 Вывод

По полученным результатам можно сделать заключение о том, что в случае выполнения условия устойчивости явный метод срабатывает быстрее, однако с меньшей точностью. К тому же, если это условие не выполняется, то явный метод расходится, а неявный все еще выдает близкие к точному результаты решения.