

Санкт - Петербургский государственный университет  
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №3

**Решение СЛАУ приближенными методами**

Выполнил: Габриелян А.Х.  
451 группа

# 1 Постановка задачи

Решаем СЛАУ  $Ax = b$ . Для этого воспользуемся методом простой итерации и методом Зейделя.

Для начала необходимо свести исходную систему к эквивалентному виду  $x = Hx + g$  и выбрать начальное приближение  $x^{(0)}$ .

## 1.1 Метод простой итерации

Расчетная формула имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \quad (1)$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: спектральный радиус матрицы  $H$  (максимальный из модулей собственных чисел) меньше единицы.

## 1.2 Метод Зейделя

Матрицу  $H$  представим в виде  $H = H_L + H_R$ , где

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Тогда имеем расчетную формулу метода Зейделя

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g \quad (3)$$

Здесь достаточным условием сходимости является  $\|H\|_\infty < 1$ , где  $\|H\|_\infty$  — максимальный элемент матрицы  $H$ .

# 2 Описание численного эксперимента

Зададим СЛАУ и будем выяснять, сколько итераций потребуется методам для достижения заданной точности.

# 3 Тесты

## 3.1 Тест 1

Рассмотрим матрицу с диагональным преобладанием

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.02 & 0.3 & 0.1 \\ 0.02 & 0.005 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Выберем точность  $1e^{-14}$ . Метод простой итерации достигает точности за 30 итераций. Метод Зейделя – за 16.

### 3.2 Тест 2

Возьмем матрицу Гильберта размерностью  $15 \times 15$

$b = He$ , где  $e$  единичный вектор длины 15.

Метод простой итерации не работает, так как не выполняется условие сходимости.

Метод Зейделя же сходится за 5492612 итераций.

### 3.3 Тест 3

Теперь возьмем разреженную матрицу  $A$  размерностью  $30 \times 30$ , матрица симметрична и заполнена случайными значениями из промежутка  $(0, 1)$ .  $b$  – единичный вектор длины 30.

Точность поставим  $1e^{-14}$ . Результаты: метод простой итерации достигает точности за 980 шагов, метод Зейделя – за 508.

## 4 Вывод

По полученным данным тестов можно сделать заключение, что у метода Зейделя сходимость происходит за меньшее число шагов. К тому же, как показал тест с матрицей Гильберта, метод простой итерации охватывает меньший диапазон систем из-за более строгого необходимого условия сходимости.