Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №2

Решение СЛАУ точными методами

Выполнил: Габриелян А.Х.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Предисловие

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многочисленные практические задачи (по некоторым оценкам более 75 процентов всех задач). Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики.

Все методы решения линейных алгебраических задач можно разбить на два класса: прямые (точные) и итерационные (приближенные).

К прямым методам относятся те, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить точные значения неизвестных. Они просты, универсальны и используются для широкого класса систем. Однако они не применимы к системам больших порядков и к плохо обусловленным системам из-за возникновения больших погрешностей.

2 Постановка задачи

Решаем плохо обусловленную СЛАУ $Ax = b$ точными методами: LU – разложением и QR – разложением. Вводим параметр регуляризации α для повышения устойчивости системы. Хотим найти наиболее близкое к заданному решение. Система принимает вид

$$(A + \alpha E)x = b \tag{1}$$

E — единичная матрица, x_0 — заданное решение.

Такая система обусловлена лучше.

2.1 LU – разложение

Метод заключается в разложении $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица с единицами на диагонали, а U — верхняя треугольная матрица.

Задаём дополнительную матрицу M_i, в которой i-ый столбец содержит единицу на i-ой строке и выглядит так: $(0, \ \dots \ , 1, -\mu_{i+1,i}, \ \dots \ , -\mu_{n,i})^T$, $\mu_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$.После вычислений всех M_i можем найти

$$U = M_{n-1} \cdot \ \dots \ \cdot M_1 \cdot A; \qquad\qquad L = M_1^{-1} \cdot \ \dots \ \cdot M_{n-1}^{-1} \tag{2}$$

Теорема гласит, что такое разложение матрицы A единственное, если все главные миноры A отличны от нуля.

Проблема такого разложения заключается в том, что число обусловленности может увеличиваться. Чтобы этого избежать, рассмотрим QR – разложение с ортогональной матрицей.

2.2 QR – разложение

Метод заключается в разложении $A = QR$, где Q — ортогональная матрица, а R — верхняя треугольная. Разложение осуществляем методом вращений.

Используем матрицу поворотов

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \cos\varphi_{i,j} & & & & -\sin\varphi_{i,j} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \sin\varphi_{i,j} & & & & \cos\varphi_{i,j} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Здесь угол $\varphi_{i,j} = arctg\left(\frac{-A_{i,j}^{(k)}}{A_{j,j}^{(k)}}\right)$. $A^{(k)}$ — матрица, повернутая k раз.

Получаем выражения для Q и R

$$Q = T_{12}^{-1} \cdot \ ... \ \cdot T_{1n}^{-1} \cdot T_{23}^{-1} \cdot \ ... \ \cdot T_{2n}^{-1} \cdot \ ... \ \cdot T_{n-2,n-1}^{-1} \cdot T_{n-2,n-1}^{-1} \cdot T_{n-1,n}^{-1} \qquad R = Q^T \cdot A. \tag{4}$$

Теорема гласит, что любая невырожженная матрица A единственным образом раскладывается ортогональную и верхнетреугольную матрицы.

3 Описание численного эксперимента

Берем матрицу Гильберта, которая является плохо обусловленной.

Пусть $e = (1, \ ... \ , 1)^T$. Вычисляем $b = He$ и будем решать систему $Hx = b$ с помощью LU и QR разложений.

LU – разложение: сначала решаем $Ly = b$, после чего решаем $Ux = y$.

QR – разложение: решаем $Rx = Q^T b$.

По итогу рассматриваем погрешность между решением системы и заранее заданным решением e.

Подбирать параметр регуляризации α будем, начиная с малых значений, увеличиваяя до тех пор, пока обусловленность системы не станет приемлемой.

Так же берем в учет, что с увеличением α решение системы будет сильнее расходиться с исходным. Однако при этом само решение будет вычисляться устойчивее.

4 Тесты

4.1 Тест 1

Матрица Гильберта размерностью 15×15. Норма погрешности для LU 33.26 , для QR 28.90 (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α

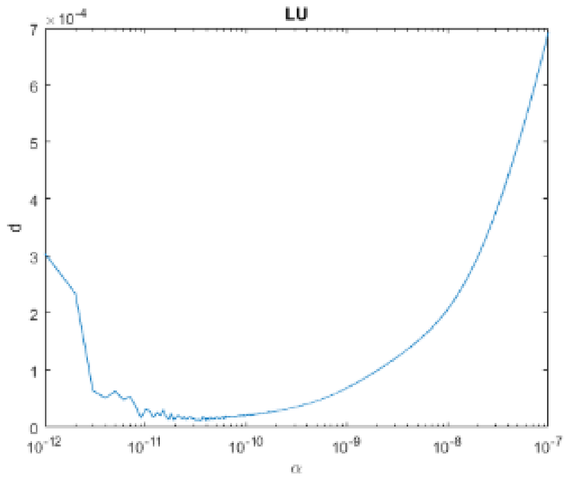

Рис. 1: Зависимость погрешности от α

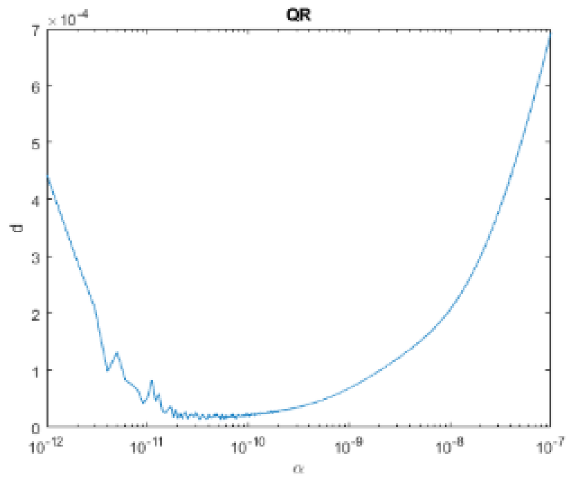

Рис. 2: Зависимость погрешности от α

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением $d = 1.38e$-5 достигается при $\alpha = 5.30e$-11 . При решении LU – разложением наименьшая погрешность $d = 1.13e$-5 достигается при $\alpha = 4.00e$-11.

4.2 Тест 2

Матрица Гильберта размерностью 20×20. Норма погрешности для LU 110.00 , для QR 820.22 (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением $d = 1.81e$-5 достигается при $\alpha = 6.90e$-11 . При решении LU – разложением наименьшая погрешность $d = 1.43e$-5 достигается при $\alpha = 2.40e$-11.

4.3 Тест 3

Матрица Гильберта размерностью 25×25. Норма погрешности для LU 137.35 , для QR 1150.73 (пока еще не ввели α).

Вводим параметр регуляризации α

(см. следующую страницу)

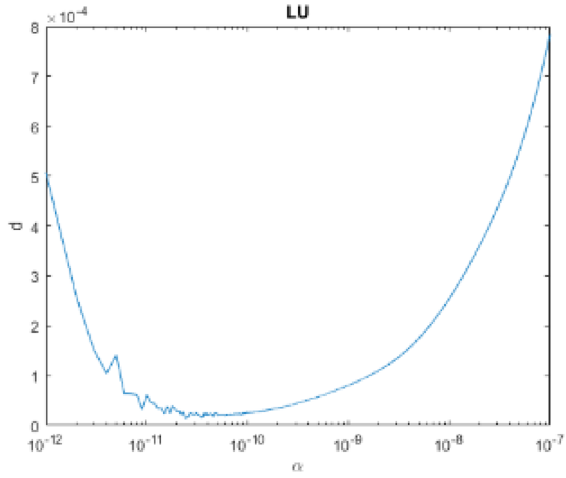

Рис. 3: Зависимость погрешности от α

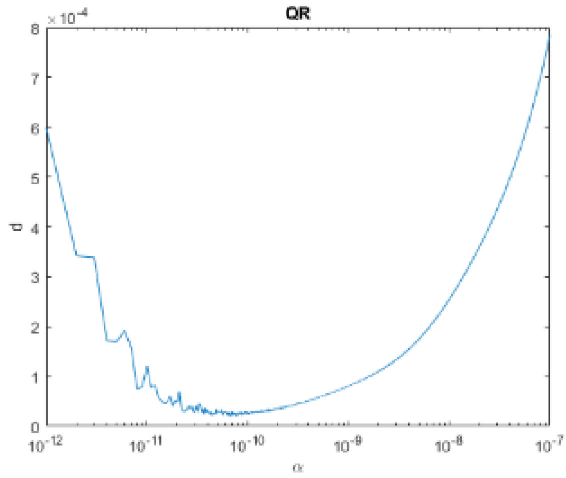

Рис. 4: Зависимость погрешности от α

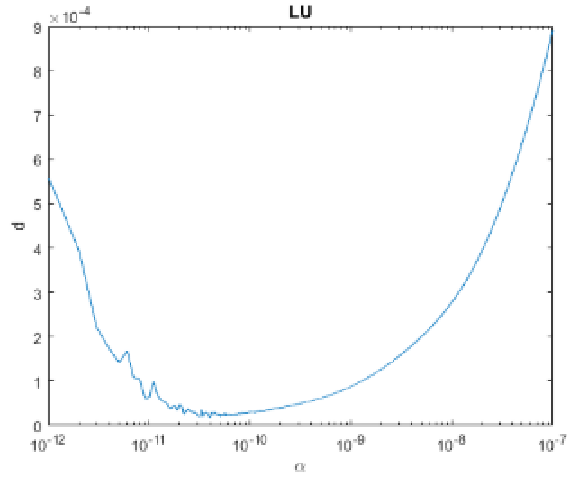

Рис. 5: Зависимость погрешности от α

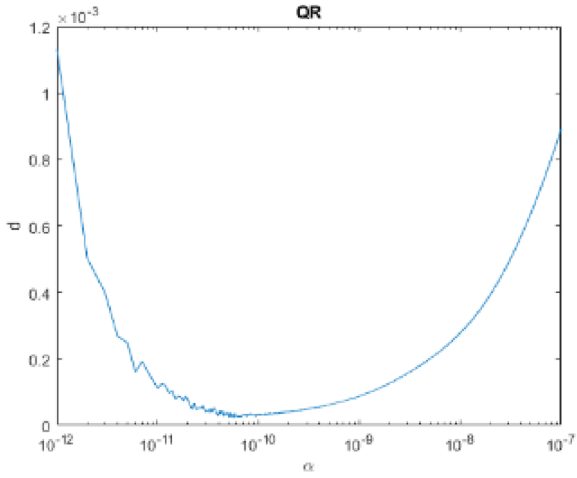

Рис. 6: Зависимость погрешности от α

По результатам получилось, что наименьшая погрешность при решении QR – разложением $d = 2.28e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 5.70e\text{-}11$. При решении LU – разложением наименьшая погрешность $d = 1.77e\text{-}5$ достигается при $\alpha = 4.00e\text{-}11$.

5 Вывод

По полученным данным можно заключить, что до введения параметра регуляризации погрешности сами по себе очень велики. С ростом размерности матрицы Гильберта становится заметнее, что QR – разложение расходится сильнее. После введения параметра регуляризации задача становится лучше обусловлена. LU – разложение при этом так же выдает меньшую погрешность, которая достигается при меньших значениях α.