Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №5

Частичная проблема собственных значений

Выполнил: Габриелян А.Х.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Предисловие

Метод Якоби является самым медленным из имеющихся алгоритмов вычисления собственных значений симметричной матрицы. Кроме того, метод не охватывает случай больших плохо обусловленных систем.

Степенной метод используется в основном для вычисления доминирующего собственного значения и соответствующего ему собственного вектора. Он не является универсальным методом, но может быть полезен в ряде ситуаций, например, в случае больших разреженных матриц.

Метод скалярных произведений является методом ускорения сходимости степенного метода, так как сокращает число шагов итерации.

2 Постановка задачи

Исследуем задачу поиска собственных чисел матрицы A. Если нас интересует максимальное по модулю с.ч., то удобно воспользоваться степенным и скалярным методами поиска.

3 Степенной метод

Пусть наша матрица A имеет полную о.н.с. собственных векторов $e_i, i = 1, \ ... \ , n$

$$Ae_i = \lambda_i e_i \tag{1}$$

причем $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ ... \ \geqslant |\lambda_n|$

Любой вектор $x^{(0)}$ представляется следующим образом

$$x^{(0)} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ ... \ + c_n e_n \tag{2}$$

Можно постриить итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} = A^k x^{(0)} = c_1 \lambda_1^k e_1 + \ ... \ + c_n \lambda_n^k e_n \tag{3}$$

Можем свести к виду

$$x^{(k+1)} = A^k x^{(0)} = c_1 \lambda_1^k e_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right) \tag{4}$$

Таким образом, увеличивая k, будем приближаться вектором x^{k+1} к с.вектору матрицы A, соответсвтующему наибольшему с.числу. Само же собственное число в таком случае (с учетом более точного приближения) может быть приближенно вычислено так

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{\left(x^{(k+1)}, x^{(k+1)}\right)}{\left(x^{(k)}, x^{(k)}\right)}} \tag{5}$$

4 Метод скалярных произведений

Наряду с матрицей A рассматриваем матрицу A^T с о.н.с. собственных векторов $v_i, i = 1, \ ... \ , n$

Так же раскладываем вектор $y^{(0)}$

$$y^{(0)} = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \ ... \ + d_n v_n \tag{6}$$

И запускаем итерационный процесс

$$y^{(k+1)} = A^T y^{(k)} = A^{Tk} y^{(0)} \tag{7}$$

Тогда имеем

$$\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) = \left(A^k x^{(0)}, A^{Tk} y^{(0)}\right) = c_1 d_1 \lambda_1^{2k} + \ ... \ + c_n d_n \lambda_n^{2k} \tag{8}$$

В случае симметричности матрицы A при $x^{(0)} = y^{(0)}$ аналогичным способом получаем

$$|\lambda_1| \approx \frac{\left(A^k x^{(0)}, A^k x^{(0)}\right)}{\left(A^{k-1} x^{(0)}, A^k x^{(k)}\right)} \tag{9}$$

5 Описание численного эксперимента

Возьмем симметричную матрицу А. Будем искать ее с. ч. точным методом, а так же степенным методом и методом скалярных произведений, будем отслеживать число итераций. Будем сравнивать полученные результаты. К тому же возьмем данные, полученные методом вращений Якоби, описанным в прошлом отчете, и добавим к общему сравнению.

Выберем точность $1e^{-9}$ для всех тестов.

6 Тесты

6.1 Тест 1

$$A = \begin{pmatrix} -1.00449 & -0.38726 & 0.59047 \\ -0.38726 & 0.73999 & 0.12519 \\ 0.59047 & 0.12519 & -1.08660 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
С.ч	-1.6902	-1.6902	-1.6902	-1.6902
Кол-во итераций	-	32	18	7

6.2 Тест 2

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -0.5 & 2 & 3 \\ -0.5 & 16 & 0.44 & 10 \\ 2 & 0.44 & -1.4 & -5 \\ 3 & 10 & -5 & 8 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
С.ч	23.0678	23.0678	23.0678	23.0678
Кол-во итераций	-	25	12	17

6.3 Тест 3

Возьмем матрицу Гильберта размерностью 5×5
Результаты поиска наибольшего (по модулю) с.ч различными методами

Метод	Точный	Степенной	Скалярный	Якоби
С.ч	1.5671	1.5671	1.5671	1.5671
Кол-во итераций	-	12	8	29

7 Вывод

По полученным данным тестов можно сделать заключение, что все используемые методы очень точно находят максимальное собственное число симметричной матрицы A. Что касается количества итераций – для скалярного метода характерно наименьшее число шагов. А в случае с матрицей Гильберта 5×5 заметно, что метод Якоби оказывается совсем не выгодным.