Санкт - Петербургский государственный университет
Математико - механический факультет

Отчёт по практике №3

Решение СЛАУ приближенными методами

Выполнил: Габриелян А.Х.
451 группа

Санкт - Петербург
2020

1 Предисловие

Пользоваться прямыми методами не всегда удобно, так как имеется ряд недостатков: необходимость хранения в оперативной памяти значительных объемов данных, а так же накапливание погрешностей в процессе решения, что особенно опасно для больших и плохо обусловленных систем, весьма чувствительных к погрешностям. В таких случаях используют приближенные методы. Их удобство заключается в том, что они требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с n компонентами, что значительно разгружает память, к тому же погрешности окончательных результатов не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется результатами предыдущей итерации и практически не зависти от ранее выполненных вычислений.

2 Постановка задачи

Решаем СЛАУ $Ax = b$. Для этого воспользуемся методом простой итерации и методом Зейделя.

Для начала необходимо свести исходную систему к эквивалентному виду $x = H\,x + g$ и выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.

2.1 Метод простой итерации

Расчетная формула имеет вид

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + g \tag{1}$$

Необходимое и достаточное условие сходимости: спектральный радиус матрицы H (максимальный из модулей собсвтенных чисел) меньше единицы.

2.2 Метод Зейделя

Матрицу H представим в виде $H = H_L + H_R$, где

$$H_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_R = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда имеем расчетную формулу метода Зейделя

$$x^{(k+1)} = (E - H_L)^{-1} H_R x^{(k)} + (E - H_L)^{-1} g \tag{3}$$

Здесь достаточным условием сходимости является $||H||_\infty < 1$, где $||H||_\infty$ — максимальный элемент матрицы H.

Заметим, что Метод Зейделя сходится быстрее и может сходиться даже в том случае, если расходится метод простых итераций.

3 Описание численного эксперимента

Зададим СЛАУ и будем выяснять, сколько итераций потребуется методам для достижения заданной точности.

4 Тесты

4.1 Тест 1

Рассмотрим матрицу с диагональным преобладанием

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.3 \\ 0.02 & 0.3 & 0.1 \\ 0.02 & 0.005 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Выберем точность $1e^{-14}$. Метод простой итерации достигает точности за 30 итераций. Метод Зейделя – за 16.

4.2 Тест 2

Возьмем матрицу Гильберта размерностью 15×15. Такая матрица в общем виде выглядит следующим образом

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$b = He$, где e единичный вектор длины 15.

Метод простой итерации не работает, так как не выполняется условие сходимости.

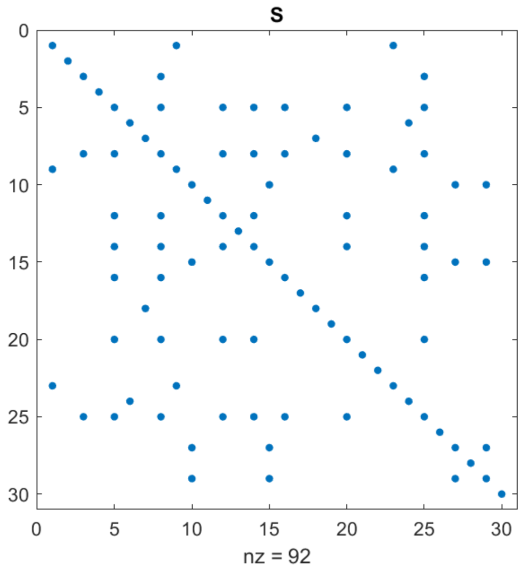
Метод Зейделя же сходится за 5492612 итераций.

4.3 Тест 3

Теперь возьмем разреженную матрицу A размерностью 30×30, матрица симметрична и заполнена случайными значениямии из промежутка $(0, 1)$. Непосредственно матрица, на которой проводилось тестирование, выглядит так

b – единичный вектор длины 30.

Точность поставим $1e^{-14}$. Результаты: метод простой итерации достигает точности за 980 шагов, метод Зейделя – за 508.



5 Вывод

По полученным данным тестов можно сделать заключение, что у метода Зейделя сходимость происходит за меньшее число шагов. К тому же, как показал тест с матрицей Гильберта, метод простой итерации охватывает меньший диапазон систем из-за более строгого необходимого условия сходимости.