Artur Gęsiarz
Marzec 23, 2024

Laboratorium nr 4
MOwNiT – Efekt Rungego

1. Treść zadania

1.1. Wyznaczę wielomiany interpolujące funkcje

$f_1 = \frac{1}{1+25x^2}$, na przedziale [-1, 1]
$f_2 = \exp\,(\cos(x))$, na przedziale [0, 2π],

używając:

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami xj = x0 + jh, j = 0, 1, . . . , n, gdzie h = (xn − x0)/n

- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami xj = x0+jh, j = 0, 1, . . . , n, gdzie h = (xn − x0)/n

- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa:

$$x_j = \cos(\theta_j), \qquad \theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, \qquad 0 \leq j \leq n$$

(a) Dla funkcji Rungego, f1(x), z n = 12 węzłami interpolacji przedstawie na wspólnym wykresie funkcję f1(x) oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonam próbkowanie funkcji f1(x) i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w θ dla węzłów Czebyszewa).

(b) Wykonam interpolację funkcji f1(x) i f2(x) z n = 4, 5, ..., 50 węzłami interpolacji, używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadze na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórze dwa rysunki, jeden dla f1(x), drugi dla f2(x). Na każdym rysunku przedstawie razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n, dla każdej z trzech metod interpolacji.

2. Rozwiązanie zadania

2.1. Implementacja funkcji Rungego

```
def f1(x):
    return 1 / (1 + 25 * x ** 2)

def f2(x):
    return np.exp(np.cos(x))
```

2.2. Węzły interpolacji równoodległe

```
def equidistant_nodes(n, a, b):
    return np.linspace(a, b, n + 1)
```

2.3. Węzły interpolacji Czebyszewa

```
def chebyshev_nodes(n, a, b):
    theta = np.pi * (2 * np.arange(n + 1) + 1) / (2 * (n + 1))
    # return (a + b) / 2 + (b - a) / 2 * np.cos(theta)
    return a + (b - a) * (theta + 1) / 2
```

2.4. Metoda Lagrange'a

```
def lagrange_interpolation(x, nodes, values):
    result = 0
    n = len(nodes)
    for i in range(n):
        term = values[i]
        for j in range(n):
            if i != j:
                term *= (x - nodes[j]) / (nodes[i] - nodes[j])
        result += term
    return result
```

2.5. Próbkowanie funkcji

```
x_dense = np.linspace(-1, 1, 1000)
y_dense = f1(x_dense)
```

2.6. Liczba węzłów interpolacji

```
n = 12
```

2.7. Węzły interpolacji

```
nodes_equidistant = equidistant_nodes(n, -1, 1)
nodes_chebyshev = chebyshev_nodes(n, -1, 1)
```

2.8. Wartościami funkcji w węzłach interpolacji

```
values_equidistant = f1(nodes_equidistant)
values_chebyshev = f1(nodes_chebyshev)
```

2.9. Interpolacja Lagrange'a

```
y_interpolated_equidistant = lagrange_interpolation(x_dense, nodes_equidistant, values_equidistant)
y_interpolated_chebyshev = lagrange_interpolation(x_dense, nodes_chebyshev, values_chebyshev)
```

2.10. Sortowanie węzłów

```
sorted_indices_equidistant = np.argsort(nodes_equidistant)
sorted_indices_chebyshev = np.argsort(nodes_chebyshev)

nodes_equidistant_sorted = nodes_equidistant[sorted_indices_equidistant]
nodes_chebyshev_sorted = nodes_chebyshev[sorted_indices_chebyshev]

values_equidistant_sorted = values_equidistant[sorted_indices_equidistant]
values_chebyshev_sorted = values_chebyshev[sorted_indices_chebyshev]
```

2.11. Interpolacja funkcji sklejanych

```
cs_equidistant = CubicSpline(nodes_equidistant_sorted, values_equidistant_sorted)
cs_chebyshev = CubicSpline(nodes_chebyshev_sorted, values_chebyshev_sorted)
```

2.12. Wykres ze wszystkim

```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x_dense, y_dense, label='f_1(x)')
plt.plot(x_dense, y_interpolated_equidistant, label="Lagrange equidistant nodes")
plt.plot(x_dense, cs_equidistant(x_dense), label="Parallel glued node functions")
plt.plot(x_dense, y_interpolated_chebyshev, label="Lagrange Chebyshev nodes")
plt.plot(x_dense, cs_chebyshev(x_dense), label="Parallel glued node Chebyshev")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolation Rungeg function (f_1(x))')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

2.13. Wykres porównujący f_1(x) z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a z równoodległymi węzłami

```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x_dense, y_dense, label='f_1(x)')
plt.plot(x_dense, y_interpolated_equidistant, label="Lagrange equidistant nodes")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolation Rungeg function (f_1(x)) and Lagrange with equidistant nodes')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

2.14. Wykres porównujący f_1(x) z funkcją sklejoną z równoległymi węzłami

```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x_dense, y_dense, label='f_1(x)')
plt.plot(x_dense, cs_equidistant(x_dense), label="Parallel glued node functions")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolation Rungeg function (f_1(x)) with a glued function with parallel nodes')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

2.15. Wykres porównujący f_1(x) z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a z węzłami Czebyszywa

```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x_dense, y_dense, label='f_1(x)')
plt.plot(x_dense, y_interpolated_chebyshev, label="Lagrange Chebyshev nodes")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolation Rungeg function (f_1(x)) with Lagrange interpolating polynomial with Chebyshev knots')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

2.16. Wykres porównujący f_1(x) z funkcją sklejoną z węzłami Czebyszywa

```
plt.figure(figsize=(10,6))
plt.plot(x_dense, y_dense, label='f_1(x)')
plt.plot(x_dense, cs_chebyshev(x_dense), label="Parallel glued node Chebyshev")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Interpolation Rungeg function (f_1(x)) with a glued Chebyshev function')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

2.17. Funkcja obliczająca normę błędu

```
def error_norm(f_true, f_approx):
    return np.linalg.norm(f_true - f_approx)
```

2.18. Interpolacja i obliczanie błędów

```
def interpolate_and_cacluate_errors(f, nodes_generator, interpolation_method, num_nodes_range):
    errors = []
    for n in num_nodes_range:
        a, b = -1, 1
        nodes = nodes_generator(n, a, b)
        values = f(nodes)
        random_points = np.random.uniform(a, b, 500)
        true_values = f(random_points)
        interpolated_values = interpolation_method(random_points, nodes, values)
        errors.append(error_norm(true_values, interpolation_method(random_points, nodes, values)))
    return errors
```

2.19. Zakres liczby węzłow interpolacji

```
num_nodes_range = range(4,51)
```

2.20. Obliczanie błędów dla f_1(x)

```
errors_equidistant_f1 = interpolate_and_cacluate_errors(f1, equidistant_nodes, lagrange_interpolation,
 num_nodes_range)
errors_chebyshev_f1 = interpolate_and_cacluate_errors(f1, chebyshev_nodes, lagrange_interpolation,
 num_nodes_range)
```

2.21. Obliczanie błędow dla f_2(x)

```
errors_equidistant_f2 = interpolate_and_cacluate_errors(f2, equidistant_nodes, lagrange_interpolation,
 num_nodes_range)
errors_chebyshev_f2 = interpolate_and_cacluate_errors(f2, chebyshev_nodes, lagrange_interpolation,
 num_nodes_range)
```

2.22. Wykresy błędów

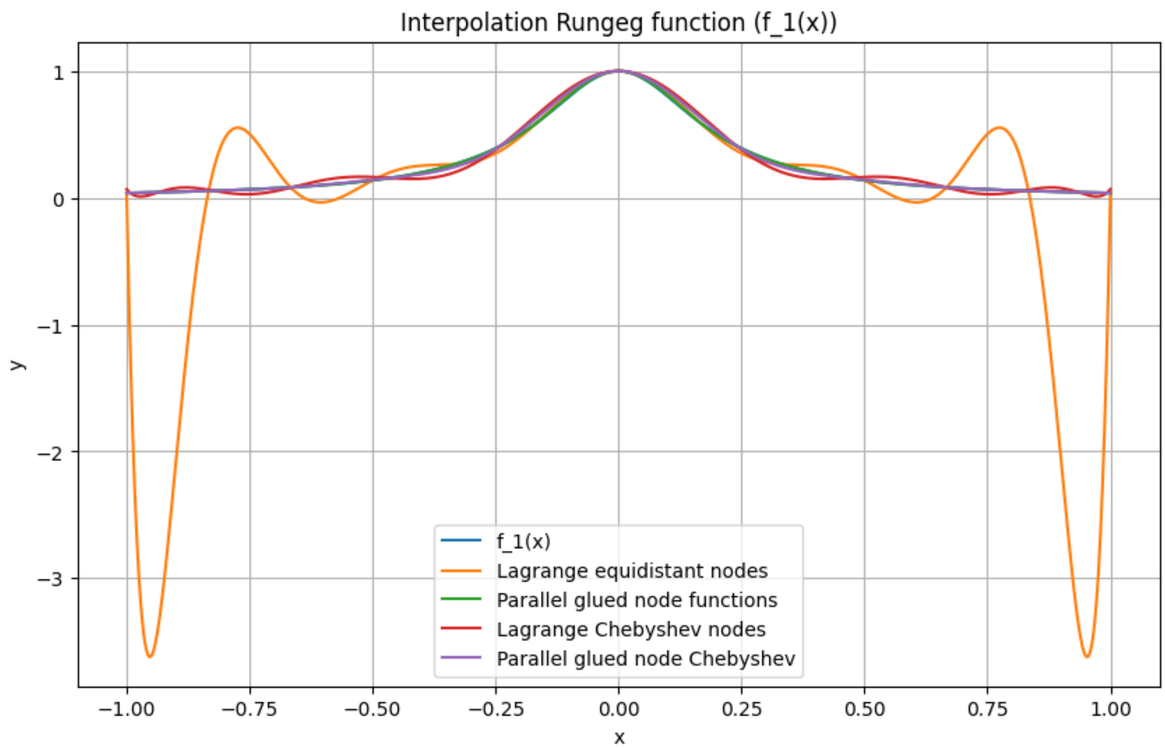
```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.subplots_adjust(hspace=0.5)
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.plot(num_nodes_range, errors_equidistant_f1, label="Parallel nodes", marker='o')
plt.plot(num_nodes_range, errors_chebyshev_f1, label="Chebyshev nodes", marker='o')
plt.title('Interpolation erros for f_1(x)')
plt.xlabel('Number interpolation nodes')
plt.ylabel('Error standard')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.plot(num_nodes_range, errors_equidistant_f2, label="Parallel nodes", marker='o')
plt.plot(num_nodes_range, errors_chebyshev_f2, label="Chebyshev nodes", marker='o')
plt.title('Interpolation erros for f_2(x)')
plt.xlabel('Number interpolation nodes')
plt.ylabel('Error standard')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.show()
```

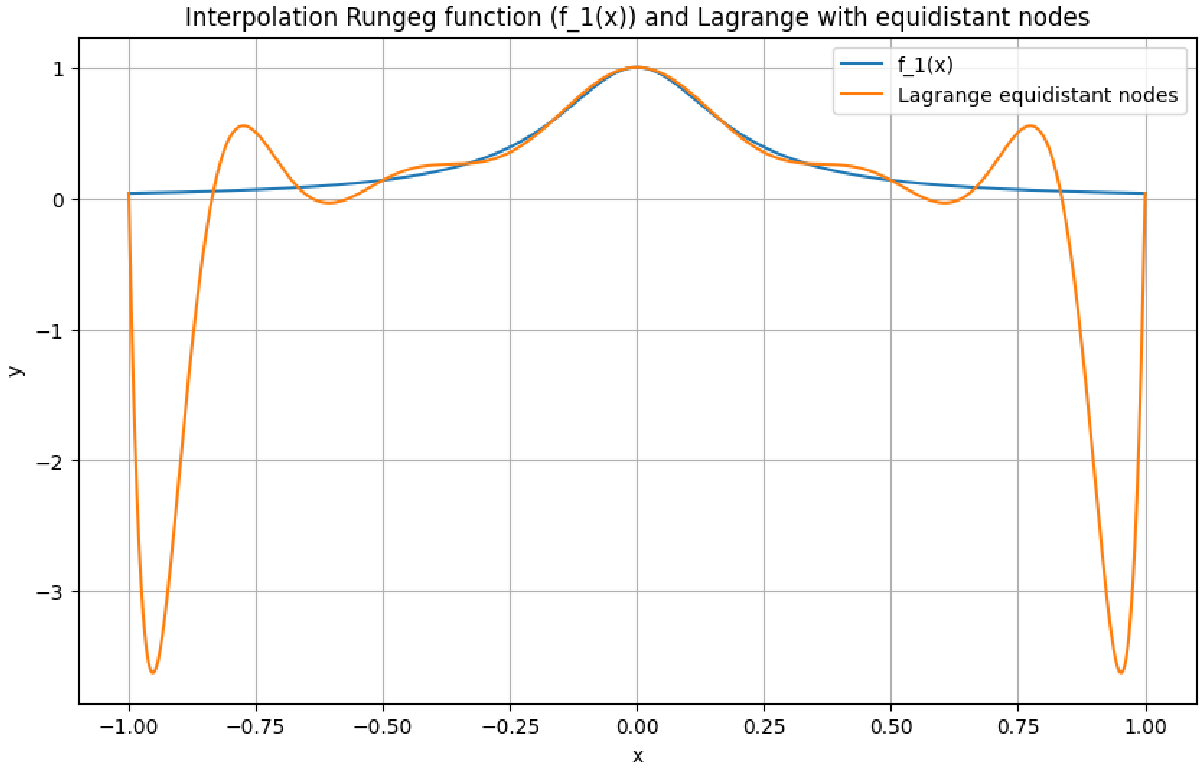
3. Wykresy

3.1. Funkcja Rungego razem z wielomianami interpolacji i funkcją sklejaną



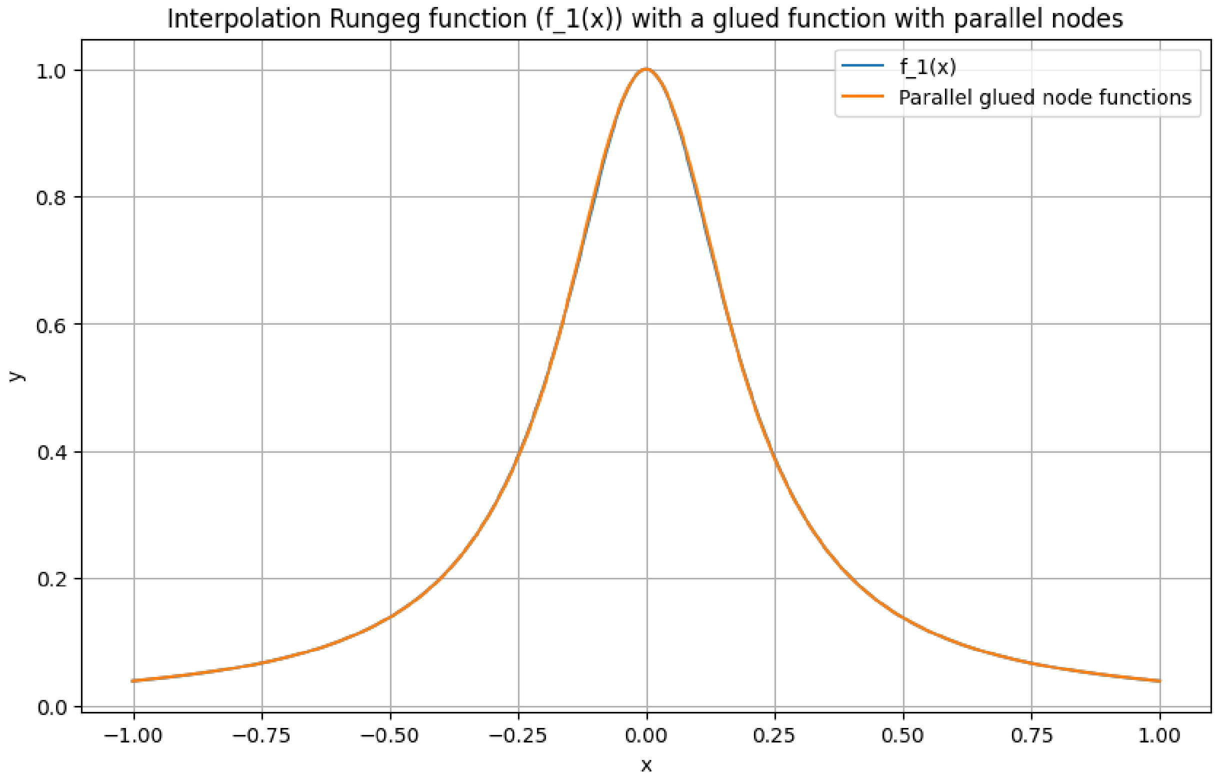
Wykres 1. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem ze wszystkimi wielomianami

3.2. Funkcja Rungego razem z funkcja sklejaną z równoodległymi węzłami



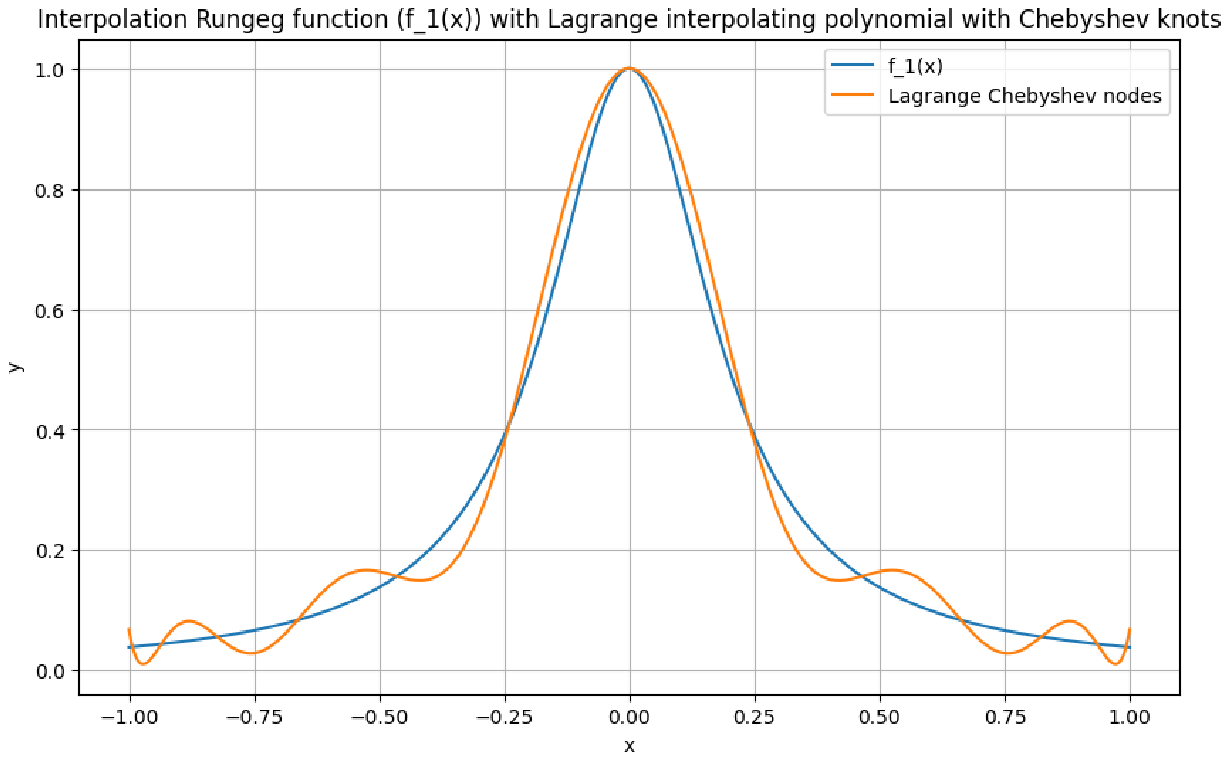
Wykres 2. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem z funkcją sklejaną z równoodległymi węzłami

3.3. Funkcja Rungego razem z wielomianem Lagrange'a z węzłami równoodległymi



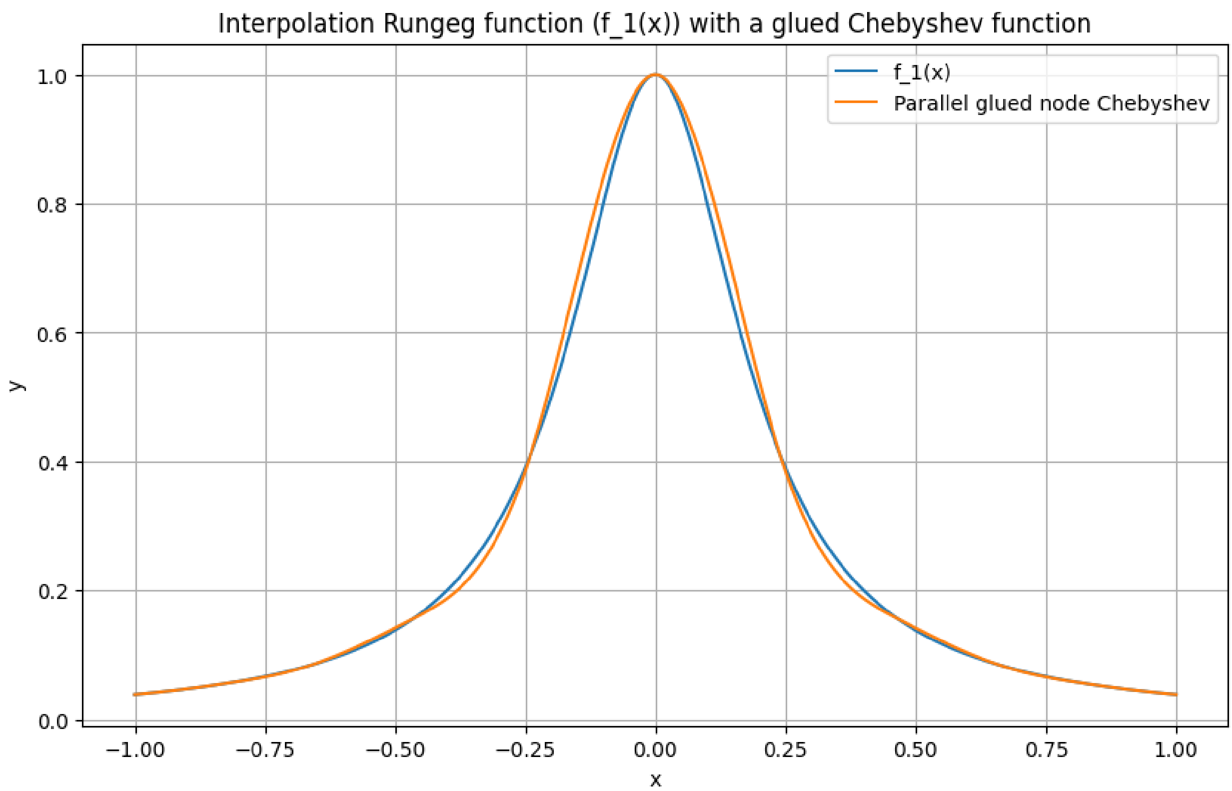
Wykres 3. Wykres przedstawia prównanie funkcji Rungego razem z wielomianem Lagrange'a z węzłami równodległymi

3.4. Funkcja Rungego razem z funkcja sklejaną z węzłami Czebyszewa



Wykres 4. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem z funkcją sklejaną z węzłami Czebyszewa

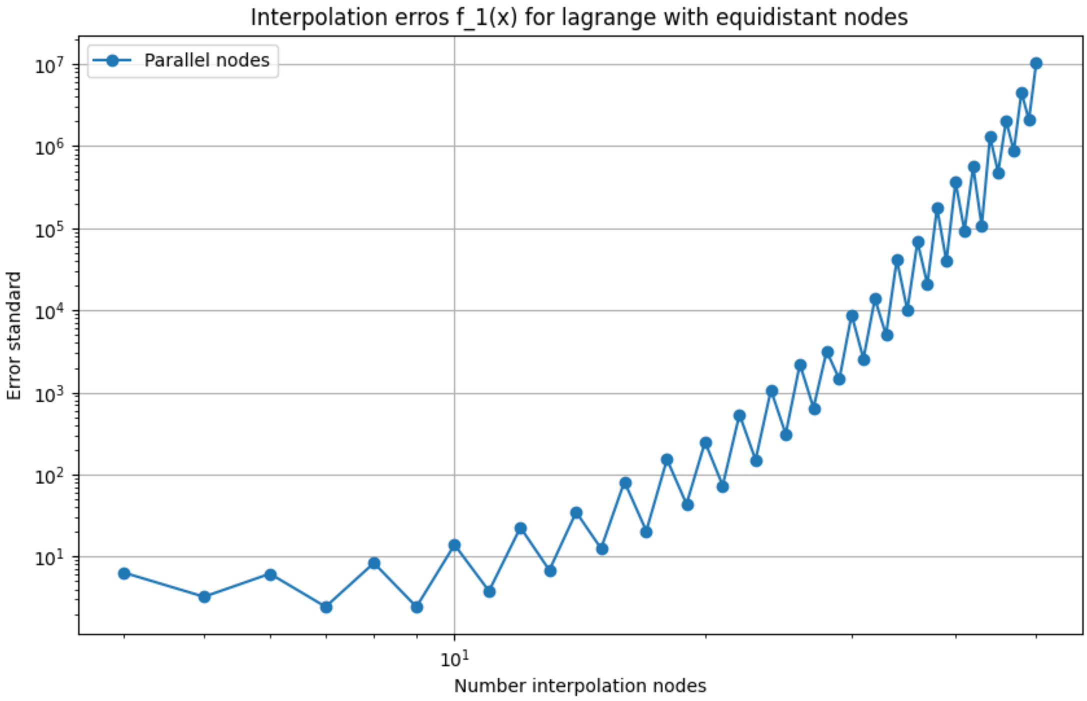
3.5. Funkcja Rungego razem z wielomianem Lagrange'a z węzłami Czebyszewa



Wykres 5. Wykres przedstawia prównanie funkcji Rungego razem z wielomianem Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

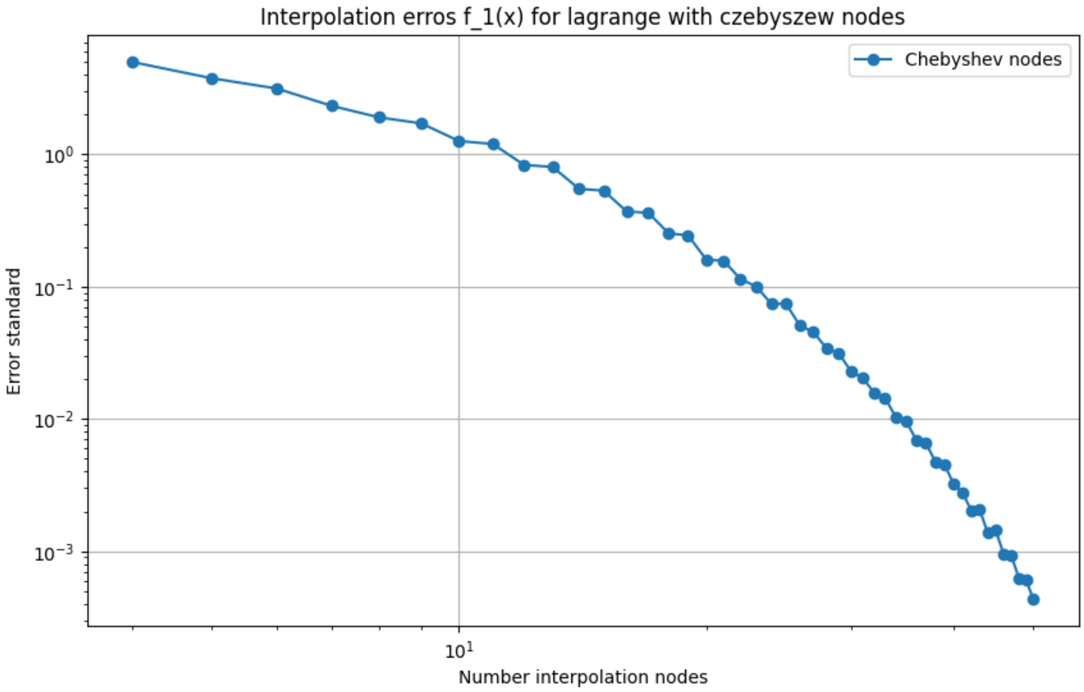
3.6. Wykres normy wektora błędów

3.6.1. Wykres błędu funkcji 1 dla interpolacji lagange z węzłami równoodległymi



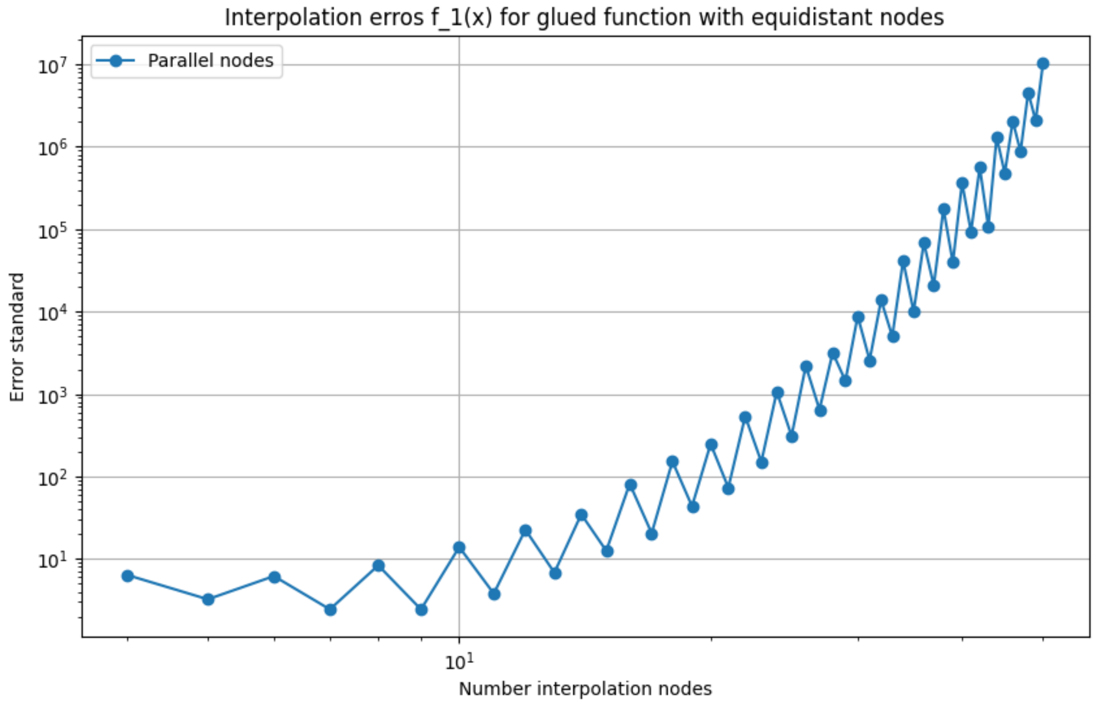
Wykres 6. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami równoodległymi dla funkcji 1

3.6.2. Wykres błędu funkcji 1 dla interpolacji lagrange z węzłami czebyszewa



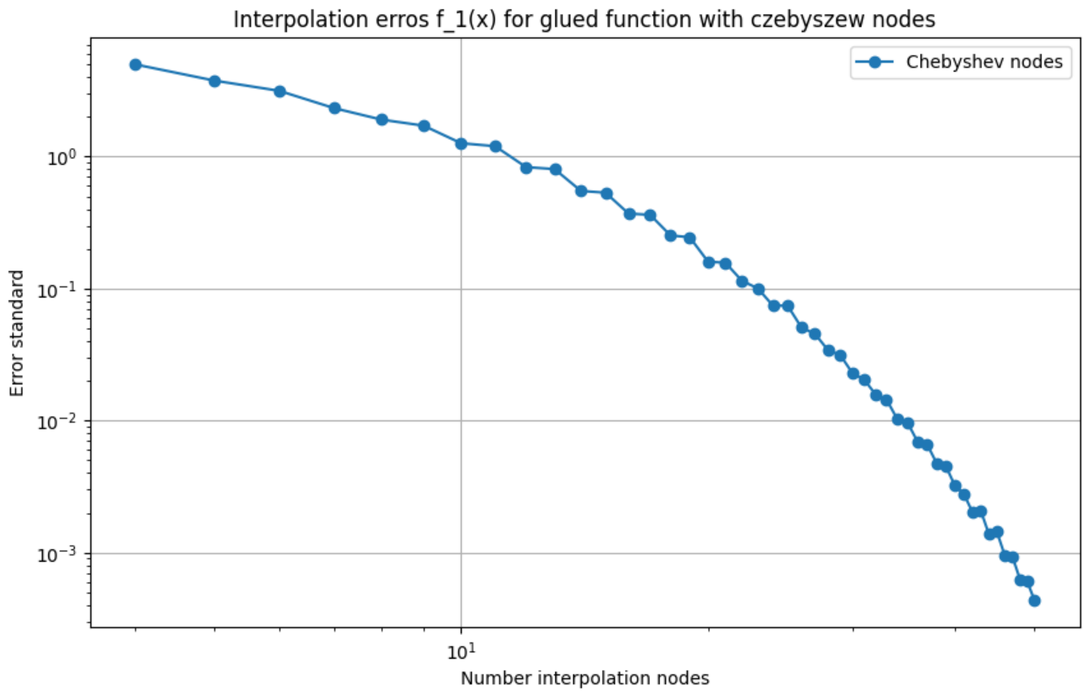
Wykres 7. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami czebyszewa dla funkcji 1

3.6.3. Wykres błędu funkcji 1 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami równoodległymi



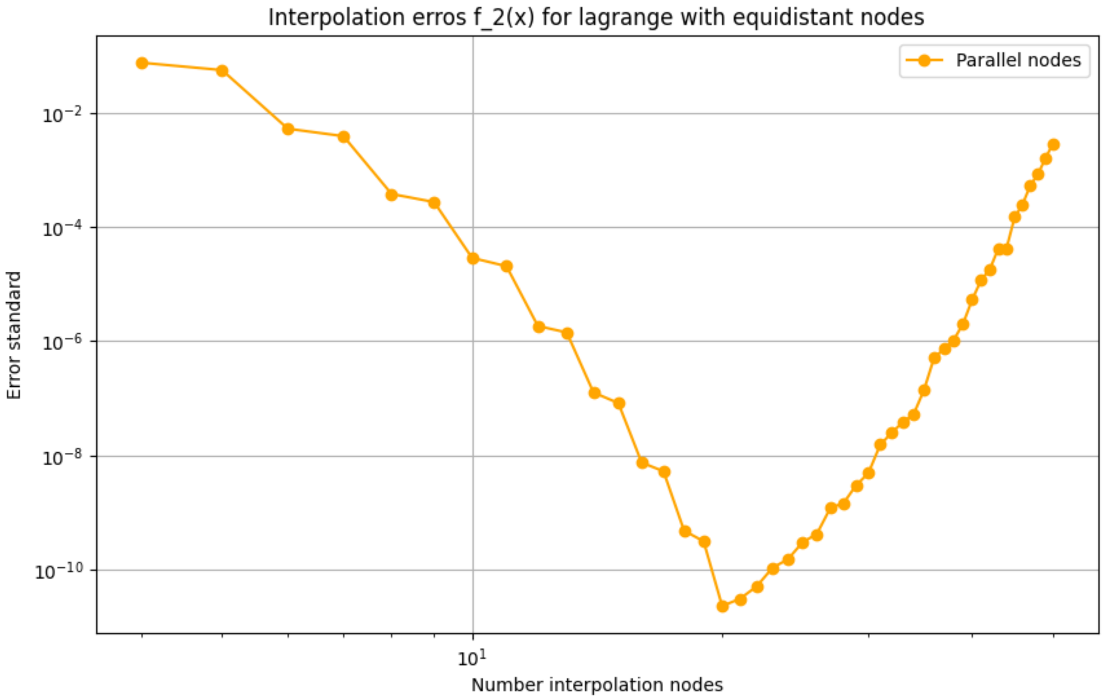
Wykres 8. Wykres normy wektora błędów dla kubcznej funkcji sklejanej z wezlami równoodległymi dla funkcji 1

3.6.4. Wykres błędu funkcji 1 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami czebyszewa



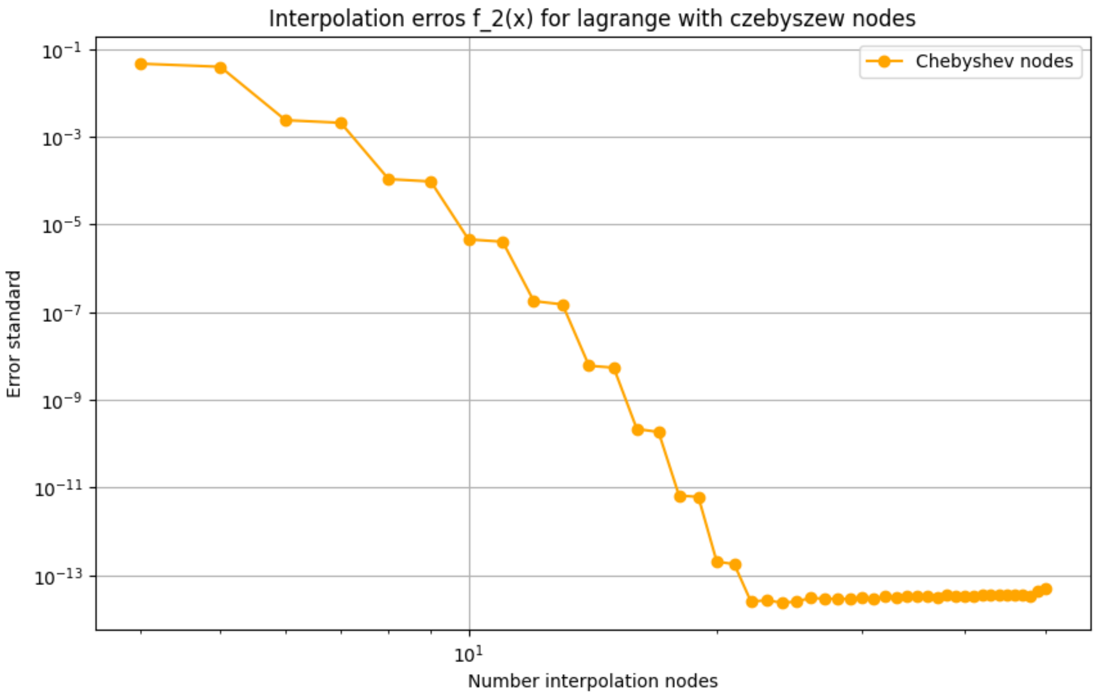
Wykres 9. Wykres normy wektora błędów dla kubcznej funkcji sklejanej z wezlami czebyszewa dla funkcji 1

3.6.5. Wykres błędu funkcji 2 dla interpolacji lagange z węzłami równoodległymi



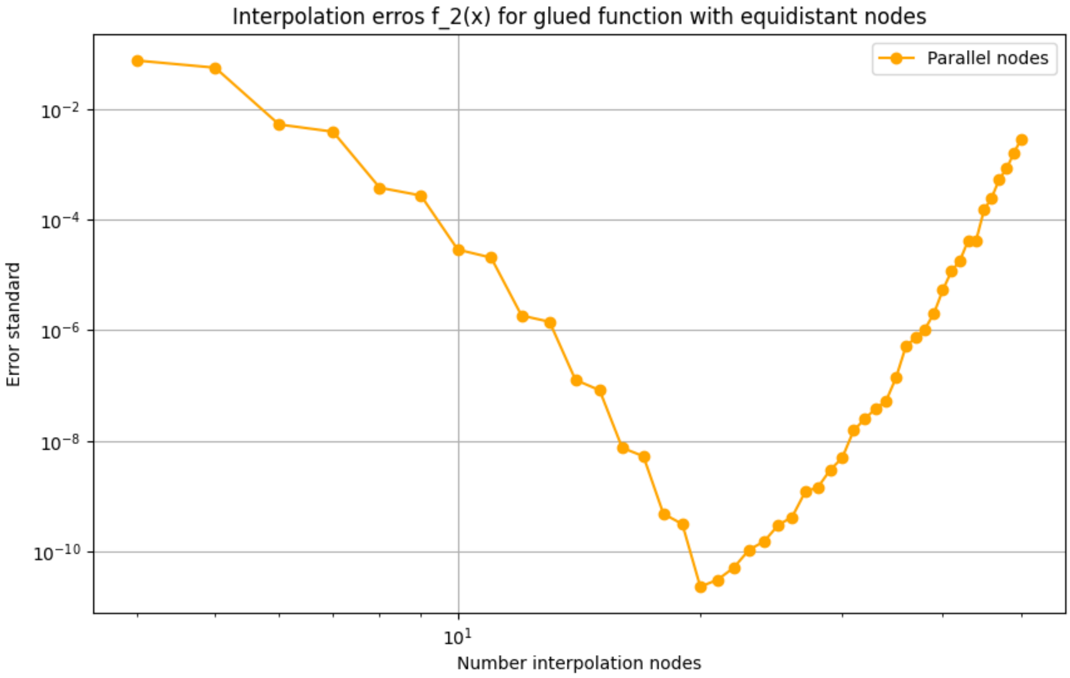
Wykres 10. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami równoodległymi dla funkcji 2

3.6.6. Wykres błędu funkcji 2 dla interpolacji lagrange z węzłami czebyszewa



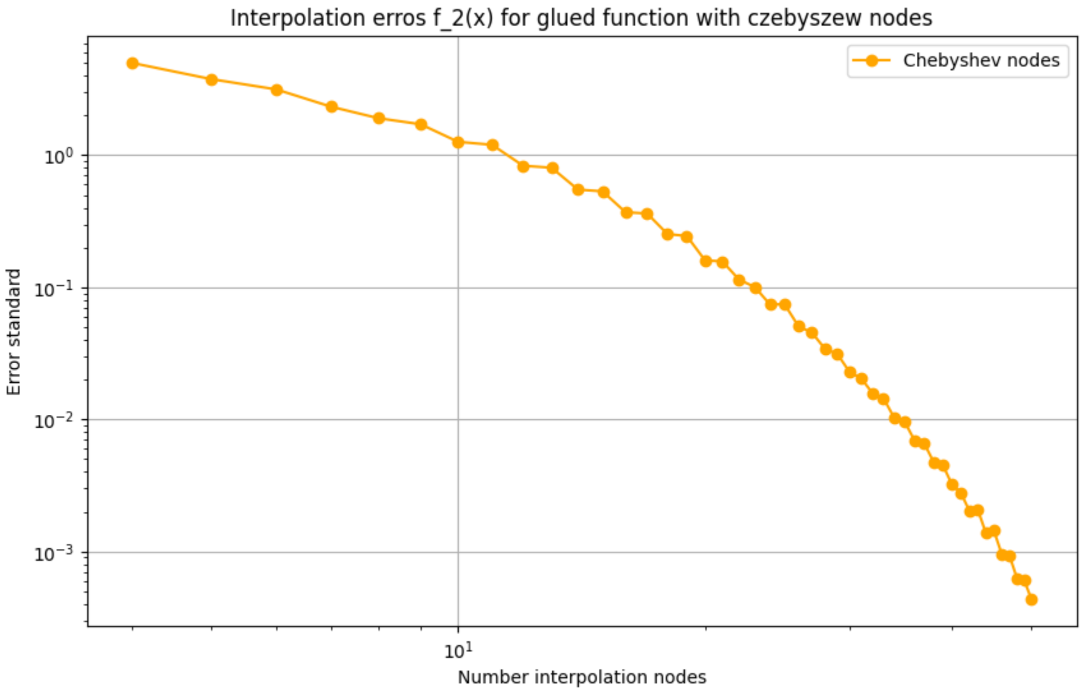
Wykres 11. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami czebyszewa dla funkcji 2

3.6.7. Wykres błędu funkcji 2 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami równoodległymi



Wykres 12. Wykres normy wektora błędów dla kubcznej funkcji sklejanej z wezlami równoodległymi dla funkcji 2

3.6.8. Wykres błędu funkcji 1 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami czebyszewa



Wykres 13. Wykres normy wektora błędów dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami czebyszewa dla funkcij

4. Wnioski

Metoda funkcji sklejanych wydaje się dawać lepsze wyniki niż interpolacja Lagrange'a, ponieważ funkcje sklejane są w stanie lepiej dostosować się do bardziej złożonych kształtów funkcji. Interpolacja Lagrange'a, zwłaszcza z równoodległymi węzłami, może prowadzić do efektu Rungego, co oznacza, że przy zbyt dużym stopniu wielomianu interpolacyjnego mogą wystąpić oscylacje w okolicach krańców przedziału.

W przypadku obu funkcji $f_1(x)\ i\ f_2(x)$ równoodległe węzły interpolacji wydają się być mniej skuteczne niż węzły Czebyszewa. Weźmy pod uwagę, że w przypadku interpolacji z równoodległymi węzłami, równomierne próbkowanie funkcji może prowadzić do niedokładnych wyników interpolacji, zwłaszcza dla funkcji o złożonym kształcie.

Podsumowując, węzły Czebyszewa są preferowanym wyborem dla interpolacji, szczególnie dla funkcji o złożonym kształcie. Dzięki temu, że węzły Czebyszewa są gęściej rozmieszczone w obszarach, gdzie funkcja ma duże zmiany, można uzyskać lepszą jakość interpolacji w porównaniu do równoodległych węzłów interpolacji. Jednakże, należy pamiętać, że w niektórych przypadkach, zwłaszcza dla funkcji o regularnym kształcie, interpolacja z równoodległymi węzłami może być równie skuteczna, a nawet lepsza niż interpolacja z węzłami Czebyszewa. W takich przypadkach kluczowe jest odpowiednie dostosowanie wyboru węzłów interpolacji do kształtu funkcji, aby uzyskać dokładne wyniki interpolacji.

5. Bibliografia
Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz
Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

6. Dodatkowe informacje
Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku ex1.pynb