Artur Gęsiarz,
Czerwiec 14, 2024

Laboratorium nr. 10
MOwNiT – Równania różniczkowe – spectral bias

1. Treść zadań
   1.1. Zadanie pierwsze

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{du(x)}{dx} = \cos(w * x)\, dla\ x \in\ \Omega\ (1)$$

gdzie,
$x, w, u\ x \in R$
$x\ to\ położenie$
$\Omega$ to dziedzina, na której rozwiązujemy równanie, $\Omega = \{x \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$
$u(.)$ to to funkcja, której postaci szukamy

Warunek początkowy zdefiniowany jest następująco

$$u(0) = 0\ (2)$$

Analityczna postać rozwiązania równania (1) z warunkiem początkowym (2)
jest następująca:

$$u(x) = \frac{1}{\omega}\sin\ (\omega x)$$

Rozwiąż powyższe zagadnienie początkowe (1,2). Do rozwiązania użyj sieci neuronowych PINN (ang. Physics-informed Neural Network) [1]. Można wykorzystać
szablon w pytorch-u lub biblioteke DeepXDE [2].
Koszt rezydualny zdefiniowany jest nastepujaco:

$$\mathcal{L}_r(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} ||(\frac{d\widehat{u}}{dx} - \cos\ (\omega x)\ ||$$

gdzie N jest liczba punktów kolokacyjnych.
Koszt zwiazany z warunkiem poczatkowym przyjmuje postac:

$$\mathcal{L}_{IC}(\theta) = ||\widehat{u}\ (0) - u(0)\ ||$$

Funkcja kosztu zdefiniowana jest nastepujaco:

$$\mathcal{L}(\theta) =\ \mathcal{L}_{IC}(\theta) +\ \mathcal{L}_r(\theta)$$

Warstwa wejsciowa sieci posiada 1 neuron, reprezentujacy zmienna x, Warstwa wyjsciowa takze posiada 1 neuron, reprezentujacy zmienna ^u(x). Uczenie trwa przez 50 000 kroków algorytmem Adam ze stała uczenia równa 0.001. Jako funkcje aktywacji przyjmij tangens hiperboliczny, tanh

(a) Przypadek $\omega = 1$
Ustal następujące wartości:
– 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w kazdej warstwie
– liczba punktów treningowych: 200
– liczba punktów testowych: 1000

(b) Przypadek $\omega = 15$
Ustal nastepujace wartosci:
– liczba punktów treningowych: 3000
– liczba punktów testowych: 5000

Eksperymenty przeprowadz z trzema architekturami sieci:
– 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w kazdej warstwie
– 4 warstwy ukryte, 64 neurony w kazdej warstwie
– 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w kazdej warstwie

(c) Dla wybranej przez siebie sieci porównaj wynik z rozwiązaniem, w którym przyjęto, ze szukane rozwiazanie (ansatz ) ma postać:

$$\hat{u}(x;\theta) = \tanh(\omega x) * NN(x;\theta)$$

Taka postać rozwiązania gwarantuje spełnienie warunku $\hat{u}(0) = 0$ bez wprowadzania Składnika $\mathcal{L}_{IC}$ do funkcji kosztu.

(d) Porównaj pierwotny wynik z rozwiązaniem, w którym pierwsza warstwę ukryta zainicjalizowano cechami Fouriera:

$$\gamma(x) = [\sin(2^0\pi x), \cos(2^0\pi x), \ldots, \sin(2^{L-1}\pi x), \cos(2^{L-1}\pi x)]$$

Dobierz L tak, aby nie zmieniać szerokości warstwy ukrytej

Dla każdego z powyższych przypadków stwórz następujące wykresy:

– Wykres funkcji u(x), tj. dokładnego rozwiązania oraz wykres funkcji ^u(x),
tj. rozwiązania znalezionego przez siec neuronowa

– Wykres funkcji błędu.

Stwórz także wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok.

## 2. Rozwiązanie zadania

### 2.1. Implementacja zadania pierwszego

#### 2.1.1. Definicja analitycznego rozwiązania

```
def exact_solution(x, w):
    return (1/w) * torch.sin(w * x)
```

#### 2.1.2. Definicja sieci neuronowej

```
class FCN(nn.Module):
    def __init__(self, N_INPUT, N_OUTPUT, N_HIDDEN, N_LAYERS):
        super().__init__()
        activation = nn.Tanh

        # warstwa poczatkowa
        self.fcs = nn.Sequential(*[
                        nn.Linear(N_INPUT, N_HIDDEN),
                        activation()])
        # warstwa ukrytna
        self.fch = nn.Sequential(*[
                        nn.Sequential(*[
                            nn.Linear(N_HIDDEN, N_HIDDEN),
                            activation()]) for _ in range(N_LAYERS-1)])

        # warstwa wyjsciowa
        self.fce = nn.Linear(N_HIDDEN, N_OUTPUT)
    def forward(self, x):
        x = self.fcs(x)
        x = self.fch(x)
        x = self.fce(x)
        return x
```

#### 2.1.3. Funkcja licząca koszt warunku początkowego

```
def calculate_cond_start_cost(model, x_boundary):
    u0 = model(x_boundary)
    loss_ic = u0 ** 2
    return  loss_ic
```

#### 2.1.4. Funkcja obliczająca koszt rezydualny

```
def calculate_residual_cost(model, x_physics, w):
    u = model(x_physics)
    du_dx = torch.autograd.grad(u, x_physics, torch.ones_like(u), create_graph=True)[0]
    residual = du_dx - torch.cos(w * x_physics)
    loss_r = torch.mean(residual**2)
    return loss_r
```

#### 2.1.5. Funkcja obliczająca koszt totalny

```
def calculate_total_cost(model, x_boundary, x_physics, w):
    return calculate_cond_start_cost(model, x_boundary) + calculate_residual_cost(model, x_physics, w)
```

### 2.1.6. Funkcja treningowa PINN

```python
def train_PINN(model, x_boundary, x_physics, cost_fun, w, epochs=50000, lr=0.001):
    optimizer = torch.optim.Adam(model.parameters(), lr=lr)
    losses = []

    for i in range(epochs):
        optimizer.zero_grad()

        loss = cost_fun(model, x_boundary, x_physics, w)
        losses.append(loss.item())

        loss.backward()
        optimizer.step()

        if i % 5000 == 0:
            print(f'Epoch {i}, Loss: {loss.item()}')

    return model, losses
```

### 2.1.7. Funkcja do rysowania wyników

```python
def plot_results(x_test, u_exact, u_pred, losses, title):

    plt.plot(x_test, u_exact, label='Exact solution')
    plt.plot(x_test, u_pred, '--', label='PINN solution')
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('u(x)')
    plt.title(title + ': Solution')
    plt.legend()
    plt.show()

    plt.plot(x_test, abs((u_exact - u_pred)))
    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('error')
    plt.title(title + ': Error function')
    plt.show()

    plt.plot(losses)
    plt.xlabel('Epoch')
    plt.ylabel('Loss')
    plt.title(title + ': Training Loss')
    plt.show()
```

### 2.1.8. Stałe w naszym modelu

```python
N_INPUT = 1
N_OUTPUT = 1
LR = 0.001
EPOCHS = 50000
```

### 2.1.9. Przypadek $\omega = 1$

#### 2.1.9.1. Parametry naszego modelu

```python
N_LAYERS = 2
N_HIDDEN = 16
TRAINING_POINTS = 200
TESTING_POINTS = 1000
OMEGA = 1
```

#### 2.1.9.2. Definicja modelu

```
model_a = FCN(N_INPUT, N_OUTPUT, N_HIDDEN, N_LAYERS)
```

#### 2.1.9.3. Definicja punktów treningowych i testowych

```
x_boundary_a = torch.tensor([[0.0]], requires_grad=True)
x_physics_a = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TRAINING_POINTS).view(-1, 1).requires_grad_(True)
x_test_a = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TESTING_POINTS).view(-1, 1)
u_exact_a = exact_solution(x_test_a, OMEGA)
```

#### 2.1.9.4. Trening modelu

```
print(f'Training for w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons = {N_HIDDEN}\n')
model_a ,losses_a = train_PINN(model_a, x_boundary_a, x_physics_a, calculate_total_cost, OMEGA, EPOCHS, LR)
```

#### 2.1.9.5. Przewidywanie wartości

```
u_pred_a = model_load_a(x_test_a).detach().numpy()
u_exact_a = u_exact_a.numpy()
```

#### 2.1.9.6. Rysowanie wyników

```
plot_results(x_test_a, u_exact_a, u_pred_a, losses_a, f'w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons =
 {N_HIDDEN}')
```

### 2.1.10. Przypadek $\omega = 15$

#### 2.1.10.1. Parametry naszego modelu

```
TRAINING_POINTS = 3000
TESTING_POINTS = 5000
OMEGA = 15
ARCH = [(2,16), (4,64), (5,128)]
```

#### 2.1.10.2. Definicja modelu, definicja punktów treningowych i testowych, …, wykres wyników

```
for N_LAYERS, N_HIDDEN in ARCH:

    # Definicja modelu
    model_b = FCN(N_INPUT, N_OUTPUT, N_HIDDEN, N_LAYERS)

    # Definicja punktów treningowych i testowych
    x_boundary_b = torch.tensor([[0.0]], requires_grad=True)
    x_physics_b = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TRAINING_POINTS).view(-1, 1).requires_grad_(True)
    x_test_b = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TESTING_POINTS).view(-1, 1)
    u_exact_b = exact_solution(x_test_b, OMEGA)

    # Trening
    print(f'Training for w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons = {N_HIDDEN}\n')
    model_b, losses_b = train_PINN(model_b, x_boundary_b, x_physics_b, calculate_total_cost,OMEGA, EPOCHS, LR

    # Zapis
    torch.save(model_b, f"models/model_b_{N_LAYERS}_{N_HIDDEN}.pth")

    # Odczyt
    model_load_b = torch.load(f"models/model_b_{N_LAYERS}_{N_HIDDEN}.pth")

    # Przewidywanie wartości
    u_pred_b = model_load_b(x_test_b).detach().numpy()
    u_exact_b = u_exact_b.numpy()

    # Rysowanie wykresow
    plot_results(x_test_b, u_exact_b, u_pred_b, losses_b, f'w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons =
     {N_HIDDEN}')
```

2.1.11. Porównanie wyniku wybranej sieci z rozwiązaniem w którym przyjęto, ze szukane rozwiązanie ma konkretną postać

2.1.11.1. Funkcja obliczająca koszt totalny

```
def calculate_total_cost_anastaz(model, _, x_physics, w):
    u = torch.tanh(w * x_physics) * model(x_physics)
    u_x = torch.autograd.grad(u, x_physics, torch.ones_like(u), create_graph=True)[0]
    loss_r = torch.mean(torch.pow((u_x - torch.cos(w * x_physics)),2))
    return loss_r
```

2.1.11.2. Parametry naszego modelu

```
N_LAYERS = 5
N_HIDDEN = 128
TRAINING_POINTS = 3000
TESTING_POINTS = 5000
OMEGA = 15
```

2.1.11.3. Definicja modelu

```
model_c = FCN(N_INPUT, N_OUTPUT, N_HIDDEN, N_LAYERS)
```

2.1.11.4. Definicja punktów treningowych i testowych

```
x_physics_c = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TRAINING_POINTS).view(-1, 1).requires_grad_(True)
x_test_c = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TESTING_POINTS).view(-1, 1)
u_exact_c = exact_solution(x_test_c, OMEGA)
```

2.1.11.5. Trening modelu

```
print(f'ansatz - Training for w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons = {N_HIDDEN}\n')
model_c, losses_c = train_PINN(model_c, _, x_physics_c, calculate_total_cost_anastaz, OMEGA, EPOCHS, LR)
```

2.1.11.6. Przewidywanie wartości

```
u_pred_c = model_c_load(x_test_c).detach().numpy()
u_exact_c = u_exact_c.numpy()
```

2.1.11.7. Rysowanie wyników

```
plot_results(x_test_c, u_exact_c, u_pred_c, losses_c, f'ansatz - w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons =
 {N_HIDDEN}')
```

2.1.12. Porównanie pierwotnego wyniku z rozwiązaniem, w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera

2.1.12.1. Warstwa Fouriera

```
class FourierLayer(nn.Module):
    def __init__(self, N_INPUT, N_HIDDEN):
        super(FourierLayer, self).__init__()
        self.N_HIDDEN = N_HIDDEN
        self.L = N_HIDDEN // 2
        self.linear = nn.Linear(2 * self.L, N_HIDDEN)

    def forward(self, x):
        # Tworzymy cechy Fouriera
        features = []
        for l in range(1, self.L + 1):
            features.append(torch.sin((2 ** l) * np.pi * x))
            features.append(torch.cos((2 ** l) * np.pi * x))
        features = torch.cat(features, dim=-1)
        return self.linear(features)
```

#### 2.1.12.2. Model Fouriera

```
class FourierFCN(nn.Module):
    "Defines a fully-connected network in PyTorch"
    def __init__(self, N_INPUT, N_OUTPUT, N_HIDDEN, N_LAYERS):
        super(FourierFCN, self).__init__()

        self.fcs = FourierLayer(N_INPUT, N_HIDDEN)
        activation = nn.Tanh

        self.fch = nn.Sequential(*[
            nn.Sequential(nn.Linear(N_HIDDEN, N_HIDDEN), activation())
            for _ in range(N_LAYERS - 1)
        ])

        self.fce = nn.Linear(N_HIDDEN, N_OUTPUT)

    def forward(self, x):
        x = self.fcs(x)
        x = self.fch(x)
        x = self.fce(x)
        return x
```

#### 2.1.12.3. Parametry naszego modelu

```
N_HIDDEN = 16
N_LAYERS = 2
TRAINING_POINTS = 3000
TESTING_POINTS = 5000
OMEGA = 15
```

#### 2.1.12.4. Definicja modelu

```
model_d = FourierFCN(N_INPUT, N_OUTPUT, N_HIDDEN, N_LAYERS)
```

#### 2.1.12.5. Definicja punktów treningowych i testowych

```
x_boundary_d = torch.tensor([[0.0]], requires_grad=True)
x_physics_d = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TRAINING_POINTS).view(-1, 1).requires_grad_(True)
x_test_d = torch.linspace(-2 * np.pi, 2 * np.pi, TESTING_POINTS).view(-1, 1)
u_exact_d = exact_solution(x_test_d, OMEGA)
```

#### 2.1.12.6. Trening modelu

```
print(f'fourier - Training for w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons = {N_HIDDEN}\n')
model_d, losses_d = train_PINN(model_d, x_boundary_d, x_physics_d, calculate_total_cost, OMEGA, EPOCHS, LR)
```

#### 2.1.12.7. Przewidywanie wartości

```
u_pred_d = model_d_load(x_test_d).detach().numpy()
u_exact_d = u_exact_d.numpy()
```

#### 2.1.12.8. Rysowanie wyników

```
plot_results(x_test_d, u_exact_d, u_pred_d, losses_d, f'fourier - w = {OMEGA}, Layers = {N_LAYERS}, Neurons =
 {N_HIDDEN}')
```

3. Tabele

3.1. Tabela wyników uczenia się dla przypadku $\omega = 1$

3.1.1. Zawierająca: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

| Epoch | Loss |
|---|---|
| 0 | $0.58 * 10^{0}$ |
| 5000 | $1.47 * 10^{-5}$ |
| 10000 | $8.96 * 10^{-6}$ |
| 15000 | $6.76 * 10^{-6}$ |
| 20000 | $5.62 * 10^{-6}$ |
| 25000 | $4.73 * 10^{-6}$ |
| 30000 | $4.30 * 10^{-6}$ |
| 35000 | $1.83 * 10^{-5}$ |
| 40000 | $4.39 * 10^{-5}$ |
| 45000 | $2.57 * 10^{-6}$ |

**Tabela 1. Tabela wyników kosztu dla $\omega = 1$, 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie**

3.2. Tabela wyników uczenia się dla przypadku $\omega = 15$

3.2.1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

| Epoch | Loss |
|---|---|
| 0 | 0.50 |
| 5000 | 0.5 |
| 10000 | 0.5 |
| 15000 | 0.37 |
| 20000 | 0.33 |
| 25000 | 0.3 |
| 30000 | 0.28 |
| 35000 | 0.27 |
| 40000 | 0.26 |
| 45000 | 0.26 |

**Tabela 2. Tabela wyników kosztu dla $\omega = 15$, 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie**

3.2.2. Zawierający: 4 warstwy ukryte, 64 neuronów w każdej warstwie

| Epoch | Loss |
|---|---|
| 0 | 0.50 |
| 5000 | 0.5 |
| 10000 | 0.5 |
| 15000 | 0.5 |
| 20000 | 0.36 |
| 25000 | 0.22 |
| 30000 | 0.19 |
| 35000 | 0.15 |
| 40000 | 0.13 |
| 45000 | 0.12 |

**Tabela 3. Tabela wyników kosztu dla $\omega = 15$, 4 warstwy ukryte, 64 neuronów w każdej warstwie**

3.2.3. Zawierający: 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie

| Epoch | Loss |
|---|---|
| 0 | 0.50 |
| 5000 | 0.5 |
| 10000 | 0.5 |
| 15000 | 0.5 |
| 20000 | 0.5 |
| 25000 | 0.5 |
| 30000 | 0.5 |
| 35000 | 0.31 |
| 40000 | 0.01 |
| 45000 | 0.001 |

**Tabela 4. Tabela wyników kosztu dla $\omega = 15$, 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie**

3.3. Tabela wyników uczenia się dla przypadku wyniku wybranej sieci z rozwiązaniem, w którym przyjęto, ze szukane rozwiązanie ma konkretną postać

3.3.1. Zawierający: 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie

| Epoch | Loss |
|---|---|
| 0 | 0.49 |
| 5000 | 0.27 |
| 10000 | 0.07 |
| 15000 | 0.005 |
| 20000 | 0.009 |
| 25000 | 0.003 |
| 30000 | 0.0005 |
| 35000 | 0.0009 |
| 40000 | 0.005 |
| 45000 | 0.0006 |

**Tabela 5. Tabela wyników kosztu dla $\omega = 15$, 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie**

3.4. Tabela wyników uczenia się w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera

3.4.1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

| Epoch | Loss |
|---|---|
| 0 | 2060 |
| 5000 | 0.5 |
| 10000 | 0.49 |
| 15000 | 0.34 |
| 20000 | 0.33 |
| 25000 | 0.32 |
| 30000 | 0.31 |
| 35000 | 0.30 |
| 40000 | 0.309 |
| 45000 | 0.30 |

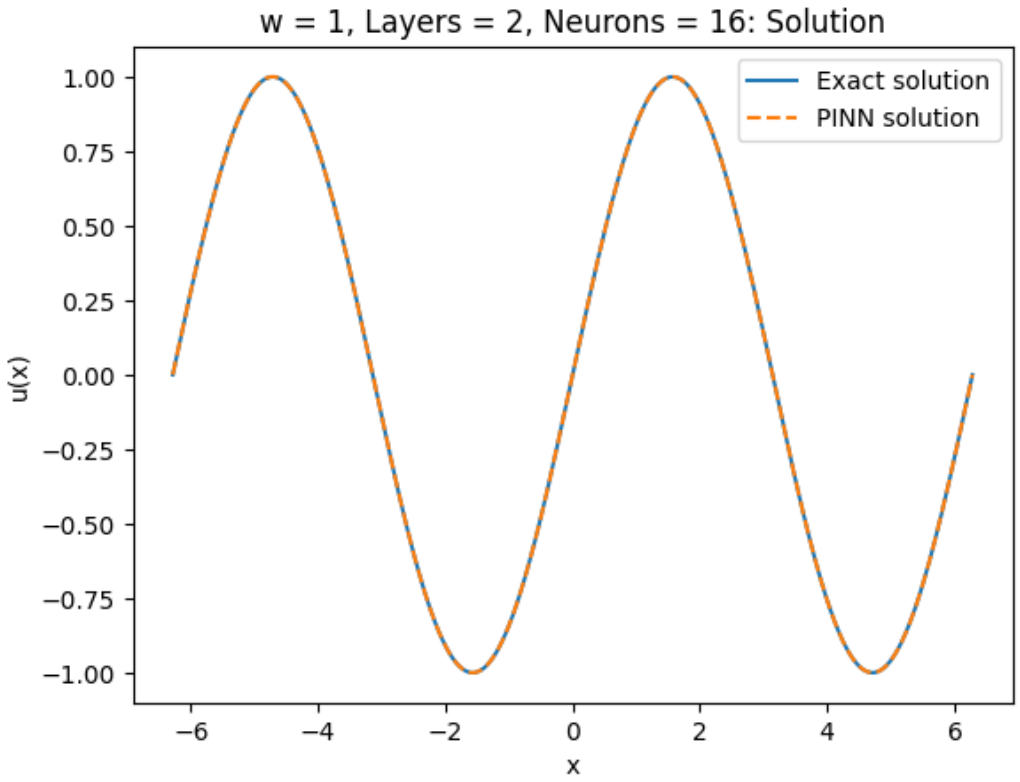
**Tabela 6. Tabela wyników kosztu dla $\omega = 15$, 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie**

# 4. Wykresy

## 4.1. Wykres dla przypadku $\omega = 1$

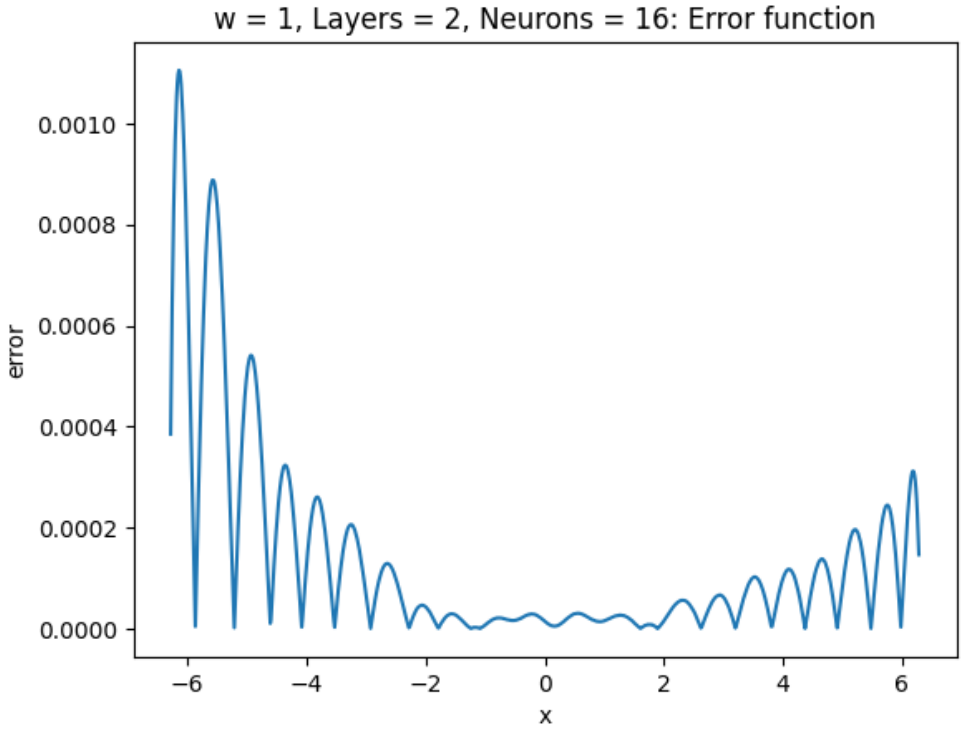
### 4.1.1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

#### 4.1.1.1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$



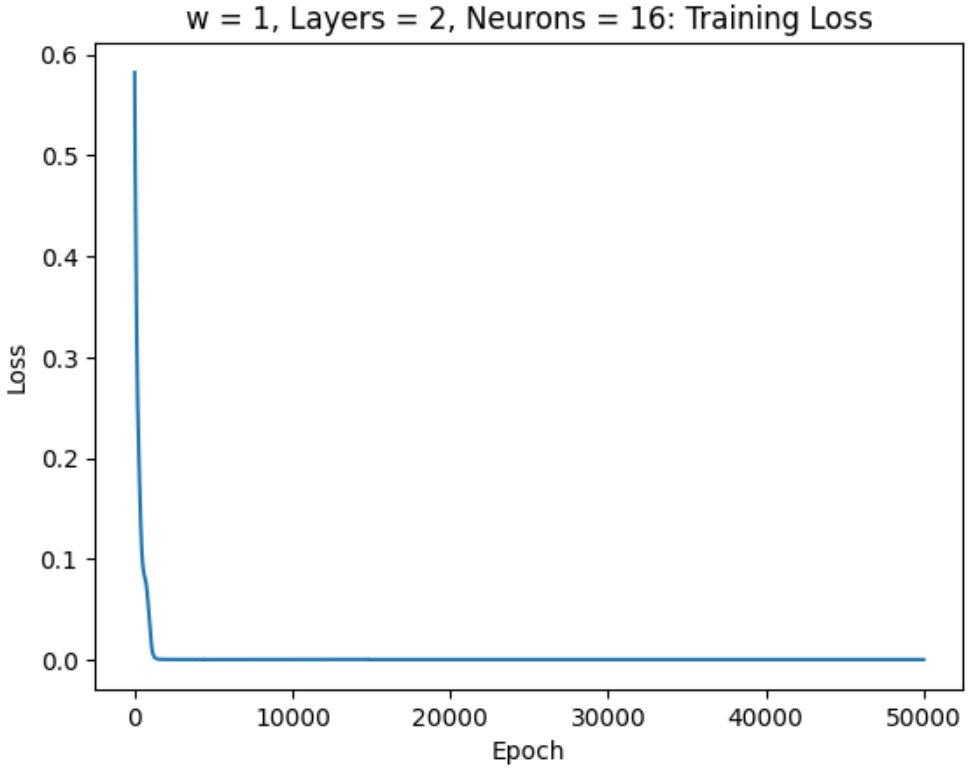

**Wykres 1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$ dla $\omega = 1$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.1.1.2. Wykres funkcji błędu




**Wykres 2. Wykres funkcji *błędu* dla $\omega = 1$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

4.1.1.3. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok

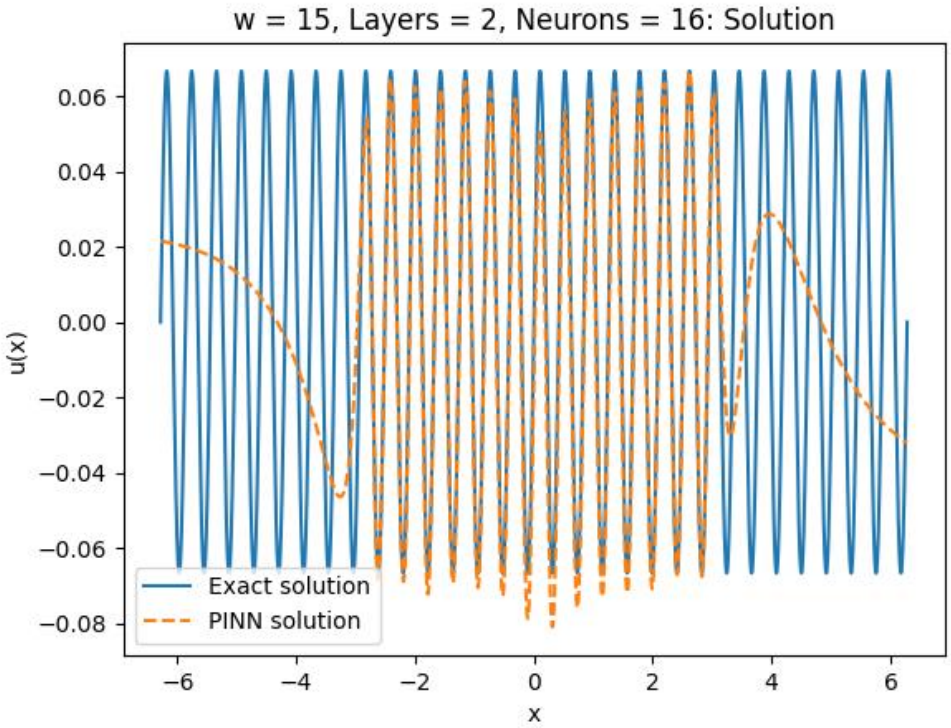



**Wykres 3. Wykres funkcji kosztu dla ω=1, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

## 4.2. Wykres dla przypadku $\omega = 15$

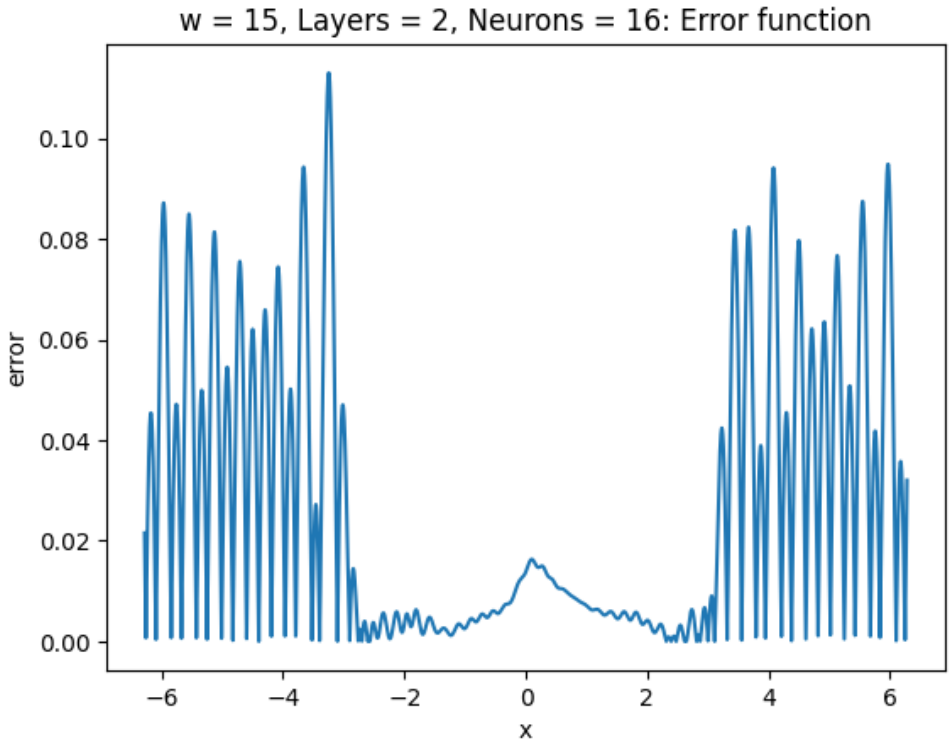
### 4.2.1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

#### 4.2.1.1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$



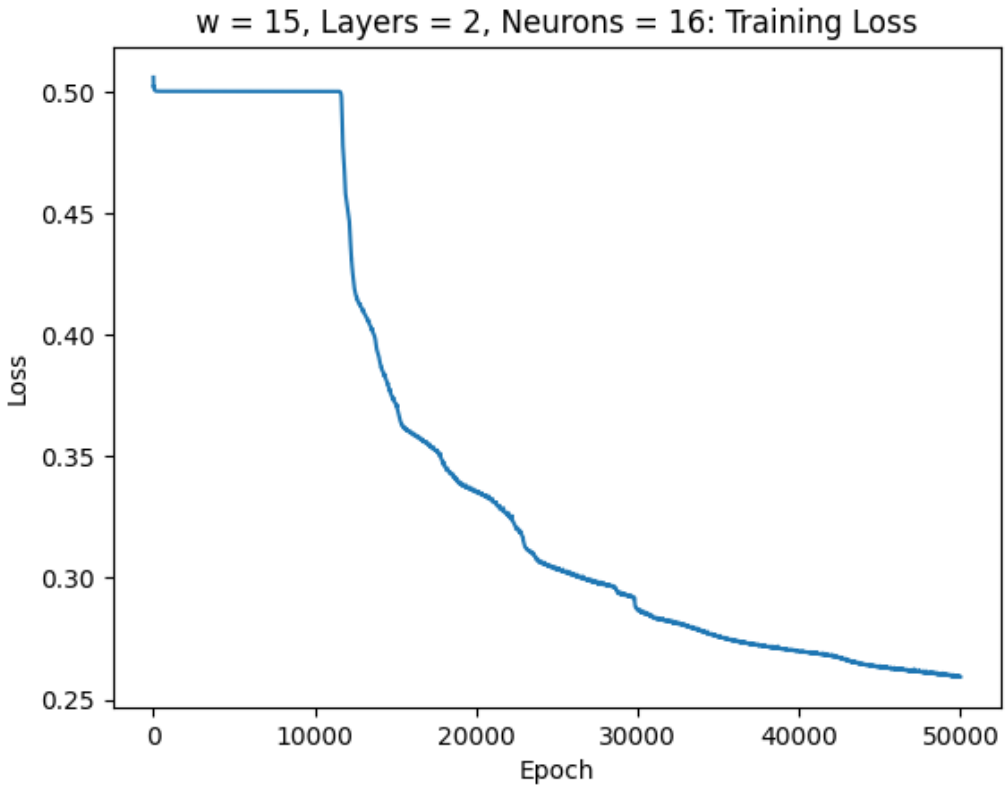

**Wykres 4. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$ dla $\omega = 15$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.2.1.2. Wykres funkcji błędu




**Wykres 5. Wykres funkcji *błędu* dla $\omega = 15$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

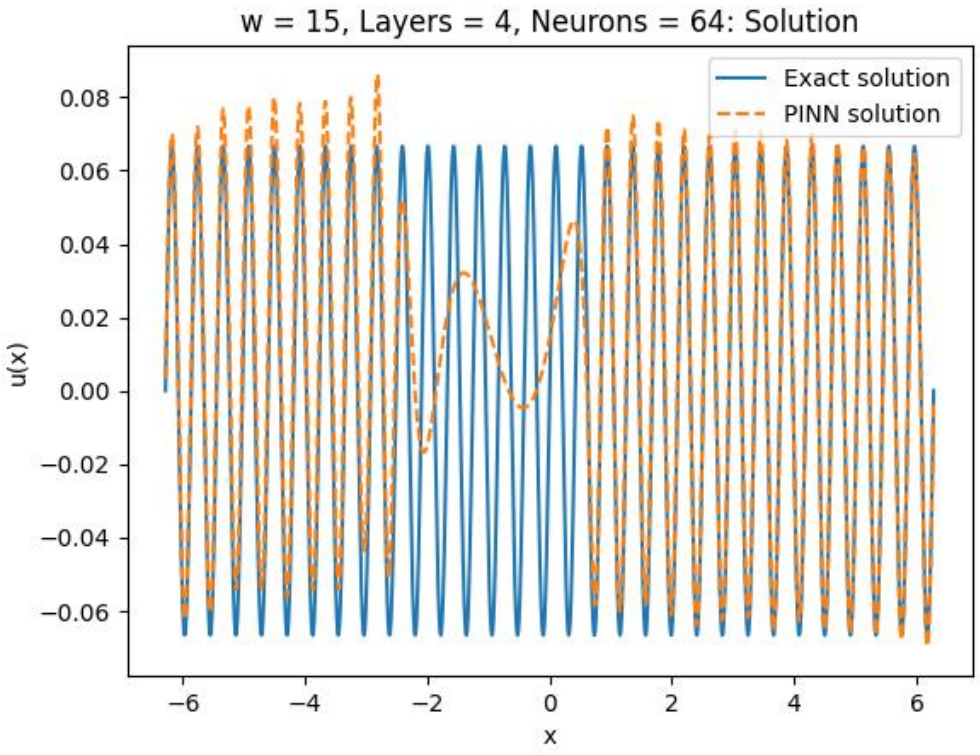
#### 4.2.1.3. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok




**Wykres 6. Wykres funkcji kosztu dla ω=15, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

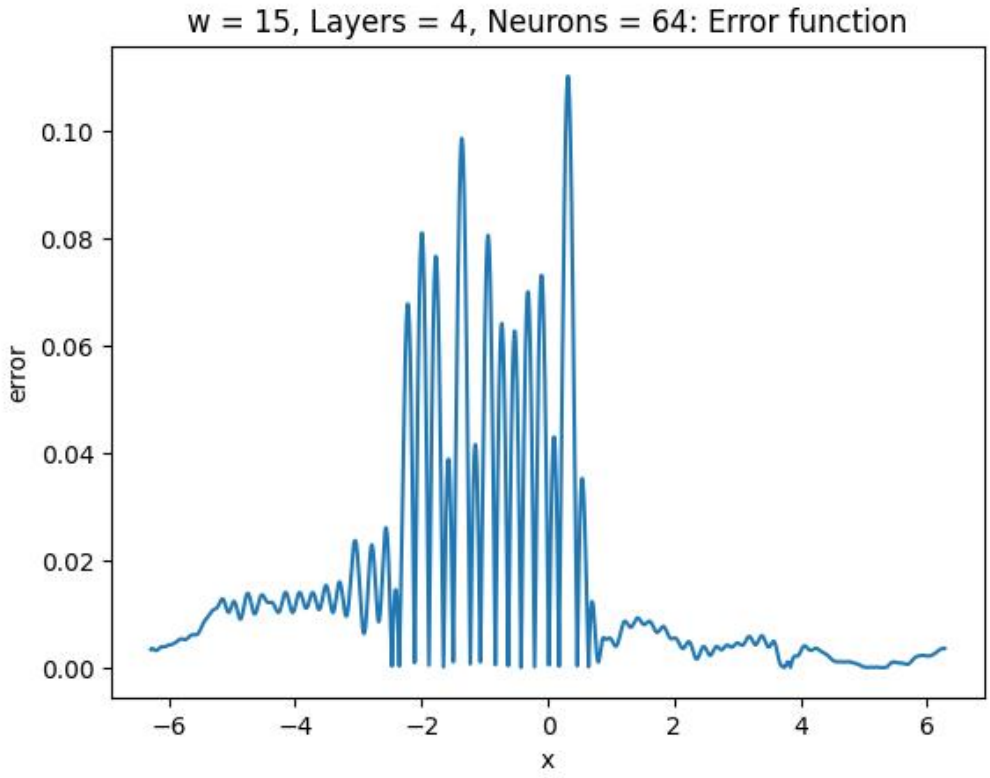
### 4.2.2. Zawierający: 4 warstwy ukryte, 64 neuronów w każdej warstwie

#### 4.2.2.1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$



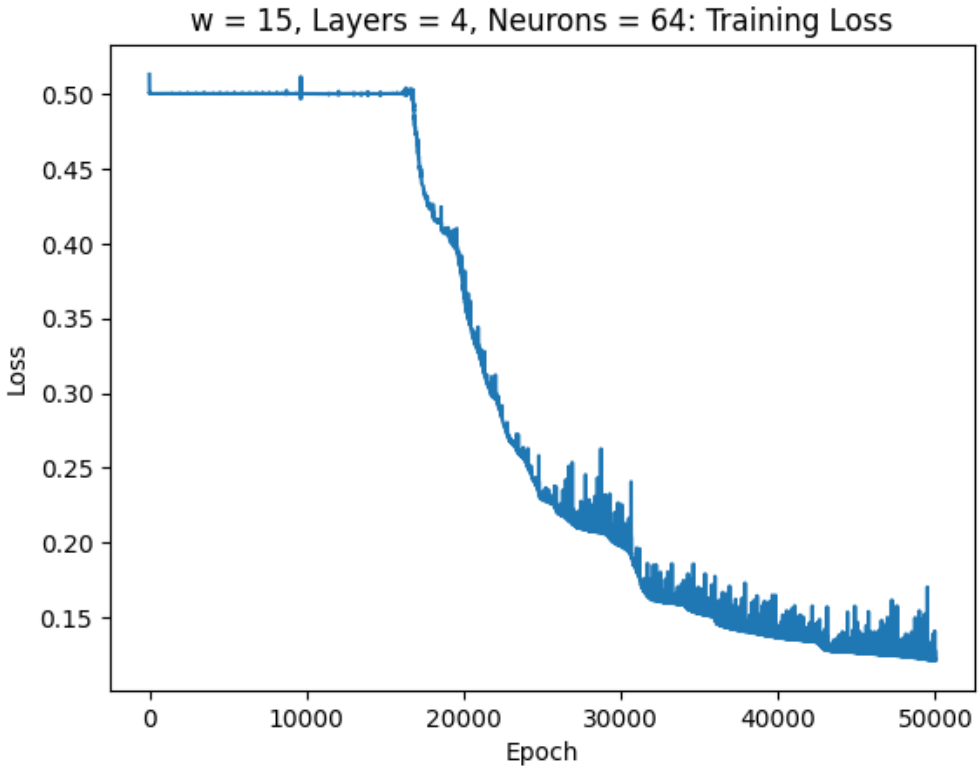

**Wykres 7. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$ dla $\omega = 15$, 4 - warstw ukrytych, 64 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.2.2.2. Wykres funkcji błędu




**Wykres 8. Wykres funkcji błędu dla $\omega = 15$, 4 - warstw ukrytych, 64 - neuronów w każdej warstwie**

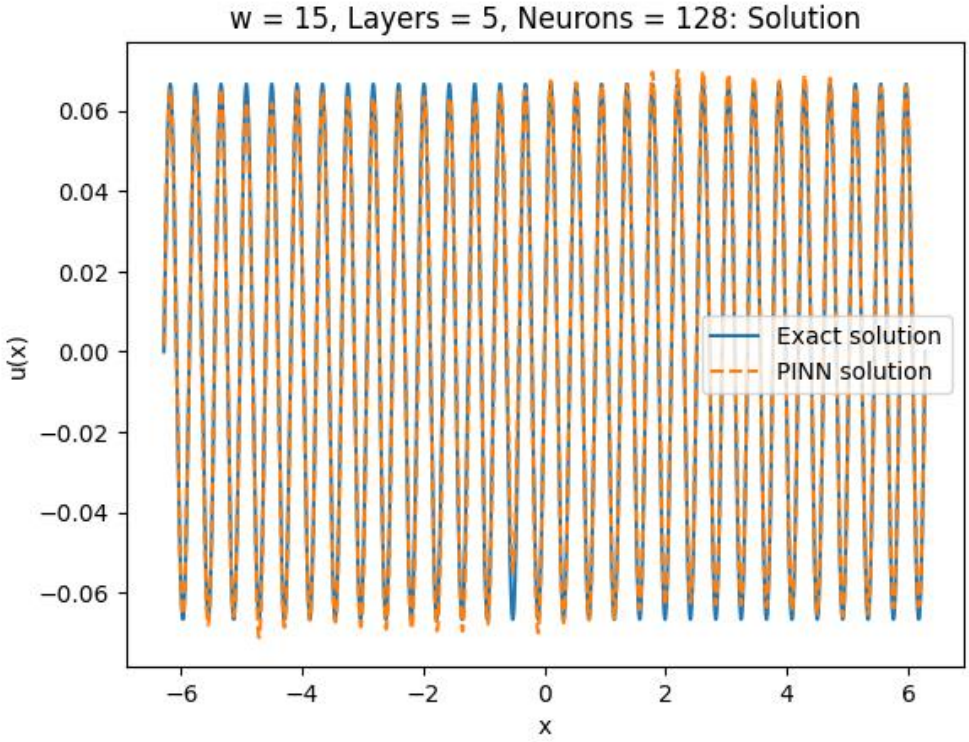
#### 4.2.2.3. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok




**Wykres 9. Wykres kosztu dla $\omega = 15$, 4 - warstw ukrytych, 64 - neuronów w każdej warstwie**

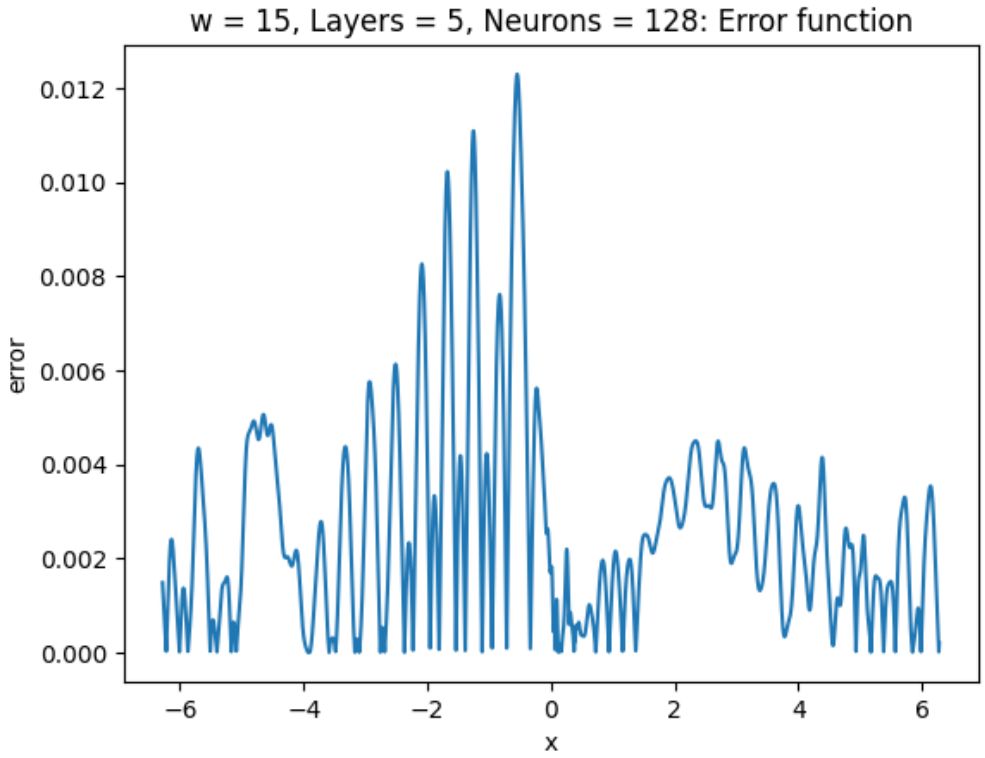
### 4.2.3. Zawierający: 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie

#### 4.2.3.1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$



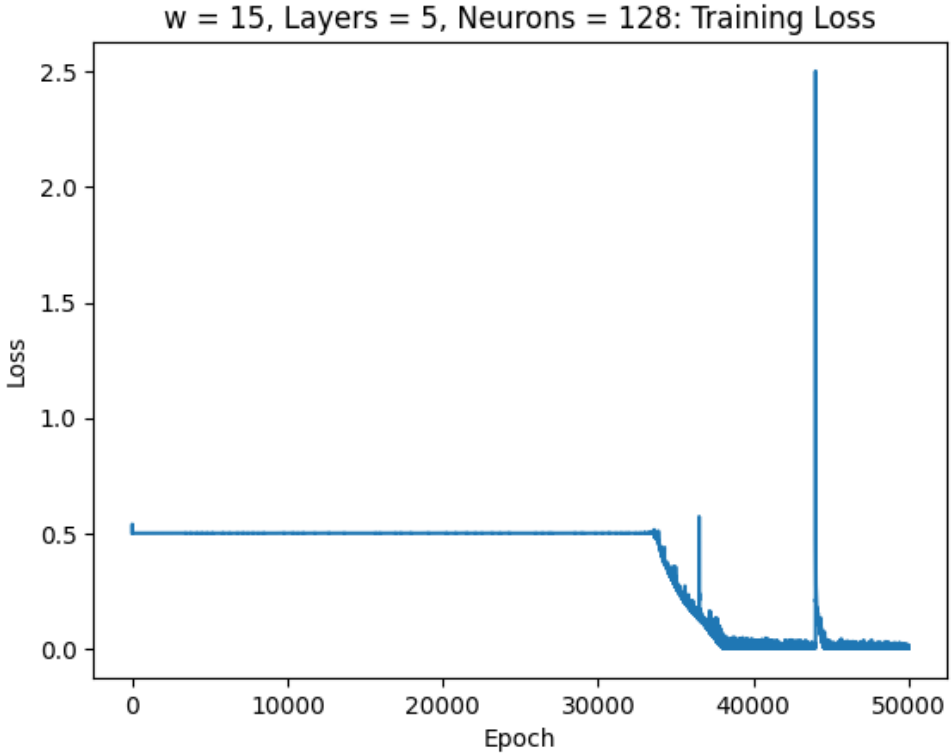

**Wykres 10. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$ dla $\omega = 15$, 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.2.3.2. Wykres funkcji błędu




**Wykres 11. Wykres funkcji $błędu$ dla $\omega = 15$, 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

4.2.3.3. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok

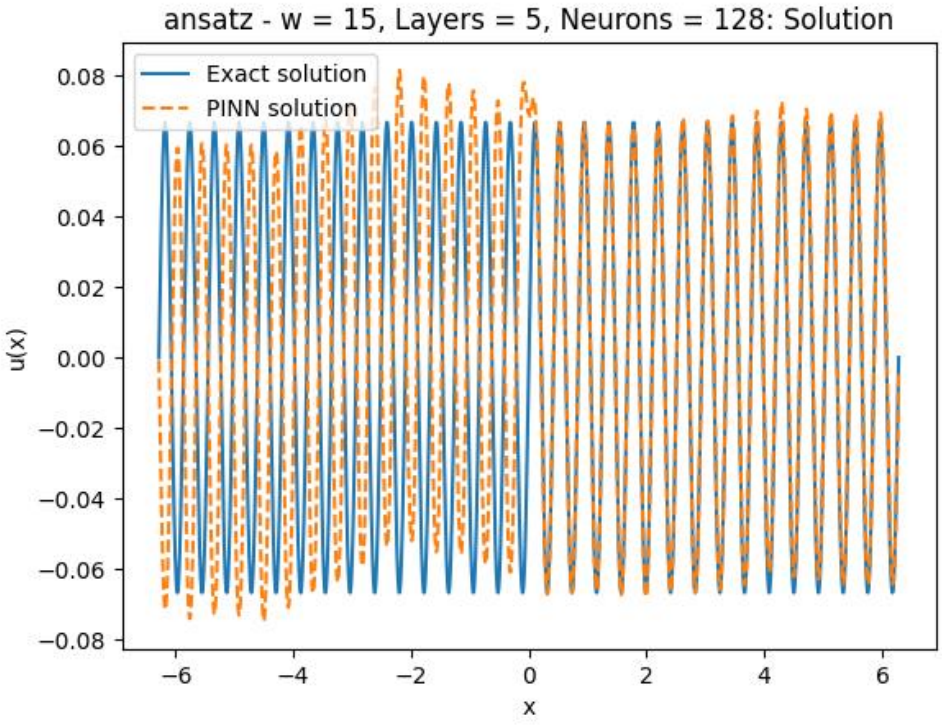



**Wykres 12. Wykres funkcji $kosztu$ dla $\omega = 15$, 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

4.3. Wykres dla wyniku wybranej sieci z rozwiązaniem w którym przyjęto, ze szukane rozwiązanie ma konkretną postać

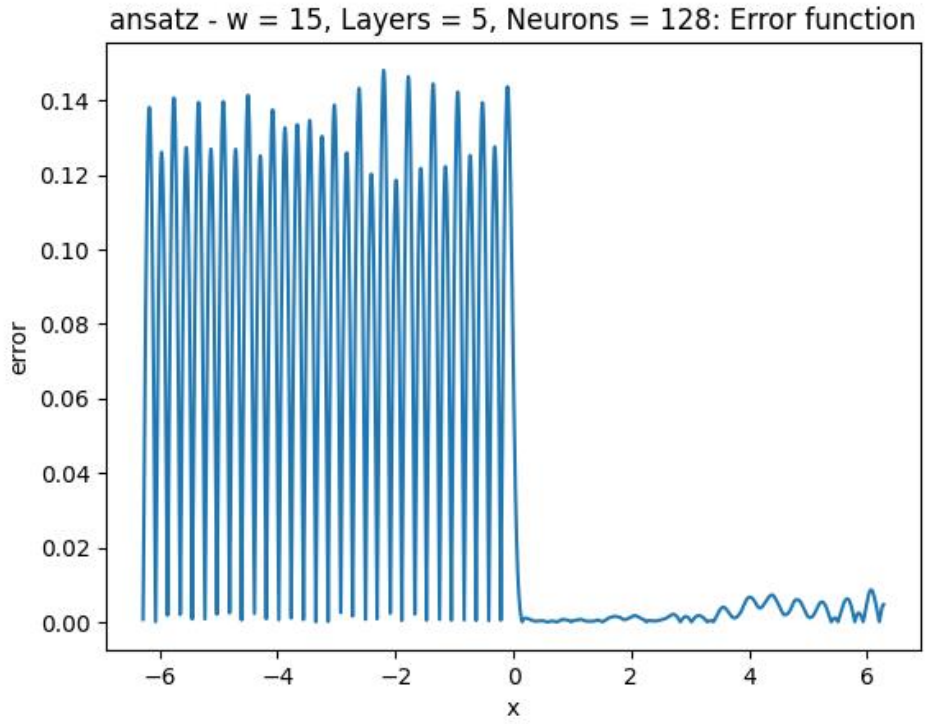
4.3.1. Zawierający: 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie, $\omega = 15$

4.3.1.1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$



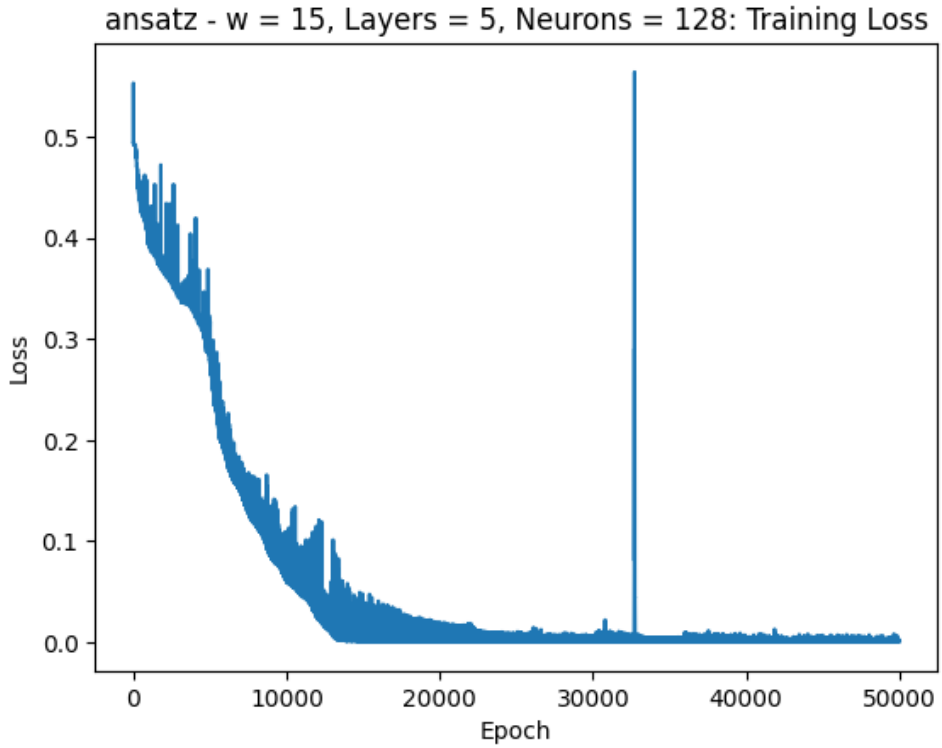

**Wykres 13. Wykres funkcji anastaz $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$ dla $\omega = 15$, 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.3.1.2. Wykres funkcji błędu




**Wykres 14. Wykres funkcji anastaz *błędu* dla $\omega = 15$, 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.3.1.3. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok

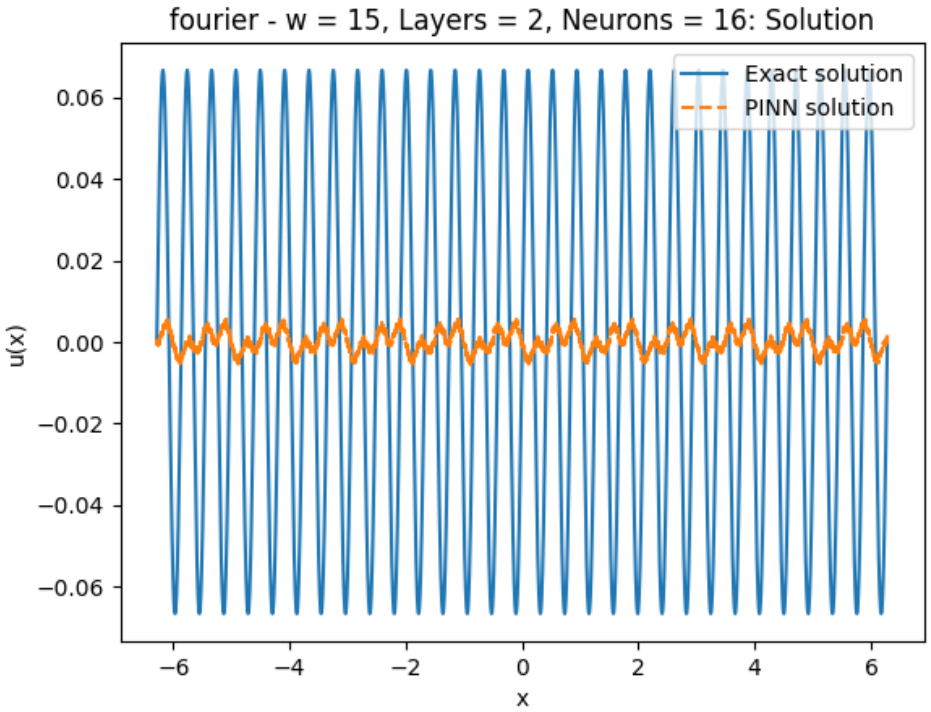



**Wykres 15. Wykres funkcij kosztu dla $\omega = 15$, 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

## 4.4. Wykres w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera

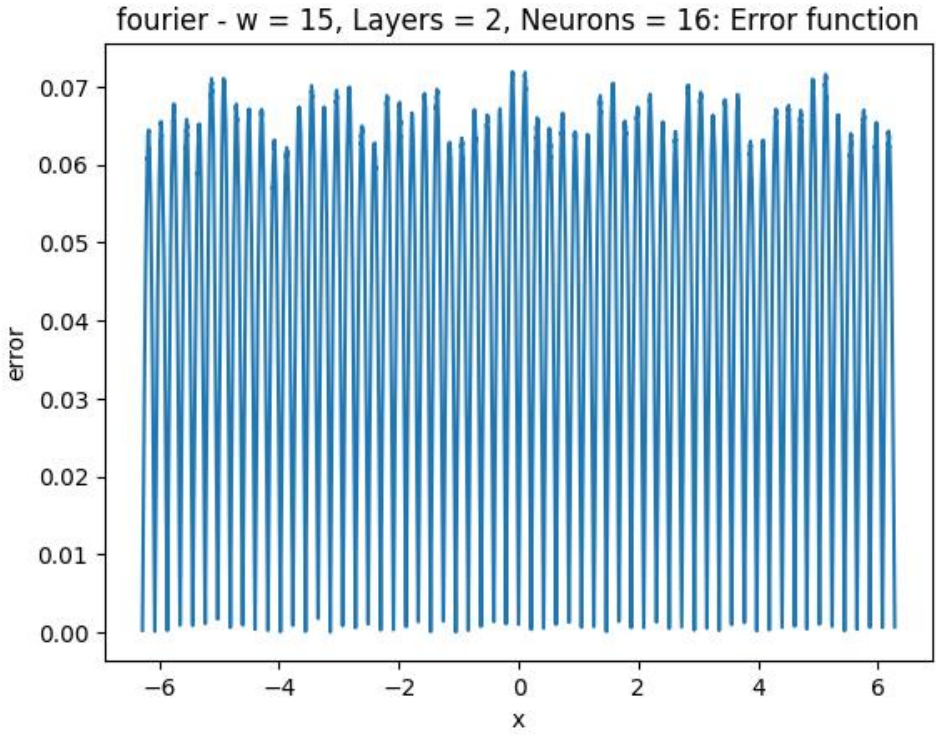
### 4.4.1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie, $\omega = 15$

#### 4.4.1.1. Wykres funkcji $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$



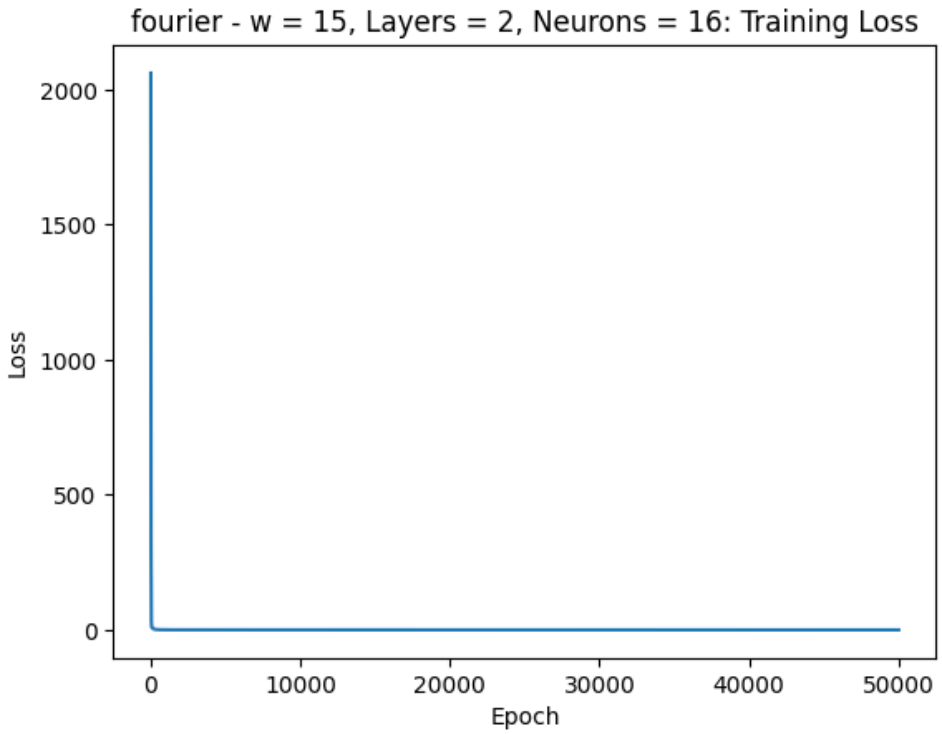

**Wykres 16. Wykres funkcji fouriera $u(x)$, wraz z $\hat{u}(x)$ dla $\omega = 15$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

#### 4.4.1.2. Wykres funkcji błędu




**Wykres 17. Wykres funkcji błędu dla $\omega = 15$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

4.4.1.3. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok




**Wykres 18. Wykres funkcji fouriera $kosztu$ dla $\omega = 15$, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

5. Wnioski
   Porównując wszystkie przypadki najlepiej sobie radził przypadek $\omega = 1$, dla 2 warstw ukrytych, 16 neuronów w każdej warstwie, ponieważ wykres funkcji prawdziwej i funkcji znalezionej dla tych parametrów idealnie się pokrywał z funkcją co jest widoczne na wykresie nr 1.

   Inne przypadki też radziły sobie dobrze kolejnym który wręcz wszystko pokrywał był przypadek $\omega = 15$ dla 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie. Ten przypadek chociaż poradził sobie wyśmienicie to jego wadą było to że ten przypadek był bardzo kosztowny obliczeniowo – wynik można zobaczyć na wykresie nr 10.

   Kolejnym przypadkiem, który poradził sobie bardzo dobrze był ten w którym przyjęto za szukany rozwiązanie wzór: $\hat{u}(x;\theta) = \tanh(\omega x) * NN(x;\theta)$. Wynik można zobaczyć na wykresie nr 13.

   Wykres, w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera poradził sobie dobrze choć mógł lepiej, widać to na wykresie nr. 16.

   Ogólnie rzecz biorąc warto stosować pierwszą warstwę z cechami Fourierowskimi, ponieważ mimo że nie osiągnęła idealnych wyników, to wykazała się dobrą skutecznością. Może to być szczególnie użyteczne w zadaniach przetwarzania sygnałów, gdzie cechy Fourierowskie pomagają w ujawnianiu istotnych wzorców częstotliwościowych. Jednakże, jeśli dostępne są inne metody, które zapewniają lepsze pokrycie funkcji prawdziwej, warto je również rozważyć.

   Na dobrą sprawę również warto stosować ANSH, ponieważ może znacząco poprawić wydajność obliczeniową i dokładność sieci neuronowych w zadaniach klasyfikacji i regresji, zwłaszcza w wysokowymiarowych przestrzeniach.

   Ostateczny wybór metody zależy od specyfiki problemu, nad którym pracujemy. W niektórych przypadkach można również rozważyć kombinację obu metod, aby maksymalnie wykorzystać ich zalety.

6. Bibliografia
   Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz
   Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

7. Dodatkowe informacje
   Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku ex1.ipynb