Artur Gęsiarz

Marzec 9, 2024

Laboratorium nr 1

MOwNiT – Analiza Błędów

1. Treść zadań
   1. Obliczyć przybliżoną wartość pochodnej funkcji, używając wzoru

Sprawdzić działanie programu dla funkcji oraz dla .   
Wyznaczyć błąd, porównując otrzymaną wartość numerycznej pochodnej z prawdziwą wartością.   
Pomocna będzie tożsamość

Na wspólnym rysunku przedstawić wykresy wartości bezwzględnej błędu metody, błędu numerycznego oraz błędu obliczeniowego w zależności od h dla Użyć skali logarytmicznej na obu osiach. Odpowiedzieć na pytanie czy wykres wartości bezwzględnej błędu obliczeniowego posiada minimum.

Porównać wyznaczoną wartość z wartością otrzymaną ze wzoru  
 , gdzie .

Powtórzyć ćwiczenie używając wzoru różnic centralnych  
 .   
Porównać wyznaczoną wartość z wartością otrzymaną ze wzoru , gdzie

* 1. Napisać program generujący pierwsze wyrazów ciągu zdefiniowanego równaniem różnicowym:  
       
      ,  
      , .  
       
     Wykonać obliczenia:   
     • używając pojedynczej precyzji oraz przyjmując n = 225

• używając podwójnej precyzji oraz przyjmując n = 60

• używając reprezentacji z biblioteki fractions oraz przyjmując n = 225.  
  
Narysować wykres wartości ciągu w zależności od k. Użyć skali logarytmicznej na osi y. Następnie narysować wykres przedstawiający wartość bezwzględną błędu względnego w zależności od k.

Dokładne rozwiązanie równania różnicowego wynosi:  
 ,   
  
Odpowiedzieć na pytanie czy otrzymany wykres zachowuje się w ten sposób?

1. Rozwiązanie zadań
   1. Rozwiązanie zadania pierwszego:
      1. Implementacje pomocniczych funkcji:

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Implementacja funkcji przybliżających pochodne:  
       Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    2. Implementacja funkcji obliczającej odpowiednio błąd numeryczny, metody oraz obliczeniowy:  
         
       Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu

       Opis wygenerowany automatycznie
    3. Wyznaczanie błędów numerycznych, metody oraz obliczeniowych odpowiednio dla , gdzie wykorzystując funkcje zaimplementowane powyżej.  
       1. Przybliżając funkcje pochodna tangensa, funkcją: Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

          Opis wygenerowany automatycznie
       2. Przybliżając funkcje pochodna tangensa, funkcją:   
             
            
          Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

          Opis wygenerowany automatycznie
    4. Implementacja funkcji do rysowania wykresów  
         
       Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
  1. Rozwiązanie zadania drugiego:
     1. Implementacja pomocniczych funkcji:  
          
        Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

        Opis wygenerowany automatycznie
     2. Implementacja funkcji reprezentującej faktyczną wartość ciągu  
          
        
     3. Implementacja funkcji do rysowania wykresu, porównującego działanie trzech funkcji z funkcją dającą prawidłowe wyniki  
        Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

        Opis wygenerowany automatycznie
     4. Implementacja funkcji do rysowania wykresu, porównującego błędy bezwzględne otrzymane z trzech funkcji z różnymi precyzjami  
        Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

        Opis wygenerowany automatycznie

1. Wykresy
   1. Wykresy do zadania pierwszego:  
      Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

      Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 1. Wykres opisujący poszczególne błędy w stosunku do h dla pierwszej metody**

Obraz zawierający tekst, linia, diagram, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Wykres opisujący poszczególne błędy w stosunku do h dla drugiej metody**

* 1. Wykresy do zadania drugiego:  
     Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

     Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Wykres opisujący wynik w zależności od trzech funkcji   
o różnych precyzjach z prawdziwą funkcją**

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4. Wykres opisujący błąd bezwzględny względem trzech funkcji   
o różnych precyzjach**

1. Tabele
   1. Tabele dla zadania pierwszego
      1. Tabela opisująca błąd obliczeniowy w stosunku do h dla pierwszej metody:

|  |  |
| --- | --- |
| Wartość h | Błąd bezwzględny |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Tabela 1.**

* + 1. Tabela opisująca błąd obliczeniowy w stosunku do h dla drugiej metody:

|  |  |
| --- | --- |
| Wartość h | Błąd bezwzględny |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Tabela 2.**

* 1. Tabele dla zadania drugiego:
     1. Tabela wyników dla każdej z trzech funkcji o różnych precyzjach w porównaniu do wyników funkcji rzeczywistej

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Single Precision function | Double precision function | Fraction precision function | Exact function |
| 20 |  |  |  |  |
| 40 |  |  |  |  |
| 60 |  |  |  |  |
| 80 |  |  |  |  |
| 100 |  |  |  |  |
| 120 |  |  |  |  |
| 140 |  |  |  |  |
| 160 |  |  |  |  |
| 180 |  |  |  |  |
| 200 |  |  |  |  |
| 220 |  |  |  |  |

**Tabela 3.**

* + 1. Tabela wyników dla każdej z trzech funkcji porównująca błąd bezwzględny

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| k | Single Precision function | Double precision function | Fraction precision function |
| 20 |  |  |  |
| 40 |  |  |  |
| 60 |  |  |  |
| 80 |  |  |  |
| 100 |  |  |  |

**Tabela 4.**

1. Wnioski
   1. Wnioski dla pierwszego zadania:

Analizując wykres dla pierwszej metody (**Wykres 1.)** możemy zauważyć, że wykres błędu obliczeniowego posiada minimum lokalne wynoszące **,** w punkcie a natomiast wynosi **.** Wyniki te różnią się o

Za to analizując wykres dla drugiej metody **(Wykres 2.)** możemy zauważyć, że wykres błędu obliczeniowego posiada minimum lokalne wynoszące **,** w punkcie **,** a wynosi **.** Wyniki w tym przypadku różnią się o **.**

Jednak porównując te dwa wykresy **(Wykres 1., oraz Wykres 2.)** oraz odpowiadające im tabele wynikowe (**Tabela 1., Tabela 2.)** możemy zauważyć ze metoda druga jest znaczenie lepszą metodą obliczeniową. Jest to lepsza metoda, ponieważ otrzymujemy znacznie mniejszy błąd obliczeniowy, oraz minimum lokalne jest umieszczone znacznie niżej niż jest to w przypadku pierwszej metody – czyli druga metoda posiada znacznie mniejszy błąd obliczeniowy niż pierwsza.

* 1. Wnioski dla drugiego zadania:

Analizując wykres porównujący wszystkie 3 funkcje wyliczające tak naprawdę to samo, ale z różną precyzją porównanie z prawdziwym rozwiązaniem (**Wykres 3),** możemy zauważyć ze funkcja wykorzystująca precyzje z klasy ***Fraction,*** radzi sobie najlepiej, ponieważ pokrywa ona znaczna część prawdziwej funkcji, niż jak to jest w przypadku reszty funkcji. Dodatkowo na tym wykresie jest widoczny znaczy nagły spadek w dół funkcji wykorzystującej najmniejsza precyzje co prowadzi do późniejszych złych wyników.  
  
Analizując dodatkowo wykres porównujący błędy, możemy również zauważyć tendencje funkcji wykorzystującej precyzje ***Fraction*** do największego spadku to znaczy ze jest najlepsza, a kiedy patrzymy na pozostałe funkcje o dziwo widzimy ze są one rosnące, a nie malejące. Mówi to nam ze, czym większe obliczamy wyrazy tym większy błąd otrzymujemy.   
Kiedy spojrzymy na tabele przechowującej dokładne wyniki **(Tabela 3**. oraz **Tabela 4),** jest bardzo dobrze widoczne niedokładność funkcji wykorzystującej precyzje float32 jest to dla setnego wyrazu aż błąd , kiedy to dla funkcji wykorzystującej precyzje ***Fraction*** jest to .

* 1. Wnioski ogólne

Dlaczego klasa Fraction aż tak dobrze sobie radzi? - dzieje się tak ponieważ ona przechowuje liczby w postaci ułamków, co eliminuje błędy związane z reprezentacją liczb w formacie zmiennoprzecinkowym.

Liczby zmiennoprzecinkowe mają skończoną precyzję, niektóre operacje arytmetyczne mogą prowadzić do błędów zaokrąglenia, które się akumulują i prowadzą do niedokładnych wyników.

1. Bibliografia

*Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz  
Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta*

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązania obu tych zadań z dokładnym opisie znajdują się odpowiednio w plikach ex1.ipynb oraz ex2.ipynb.