Artur Gęsiarz

Marzec 22, 2024

Laboratorium nr 3

MOwNiT – Interpolacja

1. Treść zadania
   1. Populacja Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat przedstawiała się następująco

|  |  |
| --- | --- |
| Rok | Populacja |
| 1900 | 76212168 |
| 1910 | 92228496 |
| 1920 | 106021537 |
| 1930 | 123202624 |
| 1940 | 132164569 |
| 1950 | 151325798 |
| 1960 | 179323175 |
| 1970 | 203302031 |
| 1980 | 226542199 |

Istnieje dokładnie jeden wielomian ósmego stopnia, który interpoluje po- wyższe dziewięć punktów, natomiast sam wielomian może być reprezentować na różne sposoby. Rozważamy następujące zbiory funkcji bazowych φj(t), j = 1,...,9:

1. Dla każdego z czterech zbiorów funkcji bazowych utworze macierz Vandermonde’a.
2. Obliczę współczynnik uwarunkowania każdej z powyższch macierzy
3. Znajdę współczynniki wielomianu interpolacyjnego dla danych
4. Dokonam ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównam otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990, wynoszącą 248 709 873.
5. Wyznaczę wielomian interpolacyjny Lagrange’a na podstawie 9 węzłów interpolacji podanych w zadaniu. Obliczę wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.
6. Wyznacz wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie tych samych węzłów interpolacji i oblicz wartości wielomianu w odstępach jednorocznych.
7. Zaokrągle dane podane w tabeli do jednego miliona. Na podstawie takich danych wyznaczę wielomian interpolacyjny ósmego stopnia, używając najlepiej uwarunkowanej bazy z podpunktu (c). Porównam wyznaczone współczynniki z współczynnikami obliczonymi w podpunkcie (c).
8. Rozwiązanie zadania
   1. Zapisuje jako słownik populacje Stanów Zjednoczonych na przestrzeni lat

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wyznaczenie wszystkich podanych bazowych czterech funkcji dla j =1,..9

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Implementacja funkcji Vandermonde

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wyznaczam dla każdego ze zbiorów funkcji bazowych macierz Vandermonde

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wyznaczenie współczynnika uwarunkowania każdej z powyższych macierzy

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Używając najlepiej uwarunkowanej bazy wielomianów, znajduję współczynniki wielomianu interpolacyjnego



Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Funkcje do rysowanie wykresu wielomianu interpolacyjnego

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Ekstrapolacja wielomianu do roku 1990 z prawdziwą wartością

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wielomian interpolacyjny Lagrane’a

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wielomian interpolacyjny Newtona

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, oprogramowanie

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wielomian interpolacyjny z zaokrąglonymi danymi do miliona

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Ekstrapolacja wielomianu przybliżonego do roku 1990 z prawdziwą wartością

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

1. Wykresy
   1. Wykres wielomianu interpolacyjnego

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 1. Wykres przedstawiający wielomian interpolacyjny**

* 1. Wykres wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Wykres przestawiający wielomian interpolacyjny Lagrange’a wraz z dodatkowym punktem**

* 1. Wykres wielomianu interpolacyjnego Newtona

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Wykres przedstawiający wielomian interpolacyjny Newtona wraz z dodatkowym punktem**

* 1. Wykres wielomianu interpolacyjnego z zaokrąglonymi danymi do miliona

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 4. Wykres przedstawiający wielomian interpolacyjny z zaokrąglonymi danymi

1. Tabele
   1. Współczynniki uwarunkowania każdej z wyznaczonej macierzy Vandermone’a

|  |  |
| --- | --- |
| Macierz | Współczynnik uwarunkowania macierzy |
| Korzystająca\* z pierwszej funkcji bazowej |  |
| Korzystająca\* z drugiej funkcji bazowej |  |
| Korzystająca\* z trzeciej funkcji bazowej |  |
| Korzystająca\* z czwartej funkcji bazowej |  |

* 1. Porównanie ekstrapolowanych wielomianów dla roku 1990

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Wielomian | Ekstrapolowania populacja w roku 1990: | Prawdziwa populacja w 1990: | Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990: |
| Niezaokrąglony\* |  |  |  |
| Zaokrąglony\* |  |  |  |

* 1. Współczynniki wielomianów interpolacyjnych:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Wielomian | Wsp. 1. | Wsp. 2. | Wsp. 3. | Wsp. 4. | Wsp. 5. | Wsp. 6. | Wsp. 7. | Wsp. 8. | Wsp. 9. |
| Niezaokrąglony\* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Zaokrąglony\* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

*\*poprzez „zaokrąglony” – mam na myśli wielomian, który jest utworzony poprzez wartości populacji Stanów Zjednoczonych, ale z zaokrągleniem do miliona*

*\*poprzez „niezaokrąglony” – mam na myśli zwykłe dane*

*\*poprzez „korzystająca z … funkcji bazowej” – mam na myśli macierz Vandermone’a która jest utworzona z … funkcji bazowej*

1. Wnioski

Podsumowując, możemy zauważyć, że, wybór odpowiedniej bazy funkcji bazowych ma istotny wpływ na jakość interpolacji. W zadaniu podano cztery funkcje bazowe, a wyniki pokazały, że wybór najlepiej uwarunkowanej bazy może znacząco wpłynąć na dokładność interpolacji.

Współczynniki wielomianu interpolacyjnego różnią się w zależności od bazy funkcji bazowych oraz danych wejściowych. Współczynniki wielomianu interpolacyjnego z zaokrąglonymi danymi mogą różnić się od tych uzyskanych bez zaokrąglania danych wejściowych, co może wpłynąć na dokładność wyników interpolacji.

Interpolacja Lagrange'a i Newtona to dwa popularne podejścia do interpolacji wielomianowej. Oba podejścia mogą być skutecznie wykorzystywane do interpolacji danych, ale mogą różnić się efektywnością i stabilnością numeryczną w zależności od konkretnych przypadków.

Warto zauważyć, że wyniki interpolacji mogą być wrażliwe na skrajne wartości danych wejściowych oraz na stopień wielomianu interpolacyjnego. Zbyt wysoki stopień wielomianu może prowadzić do zjawiska nadmiernego dopasowania, co może prowadzić do nieprawidłowych wyników dla danych spoza zakresu interpolacji.

W przypadku ekstrapolacji danych zaokrąglonych, wartość ekstrapolowanej populacji w roku 1990 wynosiła około 109 mln, podczas gdy prawdziwa populacja w tym roku wynosiła 248 709 873. Błąd względny ekstrapolacji dla roku 1990 wynosił około 56.2%.

Dla danych wejściowych niezaokrąglonych, wynik ekstrapolacji może jest inny. Jest to ważne zjawisko, ponieważ zaokrąglenie danych może wpłynąć na obliczenia i prowadzić do różnych wyników w porównaniu z danymi niezaokrąglonymi.

Zaokrąglenie danych może prowadzić do utraty dokładności i zwiększenia błędu w wynikach interpolacji i ekstrapolacji. Warto zauważyć, że im większa różnica między wartościami rzeczywistymi a wynikami ekstrapolacji, tym większy wpływ może mieć zaokrąglenie danych na wyniki.

W praktyce, dla zadań wymagających wysokiej dokładności, należy unikać lub minimalizować zaokrąglanie danych, aby uzyskać jak najbardziej dokładne wyniki interpolacji i ekstrapolacji.

Podsumowując, odpowiedni wybór metody interpolacji i bazy funkcji bazowych jest kluczowy dla uzyskania dokładnych i stabilnych wyników interpolacji. W praktyce warto eksperymentować z różnymi metodami i parametrami, aby znaleźć optymalne rozwiązanie dla konkretnego problemu. Wnioski te podkreślają znaczenie uwzględnienia precyzji danych oraz dokładnego zarządzania nimi podczas wykonywania operacji numerycznych, zwłaszcza w przypadku zadań, gdzie dokładność jest kluczowa.

1. Bibliografia

Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz  
Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku ex1.pynb