Artur Gęsiarz

Marzec 23, 2024

Laboratorium nr 4

MOwNiT – Efekt Rungego

1. Treść zadania
   1. Wyznaczę wielomiany interpolujące funkcje

, na przedziale [-1, 1]

, na przedziale [0, 2],

używając:

- wielomianów Lagrange’a z równoodległymi węzłami xj = x0 + jh, j =

0, 1, . . . , n, gdzie h = (xn − x0)/n

- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami xj = x0+jh, j =

0, 1, . . . , n, gdzie h = (xn − x0)/n

- wielomianów Lagrange’a z węzłami Czebyszewa:

1. Dla funkcji Rungego, f1(x), z n = 12 węzłami interpolacji przedstawie na wspólnym wykresie funkcję f1(x) oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonam próbkowanie funkcji f1(x) i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w dla węzłów Czebyszewa).
2. Wykonam interpolację funkcji f1(x) i f2(x) z n = 4, 5, ..., 50 węzłami interpolacji, używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadze na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórze dwa rysunki, jeden dla f1(x), drugi dla f2(x). Na każdym rysunku przedstawie razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n, dla każdej z trzech metod interpolacji.
3. Rozwiązanie zadania
   1. Implementacja funkcji Rungego

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Węzły interpolacji równoodległe



* 1. Węzły interpolacji Czebyszewa

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

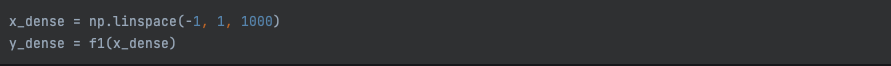
Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Metoda Lagrange'a

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Oprogramowanie multimedialne, oprogramowanie

Opis wygenerowany automatycznie

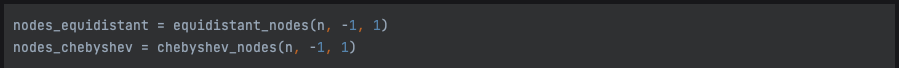
* 1. Próbkowanie funkcji



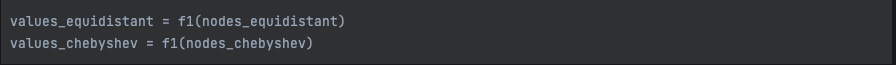
* 1. Liczba węzłów interpolacji



* 1. Węzły interpolacji



* 1. Wartościami funkcji w węzłach interpolacji



* 1. Interpolacja Lagrange'a



* 1. Sortowanie węzłów

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Interpolacja funkcji sklejanych



* 1. Wykres ze wszystkim

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a z równoodległymi węzłami

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z funkcją sklejoną z równoległymi węzłami

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a z węzłami Czebyszywa

Obraz zawierający tekst, Czcionka, zrzut ekranu

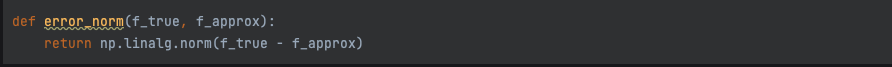
Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z funkcją sklejoną z węzłami Czebyszywa

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Funkcja obliczająca normę błędu



* 1. Interpolacja i obliczanie błędów

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Zakres liczby węzłow interpolacji

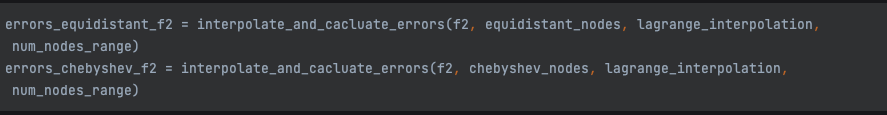


* 1. Obliczanie błędów dla f\_1(x)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Obliczanie błędow dla f\_2(x)



* 1. Wykresy błędów

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

1. Wykresy
   1. Funkcja Rungego razem z wielomianami interpolacji i funkcją sklejaną

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 1. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem ze wszystkimi wielomianami**

* 1. Funkcja Rungego razem z funkcja sklejaną z równoodległymi węzłami

Obraz zawierający linia, Wykres, diagram, tekst

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem z funkcją sklejaną z równoodległymi węzłami**

* 1. Funkcja Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami równoodległymi

Obraz zawierający Wykres, linia, diagram, tekst

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Wykres przedstawia prównanie funkcji Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami równodległymi**

* 1. Funkcja Rungego razem z funkcja sklejaną z węzłami Czebyszewa

Obraz zawierający Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4.** **Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem z funkcją sklejaną z węzłami Czebyszewa**

* 1. Funkcja Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami Czebyszewa

Obraz zawierający Wykres, linia, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 5.** **Wykres przedstawia prównanie funkcji Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami Czebyszewa**

* 1. Wykres normy wektora błędów
     1. Wykres błędu funkcji 1 dla interpolacji lagange z węzłami równoodległymi

Obraz zawierający tekst, linia, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 6. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami równoodległymi dla funkcji 1

* + 1. Wykres błędu funkcji 1 dla interpolacji lagrange z węzłami czebyszewa

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 7. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami czebyszewa dla funkcji 1

* + 1. Wykres błędu funkcji 1 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami równoodległymi

Obraz zawierający tekst, linia, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 8. Wykres normy wektora błędów dla kubcznej funkcji sklejanej z wezlami równoodległymi dla funkcji 1

* + 1. Wykres błędu funkcji 1 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami czebyszewa

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 9. Wykres normy wektora błędów dla kubcznej funkcji sklejanej z wezlami czebyszewa dla funkcji 1

* + 1. Wykres błędu funkcji 2 dla interpolacji lagange z węzłami równoodległymi

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 10. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami równoodległymi dla funkcji 2

* + 1. Wykres błędu funkcji 2 dla interpolacji lagrange z węzłami czebyszewa

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 11. Wykres normy wektora błędów dla interpolacji lagrange z wezlami czebyszewa dla funkcji 2

* + 1. Wykres błędu funkcji 2 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami równoodległymi

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 12. Wykres normy wektora błędów dla kubcznej funkcji sklejanej z wezlami równoodległymi dla funkcji 2

* + 1. Wykres błędu funkcji 1 dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami czebyszewa

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 13. Wykres normy wektora błędów dla kubicznej funkcji sklejanej z węzłami czebyszewa dla funkcij

1. Wnioski

Metoda funkcji sklejanych wydaje się dawać lepsze wyniki niż interpolacja Lagrange'a, ponieważ funkcje sklejane są w stanie lepiej dostosować się do bardziej złożonych kształtów funkcji. Interpolacja Lagrange'a, zwłaszcza z równoodległymi węzłami, może prowadzić do efektu Rungego, co oznacza, że przy zbyt dużym stopniu wielomianu interpolacyjnego mogą wystąpić oscylacje w okolicach krańców przedziału.

W przypadku obu funkcji równoodległe węzły interpolacji wydają się być mniej skuteczne niż węzły Czebyszewa. Weźmy pod uwagę, że w przypadku interpolacji z równoodległymi węzłami, równomierne próbkowanie funkcji może prowadzić do niedokładnych wyników interpolacji, zwłaszcza dla funkcji o złożonym kształcie.

Podsumowując, węzły Czebyszewa są preferowanym wyborem dla interpolacji, szczególnie dla funkcji o złożonym kształcie. Dzięki temu, że węzły Czebyszewa są gęściej rozmieszczone w obszarach, gdzie funkcja ma duże zmiany, można uzyskać lepszą jakość interpolacji w porównaniu do równoodległych węzłów interpolacji. Jednakże, należy pamiętać, że w niektórych przypadkach, zwłaszcza dla funkcji o regularnym kształcie, interpolacja z równoodległymi węzłami może być równie skuteczna, a nawet lepsza niż interpolacja z węzłami Czebyszewa. W takich przypadkach kluczowe jest odpowiednie dostosowanie wyboru węzłów interpolacji do kształtu funkcji, aby uzyskać dokładne wyniki interpolacji.

1. Bibliografia

Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz  
Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku ex1.pynb