Artur Gęsiarz

Marzec 23, 2024

Laboratorium nr 4

MOwNiT – Efekt Rungego

1. Treść zadania
   1. Wyznaczę wielomiany interpolujące funkcje

, na przedziale [-1, 1]

, na przedziale [0, 2],

używając:

- wielomianów Lagrange’a z równoodległymi węzłami xj = x0 + jh, j =

0, 1, . . . , n, gdzie h = (xn − x0)/n

- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami xj = x0+jh, j =

0, 1, . . . , n, gdzie h = (xn − x0)/n

- wielomianów Lagrange’a z węzłami Czebyszewa:

1. Dla funkcji Rungego, f1(x), z n = 12 węzłami interpolacji przedstawie na wspólnym wykresie funkcję f1(x) oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonam próbkowanie funkcji f1(x) i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w dla węzłów Czebyszewa).
2. Wykonam interpolację funkcji f1(x) i f2(x) z n = 4, 5, ..., 50 węzłami interpolacji, używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji, wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadze na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórze dwa rysunki, jeden dla f1(x), drugi dla f2(x). Na każdym rysunku przedstawie razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji, n, dla każdej z trzech metod interpolacji.
3. Rozwiązanie zadania
   1. Implementacja funkcji Rungego

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Węzły interpolacji równoodległe



* 1. Węzły interpolacji Czebyszewa

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

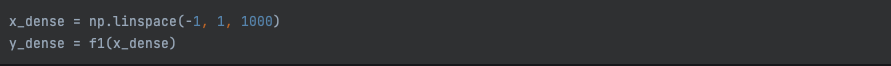
Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Metoda Lagrange'a

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Oprogramowanie multimedialne, oprogramowanie

Opis wygenerowany automatycznie

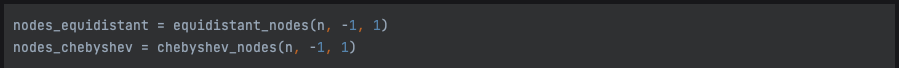
* 1. Próbkowanie funkcji



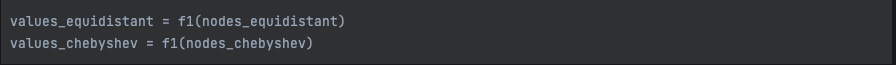
* 1. Liczba węzłów interpolacji



* 1. Węzły interpolacji



* 1. Wartościami funkcji w węzłach interpolacji



* 1. Interpolacja Lagrange'a



* 1. Sortowanie węzłów

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Interpolacja funkcji sklejanych



* 1. Wykres ze wszystkim

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a z równoodległymi węzłami

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z funkcją sklejoną z równoległymi węzłami

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a z węzłami Czebyszywa

Obraz zawierający tekst, Czcionka, zrzut ekranu

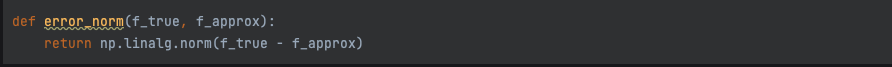
Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Wykres porównujący f\_1(x) z funkcją sklejoną z węzłami Czebyszywa

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Funkcja obliczająca normę błędu



* 1. Interpolacja i obliczanie błędów

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Zakres liczby węzłow interpolacji

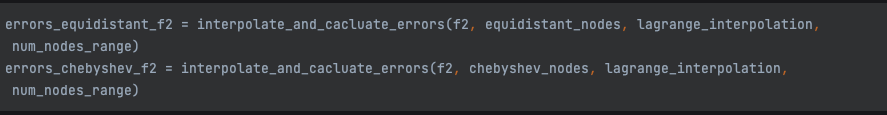


* 1. Obliczanie błędów dla f\_1(x)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* 1. Obliczanie błędow dla f\_2(x)



* 1. Wykresy błędów

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

1. Wykresy
   1. Funkcja Rungego razem z wielomianami interpolacji i funkcją sklejaną

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 1. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem ze wszystkimi wielomianami**

* 1. Funkcja Rungego razem z funkcja sklejaną z równoodległymi węzłami

Obraz zawierający Wykres, linia, diagram, tekst

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem z funkcją sklejaną z równoodległymi węzłami**

* 1. Funkcja Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami równoodległymi

Obraz zawierający linia, Wykres, diagram, tekst

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Wykres przedstawia prównanie funkcji Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami równodległymi**

* 1. Funkcja Rungego razem z funkcja sklejaną z węzłami Czebyszewa

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4.** **Wykres przedstawia porównanie funkcji Rungego razem z funkcją sklejaną z węzłami Czebyszewa**

* 1. Funkcja Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami Czebyszewa

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 5.** **Wykres przedstawia prównanie funkcji Rungego razem z wielomianem Lagrange’a z węzłami Czebyszewa**

* 1. Wykres normy wektora błędów

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 6. Wykresy norma wektora błędów

1. Wnioski

Dla obu funkcji , metoda funkcji sklejanych wydaje się dawać lepsze wyniki niż metoda interpolacji Lagrange'a. Wynika to z tego, że funkcje sklejane są w stanie dostosować się do bardziej złożonych kształtów funkcji, podczas gdy interpolacja Lagrange'a może prowadzić do efektu Rungego, szczególnie gdy używamy równoodległych węzłów interpolacji.

W przypadku obu funkcji , równoodległe węzły interpolacji wydają się być równie skuteczne, a nawet lepsze niż węzły Czebyszewa. Równoodległe węzły pozwalają na równomierne próbkowanie funkcji, co prowadzi do dobrze zrównoważonych wyników interpolacji. Należy jednak zauważyć, że dla tych funkcji, wzrost błędu może wystąpić po przekroczeniu pewnej liczby węzłów interpolacji, szczególnie dla węzłów Czebyszewa w obu funkcjach. Dla wzrost ten jest widoczny od około 48 węzła znacznie. Dla , także jest widoczny wzrost znacznie łagodniejszy od , ale za to zaczynający się do 40 węzła. Ogólnie rzecz biorąc do 40 węzła obje funkcje radzą sobie świetnie oraz obie metody.

Interpolacja z równoodległymi węzłami interpolacji może być równie skuteczna, a nawet lepsza niż interpolacja z węzłami Czebyszewa. Jest to szczególnie prawdziwe w przypadku funkcji o złożonym kształcie, gdzie równomierne próbkowanie funkcji jest kluczowe dla uzyskania dokładnych wyników interpolacji.

1. Bibliografia

Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz  
Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku ex1.pynb