Artur Gęsiarz,

Kwiecień 13, 2024

Laboratorium nr 6

MOwNiT – Kwadratury

1. Treść zadania
   1. Zadanie pierwsze

Wiadomo, że

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π po- przez całkowanie numeryczne.

Obliczę wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Na przedziale całkowania rozmieszczę równoodległych węzłów. W kolejnych próbach m wzrasta o 1, tzn. między każde dwa sąsiednie węzły dodawany jest nowy węzeł, a ich zagęszczenie zwiększa się dwukrotnie. Przyjmiję zakres wartości m od 1 do 25.

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, n + 1 (gdzie n = 1/h, z krokiem h). Wyniki przedstaw na wspólnym wykresie, używając skali logarytmicznej na obu osiach.

Czy istnieje pewna wartość, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury? Porównaj wartość h\_min, odpowiadającą minimum wartości bezwzględnej błędu względnego, z wartością wyznaczoną w laboratorium 1.

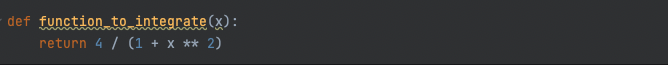
Dla każdej z użytych metod porównaj empiryczny rząd zbieżności z rząd zbieżności przewidywanym przez teorię. Aby wyniki miały sens, do obliczenia rzędu empirycznego użyj wartości h z zakresu, w którym błąd metody przeważa nad błędem numerycznym.

* 1. Zadanie drugie

Obliczę wartość całki

metodą Gaussa-Legendre’a. Narysuję wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, n + 1. Przyjmę na tyle duży zakres n, aby wykryć, kiedy błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody.

1. Rozwiązanie zadań
   1. Zadanie pierwsze
      1. Funkcja do całkowania

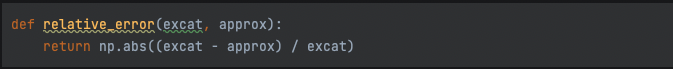


* + 1. Funkcja obliczająca wartość pi za pomocą całki

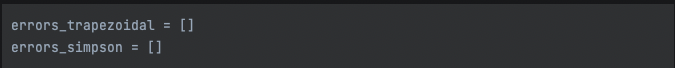
Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Funkcja obliczająca błąd względny



* + 1. Lista do przechowyuwania błędów względnych dla każdej z metod



* + 1. Przedział całkowania

Obraz zawierający zrzut ekranu, czarne

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Zakres wartości m



* + 1. Pętla po wartościach m

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Tworzenie wykresu

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, wyświetlacz

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Wyświetlanie danych

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, oprogramowanie

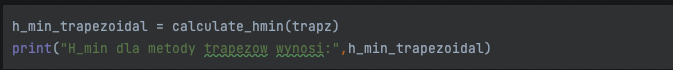
Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Obliczanie h\_min

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Obliczanie wartości poniżej której zmniejszenie h nie zmniejsza już błędu kwadratury dla metody trapezów



* + 1. Obliczanie wartości poniżej której zmniejszenie h nie zmniejsza już błędu kwadratury dla metody Simpsona



* + 1. Obliczenie błędu numerycznego dla danej metody i wartości h

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Obliczanie rzędu zbieżności

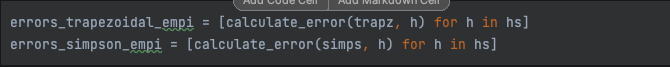
Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, oprogramowanie

Opis wygenerowany automatycznie

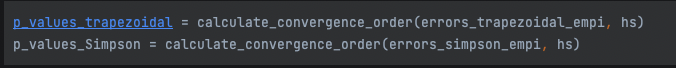
* + 1. Zakres wartości h



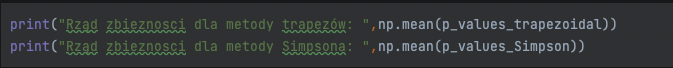
* + 1. Obliczanie błędów numerycznech dla każdej metody



* + 1. Obliczanie rzędu zbieżności dla każdej metody



* + 1. Wyświetlanie wyników



* 1. Zadanie drugie
     1. Implementacja metody Gaussa-Lengendre’a

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Obliczanie wartości dokładniej całki



* + 1. Lista przechowująca wartości bezwzględnych błędów względnych



* + 1. Obliczanie wartości całki i błędów dla różnych wartości n



Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Narysowanie wykresu

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

1. Wykresy
   1. Wykres błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji dla metody trapezów oraz metody Simpsona

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 1. Błąd względny w zależności od liczby ewaluacji dla metody trapezów oraz metody Simpsona**

* 1. Wykres błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji dla metody Gaussa-Legendre’a

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Błąd względny w zależności od liczby ewaluacji dla metody Gaussa-Legendre’a**

1. Tabele
   1. Tabela błędów względnych metody trapezów

|  |  |
| --- | --- |
| Wartość m | Wartość błędu względnego metody trapezów |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |
| 9 |  |
| 10 |  |
| 11 |  |
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |
| 16 |  |
| 17 |  |
| 18 |  |
| 19 |  |
| 20 |  |
| 21 |  |
| 22 |  |
| 23 |  |
| 24 |  |
| 25 |  |

Tabela 1. Tabela błędów względnych metody trapezów

* 1. Tabela błędów względnych metody Simpsona

|  |  |
| --- | --- |
| Wartość m | Wartość błędu względnego metody trapezów |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |
| 9 |  |
| 10 |  |
| 11 |  |
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |
| 16 |  |
| 17 |  |
| 18 |  |
| 19 |  |
| 20 |  |
| 21 |  |
| 22 |  |
| 23 |  |
| 24 |  |
| 25 |  |

Tabela 2. Tabela błędów względnych metody Simpsona

* 1. Tabela rzędu zbieżności metody trapezów oraz Simpsona

|  |  |
| --- | --- |
| Metoda | Rząd zbieżności |
| Trapezów |  |
| Simpsona |  |

**Tabela 3. Tabela rzędu zbieżności metody trapezów oraz Simpsona**

* 1. Tabela wartości, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury dla metody trapezów oraz Simpsona

|  |  |
| --- | --- |
| Metoda | H\_min |
| Trapezów |  |
| Simpsona |  |

**Tabela 4. Tabela wartości h\_min dla metody trapezów oraz Simpsona**

1. Wnioski

Empiryczny rząd zbieżności dla metody trapezów odczytana z **Tabela 3.** wynosi , co jest bardzo blisko oczekiwanego rzędu zbieżności równego . Wartość ta potwierdza teoretyczne założenia dotyczące rzędu zbieżności tej metody.

Empiryczny rząd zbieżności dla metody Simpsona odczytana z z **Tabela 3.** wynosi . Wynik ten wydaje się nieco niższy od oczekiwanego rzędu zbieżności równego 4. Może to wynikać z niedokładności obliczeń numerycznych lub innych czynników wpływających na dokładność wyniku.

Zarówno metoda trapezów, jak i metoda Simpsona są skutecznymi metodami całkowania numerycznego. Empiryczne rządy zbieżności dla obu metod są zgodne z teoretycznymi oczekiwaniami, co potwierdza ich poprawność i skuteczność. Minimalne wartości kroku h\_min​ dla obu metod są na akceptowalnym poziomie, co oznacza, że metody te są w stanie osiągnąć wysoką dokładność wyników dla dostatecznie małych wartości kroku h.

Wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej pokazuje, że błąd względny maleje wraz ze wzrostem liczby węzłów, co sugeruje, że metoda Gaussa-Legendre’a jest skuteczną metodą całkowania numerycznego.

1. Bibliografia

*Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz  
Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta*

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązanie obu zadań znajduje się odpowiednio w plikach ex1.ipynb oraz ex2.ipynb.