Artur Gęsiarz,

Czerwiec 14, 2024

Laboratorium nr 9

MOwNiT – Równania różniczkowe zwyczajne

1. Treść zadania
   1. Zadanie pierwsze

Przedstaw każde z ponizszych równan rózniczkowych zwyczajnych

jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-order system of

ODEs):

(a) równanie Van der Pol’a:

(b) równanie Blasiusa:

(c) II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

* 1. Zadanie drugie

Dane jest równanie rózniczkowe zwyczajne:

z warunkiem poczatkowym . Równanie rozwiazujemy numerycznie z

krokiem

(a) Analityczna stabilnosc. Wyjasnij, czy rozwiazania powyzszego równania sa

stabilne?

(b) Numeryczna stabilnosc. Wyjasnij, czy metoda Euler’a jest stabilna dla tego

równania z uzytym krokiem h?

(c) Oblicz numerycznie wartosci przyblizonego rozwiazania dla t = 0:5 metoda

Euler’a.

(d) Wyjasnij, czy niejawna metoda Euler’a jest stabilna dla tego równania z

uzytym krokiem h?

(e) Oblicz numerycznie wartosci przyblizonego rozwiazania dla t = 0:5 niejawna

metoda Euler’a.

* 1. Zadanie trzecie:

Model Kermack’a-McKendrick’a przebiegu epidemii w populacji

opisany jest układem równan rózniczkowych:

gdzie

S reprezentuje liczbe osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie,

I reprezentuje liczbe osób zainfekowanych i roznoszacych infekcje,

R reprezentuje liczbe osób ozdrowiałych.

Liczba N to liczba osób w populacji. Parametr beta reprezentuje współczynnik

zakaznosci (ang. transmission rate). Parametr gamma reprezentuje współczynnik wyzdrowień (ang. recovery rate). Wartosc 1/gamma reprezentuje sredni czas choroby.

Załozenia modelu:

* Przyrost liczby osób zakazonych jest proporcjonalny do liczby osób zakazonych

oraz do liczby osób podatnych.

* Przyrost liczby osób odppornych lub zmarłych jest wprost proporcjonalny

do liczby aktualnie chorych.

* Okres inkubacji choroby jest zaniedbywalnie krótki.
* Populacja jest wymieszana.

Jako wartosci poczatkowe ustal:

S(0) = 762; I(0) = 1; R(0) = 0.

Przyjmij tez N = S(0)+I(0)+R(0) = 763 oraz beta = 1. Zakładajac, ze sredni czas trwania grypy wynosi 1/gamma = 7 dni, przyjmij gamma = 1/7.

Całkujac od t = 0 do t = 14 z krokiem 0.2, rozwiaz powyzszy układ równan:

* jawna metoda Eulera
* niejawna metoda Eulera
* metoda Rungego-Kutty czwartego rzedu (RK4))

Wykonaj nastepujace wykresy:

* Dla kazdej metody przedstaw na wspólnym rysunku wykresy komponentów

rozwiazania (S, I, R) jako funkcje t (3 wykresy).

* Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy funkcji S(t)+I(t)+R(t) znalezione

przez kazda metode (1 wykres). Czy niezmiennik S(t)+I(t)+R(t) N jest zachowany?

Wiemy, ze liczba osób zakazonych w pewnej szkole kształtowała sie nastepujaco:

Dzien, t 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

Zakazeni, I 1 3 6 25 73 222 294 258 237 191 125 69 27 11 4

Wybierz jedna z powyzszych metod numerycznych i oszacuj prawdziwe wartosci

współczynników W tym celu wykonaj minimalizacje funkcji

kosztu. Jako funkcje kosztu wykorzystaj sume kwadratów reszt (ang. residual

sum of squares):

gdzie oznacza prawdziwa liczbe zakazonych, a oznacza liczbe zakazonych

wyznaczonych metoda numeryczna. Poniewaz nie znamy gradientu do

minimalizacji wykorzystaj metode Neldera-Meada, która nie wymaga informacji

o gradiencie. Powtórz obliczenia, tym razem jako funkcje kosztu wykorzystujac:

Ile wynosił współczynnik reprodukcji kazdym przypadku?

1. Rozwiązanie zadań
   1. Implementacja zadania pierwszego
      1. Równanie Van der Pol’aObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie
      2. Warunki początkowe
      3. Czas symulacji
      4. Rozwiązanie równania
      5. Wykres Van der Pol’aObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

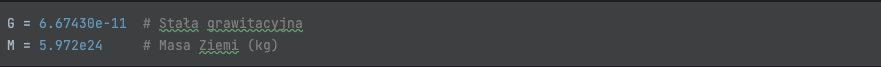
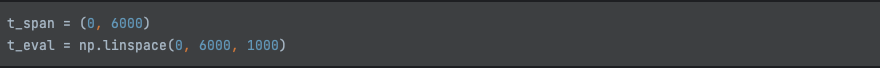
         Opis wygenerowany automatycznie
      6. Równanie BlasiusaObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie
      7. Warunki początkowe
      8. Czas symulacji
      9. Rozwiązanie równania
      10. Wykres Blasiusa

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciałObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    2. Stałe
    3. Warunki początkowe
    4. Czas symulacji
    5. Rozwiązanie równania
    6. Wykres II zasady dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciałObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
  1. Implementacja zadania drugiego
     1. Analityczna stabilność – wyjaśnienie, dlaczego rozwiązania równania w zadaniu drugim jest stabilne

Rozwiązanie analityczne równania różniczkowego można znaleźć, rozwiązując je jako równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

Dla równania:

Rozwiązaniem jest:

Z warunku początkowego

Analityczna stabilność oznacza, że jeśli zaburzymy początkowy warunek to rozwiązanie nie powinno zmieniać się gwałtownie. Ponieważ wykładnicza funkcja zawsze zmierza do zera, rozwiązanie jest stabilne dla każdej wartości Rozwiązania są stabilne, ponieważ dla

* + 1. Numeryczna stabilność – wyjaśnienie, dlaczego metoda jawna Euler’a nie jest stabilna

Stabilność numeryczna oznacza, że metoda numeryczna nie generuje rosnących błędów przy obliczeniach. Dla metody Eulera zastosowanej do równania z krokiem

Metoda Eulera:

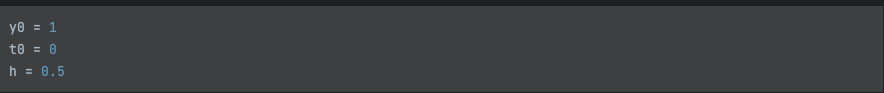
Podstawiając

Dla stabilności, wartość musi byc mniejsza niz 1:

Ponieważ metoda Eulera nie jest stabilna dla tego równania przy kroku

* + 1. Obliczenie numeryczne stabliności dla metody jawnej Euler’a
       1. Metoda Eulera



* + - 1. Warunki początkowe
      2. Obliczenie wartości przybliżonej dla 
    1. Numeryczna stabilność – wyjaśnienie, dlaczego metoda niejawna Eulera’ jest stabilna

Niejawna metoda Eulera:

Podstawiając

Dla stabilności, wartość musi byc mniejsze niz 1:

Ponieważ niejawna metoda Eulera jest stabilna dla tego równania przy kroku

* + 1. Obliczenie numeryczne stabilności dla metody niejawnej Euler’a
       1. Niejawna metoda Eulera
       2. Warunki początkowe
       3. Obliczenie wartości przybliżonej dla 
    2. Wnioski do zadania drugiego:

Wykazaliśmy matematycznie, że metoda jawna Eulera jest nie stabilna, a metoda niejawna jest stabilna. Dzięki obliczeniom można łatwo zauważyć rozbieżność wyników co potwierdza wcześniejsze obliczenia.

* 1. Implementacja zadania trzeciego
     1. Paramtery modelu
     2. Warunki początkoweObraz zawierający zrzut ekranu, Oprogramowanie multimedialne, Oprogramowanie graficzne

        Opis wygenerowany automatycznie
     3. Czas
     4. Funkcja opisująca model SIRObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

        Opis wygenerowany automatycznie
     5. Metoda jawna EuleraObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, oprogramowanie

        Opis wygenerowany automatycznie
     6. Metoda niejawna EuleraObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

        Opis wygenerowany automatycznie
     7. Metoda Rungego-Kutty czwartego rzęduObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka, oprogramowanie

        Opis wygenerowany automatycznie
     8. Początkowe wartości
     9. Rozwiązanie układu metodą jawną Eulera
     10. Rozwiązanie układu metodą niejawną Eulera
     11. Rozwiązanie układu metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu
     12. Wykresy komponentów rozwiązania (S,I,R) dla każdej metodyObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie

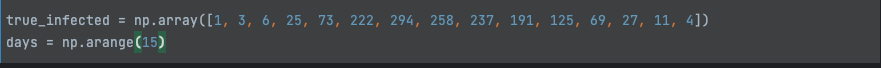
Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

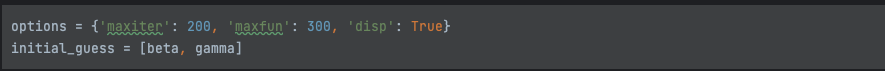
Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Wykresy S(t) + I(t) + R(t) dla każdej metodyObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    2. Prawdziwe dane zakażonych
    3. Funkcja kosztu – suma kwadratów resztObraz zawierający tekst, Czcionka, zrzut ekranu

       Opis wygenerowany automatycznie
    4. Funkcja kosztu – log-likelihoodObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    5. Minimalizacja funkcji kosztu



Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

1. Wykresy
   1. Wykresy dla zadania pierwszego
      1. Wykres Blasiusa

Obraz zawierający tekst, linia, zrzut ekranu, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 1. Równanie Blasiusa**

* + 1. Wykres Newtona

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, krąg, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Równanie Newtona**

* + 1. Wykres Van der Pole’a

Obraz zawierający Wykres, diagram, zrzut ekranu, linia

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Równanie Van der Pol’a**

* 1. Wykresy dla zadania trzeciego
     1. Wykres komponentu I(t)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4. Równanie komponentu I dla każdej metody**

* + 1. Wykres komponentu R(t)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4. Równanie komponentu R dla każdej metody**

* + 1. Wykres komponentu S(t)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4. Równanie komponentu S dla każdej metody**

* + 1. Wykres I(t) + R(t) + S(t)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 5. Suma S(t) + I(t) + R(t) dla każdej metody**

1. Wnioski

W zadaniu drugim kiedy sprawdzaliśmy matematycznie czy faktycznie metoda jawna Eulera jest stabilna dla tego przypadku wyszło nam, że nie jest podobnie jak w przypadku niejawnej ale tam wyszło że jest stabilna ta metoda, porównując ich wartości można od razu zobaczyć ze wyniki znacznie się różnią od siebie.

W zadaniu trzecim można zauważyć ze niezmiennik **sumy S(t) + I(t) + R(t)** zostaje zachowany z wykresu nr 5.

Stosując minimalizacje korzystając z funkcji kosztu , otrzymujemy mniejszy współczynnik reprodukcji wynoszący , za to wynoszą mniej więcej tyle samo dla obu funkcji kosztu

1. Bibliografia

*Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz*

*Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta*

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązanie wszystkich zadan znajduje się odpowiednio w plikach ex1.ipynb, ex2.ipynb, ex3.ipynb.