Artur Gęsiarz,

Czerwiec 14, 2024

Laboratorium nr. 10

MOwNiT – Równania różniczkowe – spectral bias

1. Treść zadań
   1. Zadanie pierwsze

Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

gdzie,

Warunek początkowy zdefiniowany jest następująco

Analityczna postać rozwiązania równania (1) z warunkiem początkowym (2)

jest następująca:

Rozwiąż powyższe zagadnienie początkowe (1,2). Do rozwiązania użyj sieci neuronowych

PINN (ang. Physics-informed Neural Network) [1]. Można wykorzystać

szablon w pytorch-u lub biblioteke DeepXDE [2].

Koszt rezydualny zdefiniowany jest nastepujaco:

gdzie N jest liczba punktów kolokacyjnych.

Koszt zwiazany z warunkiem poczatkowym przyjmuje postac:

Funkcja kosztu zdefiniowana jest nastepujaco:

Warstwa wejsciowa sieci posiada 1 neuron, reprezentujacy zmienna x, Warstwa

wyjsciowa takze posiada 1 neuron, reprezentujacy zmienna ^u(x). Uczenie trwa

przez 50 000 kroków algorytmem Adam ze stała uczenia równa 0.001. Jako funkcje

aktywacji przyjmij tangens hiperboliczny, tanh

1. Przypadek

Ustal następujące wartości:

– 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w kazdej warstwie

– liczba punktów treningowych: 200

– liczba punktów testowych: 1000

1. Przypadek

Ustal nastepujace wartosci:

– liczba punktów treningowych: 3000

– liczba punktów testowych: 5000

Eksperymenty przeprowadz z trzema architekturami sieci:

– 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w kazdej warstwie

– 4 warstwy ukryte, 64 neurony w kazdej warstwie

– 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w kazdej warstwie

1. Dla wybranej przez siebie sieci porównaj wynik z rozwiązaniem, w którym przyjęto, ze szukane rozwiazanie (ansatz ) ma postać:

Taka postać rozwiązania gwarantuje spełnienie warunku bez wprowadzania

Składnika do funkcji kosztu.

1. Porównaj pierwotny wynik z rozwiązaniem, w którym pierwsza warstwę ukryta zainicjalizowano cechami Fouriera:

Dobierz L tak, aby nie zmieniać szerokości warstwy ukrytej

Dla każdego z powyższych przypadków stwórz następujące wykresy:

– Wykres funkcji u(x), tj. dokładnego rozwiązania oraz wykres funkcji ^u(x),

tj. rozwiązania znalezionego przez siec neuronowa

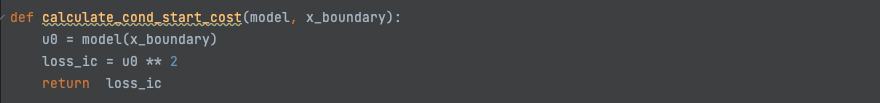
– Wykres funkcji błędu.

Stwórz także wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok.

1. Rozwiązanie zadania
   1. Implementacja zadania pierwszego
      1. Definicja analitycznego rozwiązania
      2. Definicja sieci neuronowej

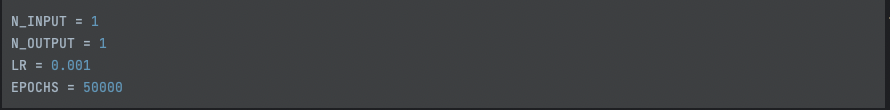
Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie

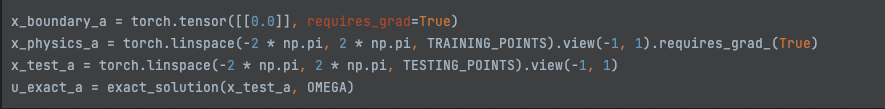
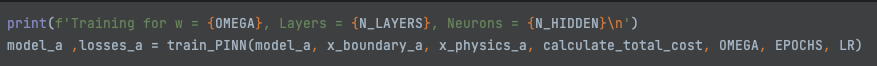
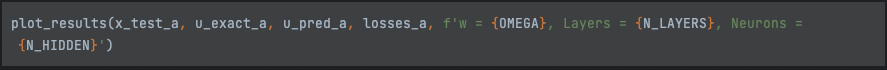
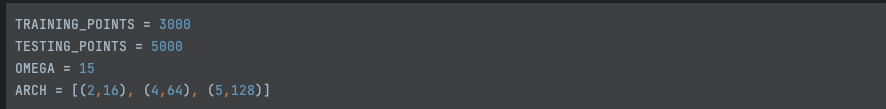
Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Funkcja licząca koszt warunku początkowego
    2. Funkcja obliczająca koszt rezydualnyObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    3. Funkcja obliczająca koszt totalny
    4. Funkcja treningowa PINNObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

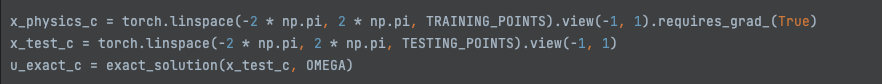
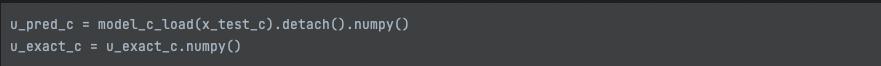
       Opis wygenerowany automatycznie
    5. Funkcja do rysowania wynikówObraz zawierający tekst, zrzut ekranu

       Opis wygenerowany automatycznie
    6. Stałe w naszym modelu
    7. Przypadek
       1. Parametry naszego modeluObraz zawierający zrzut ekranu, tekst, Czcionka, czarne

          Opis wygenerowany automatycznie
       2. Definicja modelu
       3. Definicja punktów treningowych i testowych
       4. Trening modelu
       5. Przewidywanie wartości
       6. Rysowanie wyników
    8. Przypadek
       1. Parametry naszego modelu
       2. Definicja modelu, definicja punktów treningowych i testowych, …, wykres wynikówObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie

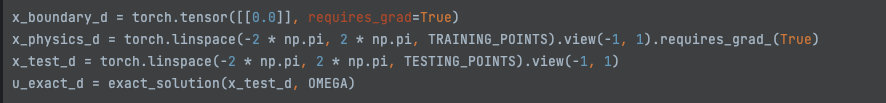
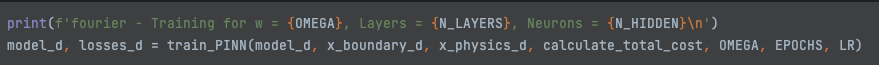
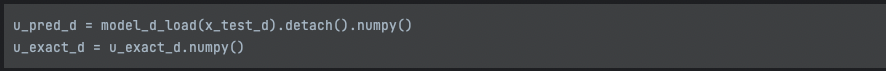
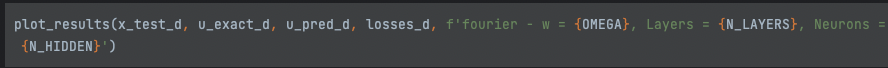
          Opis wygenerowany automatycznie
    9. Porównanie wyniku wybranej sieci z rozwiązaniem w którym przyjęto, ze szukane rozwiązanie ma konkretną postać
       1. Funkcja obliczająca koszt totalnyObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

          Opis wygenerowany automatycznie
       2. Parametry naszego modelu Obraz zawierający zrzut ekranu, tekst, Oprogramowanie multimedialne

          Opis wygenerowany automatycznie
       3. Definicja modelu
       4. Definicja punktów treningowych i testowych
       5. Trening modelu
       6. Przewidywanie wartości
       7. Rysowanie wyników
    10. Porównanie pierwotnego wyniku z rozwiązaniem, w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera
        1. Warstwa FourieraObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

           Opis wygenerowany automatycznie
        2. Model FourieraObraz zawierający tekst, zrzut ekranu

           Opis wygenerowany automatycznie
        3. Parametry naszego modeluObraz zawierający zrzut ekranu, tekst, Oprogramowanie multimedialne

           Opis wygenerowany automatycznie
        4. Definicja modelu
        5. Definicja punktów treningowych i testowych
        6. Trening modelu
        7. Przewidywanie wartości
        8. Rysowanie wyników

1. Tabele
   1. Tabela wyników uczenia się dla przypadku
      1. Zawierająca: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

|  |  |
| --- | --- |
| **Epoch** | **Loss** |
| 0 |  |
| 5000 |  |
| 10000 |  |
| 15000 |  |
| 20000 |  |
| 25000 |  |
| 30000 |  |
| 35000 |  |
| 40000 |  |
| 45000 |  |

**Tabela 1. Tabela wyników kosztu dla 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie**

* 1. Tabela wyników uczenia się dla przypadku
     1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

|  |  |
| --- | --- |
| **Epoch** | **Loss** |
| 0 |  |
| 5000 |  |
| 10000 |  |
| 15000 |  |
| 20000 |  |
| 25000 |  |
| 30000 |  |
| 35000 |  |
| 40000 |  |
| 45000 |  |

**Tabela 2. Tabela wyników kosztu dla 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie**

* + 1. Zawierający: 4 warstwy ukryte, 64 neuronów w każdej warstwie

|  |  |
| --- | --- |
| **Epoch** | **Loss** |
| 0 |  |
| 5000 |  |
| 10000 |  |
| 15000 |  |
| 20000 |  |
| 25000 |  |
| 30000 |  |
| 35000 |  |
| 40000 |  |
| 45000 |  |

**Tabela 3. Tabela wyników kosztu dla 4 warstwy ukryte, 64 neuronów w każdej warstwie**

* + 1. Zawierający: 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie

|  |  |
| --- | --- |
| **Epoch** | **Loss** |
| 0 |  |
| 5000 |  |
| 10000 |  |
| 15000 |  |
| 20000 |  |
| 25000 |  |
| 30000 |  |
| 35000 |  |
| 40000 |  |
| 45000 |  |

**Tabela 4. Tabela wyników kosztu dla 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie**

* 1. Tabela wyników uczenia się dla przypadku wyniku wybranej sieci z rozwiązaniem, w którym przyjęto, ze szukane rozwiązanie ma konkretną postać
     1. Zawierający: 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie

|  |  |
| --- | --- |
| **Epoch** | **Loss** |
| 0 |  |
| 5000 |  |
| 10000 |  |
| 15000 |  |
| 20000 |  |
| 25000 |  |
| 30000 |  |
| 35000 |  |
| 40000 |  |
| 45000 |  |

**Tabela 5. Tabela wyników kosztu dla 5 warstwy ukryte, 128 neuronów w każdej warstwie**

* 1. Tabela wyników uczenia się w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera
     1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie

|  |  |
| --- | --- |
| **Epoch** | **Loss** |
| 0 |  |
| 5000 |  |
| 10000 |  |
| 15000 |  |
| 20000 |  |
| 25000 |  |
| 30000 |  |
| 35000 |  |
| 40000 |  |
| 45000 |  |

**Tabela 6. Tabela wyników kosztu dla 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie**

1. Wykresy
   1. Wykres dla przypadku
      1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie
         1. Wykres funkcji , wraz z

**Wykres 1. Wykres funkcji, wraz z dla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji błęduObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Wykres funkcji *błędu* dla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epokObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, wyświetlacz, Prostokąt

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Wykres funkcji kosztu dla ω=1, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* 1. Wykres dla przypadku
     1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie
        1. Wykres funkcji , wraz z

**Wykres 4. Wykres funkcji, wraz z dla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji błędu

Obraz zawierający tekst, Wykres, zrzut ekranu, linia

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 5. Wykres funkcji *błędu* dla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epok

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 6. Wykres funkcji kosztu dla ω=15, 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + 1. Zawierający: 4 warstwy ukryte, 64 neuronów w każdej warstwie
       1. Wykres funkcji , wraz z

**Wykres 7. Wykres funkcji, wraz z dla 4 - warstw ukrytych, 64 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji błęduObraz zawierający tekst, Wykres, linia, zrzut ekranu

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 8. Wykres funkcji błędu dla 4 - warstw ukrytych, 64 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epokObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, diagram

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 9. Wykres kosztu dla 4 - warstw ukrytych, 64 - neuronów w każdej warstwie**

* + 1. Zawierający: 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie
       1. Wykres funkcji , wraz z

**Wykres 10. Wykres funkcji, wraz z dla 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji błęduObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, linia

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 11. Wykres funkcjidla 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epokObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, linia

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 12. Wykres funkcji dla 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

* 1. Wykres dla wyniku wybranej sieci z rozwiązaniem w którym przyjęto, ze szukane rozwiązanie ma konkretną postać
     1. Zawierający: 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie,
        1. Wykres funkcji , wraz z

**Wykres 13. Wykres funkcji anastaz, wraz z dla 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji błęduObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 14. Wykres funkcji anastaz *błedu* dla 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epokObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, diagram

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 15. Wykres funkcij kosztu dla 5 - warstw ukrytych, 128 - neuronów w każdej warstwie**

* 1. Wykres w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera
     1. Zawierający: 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie,
        1. Wykres funkcji , wraz z

**Wykres 16. Wykres funkcji fouriera, wraz z dla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji błęduObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, Wykres

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 17. Wykres funkcji błędu dla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

* + - 1. Wykres funkcji kosztu w zależności od liczby epokObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, wyświetlacz, linia

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 18. Wykres funkcji fourieradla 2 - warstw ukrytych, 16 - neuronów w każdej warstwie**

1. Wnioski

Porównując wszystkie przypadki najlepiej sobie radził przypadek , dla 2 warstw ukrytych, 16 neuronów w każdej warstwie, ponieważ wykres funkcji prawdziwej i funkcji znalezionej dla tych parametrów idealnie się pokrywał z funkcją co jest widoczne na wykresie nr 1.

Inne przypadki też radziły sobie dobrze kolejnym który wręcz wszystko pokrywał był przypadek dla 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie. Ten przypadek chociaż poradził sobie wyśmienicie to jego wadą było to że ten przypadek był bardzo kosztowny obliczeniowo – wynik można zobaczyć na wykresie nr 10.

Kolejnym przypadkiem, który poradził sobie bardzo dobrze był ten w którym przyjęto za szukany rozwiązanie wzór: . Wynik można zobaczyć na wykresie nr 13.

Wykres, w którym pierwszą warstwę ukrytą zainicjalizowano cechami Fouriera poradził sobie dobrze choć mógł lepiej, widać to na wykresie nr. 16.

Ogólnie rzecz biorąc warto stosować pierwszą warstwę z cechami Fourierowskimi, ponieważ mimo że nie osiągnęła idealnych wyników, to wykazała się dobrą skutecznością. Może to być szczególnie użyteczne w zadaniach przetwarzania sygnałów, gdzie cechy Fourierowskie pomagają w ujawnianiu istotnych wzorców częstotliwościowych. Jednakże, jeśli dostępne są inne metody, które zapewniają lepsze pokrycie funkcji prawdziwej, warto je również rozważyć.

Na dobrą sprawę również warto stosować ANSH, ponieważ może znacząco poprawić wydajność obliczeniową i dokładność sieci neuronowych w zadaniach klasyfikacji i regresji, zwłaszcza w wysokowymiarowych przestrzeniach.

Ostateczny wybór metody zależy od specyfiki problemu, nad którym pracujemy. W niektórych przypadkach można również rozważyć kombinację obu metod, aby maksymalnie wykorzystać ich zalety.

1. Bibliografia

Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz

Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązanie zadania znajduje się w pliku ex1.ipynb