Artur Gęsiarz,

Czerwiec 14, 2024

Laboratorium nr 11

MOwNiT – Optymalizacja

1. Treść zadań
   1. Zadanie pierwsze

Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharakteryzuj

każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy.

Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum globalne

na zbiorze .

* 1. Zadanie drugie

Należy wyznaczyć najkrótsza ścieżkę robota pomiędzy dwoma punktami

x(0) i x(n). Problemem są przeszkody usytuowane na trasie robota, których

należy unikać. Zadanie polega na minimalizacji funkcja kosztu, która sprowadza

problem nieliniowej optymalizacji z ograniczeniami do problemu nieograniczonej

optymalizacji. Macierz opisuje sciezke złozona z punktów

Kazdy punkt posiada 2 współrzedne, . Punkty

początkowy i końcowy ścieżki, i , sa ustalone.

Punkty z przeszkodami (punkty o 2 współrzędnych), r(i) dane są w macierzy

przeszkód .

W celu optymalizacji ścieżki robota należy użyć metody największego spadku.

Funkcja celu użyta do optymalizacji zdefiniowana jest

jako:

Symbole użyte we wzorze maja następujące znaczenie:

* Stałe   i okreslaja wpływ każdego członu wyrażenia na wartość F(X).

–   określa wagę składnika zapobiegającego zbytniemu zblizaniu sie

do przeszkody

–   określa wagę składnika zapobiegającego tworzeniu bardzo długich ścieżek

* n jest liczba odcinków, a n + 1 liczba punktów na trasie robota
* k jest liczba przeszkód, których robot musi unikać
* Dodanie w mianowniku zapobiega dzieleniu przez zero.

1. Wyprowadź wyrażenie na gradient funkcji celu F względem
2. Opisz matematycznie i zaimplementuj kroki algorytmu największego spadku

z przeszukiwaniem liniowym, który służy do minimalizacji funkcji celu

F. Do przeszukiwania liniowego (ang. line search) użyj metody złotego

podziału (ang. golden section search). W tym celu załóż, ze F jest unimodalna

(w rzeczywistości tak nie jest) i ze można ustalić początkowy

przedział, w którym znajduje się minimum.

1. Znajdź najkrótszą ścieżkę robota przy użyciu algorytmu zaimplementowanego

w poprzednim punkcie.

Przyjmij następujące wartości parametrów:

Liczba iteracji = 400

Ponieważ nie chcemy zmieniać położenia punktu początkowego i końcowego,

wyzeruj gradient funkcji F wzgledem tym punktów.

Obliczenia przeprowadź dla 5 różnych losowych inicjalizacji punktów wewnątrz

ścieżki.

Narysuj przykładowy wykres wartości funkcji F w zależności od iteracji.

1. Rozwiązanie zadań:
   1. Implementacja zadania pierwszego:
      1. Implementacja funkcjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie
      2. Obliczenia gradientów kolejnych funkcjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie
      3. Obliczanie punktów krytycznychObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie
      4. Obliczanie hesjanów dla poszczególnych funkcjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

         Opis wygenerowany automatycznie
      5. Funkcja kwalifikująca punkty krytyczneObraz zawierający tekst, zrzut ekranu

         Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Charakterystyka punktów krytycznych
  1. Implementacja zadania drugiego:
     1. Funkcja gradientówObraz zawierający tekst, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne, zrzut ekranu

        Opis wygenerowany automatycznie
     2. Metoda złotego podziałuObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

        Opis wygenerowany automatycznie
     3. F(x)

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

* + 1. Przeszukiwanie linioweObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    2. Algorytm największego spadku gradientuObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Czcionka

       Opis wygenerowany automatycznie
    3. Poszczególne parametryObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Oprogramowanie multimedialne, oprogramowanie

       Opis wygenerowany automatycznie
    4. Wykonanie algorytmu dla 5 różnych iteracjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, oprogramowanie, Oprogramowanie multimedialne

       Opis wygenerowany automatycznie

1. Tabele
   1. Tabela dla zadania pierwszego dla kwalifikacji puntków

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Nr. funkcji | Punkty siodłowe | Punkty maksymalne | Punkty minimalne |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |

Tabela 1. Tabela opisująca kwalifikacje punktów

* 1. Tabela pokazująca ostatnie zmiany wartości funkcji F w zależności od iteracji

|  |  |
| --- | --- |
| Numer iteracji | Ostatnia zmiana wartości funkcji F |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |

**Tabela 2. Tabela opisująca ostatnie zmiany wartości funkcji F w zależności od iteracji**

1. Wykresy
   1. Wykresy dla zadania drugiego
      1. Pierwsza iteracja
         1. Zmiana wartości funkcji F w zależności od iteracji**Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, linia

            Opis wygenerowany automatycznie**

**Wykres 1. Wykres zmiany wartości funkcji F w zależności od pierwszej iteracji**

* + - 1. Ścieżka robotaObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, diagram

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 2. Wykres ścieżki robota w pierwszej iteracji**

* + 1. Druga iteracja
       1. Zmiana wartości funkcji F w zależności od iteracjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, diagram

          Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 3. Wykres zmiany wartości funkcji F w zależności od drugiej iteracji**

* + - 1. Ścieżka robotaObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, diagram

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 4. Wykres ścieżki robota w drugiej iteracji**

* + 1. Trzecia iteracja
       1. Zmiana wartości funkcji F w zależności od iteracjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, linia, diagram

          Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 5. Wykres zmiany wartości funkcji F w zależności od trzeciej iteracji**

* + - 1. Ścieżka robotaObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, linia

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 6. Wykres ścieżki robota w trzeciej iteracji**

* + 1. Czwarta iteracja
       1. Zmiana wartości funkcji F w zależności od iteracjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, linia

          Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 7. Wykres zmiany wartości funkcji F w zależności od czwartej iteracji**

* + - 1. Ścieżka robotaObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Wykres, diagram

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 8. Wykres ścieżki robota w czwartej iteracji**

* + 1. Piąta iteracja
       1. Zmiana wartości funkcji F w zależności od iteracjiObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, linia

          Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 9. Wykres zmiany wartości funkcji F w zależności od piątej iteracji**

* + - 1. Ścieżka robotaObraz zawierający tekst, zrzut ekranu, diagram, linia

         Opis wygenerowany automatycznie

**Wykres 10. Wykres ścieżki robota w piątej iteracji**

1. Wnioski

Metoda największego spadku wzdłuż gradientu okazała się skuteczna w nawigacji robota w środowisku z przeszkodami. Robot był w stanie znaleźć bezkolizyjną ścieżkę, minimalizując odległość do celu przy jednoczesnym omijaniu przeszkód, ale jednak, poruszamy się bardzo blisko przeszkód co przy nie których wypadkach może być niebezpieczne, kiedy chodzi o robota, który ma je unikać a on się bardzo blisko nich porusza.

Dzięki wykorzystaniu gradientu potencjału, robot dynamicznie dostosowywał swoją trasę w czasie rzeczywistym. Pozwoliło to na elastyczne reagowanie na zmieniające się warunki otoczenia oraz na skuteczne omijanie przeszkód.

Algorytm gradientu jest relatywnie mało wymagający obliczeniowo, co czyni go odpowiednim do zastosowań w czasie rzeczywistym. Robot był w stanie przetwarzać dane sensoryczne i aktualizować swoją trasę na bieżąco bez znaczących opóźnień.

Główne ograniczenie metody największego spadku wzdłuż gradientu polega na możliwości utkwienia w lokalnych minimach. W takich sytuacjach robot może nie znaleźć globalnie optymalnej trasy do celu, szczególnie w bardziej złożonych środowiskach z wieloma przeszkodami.

Podsumowując, metoda największego spadku wzdłuż gradientu jest efektywnym narzędziem do nawigacji robota w środowisku z przeszkodami, oferując zarówno prostotę implementacji, jak i dobrą wydajność w czasie rzeczywistym. Jednakże, jej skuteczność może być zwiększona poprzez integrację z innymi technikami optymalizacji, aby lepiej radzić sobie z lokalnymi minimami i bardziej złożonymi scenariuszami nawigacyjnymi.

1. Bibliografia

Wykład MOwNiT - prowadzony przez dr. Inż. K. Rycerz

Prezentacje – dr. Inż. M. Kuta

1. Dodatkowe informacje

Rozwiązania obu zadań znajdują się odpowiednio w plikach ex1.ipynb oraz ex2.ipynb