

Single Source Fixed Charge Network Flow Problem

Artur Rodrigues

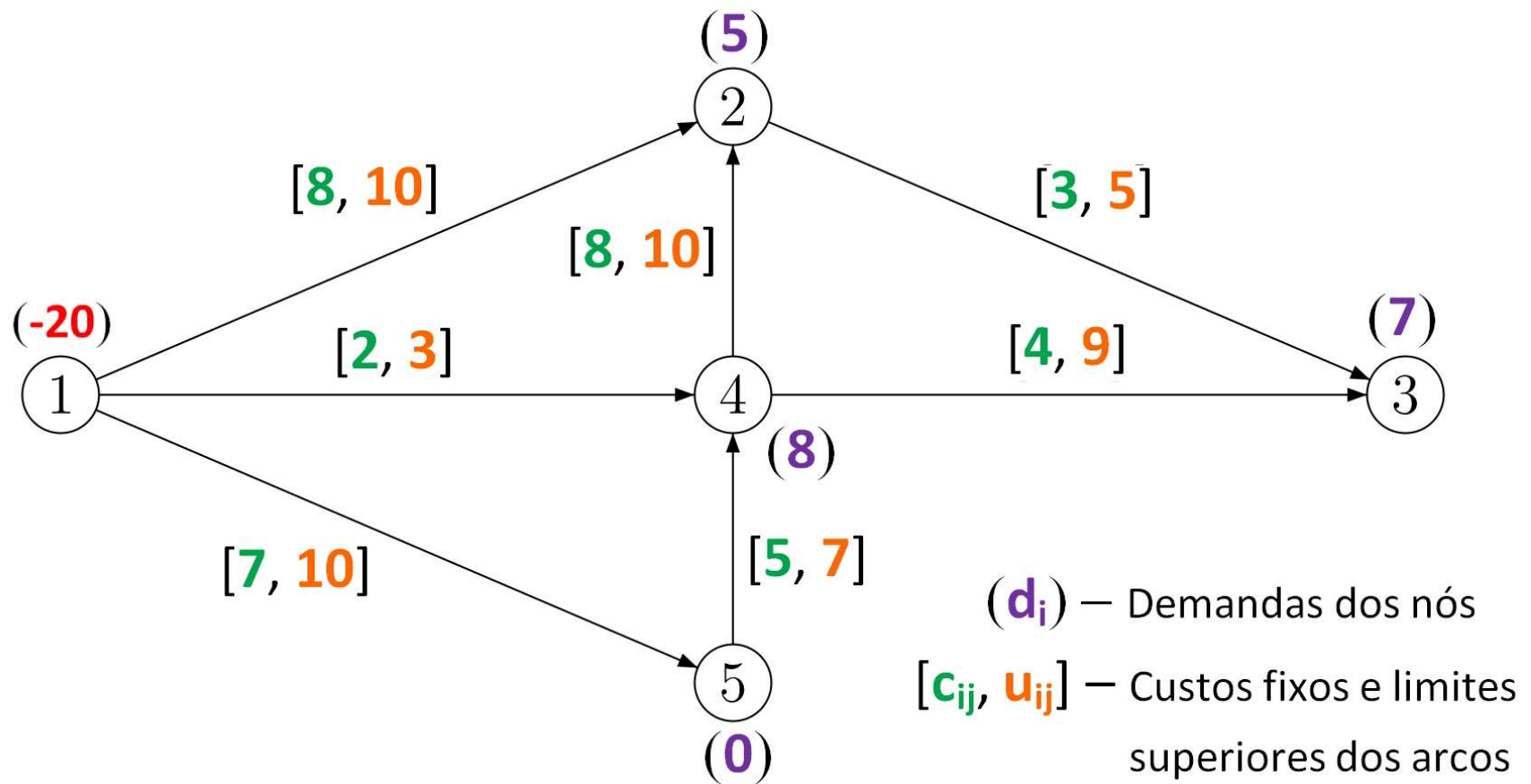
Luciana Maroun

Thanis Paiva

Modelagem

- Baseia-se num grafo direcionado $G = (N, A)$ com 1 único nó de oferta e os demais nós de demanda/transbordo.
- Os arcos são capacitados(limitados superiormente) e apresentam custos fixos.
- Objetivo: Selecionar um subconjunto de arcos tais que o fluxo que passe por eles atenda às demandas com um custo mínimo.

Modelagem



Formulação Matemática

Nó de *oferta*, $b_f < 0$ e $b_f = -\sum_{i \in N \setminus \{f\}} b_i$

Nós de *demanda*, $b_i > 0$

Nós de *transbordo*, $b_i = 0$

Arcos, $\forall (i, j) \in A, c_{ij} \geq 0, u_{ij} \geq 0$

Fluxo definido pela variável x_{ij} e pela variável binária y_{ij} tal que:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

Formulação Matemática

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in V^-(i)} x_{ij} - \sum_{j \in V^+(i)} x_{ij} = b_i, i \in N \quad (2)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} y_{ij}, (i, j) \in A \quad (3)$$

$$y \in \{0, 1\} \quad (4)$$

Heurística do Caminho Mínimo

$\forall (i, j) \in A$ **faça**

$x_{ij} \leftarrow 0$

enquanto $\exists i \in V \mid b_i > 0$ **faça**

$C \leftarrow \text{caminho_minimo}(f, i)$

$\text{fluxo} \leftarrow \min(\text{capacidade}_C, b_i)$

se $\text{fluxo} = 0$ **faça**

retorne “Solução Inválida”

$\forall (i, j) \in A$ **faça**

$u_{ij} \leftarrow u_{ij} - \text{fluxo}$

$c_{ij} \leftarrow 0$

se $u_{ij} = 0$ **faça**

$c_{ij} \leftarrow \infty$

se $b_f = 0$ e $\sum_{i \in N - \{f\}} b_i$

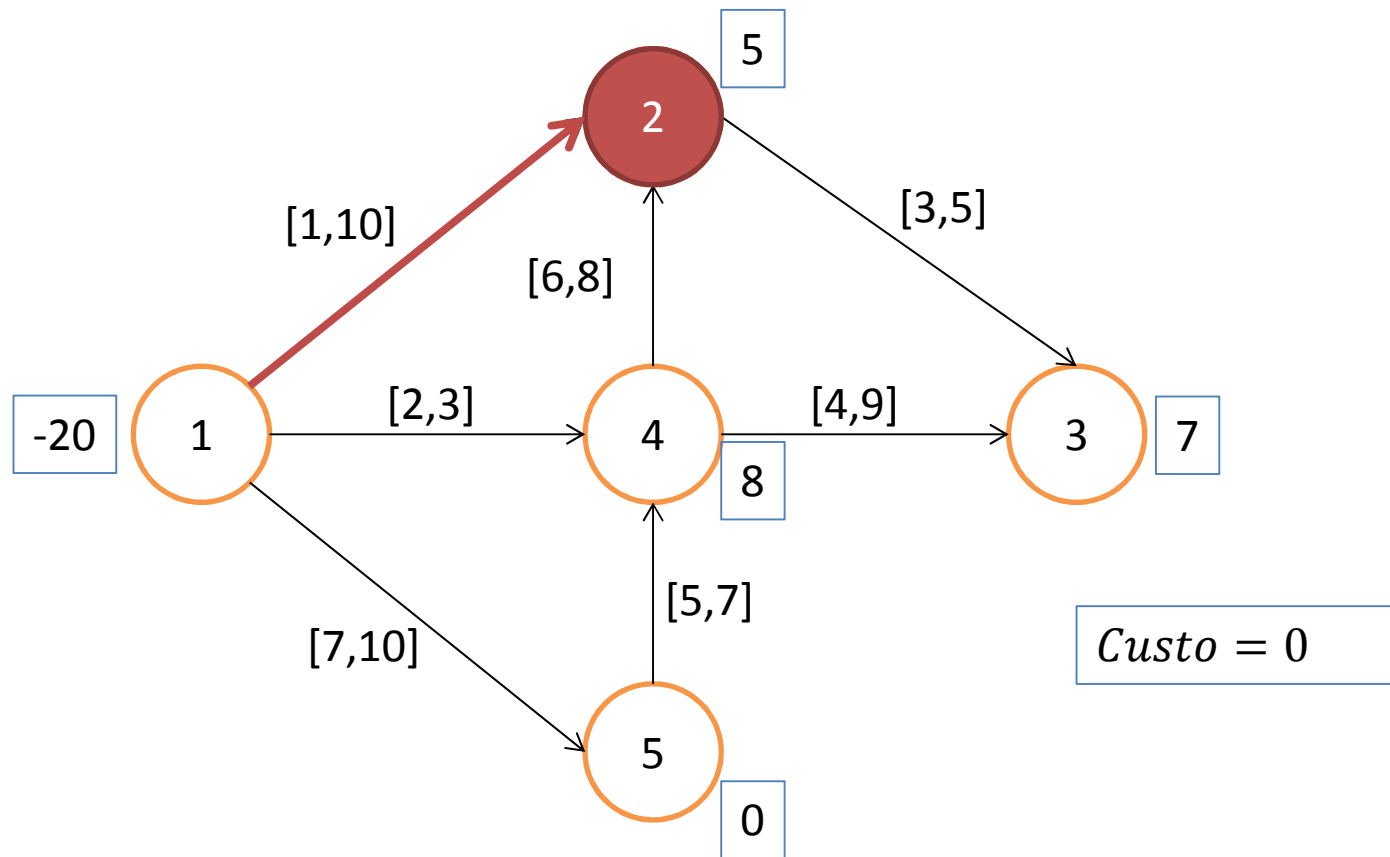
retorne x

Complexidade:
 $O(kn^3)$

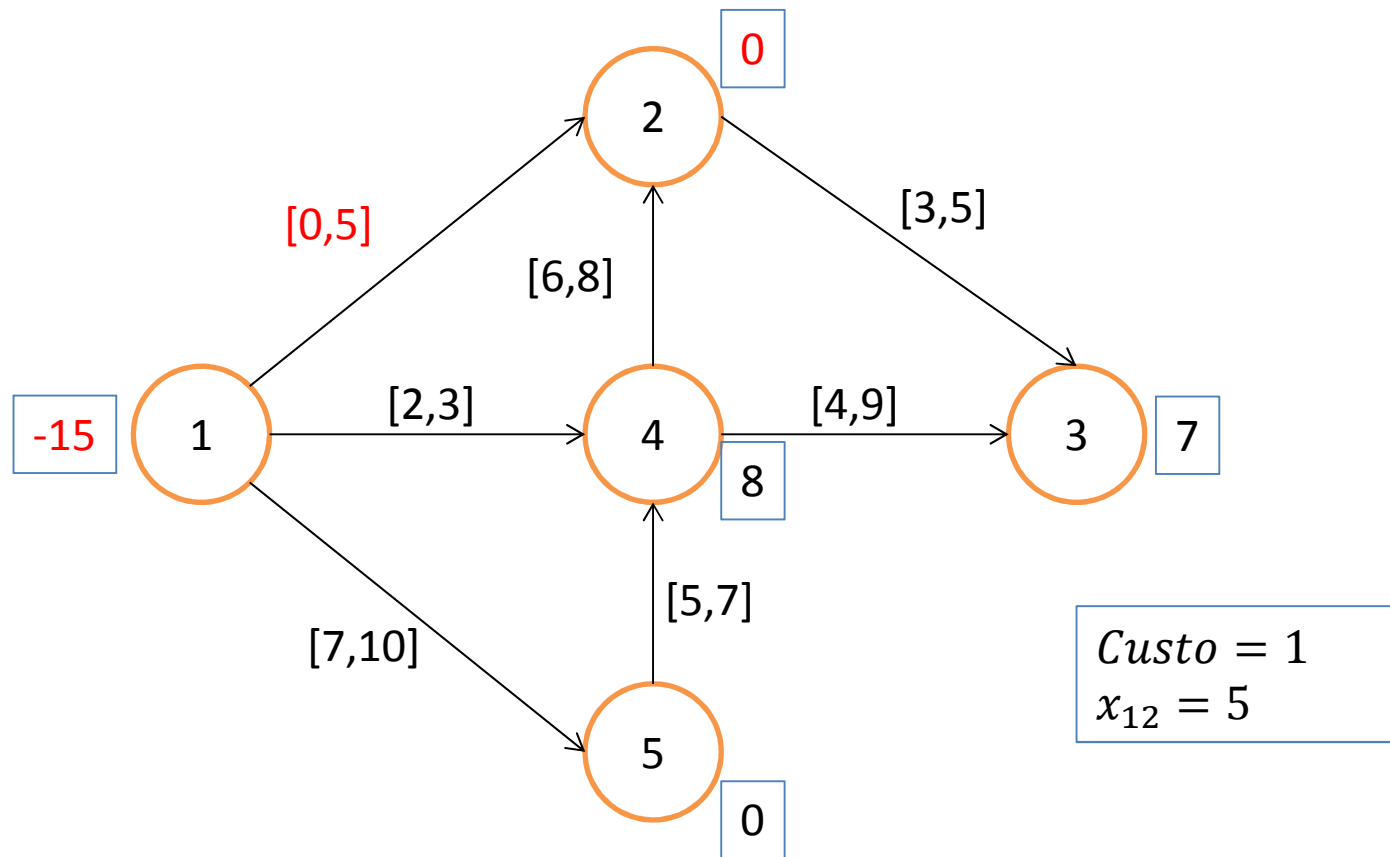
k: valor máximo de
demanda

n: número de nós

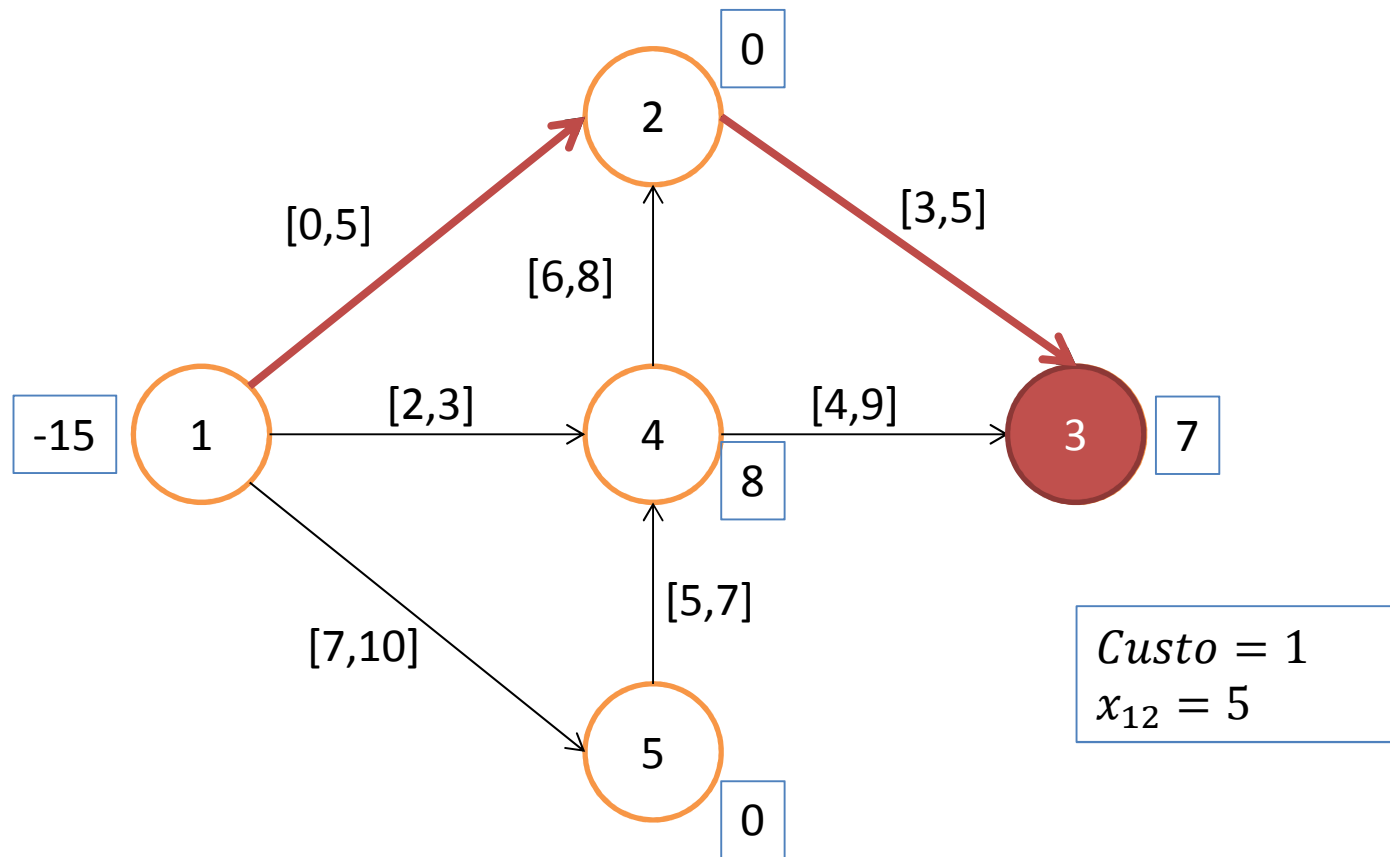
Exemplo



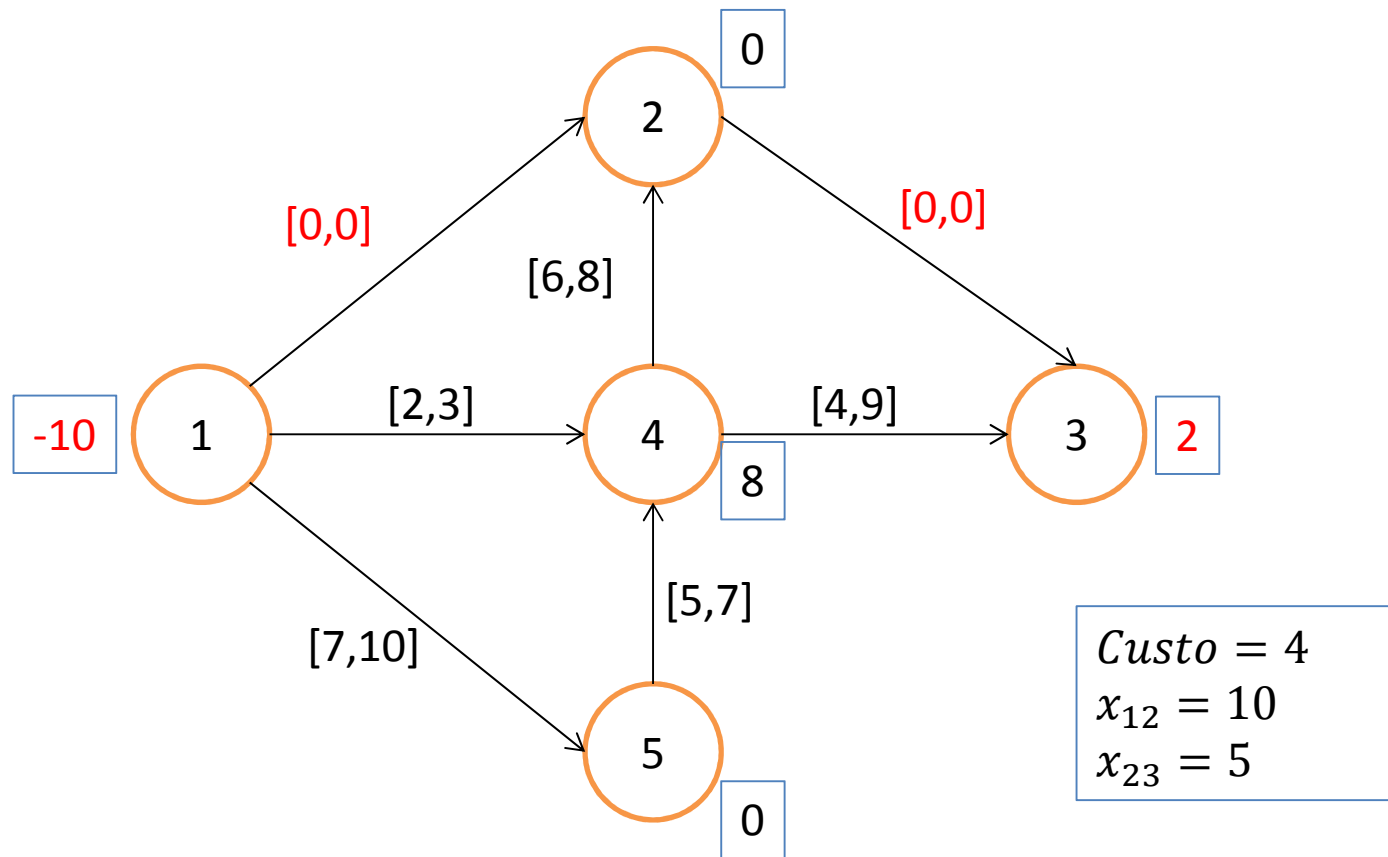
Exemplo



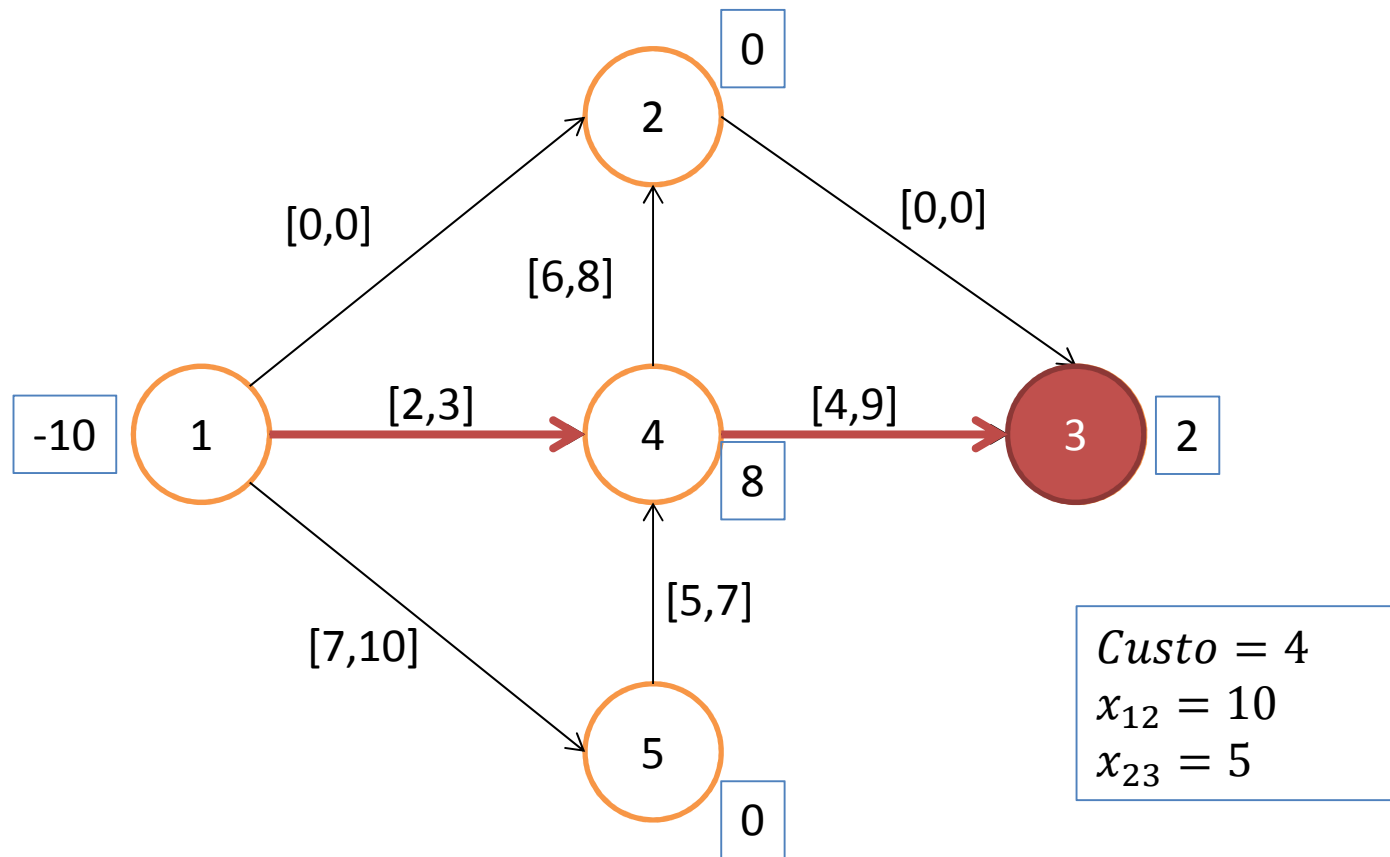
Exemplo



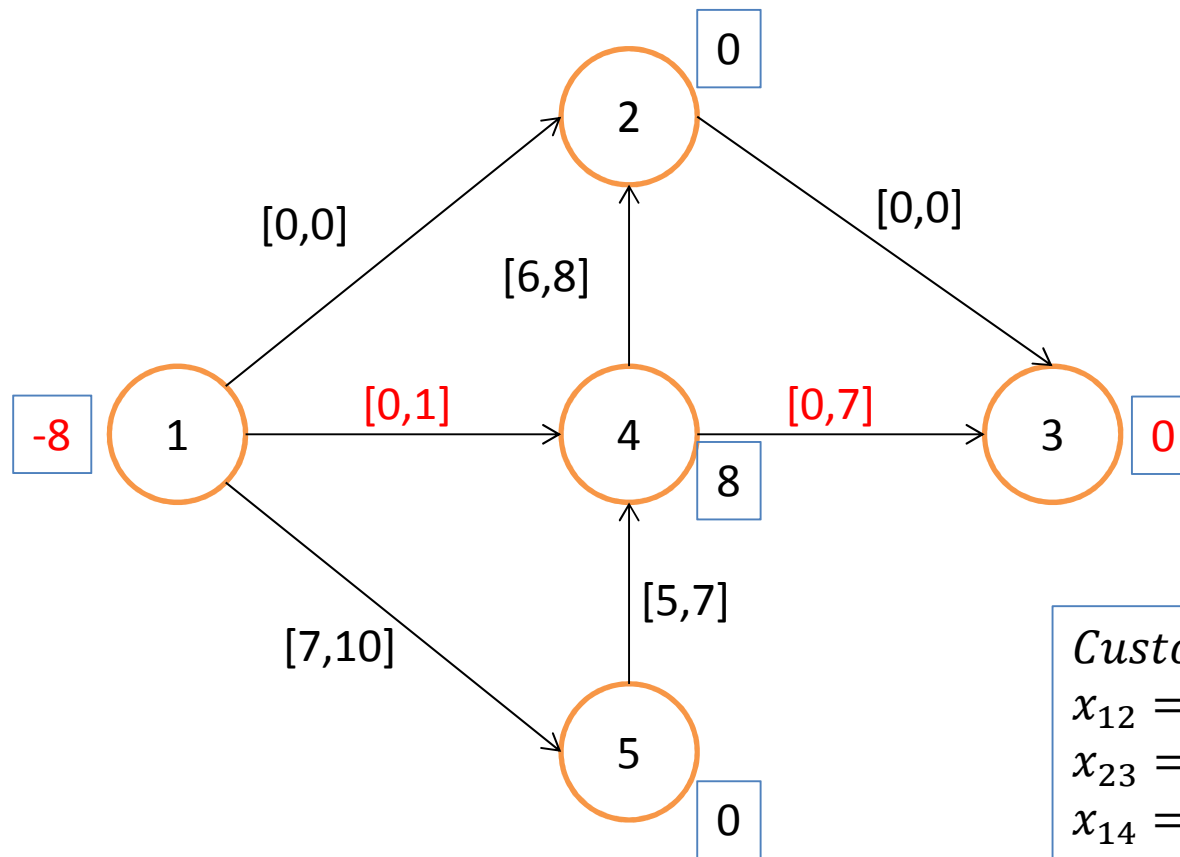
Exemplo



Exemplo

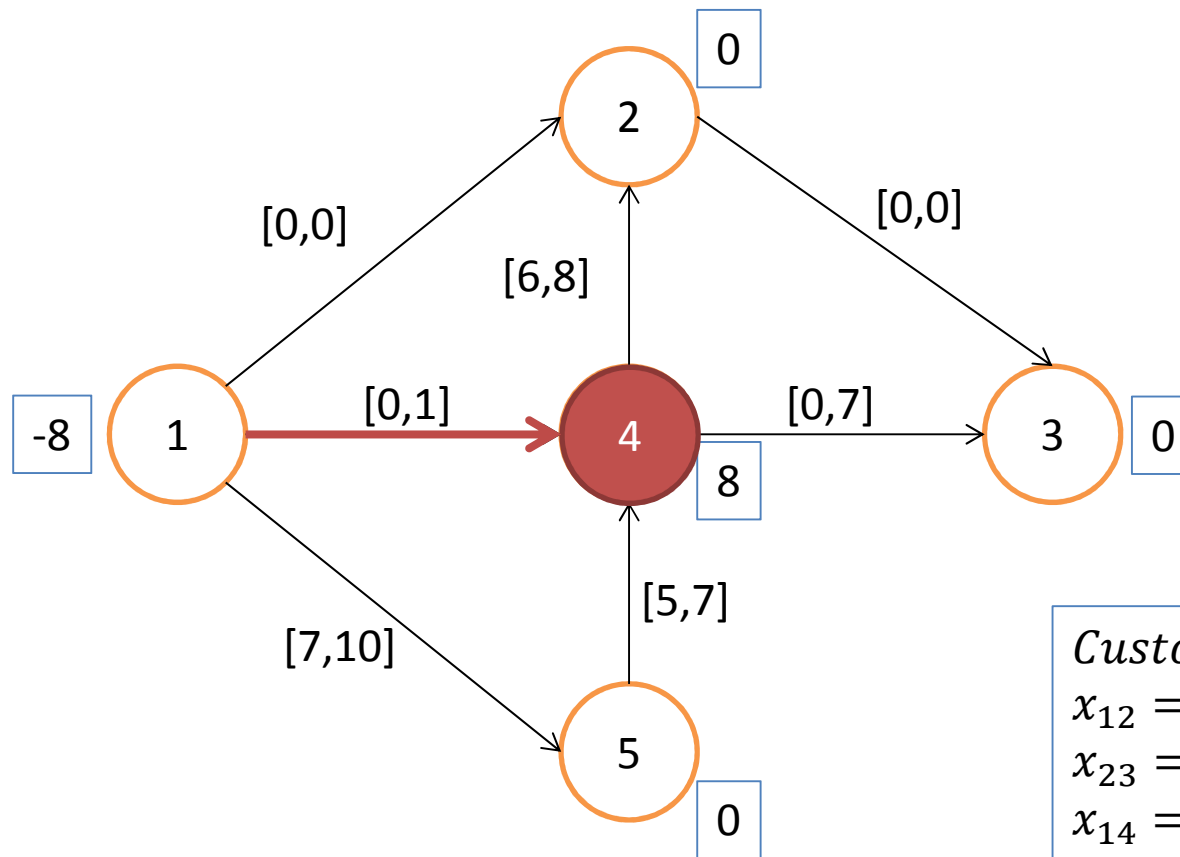


Exemplo



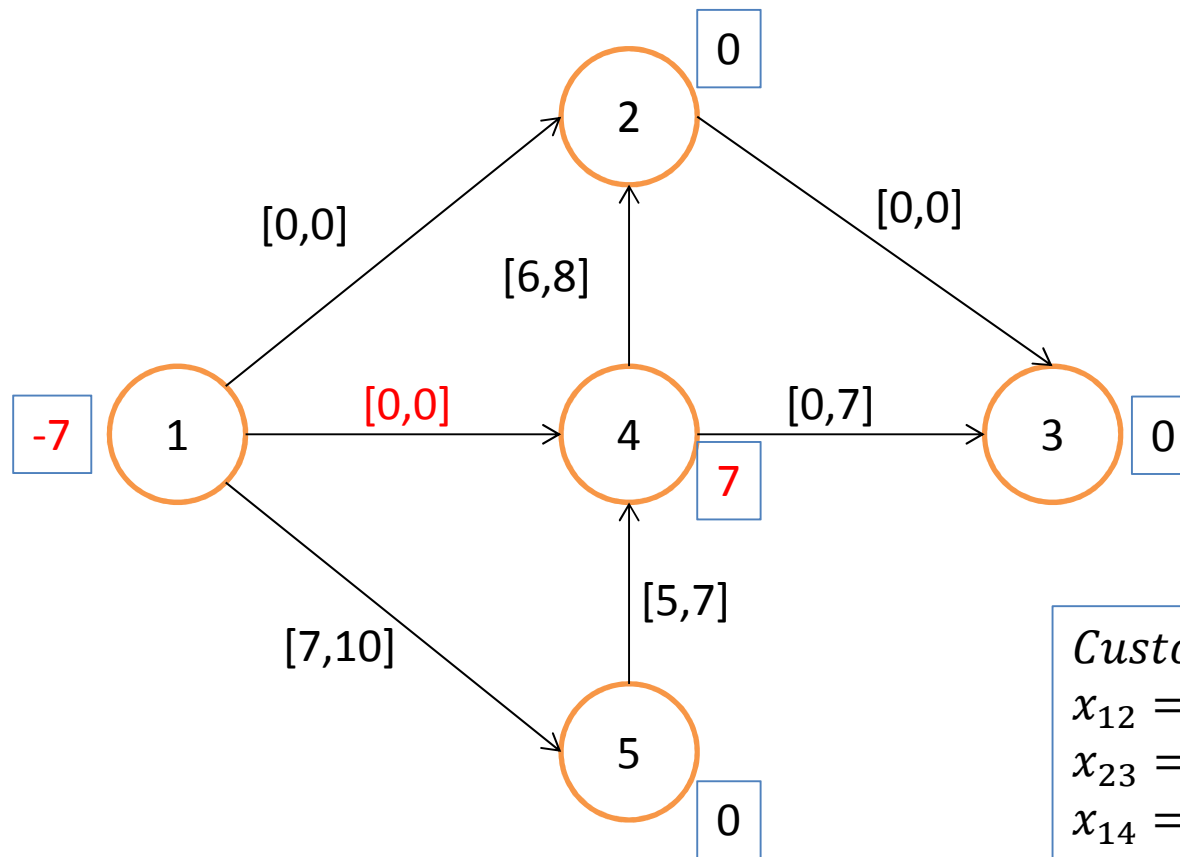
$Custo = 10$
 $x_{12} = 10$
 $x_{23} = 5$
 $x_{14} = 2$
 $x_{43} = 2$

Exemplo



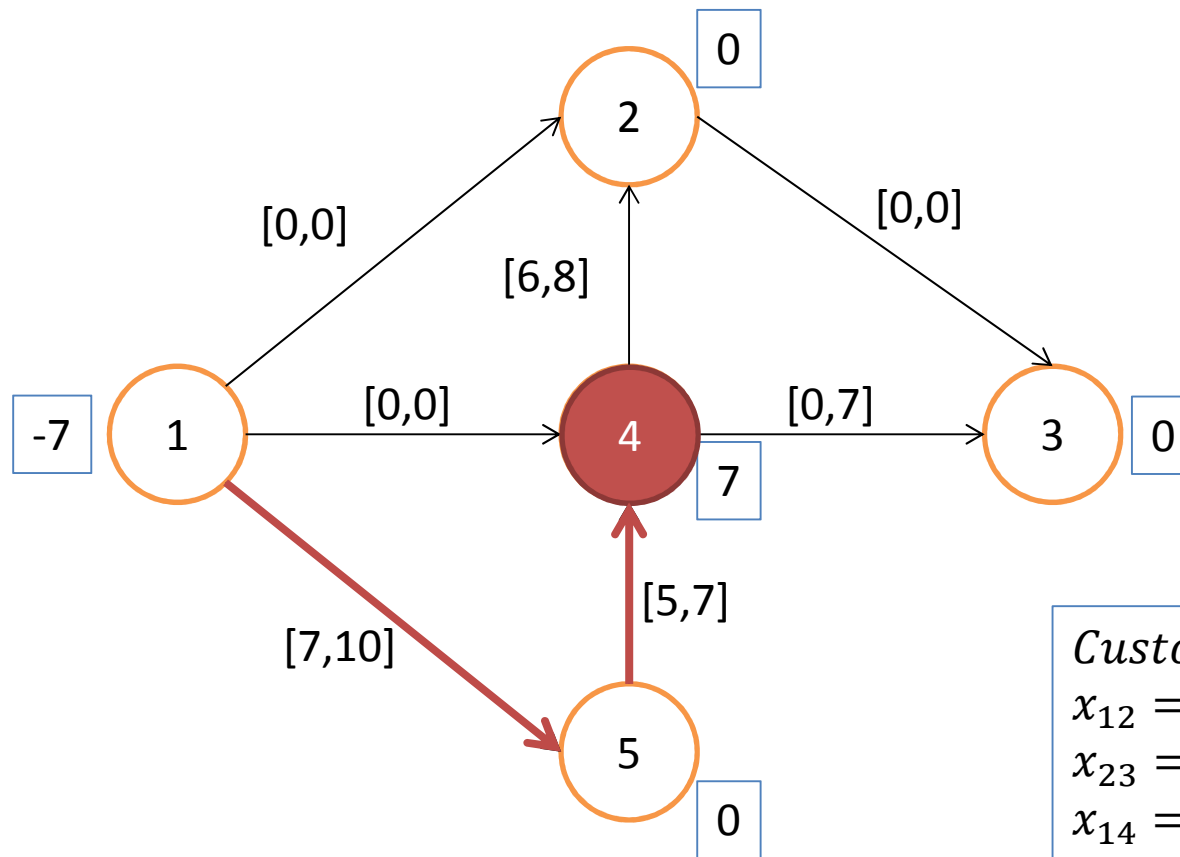
$Custo = 10$
 $x_{12} = 10$
 $x_{23} = 5$
 $x_{14} = 2$
 $x_{43} = 2$

Exemplo



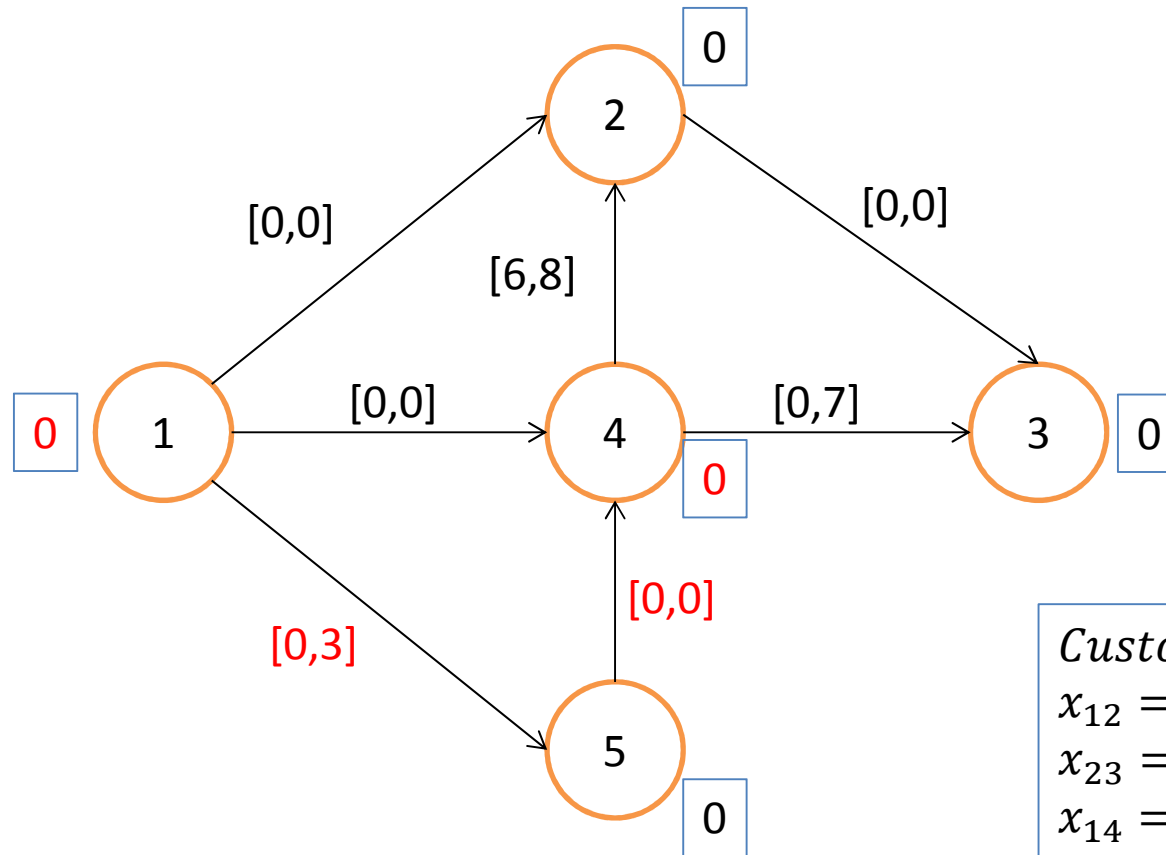
$Custo = 10$
 $x_{12} = 10$
 $x_{23} = 5$
 $x_{14} = 3$
 $x_{43} = 2$

Exemplo



$Custo = 10$
 $x_{12} = 10$
 $x_{23} = 5$
 $x_{14} = 3$
 $x_{43} = 2$

Exemplo



Custo = 22

$$x_{12} = 10$$

$$x_{23} = 5$$

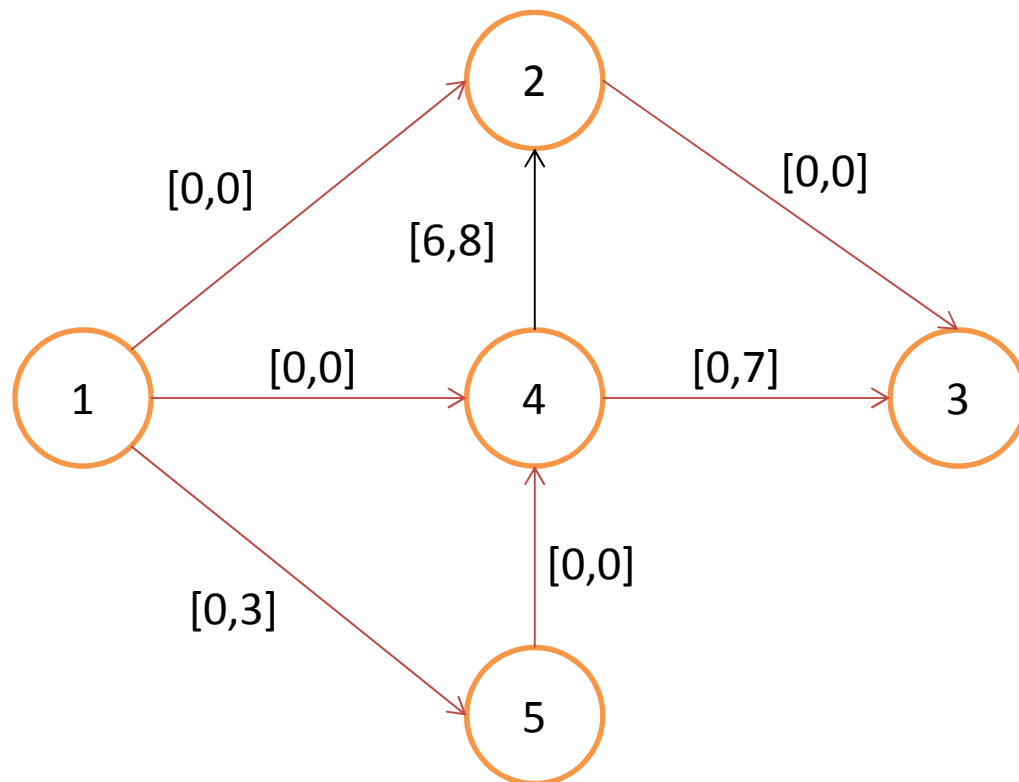
$$x_{14} = 3$$

$$x_{43} = 2$$

$$x_{15} = 7$$

$$x_{54} = 7$$

Exemplo



Solução encontrada.

Custo = 22

$x_{12} = 10$

$x_{23} = 5$

$x_{14} = 3$

$x_{43} = 2$

$x_{15} = 7$

$x_{54} = 7$

Comportamento da Heurística

- Prioriza custos e não considera capacidades para escolher caminhos
- Caminhos escolhidos inicialmente podem não compor a solução ótima
- Um caminho não escolhido pode comportar um fluxo que na heurística percorre vários caminhos mínimos, estes totalizando um maior custo

Implementação

- Python
 - *Container types* (listas e dicionários)
 - Vasto número de bibliotecas
- Biblioteca *NetworkX*
 - Estruturas e funções de grafos já prontas (ex.: *dijkstra-path*)
- Ainda mais rápido com PyPy (*just-in-time compiler*)

Gerador de Instâncias

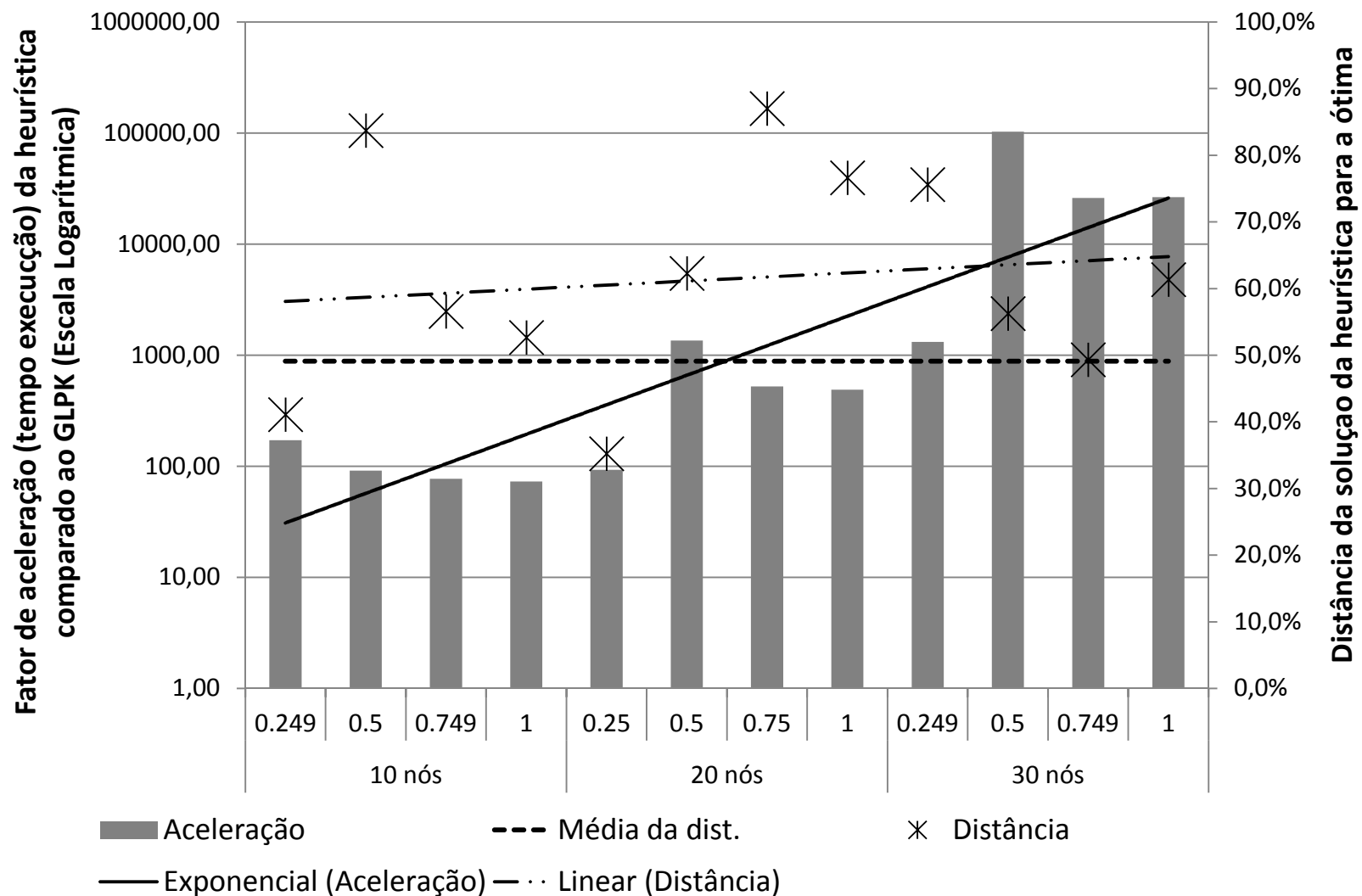
- Gera instâncias com base nos seguintes parâmetros:
 - Número de nós de demanda e transbordo
 - Densidade
 - Valor máximo para demanda
 - Valor máximo para capacidades nos arcos
 - Valor máximo para custos nos arcos
- Viabilidade garantida através do solver
- Objeto *python* e entrada para o *GLPSOL*

Experimentos – Resultados

Número de nós	Densidade	Tempo (s)			Função Objetivo		
		GLPK	Heurística	Aceleração	GLPK	Heurística	Distância
10 nós	0.249	0.1	0.001	172.12	112	158	41.1%
	0.5	0.1	0.001	91.66	153	281	83.7%
	0.749	0.1	0.001	77.34	161	252	56.5%
	1	0.1	0.001	73.10	114	174	52.6%
20 nós	0.25	0.2	0.002	92.94	108	146	35.2%
	0.5	8.3	0.006	1355.10	355	576	62.3%
	0.75	3.3	0.006	524.14	161	301	87.0%
	1	5.1	0.010	487.99	94	166	76.6%
30 nós	0.249	10.7	0.008	1318.06	315	553	75.6%
	0.5	1390.7	0.014	102611.97	370	578	56.2%
	0.749	453.2	0.017	25966.88	205	306	49.3%
	1	925.7	0.035	26493.99	212	342	61.3%
Média							49.1%
DPA							16.4%

Valor máximo para as demandas = 10

Experimentos – Resultados



Experimentos – Resultados

Demanda Max	Tempo (s)			Função Objetivo		
	GLPK	Heurística	Aceleração	GLPK	Heurística	Distância
10	0.1	0.0007	153.14	51	56	9.8%
20	0.1	0.0005	216.45	40	45	12.5%
30	0.1	0.0008	128.53	39	59	51.3%
40	0.1	0.0006	168.35	77	81	5.2%
50	0.1	0.0005	200.00	45	60	33.3%
60	0.1	0.0006	177.94	46	52	13.0%
70	0.1	0.0005	202.84	49	56	14.3%

Densidade = 0.249; Número de vértices = 10

Dúvidas?

<https://github.com/arturhoo/single-source-fcnf-heuristic>