1. LÓGICA MATEMÁTICA.

COMPETENCIA: REPRESENTA ESTRUCTURAS COMPUTACIONALES, UTILIZANDO LA LÓGICA MATEMÁTICA CON ARGUMENTOS CONGRUENTES Y LÓGICOS.

CONTENIDO

1. Circuitos de Conmutación.
2. **Algebra de Boole.**
3. Mapas de Karnaugh.
4. Circuitos combinatorios

ÁLGEBRA DE BOOLE

- En esta sección se considerarán sistemas generales que tienen propiedades similares a los circuitos combinatorios.
- Veremos que sistemas aparentemente distintos obedecen estas mismas leyes.
- Tales sistemas se denominan álgebras booleanas o de Boole.

DEFINICIÓN

- **Definición**. Un álgebra booleana B consiste en un conjunto S que contiene 2 elementos distintos, el 0 y el 1, operadores binarios + y . en S, y un operador unario ‘ en S, los cuales cumplen las siguientes propiedades:
  - Leyes asociativas

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \text{Para todo } x, y, z \in S.$$

LEYES BOOLEANAS

- Leyes conmutativas

$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

Para todo $x, y \in S.$

- Leyes distributivas

$$x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

Para todo $x, y \in S.$

- Leyes de identidad

$$x + 0 = x$$
$$x \cdot 1 = x$$

Para todo $x \in S.$

LEYES BOOLEANAS

- Leyes de complementación

$$x + x' = 1$$

$$x \cdot x' = 0$$

Para todo $x \in S.$

- Si B es un álgebra booleana, se escribirá

$$B = (S, +, \ \cdot, ', 0, 1)$$

OBSERVACIONES

- 0 y 1 son simplemente nombres simbólicos, y en general, no tienen que ver con los números 0 y 1.
- Este mismo comentario se aplica a + y . que denotan operadores binarios y no tienen que ver con la adición y la multiplicación, habitualmente conocidas

EJEMPLO

- Sea $S = \{1, 2, 4, 8\}$. $x + y = mcm(x, y)$ $x \cdot y = mcd(x, y)$
- Defina $x' = \frac{8}{x}$
- Demuestre que $(S, +, \cdot, ', 1, 8)$ no es un álgebra booleana

SOLUCIÓN

- Si $(S,+,\cdot,',1,8)$ es un álgebra booleana, entonces

Se debe de cumplir: $x + x' = 1$

En términos del álgebra del problema: $mcm(x, \frac{8}{x}) = 8$

- En este caso debe tenerse para x = 1,2,4,8.
- Sin embargo para x=4,
- mcm(4,8/4) = mcm(4,2) = 4 ≠8.
- Por lo tanto este sistema no es un álgebra booleana.

EJERCICIO

- Sea S = {1,2,3,6} Defina
- x + y = mcm**(**x**,** y**)**
- **x** · y = mcd(x,y)
- x’ = 6 / x
- Demuestre que (S, +, ·,’ , 1,6) es un álgebra booleana.

TEOREMA

- En un álgebra booleana, el elemento x’ de la definición es único. Específicamente si $x + y = 1$ y $xy = 0$, entonces y = x’

- Demostración.

y	$= y1$	Definición (d)
	$= y(x + x')$	Definición (e)
	$= yx + yx'$	Definición (c)
	$= xy + yx'$	Definición (b)
	$= 0 + yx'$	Dado
	$= xx' + yx'$	Definición (e)
	$= x'x + x'y$	Definición (b)
	$= x'(x + y)$	Definición (c)
	$= x'1$	Dado
	$= x'$	Definición (d)

- **Definición**. Al elemento x', en un algebra booleana se le llama complemento de x.

- **Teorema**. Sea B=(S,+, . ,' ,0,1) un álgebra booleana.
- Las siguientes propiedades se cumplen:
  a) Ley de idempotencia: $x + x = x$ Para todo $x \in S.$

  $$xx = x$$

b) Leyes de acotación

$x + 1 = 1$ $\quad x0 = 0$ $\quad$ Para todo $x \in S.$

c) Leyes de absorción

$x + xy = x$ $\quad x(x + y) = x$ $\quad$ Para todo $x, y \in S.$

d) Ley de involución

$(x')' = x$ $\quad$ Para todo $x \in S.$

e) Leyes para el 0 y 1

$0' = 1$ $\quad 1' = 0$

f) Leyes de Morgan

$(x + y)' = x'y'$ $\quad (xy)' = x' + y'$ $\quad$ Para todo $x, y \in S.$

DEMOSTRACIÓN

a)

x	$= x + 0$	Definición (d)
	$= x + (xx')$	Definición (e)
	$= (x + x)(x + x')$	Definición (c)
	$= (x + x)1$	Definición (e)
	$= x + x$	Definición (d)

DEMOSTRACIÓN

- B) Primera parte..

$x+1$	$=(x+1)1$	Definición (d)
	$=(x+1)(x+x')$	Definición (e)
	$=x+1x'$	Definición (c)
	$=x+x'1$	Definición (b)
	$=x+x'$	Definición (d)
	$=1$	Definición (e)

- B) Segunda parte

$x0$	$= x0 + 0$	Definición (d)
	$= x0 + xx'$	Definición (e)
	$= x(0 + x')$	Definición (c)
	$= x(x' + 0)$	Definición (b)
	$= xx'$	Definición (d)
	$= 0$	Definición (e)

EJERCICIO

- Probar los incisos c al f del teorema anterior.

DEFINICIÓN

- **Definición**. El dual de un enunciado que involucra expresiones booleanas se obtiene reemplazando 0 por 1, 1 por 0, + por . y
- . por +
- ***Ejemplo***.
  - El dual de $(x+y)' = x'y'$
  - Es $(xy)' = x' + y'$.

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

- Un circuito se construye para cumplir una tarea específica.
- Ejemplo: Supóngase que se quiere construir un circuito combinatorio para determinar la función O excluyente de x_1 y x_2. Esto equivale a tener la tabla lógica :

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- Una tabla lógica con un único dato de salida es una función. El dominio es el conjunto de datos de entrada y el contradominio (o ámbito) es el conjunto de datos de salida. Para la función O excluyente de la tabla anterior el dominio es el conjunto:

$$\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

- Y el contradominio es el conjunto

$$Z_2 = \{0,1\}$$

- Las funciones que se pueden representar como expresiones booleanas o de Boole se denominan **funciones booleanas**.
- **Definición**. Sea $X(x_1, x_2,..x_n)$ una expresión booleana. Una función f de la forma
  $$f\left(x_1,\ldots,x_n\right) = X\left(x_1,\ldots,x_n\right)$$

Recibe el nombre de función booleana.

EJEMPLO

- La función $f : Z_2^3 \longrightarrow Z_2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)$$

- Es una función boleana.
- Los datos de entrada y los de salida se dan en la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

DEFINICIÓN

- **Definición**. Un mintérmino en los símbolos $x_1, \ldots, x_n$

- Es una expresión de la forma $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n$

- En la cual cada y_i es x_i o bien $\overline{x_i}$

TEOREMA

- **Teorema.** Si , $f : Z_2^n \to Z_2$ entonces *f* es una función booleana. Si *f* no es idénticamente nula, sean $A_1, \ldots, A_k$ los elementos A_i de Z_2^n para los cuales
- Para cada $f(A_i) = 1$, tómese $A_i = (a_1, \ldots, a_n)$
- En donde $m_i = y_1 \wedge \ldots \wedge y_n$
- Entonces $$y_i = \begin{cases} x_i \ si \ a_i = 1 \\ \overline{x_i} \ si \ a_i = 0 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$$

- **Definición**. La representación de una función booleana $f : Z_2^n \to Z_2$ se llama forma normal disyuntiva de la función f.
- **Ejercicio**. Encontrar la forma normal disyuntiva de la función O excluyente.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- El teorema visto anteriormente tiene un dual. En este caso, la función *f* esta expresada como $f(x_1, x_2, x_3) = M_1 \wedge M_2 \wedge \ldots \wedge M_k$.

- En donde cada M_i es de la forma: $y_1 \vee \ldots \vee y_n$

- Donde y_i es bien x_i o bien $\overline{x_i}$.
- Un término como $y_1 \vee \ldots \vee y_n$ es conocido como maxtérmino y la representación *f* anterior se denomina forma normal conjuntiva.

- Para determinar un circuito combinatorio más simple y equivalente se pueden simplificar la expresión booleana que la representa. Las ecuaciones

$$Ea \vee E\overline{a} = E$$

$$E = E \vee Ea,$$

- En donde E representa una expresión booleana arbitraria, sirven para simplificar expresiones booleanas.

EJERCICIO

- Utilizando técnicas algebraicas minimizar el circuito que tiene como salida la siguiente tabla lógica

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

¿Cuál es la expresión que representa la función f?