

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Maestría en Control y Automatización



Identificación de sistemas ICA611

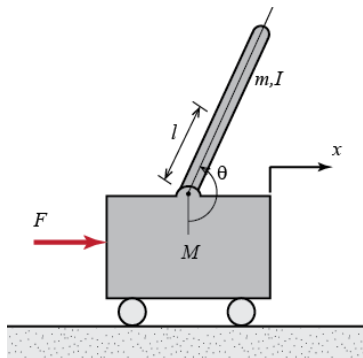
Título : Identificación en lazo cerrado

Nombre: Dimel Arturo Contreras Martínez

Código: 20156458

Profesor: Dr. Juan Sotomayor Moriano

Fecha Entrega: 14 de Diciembre del 2015



2015

LABORATORIO 5

IDENTIFICACION EN LAZO CERRADO

1. OBJETIVOS

- Conocer y experimentar con las técnicas de identificación en lazo cerrado
- Reconocer las diferencias, ventajas y desventajas de los métodos en lazo cerrado

2. FUNDAMENTO DE LAS TECNICAS EN LAZO CERRADO

Los sistemas en lazo cerrado se diferencian por la inclusión de un lazo de realimentación, el cual causa la correlación entre las perturbaciones existentes en el sistema y la entrada al sistema en la forma de acción de control.

Una tercera función de transferencia debe considerarse para el controlador, el cual puede ser conocido o desconocido. En la figura 1 se muestra el diagrama de bloques esencial para un proceso en lazo cerrado.

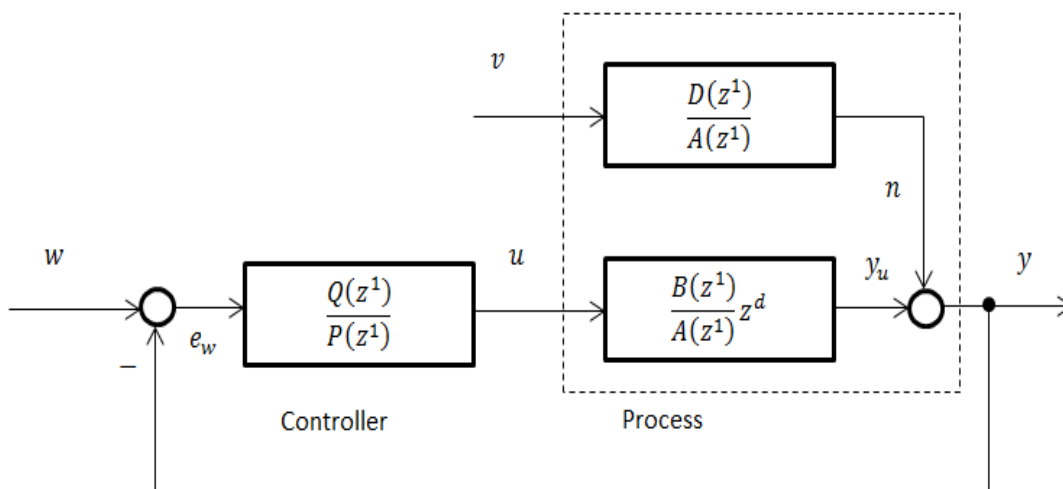


Figura 1. Sistema de lazo cerrado, la inclusión de $A(z)$ en el filtro de la perturbación simplifica el procedimiento.

El lazo cerrado puede ser esencial en sistemas donde la planta es inestable o no se puede quitar la realimentación por cuestiones prácticas.

3. TECNICAS DE IDENTIFICACION EN LAZO CERRADO.

Método Directo:

El método directo es la aproximación más simple al problema de la identificación en lazo cerrado, ya que ignora los efectos de la realimentación e implementa una identificación tradicional basada en los modelos usados en lazo abierto.

Método Indirecto:

En la identificación por el método indirecto se usa la señal de referencia (w) y la salida del sistema (y) los cuales se encuentran en lazo abierto, el modelo del controlador y un especial cuidado especial cuidado con la presencia de elementos no lineales debe tenerse.

Método de Identificación Conjunta de Entrada y Salida

En la identificación por el método conjunto de entrada y salida se tiene en cuenta el modelado conjunto de la entrada y salida como respuestas a la señal de setpoint.

4. ENSAYOS CON LA IDENTIFICACION EN LAZO CERRADO

4.1 Identificación mediante el método directo sin señal de test:

La identificación mediante el método directo se basa en la medición de las señales ensayadas en la entrada (señal de control) y la salida ($y(t)$) del sistema en lazo cerrado. Para ello las conexiones del ensayo realizado se muestran en la figura 2.

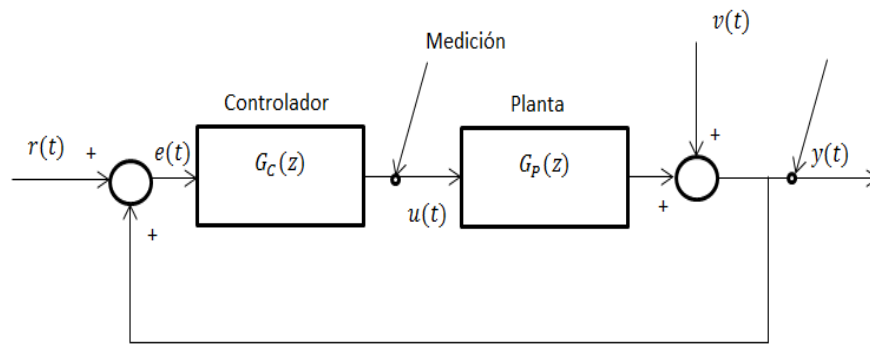


Figura 2. Esquema de ensayo para identificación directa sin señal adicional de test.

En este caso podemos realizar una identificación usando directamente las señales $u(k)$ e $y(k)$, y usando cualquiera de los métodos tradicionales. El conocimiento del controlador no es necesario.

4.1.1. Identificación usando un modelo ARX

En este caso podemos emplear el identificador ARX implementado en el laboratorio anterior, para ello complementamos el esquema presentado en la figura 3, los subsistemas incluidos en el esquema se muestran en la figura 4.

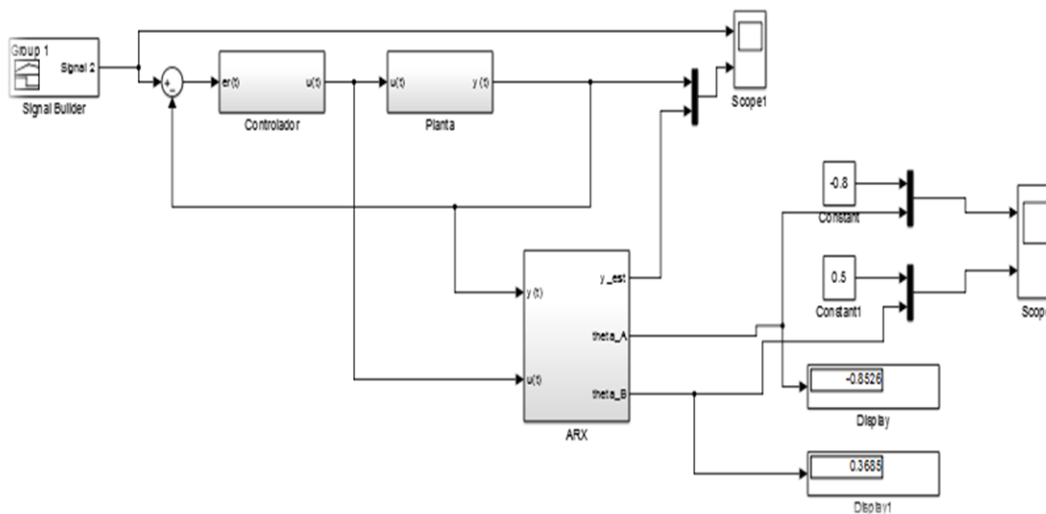


Figura 3. Diagrama de simulación, identificación directa usando modelo ARX.

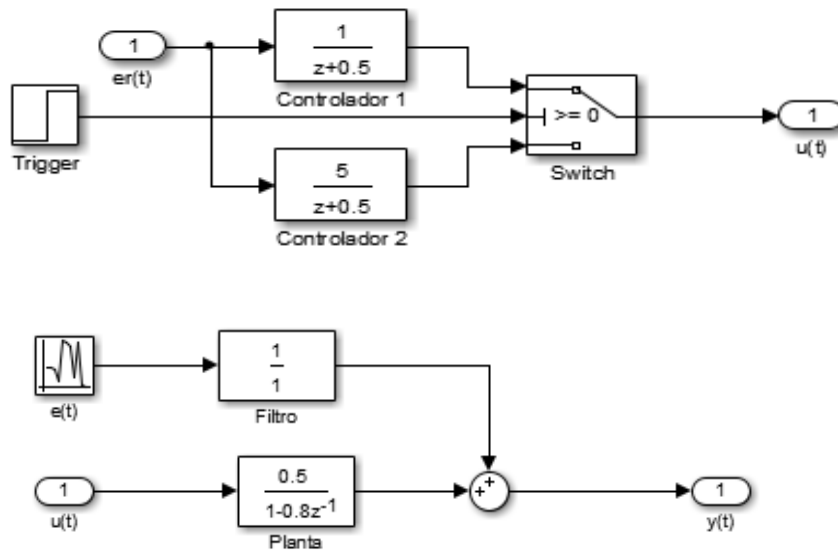


Figura 4. Subsistemas de diagrama en figura 3.

La identificación directa puede realizarse en este caso dado que se cumple con los dos requisitos para la convergencia, al incluir la presencia de dos reguladores para la identificación.

4.1.2. Identificación usando un modelo ARMAX

El procedimiento para la identificación usando el modelo ARMAX es el mismo que en el caso anterior, las entradas al identificador son $u(t)$ e $y(t)$, el diagrama empleado para el ensayo se muestra en la figura 5, y los subsistemas empleados en el sistema en la figura 6.

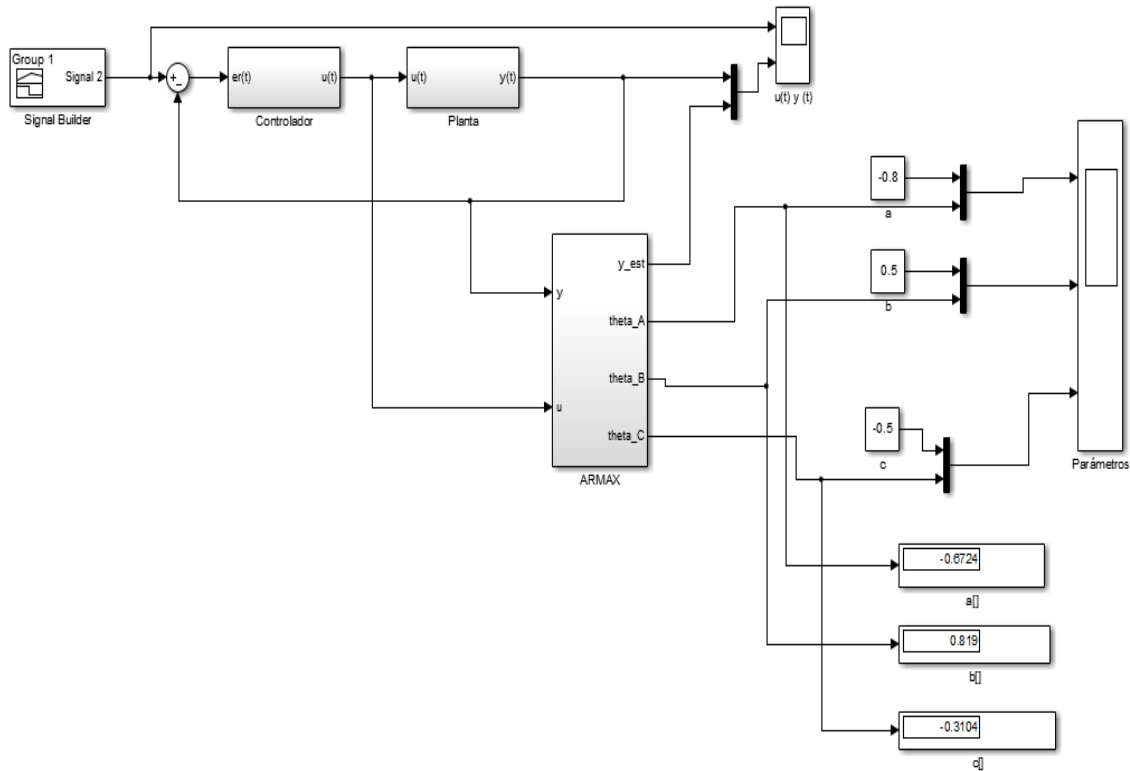


Figura 5. Diagrama de simulación, identificación directa usando modelo ARMAX.

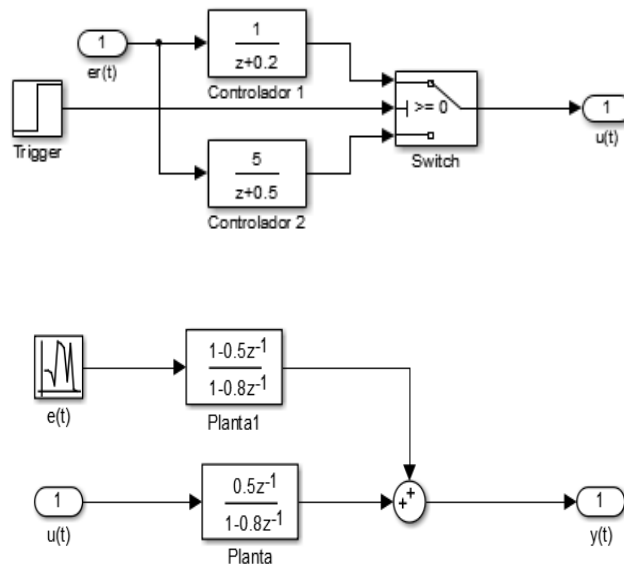


Figura 6. Subsistemas de diagrama en figura 5.

4.2. Identificación usando el método indirecto sin señal de test:

La identificación mediante el método indirecto usa la frecuencia como entrada al sistema y salida $y(t)$ por lo cual se puede considerar el ensayo como en lazo abierto. El diagrama del ensayo se muestra en la figura 7.

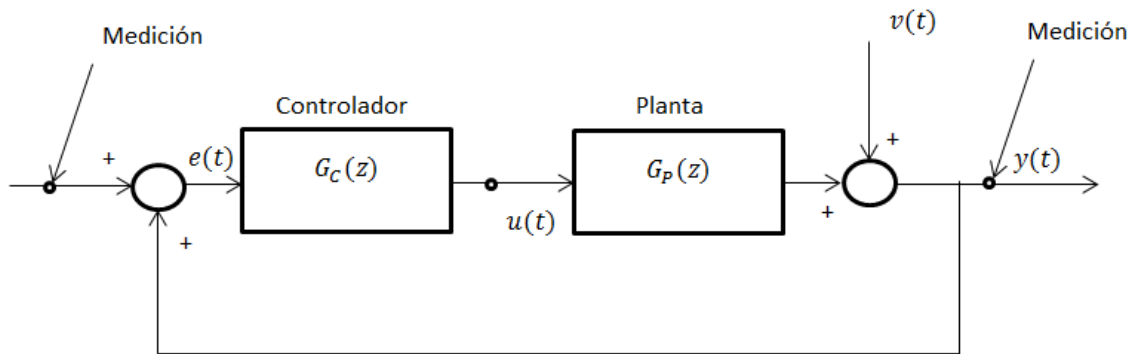


Figura 7. Esquema de ensayo para identificación indirecta sin señal adicional de test.

4.2.1. Identificación usando un modelo ARX

Para la identificación usando un modelo ARX utilizamos el diagrama implementado en el laboratorio anterior. No obstante se adapta este sistema para el manejo de un modelo aumentado, en este caso con $n_a = 2$ y $n_b = 2$.

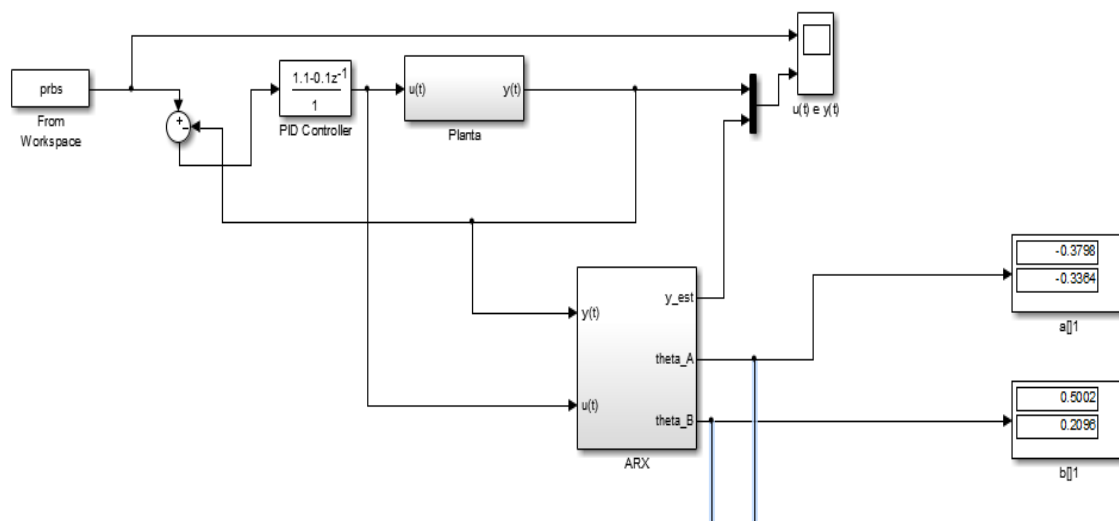


Figura 8. Diagrama de simulación, identificación indirecta (parte 1).

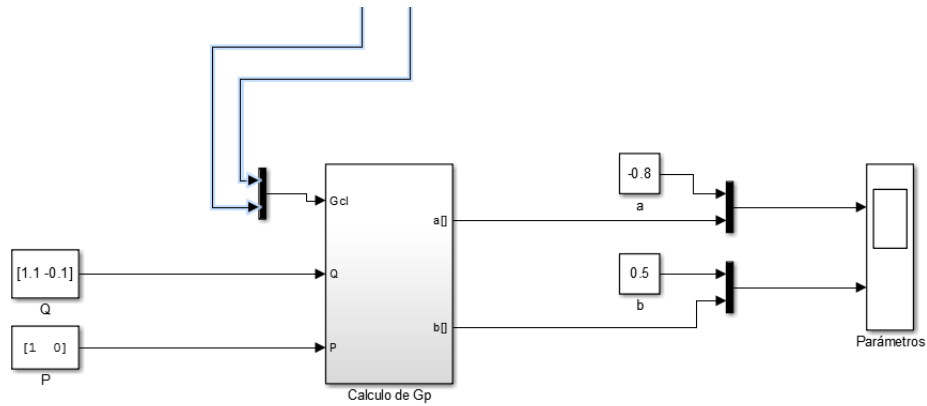


Figura 9. Diagrama de simulación, identificación indirecta (parte 2).

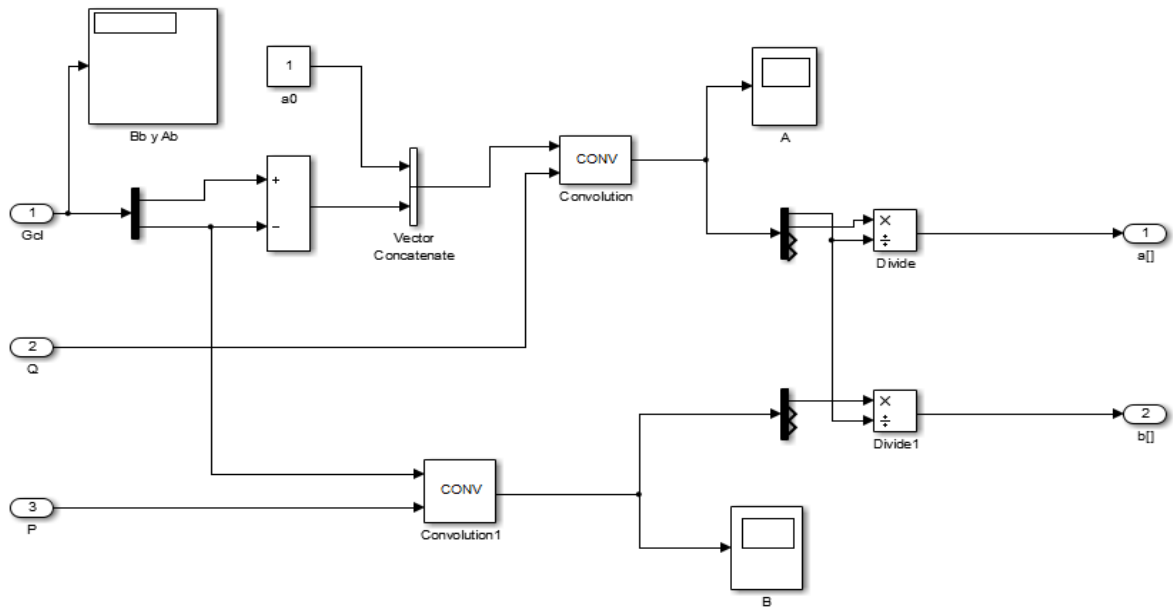


Figura 10. Subsistemas de diagramas de figuras 8 y 9.

4.2.2. Identificación usando un modelo ARMAX

La implementación del método indirecto de la identificación en lazo cerrado utilizando el modelo ARMAX se realiza de forma muy parecida en este caso, la adaptación del modelo ARMAX a una estructura con $n_a = 2$, $n_b = 2$ y $n_c = 2$ es necesaria para la identificación de la función de transferencia en lazo cerrado.

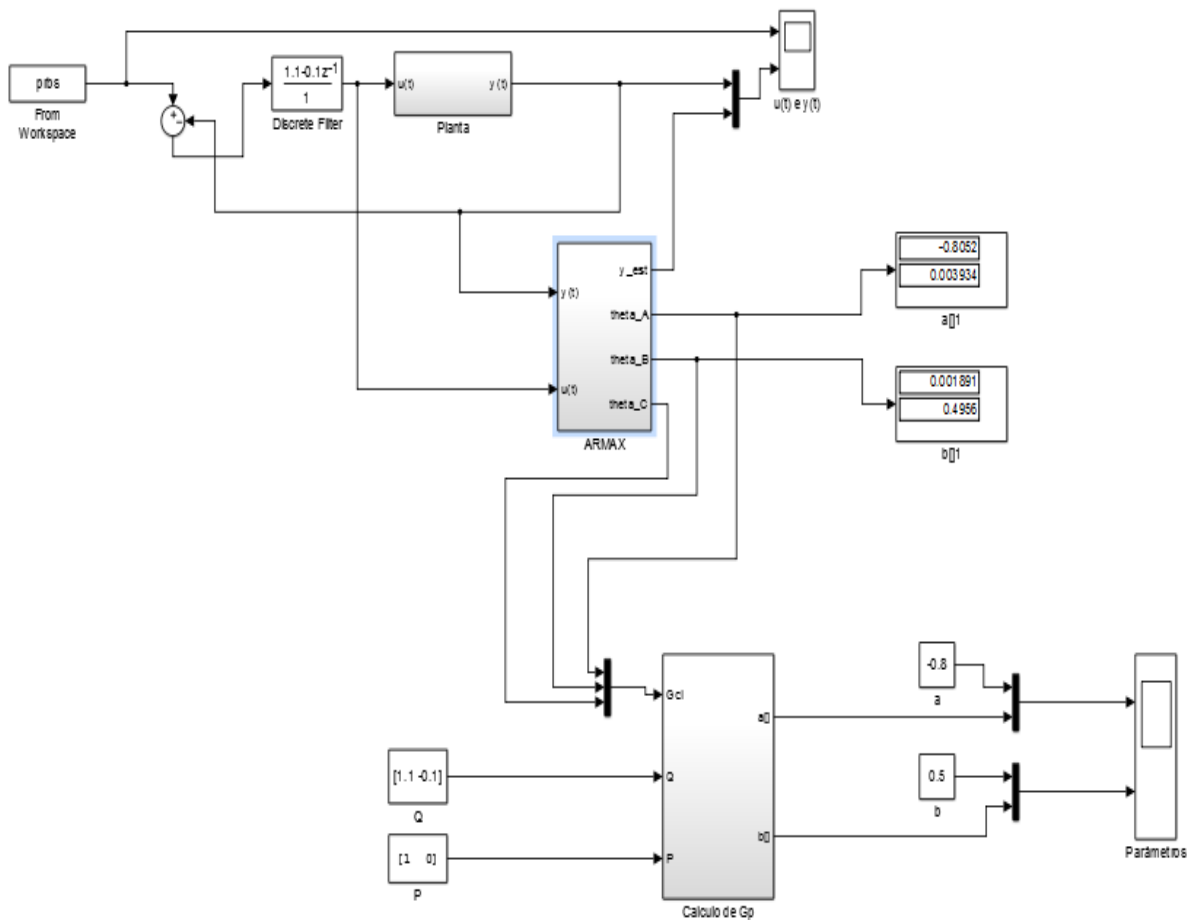


Figura 11. Diagrama de simulación, identificación indirecta usando modelo ARMAX.

5. INFORME

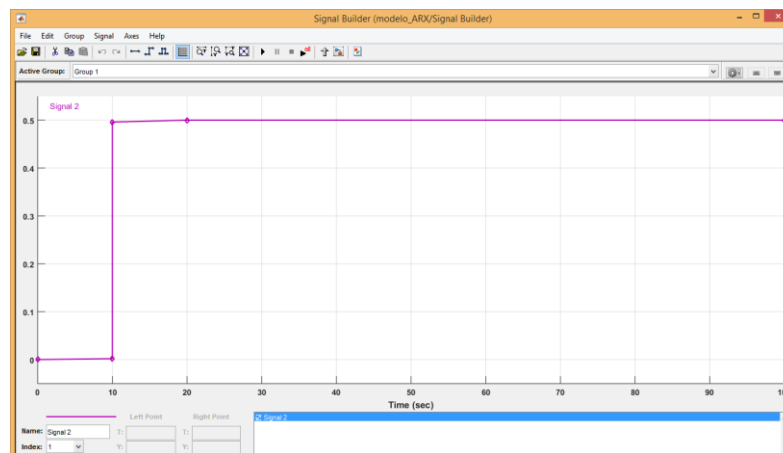
I. COMPARE LOS TIPOS DE IDENTIFICACIÓN EN LAZO CERRADO ENSAYADOS Y ENUNCIE SUS CONCLUSIONES AL RESPECTO.

A. En el enfoque directo

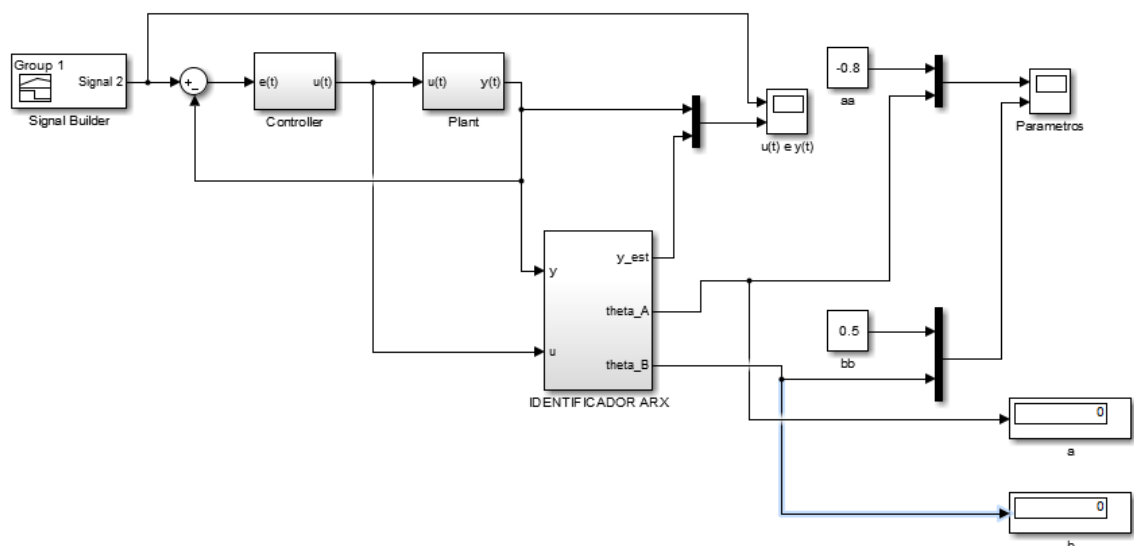
El método se aplica directamente a los datos medidos de entrada y salida, y no se hacen suposiciones en absoluto de como los datos fueron generados.

A.1. Identificación directa usando modelo ARX

Se utiliza como entrada al sistema en lazo cerrado una entrada escalón construida con el Signal Builder, de la siguiente manera:

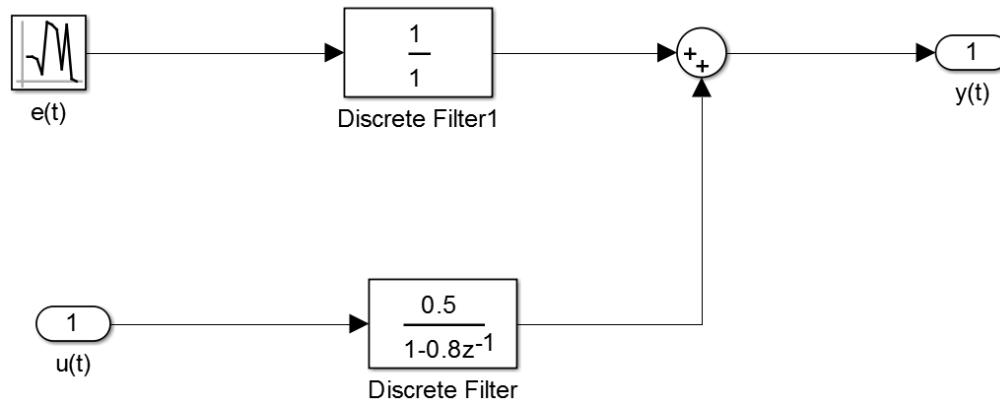


El esquema de implementación del identificador ARX: ($\lambda = 0.995$)



Identificación de Sistemas _ Identificación en lazo cerrado

La planta es la siguiente:



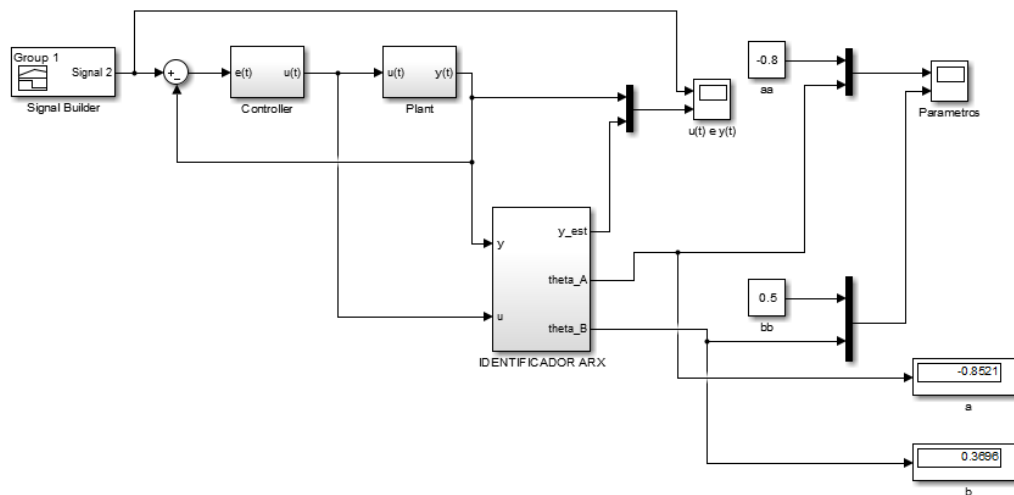
El ruido posee media "0" y covarianza "0.001".

El modelo de la planta a identificar debería de entregar: $\theta_a = -0.8$; $\theta_b = 0.5$

Estructura ARX:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

El resultado obtenido es:

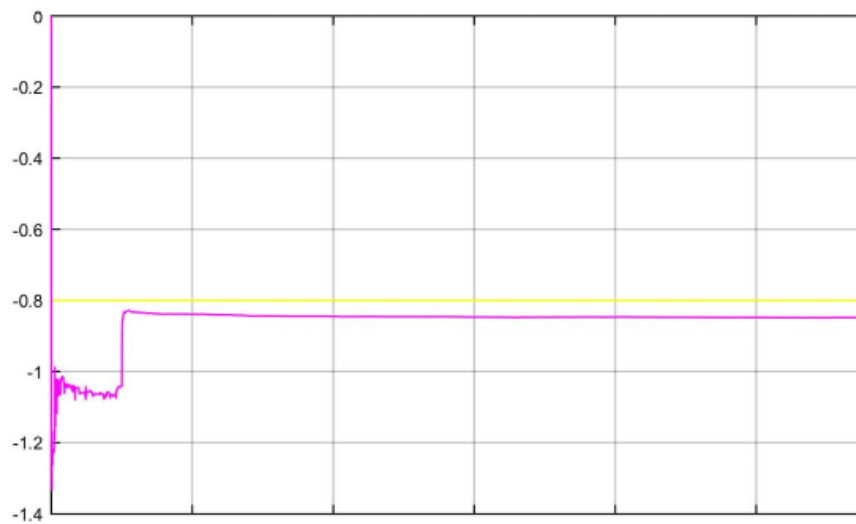


Resulta el valor convergente:

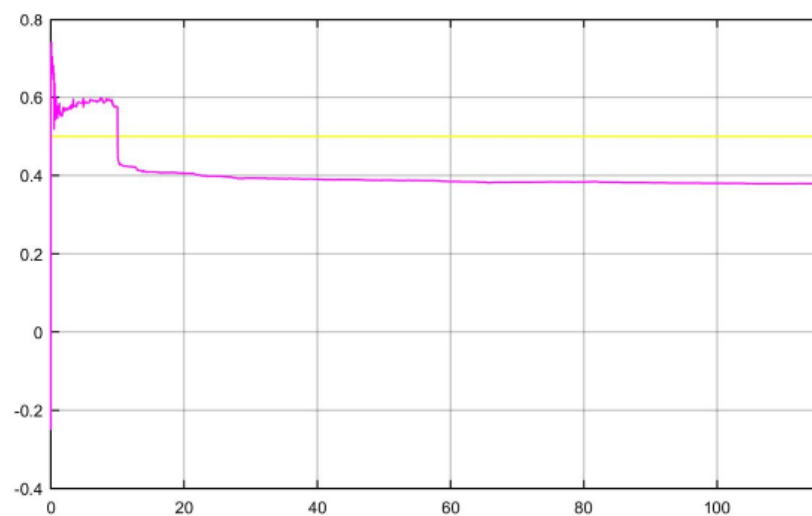
$$\hat{\theta}_a = -0.8521$$

$$\hat{\theta}_b = 0.37$$

- La evolución de θ_a



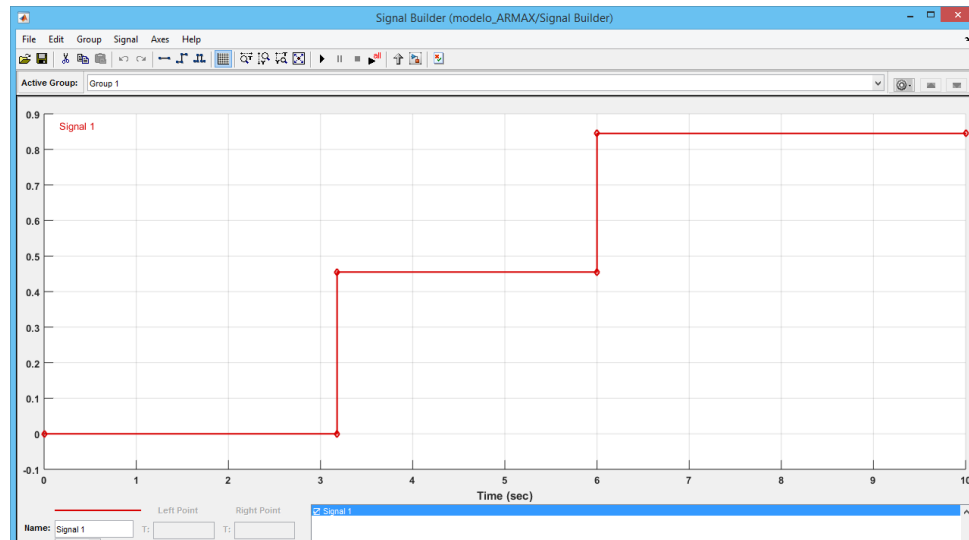
- La evolución de θ_b



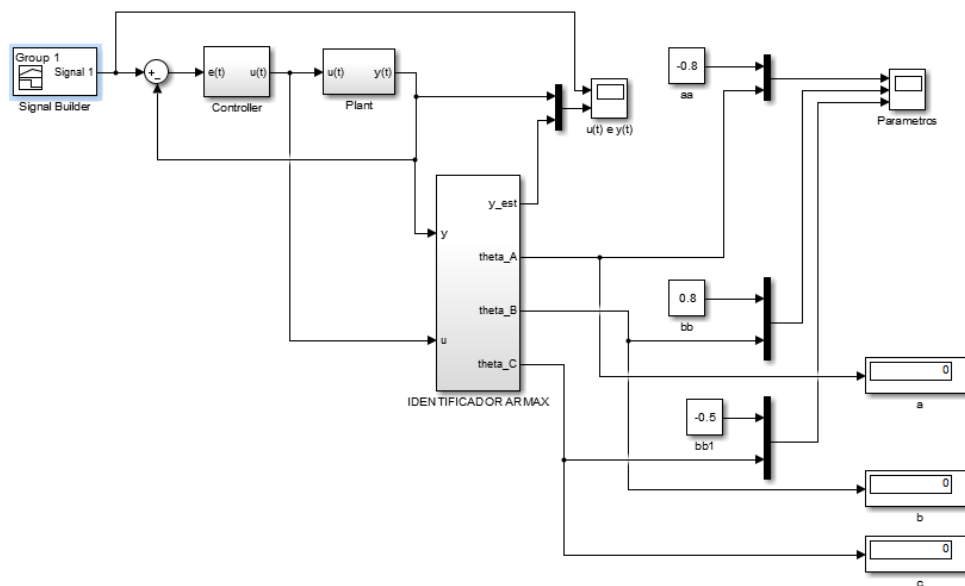
Identificación de Sistemas _ Identificación en lazo cerrado

A.2. Identificación directa usando modelo ARMAX

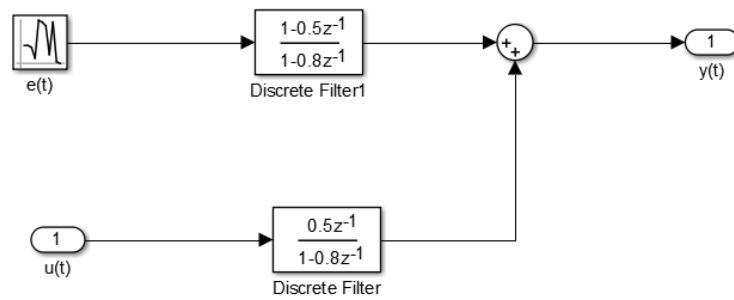
Se utiliza como entrada al sistema en lazo cerrado una entrada escalón construida con el Signal Builder, de la siguiente manera:



El esquema de implementación del identificador ARMAX: ($\lambda = 0.995$)



Identificación de Sistemas _ Identificación en lazo cerrado



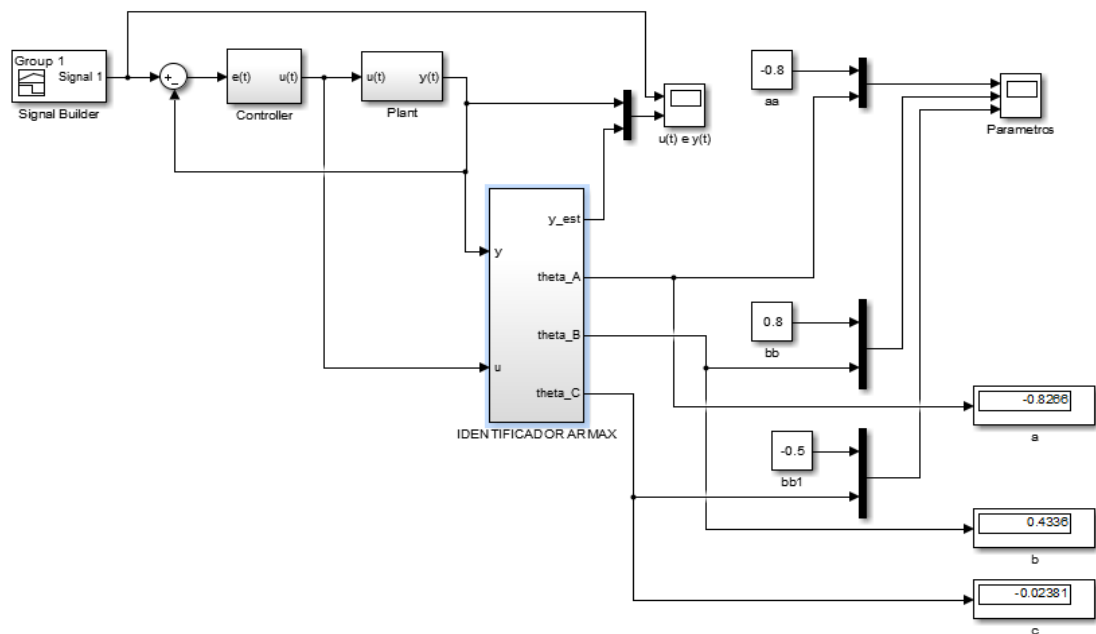
El ruido posee media "0" y covarianza "0.001".

El modelo de la planta a identificar debería de entregar: $\theta_a = -0.8$; $\theta_b = 0.5$

Estructura ARMAX:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

El resultado obtenido es:



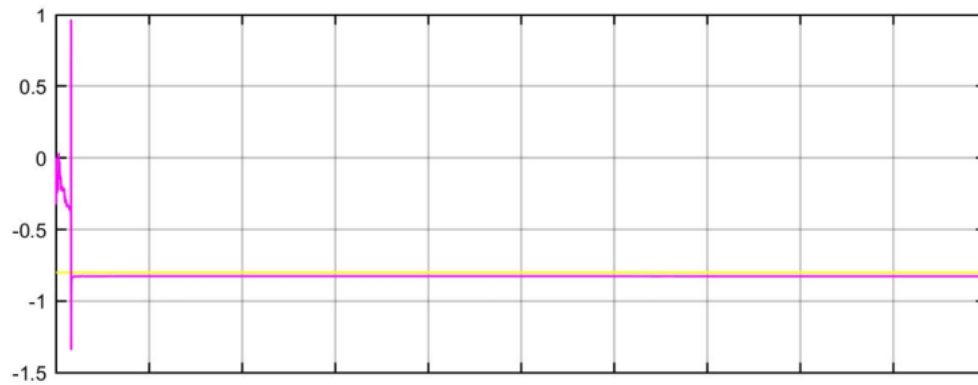
Resulta el valor convergente:

$$\hat{\theta}_a = -0.826$$

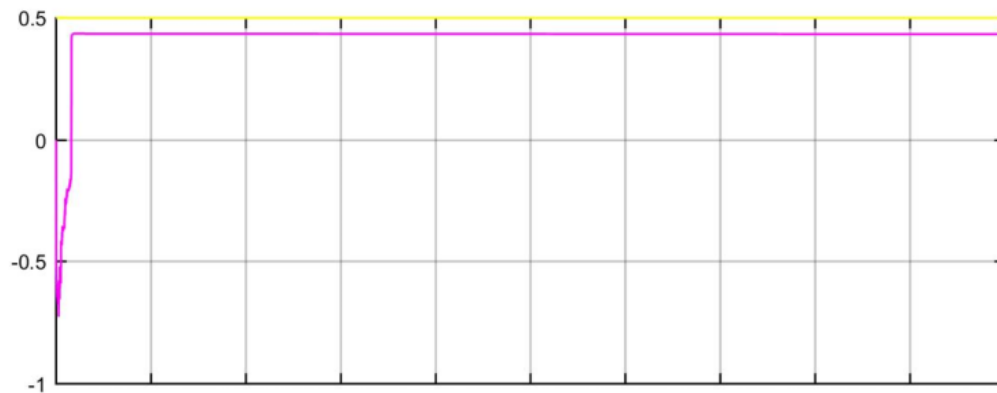
$$\hat{\theta}_b = 0.434$$

$$\hat{\theta}_c = -0.029$$

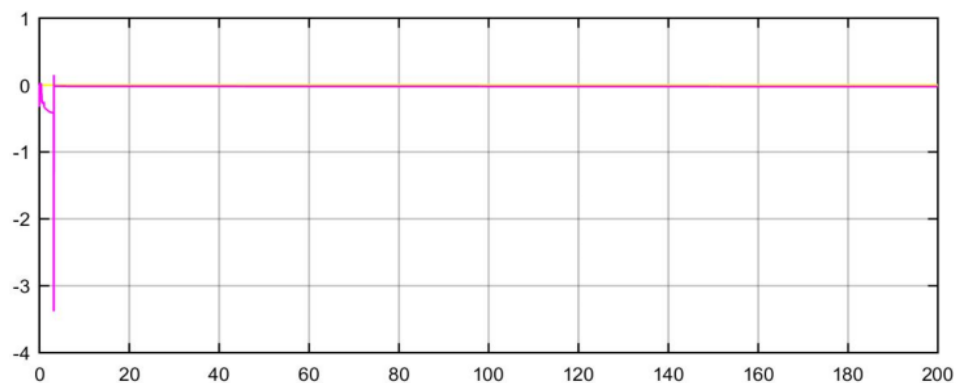
- La evolución de θ_a



- La evolución de θ_b



- La evolución de θ_c



CONCLUSIONES:

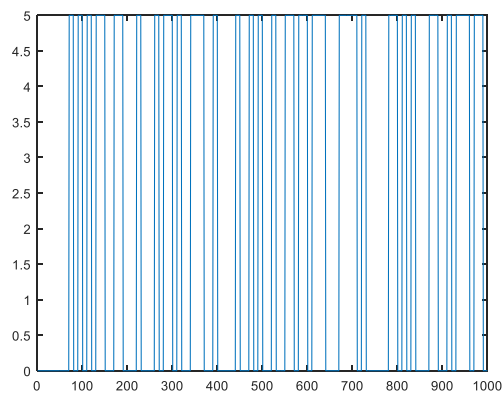
- El modelo ARMAX directo entrega resultados más próximos al real que el modelo ARX directo.
- El modelo, tanto ARX como ARMAX, se eligió de primer orden (igual al orden de la planta) con lo cual se obtuvo buena aproximación.
- Con factor de olvido más cercano a 1 se obtienen mejores resultados.

B. El método indirecto

Supone que se conoce perfectamente el controlador de realimentación usado en el experimento de identificación, y la idea es identificar el sistema en lazo cerrado y calcular los parámetros de lazo abierto de esta estimación, utilizando el conocimiento del controlador.

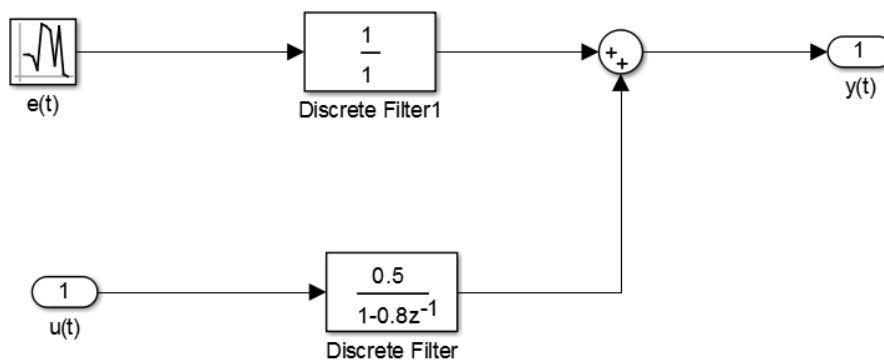
Se utilizó como señal de entrada una señal **PRBS**:

```
U = idinput(1000, 'PRBS', [0,0.1], [0 5]);  
T = (0:1:999)';  
prbs = [T U]  
lambda = 0.995
```



B.1. Identificación indirecta usando modelo ARX

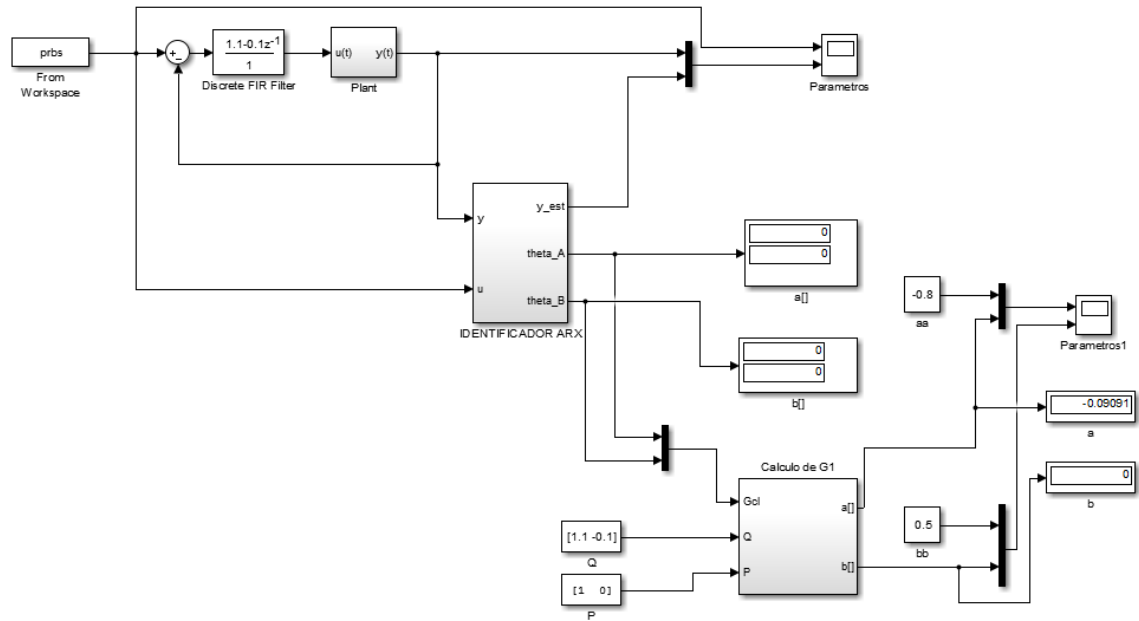
Planta:



Controlador:

$$K(z) = 1.1 - 0.1z^{-1}$$

Esquema de implementación ARX: ($\lambda = 0.995$):



El ruido posee media "0" y covarianza "0.001".

El modelo de la planta a identificar debería de entregar: $\theta_a = -0.8$; $\theta_b = 0.5$

Estructura ARX:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)}$$

$$\frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)} = \frac{\mathbf{Gcl}_b(z)}{\mathbf{Gcl}_a(z)}$$

Colocando como fracciones, de numerador y denominador:

$$G_c(z) = \frac{Q}{P}$$

$$G_p(z) = \frac{B}{A} \text{ (PLANTA BUSCADA)}$$

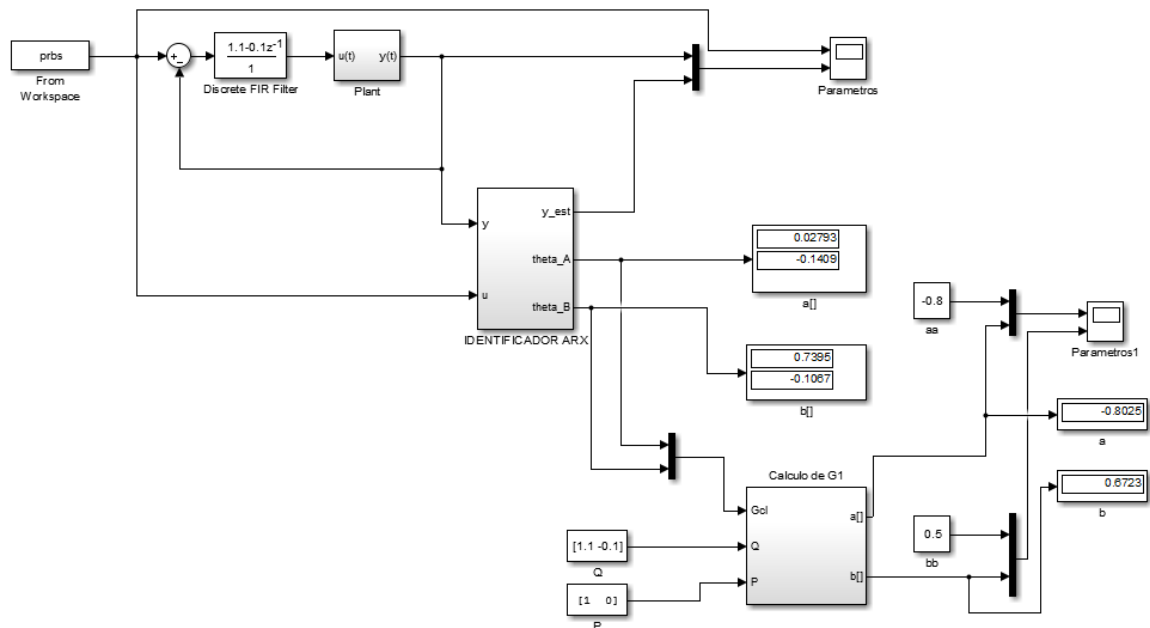
$$\frac{\frac{Q}{P} \frac{B}{A}}{1 + \frac{Q}{P} \frac{B}{A}} = \frac{\mathbf{Gcl}_b(z)}{\mathbf{Gcl}_a(z)}$$

Identificación de Sistemas _ Identificación en lazo cerrado

Entonces:

$$\frac{B}{A} = \frac{Gcl_a}{Gcl_a - Gcl_b} x \frac{P}{Q}$$

El resultado obtenido es:

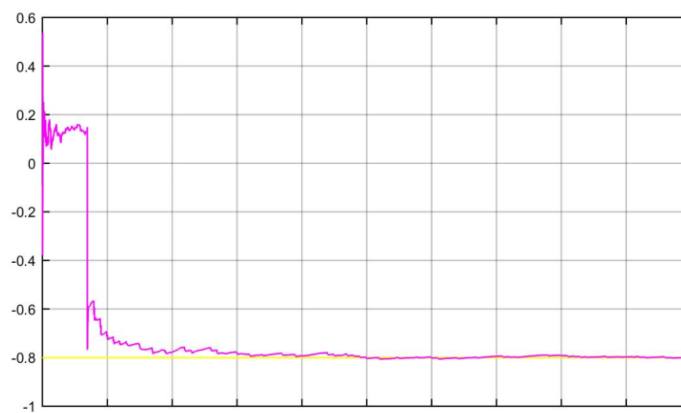


Resulta el valor convergente:

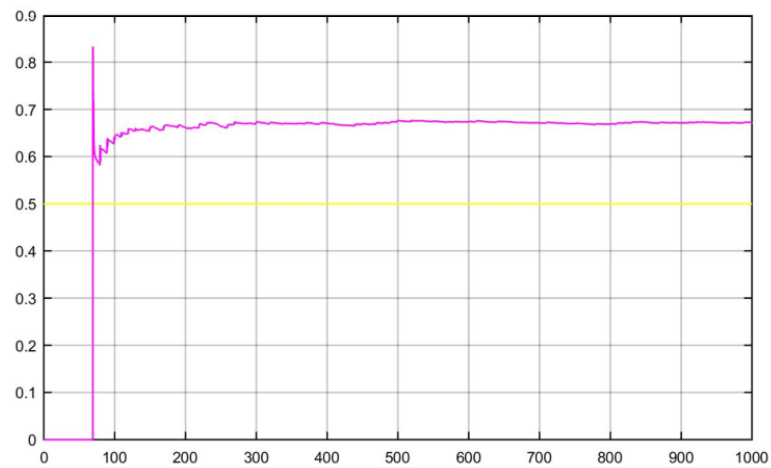
$$\hat{\theta}_a = -0.802$$

$$\hat{\theta}_b = 0.672$$

- La evolución de θ_a

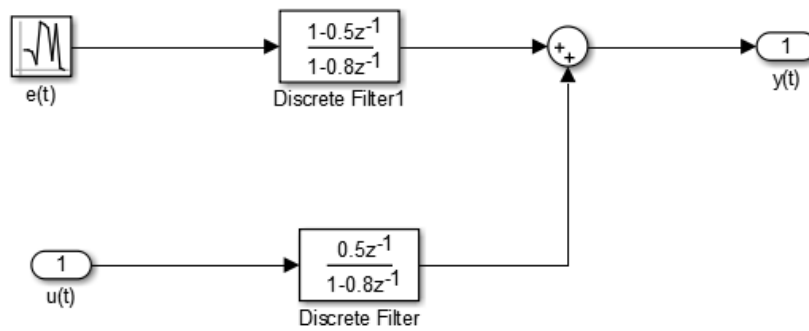


- La evolución de θ_b



B.2. Identificación indirecta usando modelo ARMAX

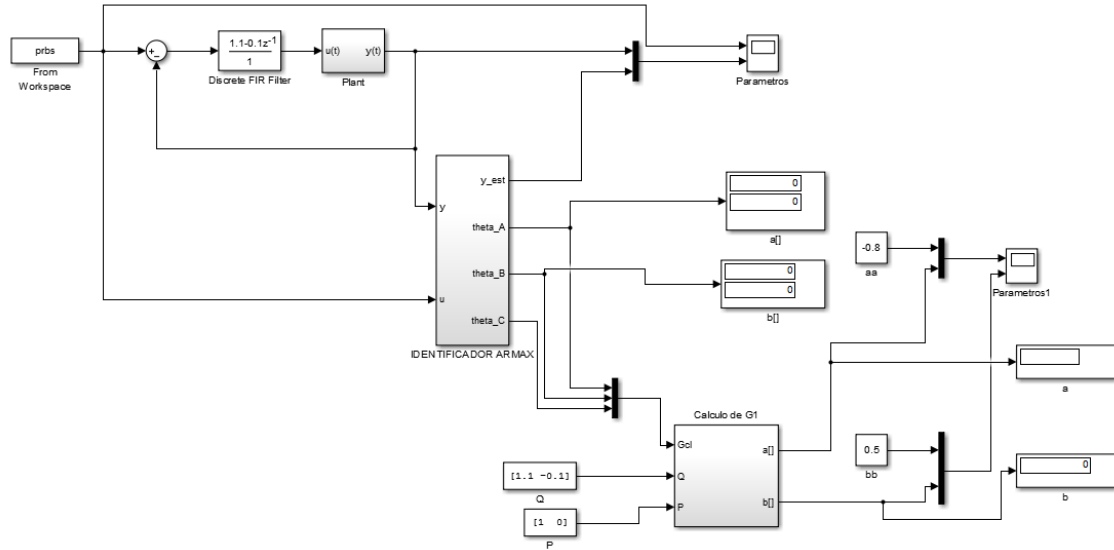
Planta:



Controlador:

$$K(z) = 1.1 - 0.1z^{-1}$$

Esquema de implementación ARMAX: ($\lambda = 0.995$):



El ruido posee media “0” y covarianza “0.001”.

El modelo de la planta a identificar debería de entregar: $\theta_a = -0.8$; $\theta_b = 0.5$

Estructura ARMAX:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$$

Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Gc(z)Gp(z)}{1 + Gc(z)Gp(z)}$$

$$\frac{Gc(z)Gp(z)}{1 + Gc(z)Gp(z)} = \frac{Gcl_b(z)}{Gcl_a(z)}$$

Colocando como fracciones, de numerador y denominador:

$$Gc(z) = \frac{Q}{P}$$

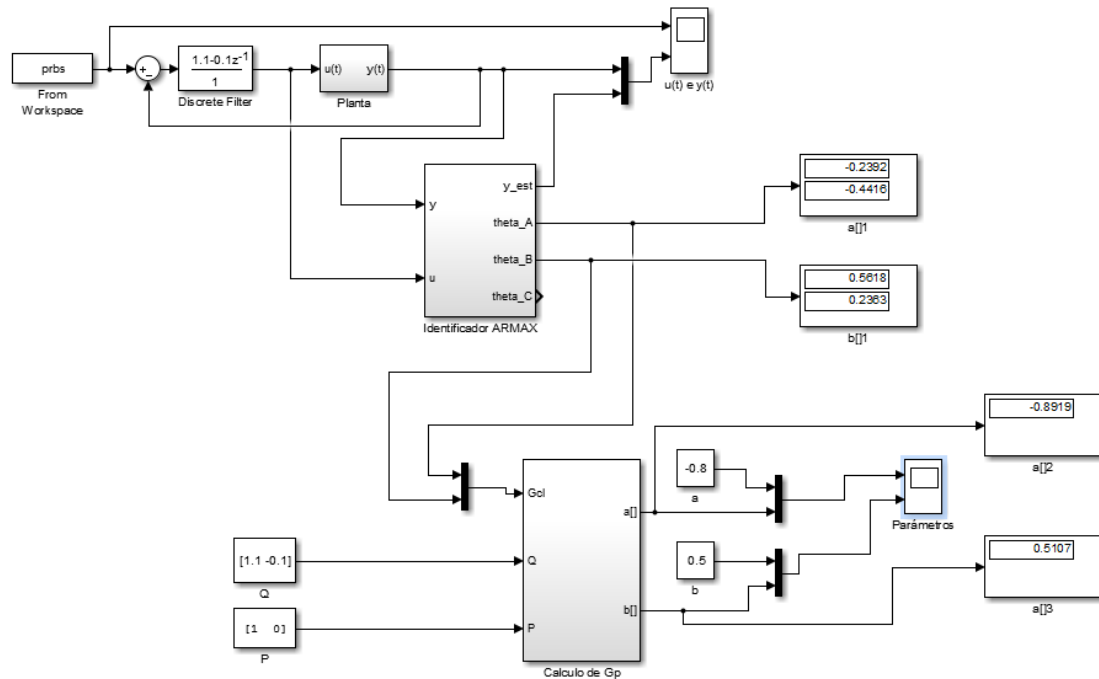
$$Gp(z) = \frac{B}{A} \text{ (PLANTA BUSCADA)}$$

$$\frac{\frac{Q}{P} \frac{B}{A}}{1 + \frac{Q}{P} \frac{B}{A}} = \frac{Gcl_b(z)}{Gcl_a(z)}$$

Entonces:

$$\frac{B}{A} = \frac{Gcl_a}{Gcl_a - Gcl_b} \times \frac{P}{Q}$$

El resultado obtenido es:

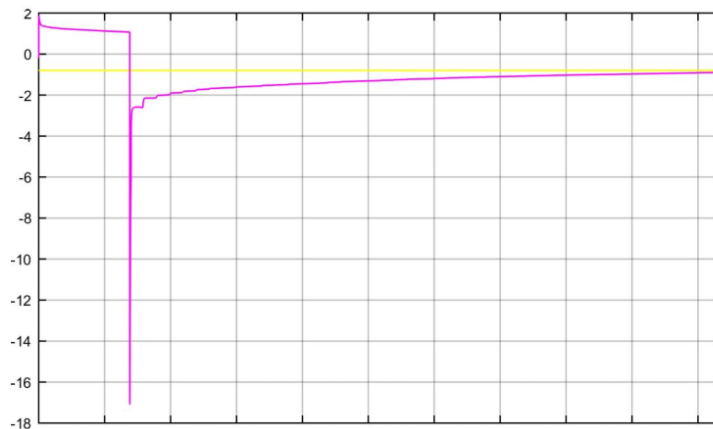


Resulta el valor convergente:

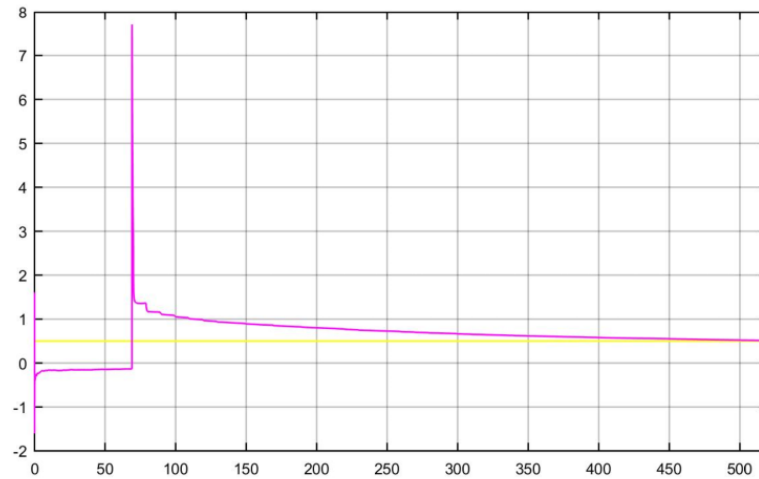
$$\hat{\theta}_a = -0.8919$$

$$\hat{\theta}_b = 0.5107$$

- La evolución de θ_a



- La evolución de θ_b



CONCLUSIONES:

			-0.8	0.5			
		ARX			ARMAX		
Método	Parametros	Estimación	error estimación		Parametros	error estimación	
				Norma error			Norma error
Indirecto	$\hat{\theta}_a$	-0.802	0.002		-0.8919	0.0919	
	$\hat{\theta}_b$	0.672	-0.172	0.029588	0.5107	-0.0107	0.0085601
Directo	$\hat{\theta}_a$	-0.8521	0.0521		-0.826	0.026	
	$\hat{\theta}_b$	0.37	0.13	0.0196144	0.434	0.066	0.005032

- Se trabajó con modelos de segundo orden para el ARX Y ARMAX, obteniendo resultados más alejados que en el método directo.
- El método de identificación indirecta demora más en converger.

II. Mencione las principales ventajas y desventajas en cada caso.

Método directo:

El método directo es solamente aplicado con el método de predicción de error y algunos de los métodos de subespacio. La razón para esto es por la inevitable correlación entre la entrada y el ruido, lo cual, como hemos visto, no permite utilizar los otros métodos.

- ***Ventajas***

No requiere conocer el controlador sino que trabaja como un proceso de identificación en lazo abierto, con entrada “ u ” y salida “ y ”.

No se requiere de un algoritmo especial, utiliza los métodos de lazo abierto.
Converge más rápido que el método indirecto.

- ***Desventajas***

La retroalimentación causa que exista un grado de correlación entre la entrada a la planta u (que es salida del controlador) y el ruido. Por eso se usa la estimación del ruido.

Método indirecto:

Con el enfoque indirecto el problema del lazo cerrado se convierte en uno de lazo abierto donde la señal de referencia (la cual desempeña el papel de una entrada) no está correlacionada con el ruido. Es así que este enfoque puede ser usado junto con todos los métodos para lazo abierto por ejemplo el método de análisis espectral.

- ***Ventajas***

Se trabaja la identificación como una identificación en lazo abierto con entrada(r) y salida (y), estando no correlacionado con el ruido.

Además gracias a sus cualidades se puede trabajar con entrada “ r ” tipo PRBS.

Se usa cuando no se puede conocer la señal “ u ”.

- ***Desventajas***

Se requiere conocer con exactitud el controlador.

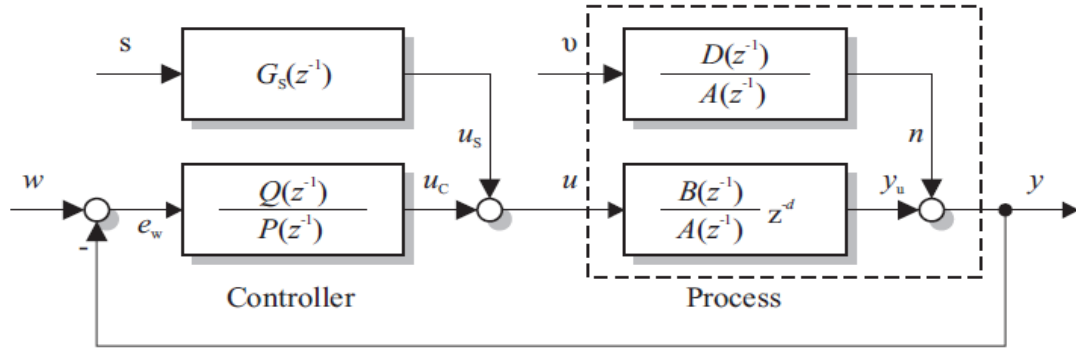
Se tiene que cumplir con la condición de que el controlador debe poseer orden lo suficientemente grande.

La convergencia del método es más lenta que la directa.

El resultado obtenido posee mayores diferencias que con el método directo.

III. Investigue sobre la implementación de la identificación en lazo cerrado utilizando señales adicionales de test.

Para la implementación del método de identificación en lazo cerrado con señal de test adicional se deberá inyectar una señal de prueba externa en el lazo de control con en la siguiente figura.



En este caso en la entrada $u(k)$ del proceso viene dada por:

$$u(k) = u_c(k) + u_s(k)$$

Donde

$$u_c(z) = -\frac{Q(z^{-1})}{R(z^{-1})}y(z) .$$

La señal adicional $u_s(z)$ puede ser generada por un filtro especial a partir de la señal $s(z)$,

$$u_s(z) = G_s(z)s(z) .$$

Esta configuración permite tratar diferentes situaciones experimentales de forma simultánea. Si $G_s(z) = G_R(z)$, entonces $s(k) = w(k)$ es el setpoint. $s(k)$ También puede ser una perturbación que es causada por el controlador como por ejemplo, en el caso de los controladores no técnicos. Finalmente, si una señal de prueba está actuando directamente sobre la entrada del proceso, a continuación, $G_s(z) = 1$ y $s(k) = u_s(k)$.

$u_s(k)$ se puede generar de diferentes maneras. Para las siguientes derivaciones, debe sin embargo, sólo debe garantizarse que $u_s(k)$, que es una señal externa que actúa sobre el control de lazo, no está correlacionado con la perturbación $v(k)$. La señal adicional $s(k)$ no es necesario que sea medible por ahora.

Identificación de Sistemas _ Identificación en lazo cerrado

El proceso de nuevo se puede identificar indirectamente basado en mediciones de $y(k)$ o directamente con las mediciones de $u(k)$ como también $y(k)$. Las siguientes derivaciones referidas a la identificación directa como la identificación indirecta no proporcionan cualquier beneficio.

La función de transferencia en lazo cerrado está dada como:

$$y(z) = \frac{DP}{AP + Bz^{-d}Q}v(z) + \frac{Bz^{-d}P}{AP + Bz^{-d}Q}u_s(z) .$$

De esto se desprende

$$(AP + Bz^{-d}Q)y(z) = DPv(z) + Bz^{-d}Pu_s(z) .$$

Podemos obtener

$$A(z^{-1})P(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})u(z) = D(z^{-1})P(z^{-1})v(z) . \quad (13.2.6)$$

Después de cancelar el polinomio $P(z^{-1})$, la misma relación como para el lazo abierto, es decir.

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = D(z^{-1})v(z)$$

Resulta, $u(z)$ no es generada solo por el controlador, sino también por una señal de test externa $u_s(z)$. Por lo tanto la ecuación de diferencias se da como

$$\begin{aligned} u(k-d-1) = & -p_1u(k-d-2) - \dots - p_\mu u(k-\mu-d-1) \\ & -q_0y(k-d-1) - \dots - q_v y(k-v-d-1) \\ & + u_s(k-d-1) - \dots - p_1u_s(k-d-2) \\ & \dots + p_\mu u_s(k-\mu-d-1) \end{aligned}$$

Si $u_s(k) \neq 0$, entonces $u(k-1)$ es para cualquier orden arbitrario μ y v no linealmente dependiente de $\psi^T(k)$. Por lo tanto el procedimiento es directamente identificable, siempre y cuando la señal externa $u_s(k)$ pueda excitar la dinámica del proceso interesado. También tenga en cuenta que no se suponía que la señal de prueba adicional $u_s(z)$ es medible. Para una prueba de señal externa $u_s(k)$ la condición 2 de identificabilidad que fue formulada en la última sección ya no es importante. Sin embargo La Condición 1 de Identificabilidad, todavía tiene que ser cumplida.

Se pueden utilizar los mismos métodos de identificación de lazo abierto que se basan en la predicción del error $e(k)$ también en la identificación de lazo cerrado, si una señal externa de $u_s(k)$ se inyecta en el lazo de control. El controlador no debe ser conocido y también la señal

adicional u_s no tiene por qué ser medible. Estos resultados son También válidos para un filtro de ruido de forma arbitraria $D(z^{-1}) = C(z^{-1})$.

Método directo con señales de test.

Si una señal externa es inyectada en el lazo de control, luego solo hay que observar la condición 1 de indentificabilidad y puede ignorar la condición 2. Si $u(k)$ y $y(k)$ pero no la señal adicional $u_s(k)$, son utilizadas para la estimación de parámetros, entonces se puede utilizar los métodos de Mínimos cuadrados Recursivo y de máxima verosimilitud Recursivo. Si medible, la señal adicional $u_s(k)$ puede ser usada para formar variables instrumentales para el método Recursivo de Variables Instrumentales. Este método puede ser usado de la misma forma que los filtros de ruido como en el caso del lazo abierto.

Método Indirecto con señales de test.

Si el controlador es completamente conocido, es teóricamente posible identificar un modelo de setpoint $w(k)$ a salida $y(k)$ y luego determinar la función de transferencia de la planta de los conocimientos de la función de transferencia identificada de todo el proceso de lazo cerrado y la función de transferencia del controlador. Como $w(k)$ y $y(k)$ no están correlacionados, uno puede en este caso usar todos los métodos que son aptos para identificación de sistemas de lazo abierto.

IV. Investigue sobre la implementación del tercer método de identificación en lazo cerrado (identificación conjunta de entrada y salida) y enuncie sus principales ventajas y desventajas.

El tercer enfoque, el enfoque conjunto de entrada – salida, equivale al modelado de la entrada y salida de forma conjunta como salidas de un sistema aumentado manejado por una señal de referencia y un ruido no medible. Dada una estimación del sistema aumentado, el modelo de lazo abierto (y el controlador) puede ser resuelto.

El tercer enfoque principal para identificación en lazo cerrado es el llamado enfoque de identificación conjunta entrada-salida. Las suposiciones básicas en este enfoque es que la entrada es generada usando un generador de una cierta forma. Los conocimientos exactos del regulador de parámetros no es necesario, esto es una ventaja sobre el método indirecto donde esto si es necesario.

Supongamos que la realimentación es lineal y dada por (15). Las expresiones de lazo cerrado para la salida y la entrada donde dado en (16) y (17) respectivamente:

$$y(t) = G_0^c(q)r(t) + S_0(q)v(t) \quad (66)$$

$$u(t) = S_0^i(q)r(t) - S_0^i(q)K(q)v(t) \quad (67)$$

La idea básica en el enfoque conjunto de entrada-salida es calcular estimaciones del sistema de lazo abierto usando estimaciones de las diferentes funciones de transferencia en (66) y (67). Un enfoque directo sería identificar el sistema de lazo cerrado y la función de la sensibilidad de entrada y formar la estimación $\hat{G}_N = \hat{G}_N^c (\hat{S}_N^i)^{-1}$. La lógica detrás de esto es la relación $[G_0^c(S_0^i)^{-1} = G_0]$. Esta idea realmente nos recuerda a Akaike quien mostró que los datos del análisis del espectro del lazo cerrado debería ser realizado como sigue: calcular las estimaciones espectrales SISO.

$$\hat{G}_N^{yx} = \frac{\hat{\Phi}_{yx}^N}{\hat{\Phi}_x^N} \quad \text{and} \quad \hat{G}_N^{ux} = \frac{\hat{\Phi}_{ux}^N}{\hat{\Phi}_x^N} \quad (68)$$

Donde la señal x esta correlacionada con y y u , pero no correlacionada con el ruido e (una opción estándar es $x = r$) y calcular el lazo abierto como:

$$\hat{G}_N^{yu} = \frac{\hat{G}_N^{yx}}{\hat{G}_N^{ux}} = \frac{\hat{\Phi}_{yx}^N}{\hat{\Phi}_{ux}^N} \quad (69)$$

En el método conjunto entrada – salida no es necesario conocer el controlador exacto, pero debe ser conocido para obtener una cierta estructura.

Este método es comúnmente utilizado cuando la ley de realimentación es lineal. Pero puede ser aplicado también con realimentación no lineal. El precio es por supuesto que los problemas de estimación vienen a ser mucho más envueltos.

Anexo:

Joint input-output identification

Consider $y(t)$ and $u(t)$ as outputs from a multivariable system:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{11}(q^{-1}; \theta) & \mathcal{H}_{12}(q^{-1}; \theta) \\ \mathcal{H}_{21}(q^{-1}; \theta) & \mathcal{H}_{22}(q^{-1}; \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}$$

- Use innovation model: $z(t) = (y(t), u(t))^T$

$$z(t) = \mathcal{H}(q^{-1}; \theta) \bar{e}(t), \quad \mathbf{E} \bar{e}(t) \bar{e}(s)^* = \Omega(\theta) \delta_{t,s}$$

- Use PEM to identify \mathcal{H} and Ω where

$$\mathcal{H}^{-1} \text{ is asymptotically stable and } \mathcal{H}(0; \theta) = I$$

Example

Consider the system

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

where $|c| < 1$, $e(t)$ is white noise with $\mathbf{E} e^2(t) = \lambda^2$, and the feedback is

$$u(t) = -fy(t) + \nu(t)$$

where $\nu(t)$ is white noise with variance σ^2 and independent of $e(s)$

The closed loop system is given by

$$(1 + \alpha q^{-1})y(t) = bq^{-1}\nu(t) + (1 + cq^{-1})e(t)$$

where $\alpha = a + bf$ and we assume that $|\alpha| < 1$

We can write $z(t) = (y(t), u(t))^T$ as

$$z(t) = \frac{1}{1 + \alpha q^{-1}} \begin{bmatrix} 1 + cq^{-1} & bq^{-1} \\ -f(1 + cq^{-1}) & 1 + \alpha q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}$$

- \mathcal{H}^{-1} has a denominator containing $(1 + cq^{-1})(1 + \alpha q^{-1})$ which is stable
- However, $\mathcal{H}(0; \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{bmatrix}$

To obtain the innovation form, we can modify $z(t)$ as

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{1 + \alpha q^{-1}} \begin{bmatrix} 1 + cq^{-1} & bq^{-1} \\ -f(1 + cq^{-1}) & 1 + \alpha q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha q^{-1}} \begin{bmatrix} 1 + (c + bf)q^{-1} & bq^{-1} \\ f(a - c)q^{-1} & 1 + \alpha q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ -fe(t) + \nu(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We can conclude that

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q^{-1}; \theta) &= \frac{1}{1 + \alpha q^{-1}} \begin{bmatrix} 1 + (c + bf)q^{-1} & bq^{-1} \\ f(a - c)q^{-1} & 1 + \alpha q^{-1} \end{bmatrix} \\ \Omega(\theta) &= \mathbf{E} \begin{bmatrix} e(t) \\ -fe(t) + \nu(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ -fe(t) + \nu(t) \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \lambda^2 & -f\lambda^2 \\ -f\lambda^2 & f^2\lambda^2 + \sigma^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Use PEM to fit a first-order ARMA model $\hat{\mathcal{H}}$ to $z(t)$
- From the consistency of PEM, we can identify the parameters from

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}, \quad \hat{\Omega} = \Omega$$