PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Curso:

CONTROL ÓPTIMO

Tema:

Feedforward + Feedback y acción integral

Presentado por:

CONTRERAS MARTINEZ, DIMEL ARTURO

Docente:

DR. ANTONIO MORÁN

2016

1. Análisis de la respuesta de Feedback + Feedforwad al variar el peso “q”.

Modelo Feedback + Feedforward

Modelo a seguir:

Se utiliza el modelo SKY HOOK DAMPER por poseer buena respuesta.

$$\dot{Z} = \bar{A}Z + \bar{B}r$$

$$y_m = \bar{C}Z$$

Se considera el sistema de orden 2, con z_{2x1}.

$$Z = \begin{bmatrix} x_m \\ \dot{x_m} \end{bmatrix}$$

$$C = [1\ 0]$$

El sistema a controlar:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$y = CX$$

Siendo y la variable a controlar.

Seguimiento:

Para que el sistema siga al modelo a seguir, “y” debe ser igual a “ym”. Para ello se propone la función de costo:

$$J = \int_0^\infty (q(y - y_m)^2 + ru^2)dt$$

$$J = \int_0^\infty [X\ Z] \begin{bmatrix} C^T qC & -C^T q\bar{C} \\ -\bar{C}qC & -\bar{C}^T q\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} + u^T Ru$$

El vector de estado de al unir el modelo y el sistema resulta:

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \int_0^\infty \mathcal{X}^T Q\mathcal{X} + u^T Ru$$

$$u = -\mathcal{K}\mathcal{X}$$

$$\mathcal{K} = r^{-1}\mathcal{B}^T\mathcal{P}$$

$$\mathcal{K} = r^{-1}[\mathrm{B}^T\ 0]\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ {P_{12}}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

P_{11} $se\ resuelve\ mediante\ Riccati$:

$$A^T P_{11} + P_{11}A - P_{11}Br^{-1}B^T P_{11} + C^T qC = 0$$

P_{12} $se\ resuelve\ mediante\ Lyapunov$:

$$(A^T - P_{11}Br^{-1}B^T)P_{12} + P_{12}A - C^T q\bar{C} = 0$$

Luego las ganancias:

$$K_x = r^{-1}B^T P_{11}$$

$$K_z = r^{-1}B^T P_{12}$$

Entonces la señal de control es :

$$u = [K_x\ K_z]\ \mathcal{X}$$

$$u = [r^{-1}B^T P_{11} \quad r^{-1}B^T P_{12}]\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}$$

Script en Matlab

- El modelo:

```
% MODELO DE REFERENCIA: SKY-HOOK DAMPER
%Parámetros del modelo
eta = 0.90;
f = 1.5*0.4; % Cambiar factor para hacer más rápida
w = 2*pi*f;

Am = [    0       1
       -w*w    -2*eta*w ];
Bm = [    0
         w*w ];
Cm = [ 1   0 ];


rast = 0.3*ones(nt,1);          %valor de referencia que queremos
alcanzar
[Amk,Bmk] = c2d(Am,Bm,dt);      %discretizamos el sistema
```

```
%Parámetros del modelo
R = 1.1;
L = 0.0001;
Kt = 0.0573;
Kb = 0.05665;
I = 4.326e-5;
p = 0.0075;
m = 0.5*1.00;
c = 10;                      %Fricción viscosa aparece dentro del
modelo
r = 0.015;
alfa = 45*pi/180;
d = m + 2*pi*I*tan(alfa)/(p*r);
```

Matrices :

```
a22 = -c/d;
a23 = Kt*tan(alfa)/(r*d);
a32 = -2*pi*Kb/(p*L);
a33 = -R/L;
b31 = 1/L;
w21 = -1/d;


A = [ 0    1    0
      0   a22  a23
      0   a32  a33 ];          %Matriz A
B = [ 0
      0
      b31 ];                   %Matriz B
Wf = [ 0
       w21
       0 ];                    %Fricción seca actúa como una perturbación
no lineal
C = [ 1   0   0 ];
```

Ingreso del peso

```
q = input('Peso del error [y-ym]    [1e9]: ');      % 4e8
Q = [ q ];                           %Peso único
RR = [ 1 ];
```

```
%% Hallamos Kx
QQ = C'*Q*C;                        % CTqC para Riccati
P11 = are(A,B*inv(RR)*B',QQ);       %Hallamos P11 para Kx
Kfb = inv(RR)*B'*P11;               %Hallamos Kx

%% Hallamos Kz
APR = A'-P11*B*inv(RR)*B';          %Para Lyapunov
CQCm = -C'*Q*Cm;                    % -CTqCb para Lyapunov
P12 = lyap(APR,Am,CQCm);            %Hallamos P12 para Kz
Kff = inv(RR)*B'*P12;               %Hallamos Kz
```

Discretización del sistema y condiciones iniciales

```
%% Discretizamos el sistema
[Ak Bk] = c2d(A,B,dt);              %discretizamos el sistema a controlar
[Ak Wk] = c2d(A,Wf,dt);

%% Condiciones iniciales
x = [ 0;   0;   0 ];        %Valor inicial de las variables de control
xm = [ 0;   0 ];            %Valor inicial de las variables del modelo
k = 1;
```

Algoritmo:

```
for tt = ti:dt:tf                   %Tiempo de la simulación
    xm1(k,1) = xm(1,1);             %Variable del modelo
    xm2(k,1) = xm(2,1);             %Variable del modelo
    x1(k,1) = x(1,1);               %Variable del sistema
    x2(k,1) = x(2,1);               %Variable del sistema
    x3(k,1) = x(3,1);               %Variable del sistema
    time(k,1) = tt;                 %Tiempo para graficar
    u = -Kfb*x - Kff*xm;%  q = 1e8 señal de control feedback +
feedforward
    if(u > umax)                    %Limitamos la señal de control (voltaje)
       u = umax;
    elseif(u < -umax)
       u = -umax;
    end
    if(x(2,1) >= 0
        F = Fric;
    elseif(x(2,1) < 0)
        F = -Fric;
    end
    uc(k,1) = u;                    %Para graficar la señal de control
    pot(k,1) = u*x(3,1);            %Para graficar la potencia
    x = Ak*x + Bk*u + Wk*F;         %Calculamos X
    xm = Amk*xm + Bmk*rast(k,1);%Calculamos Z
    k = k + 1;                      %Aumentamos la interación
end
```

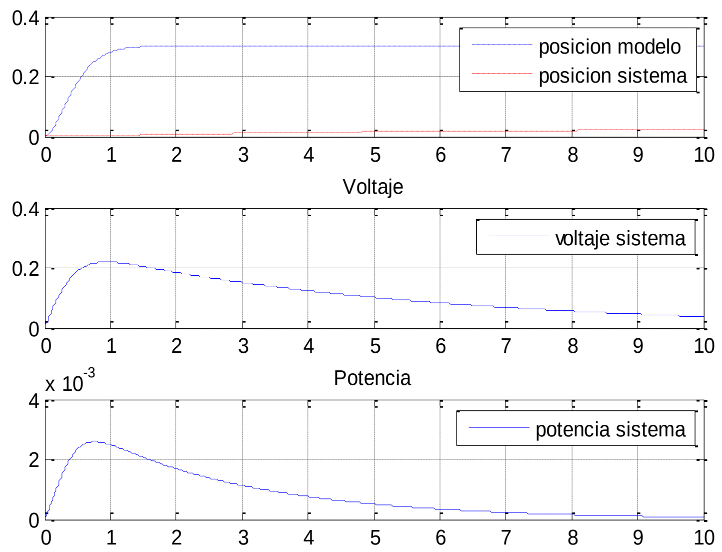
Ploteos:

```
figure(1);                                           %Graficamos la
posición
subplot(3,1,1);
plot(time,xm1,'--b',time,x1,'--r'); grid;
legend('posicion modelo','posicion sistema')

subplot(3,1,2);
plot(time,uc,'-b');                 %Graficamos el voltaje
legend('voltaje sistema');
title('Voltaje'); grid;

subplot(3,1,2);
plot(time,pot,'-b');                %Graficamos la potencia
legend('potencia sistema');
title('Potencia'); grid;
```

Variando el peso "q"

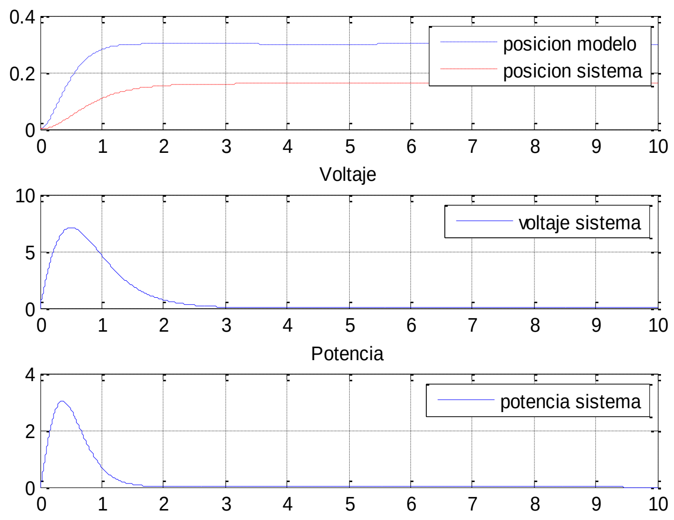
- Peso q = 1e2

  La respuesta del sistema es totalmente distinta a la respuesta del modelo.



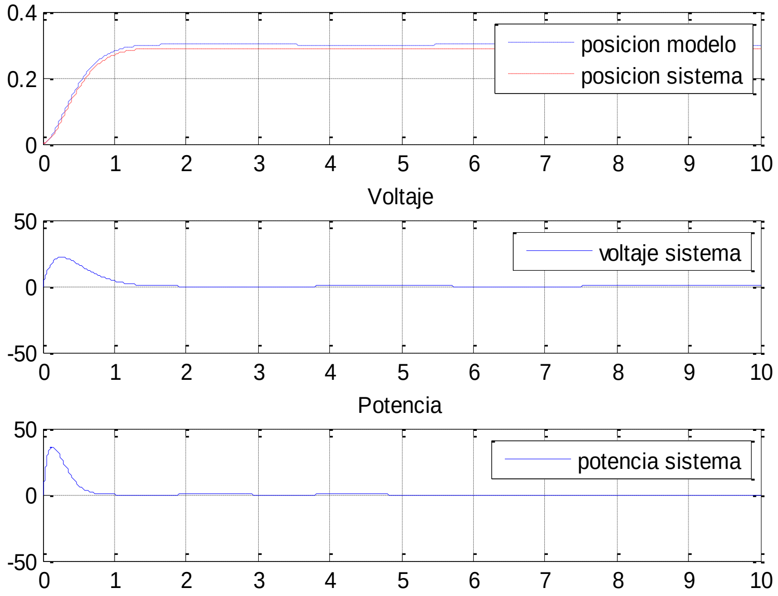
- Peso q = 1e4

  La respuesta del sistema es menor a la respuesta del modelo, pero se va acercando. Además la potencia y señal de control son bajas.



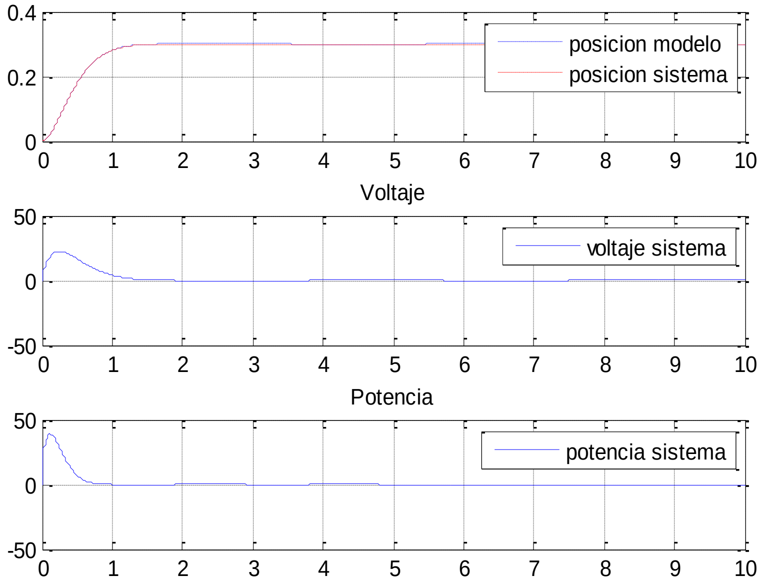
- Peso q = 1e6

  La respuesta del sistema es cercana a la respuesta del modelo, se produce un incremento de la señal de control y potencia.



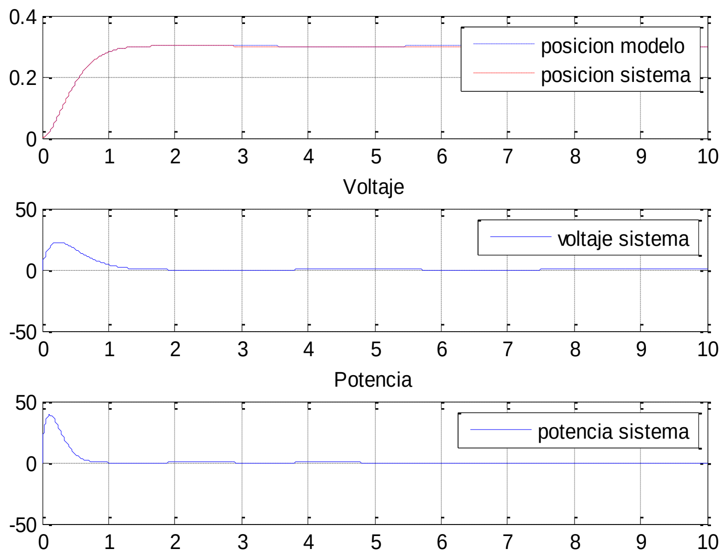
- Peso q = 1e8

  La respuesta del sistema es casi igual a la respuesta del modelo.



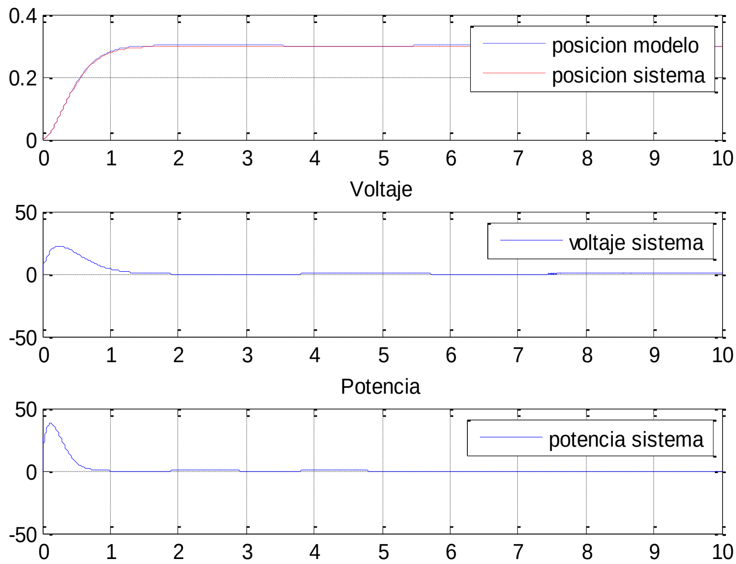
- Peso q = 1e10

La respuesta del sistema coincide con la respuesta del modelo, la señal de control y potencia se mantienen.



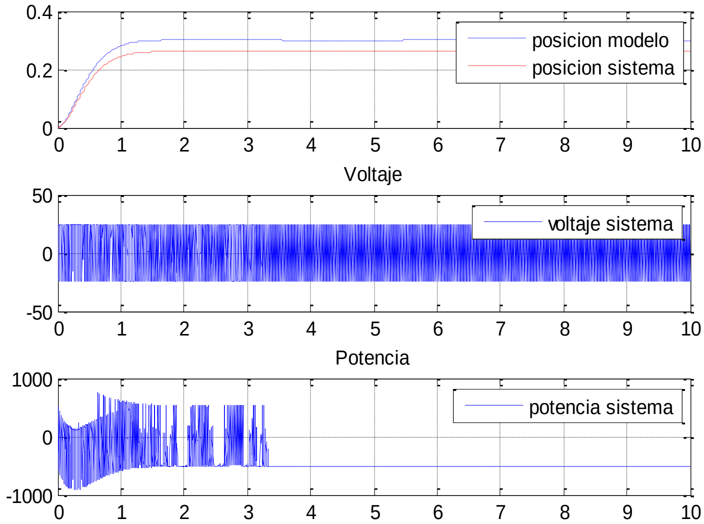
- Peso q = 1e12

La respuesta del sistema se aleja un poco a la respuesta del modelo.



- Peso q = 1e13

La respuesta del sistema se aleja de la respuesta del modelo, e incluso inestabiliza la señal de control.

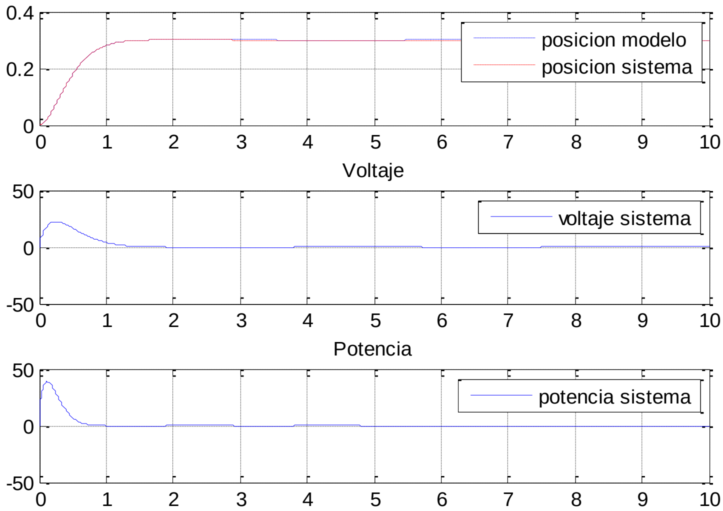


Al aumentar más el peso “q” la respuesta del sistema ya no sigue al modelo, y más aún se vuelve inestable.

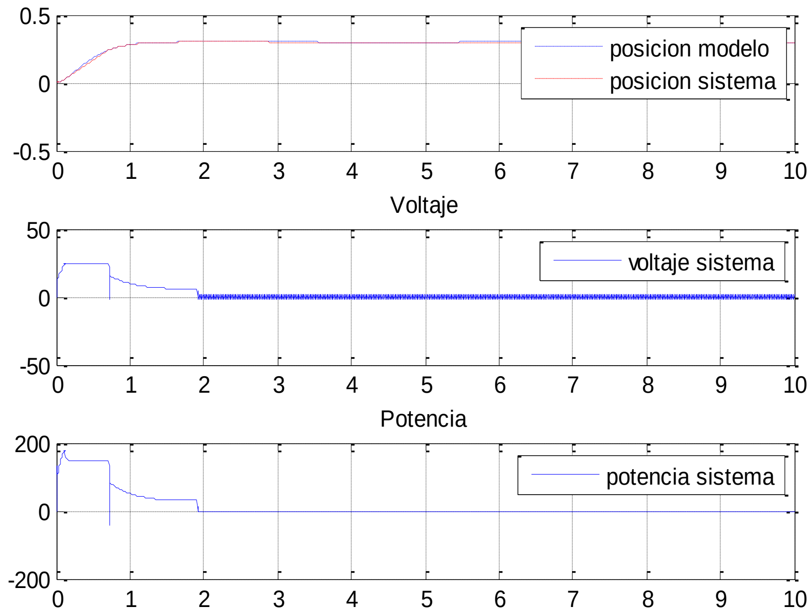
2. Análisis variando la fricción seca:

Se hacen las pruebas con el peso q = 1e10.

- Fric = 0*10

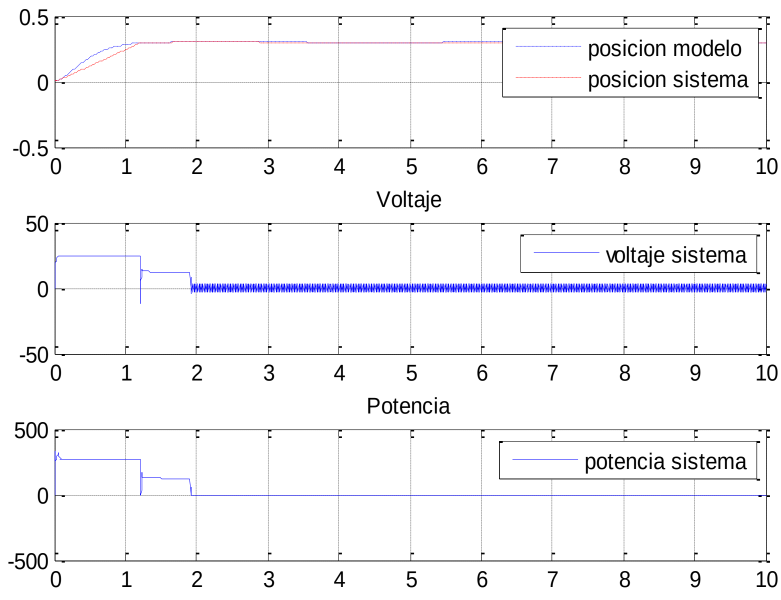


- Fric = 2*10



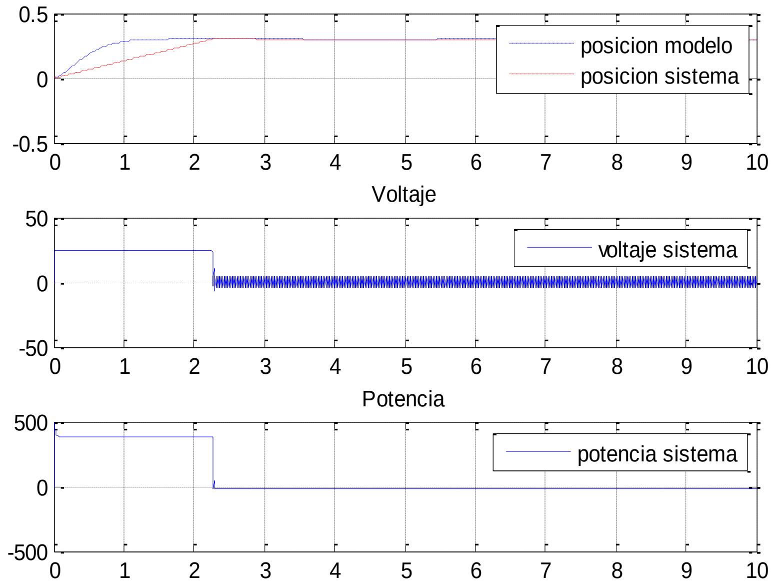
La respuesta del sistema es aún sigue a la respuesta del modelo, pero se incrementó el valor de la señal de control “u” y la potencia.

- Fric = 4*10



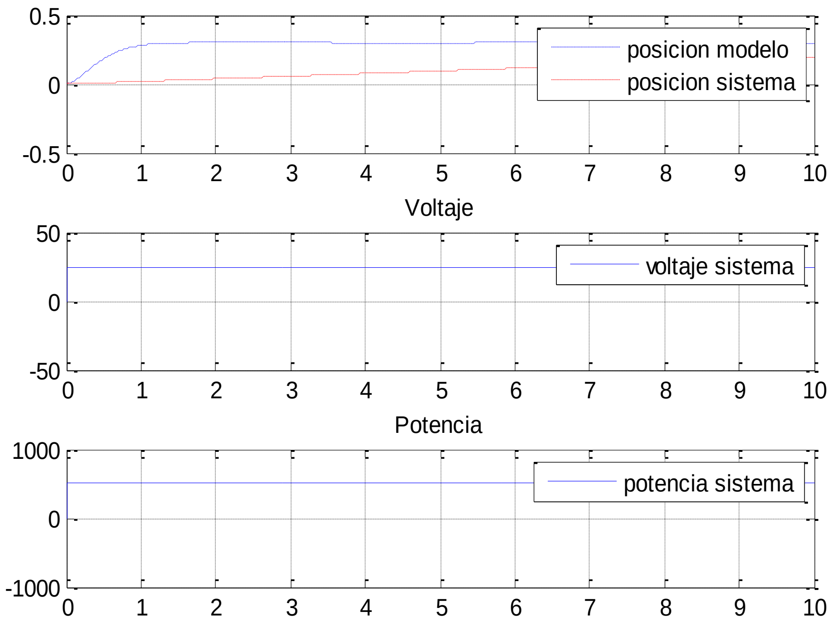
La respuesta del sistema es más lenta que la respuesta del modelo, además se produce un incremento de la potencia.

- Fric = 6*10



La respuesta del sistema ya no sigue al modelo debido a la fricción seca de valor alto, esto hace que la respuesta del sistema sea más lenta. Además se produce un incremento notable de potencia.

- Fric = 8*10



La respuesta del sistema no sigue al modelo en su totalidad, este valor de fricción es demasiado alto.

3. Variar el F en el Feedback + Feedforwad

Del modelo a seguir:

$$F = K * 0.4$$

Se variará F, utilizando K = 1.2, 1.5, 1.8, 2, 2.5

Esto se relaciona con la velocidad de respuesta del modelo.

$$w = 2\pi F$$

$$\xi = 0.9$$

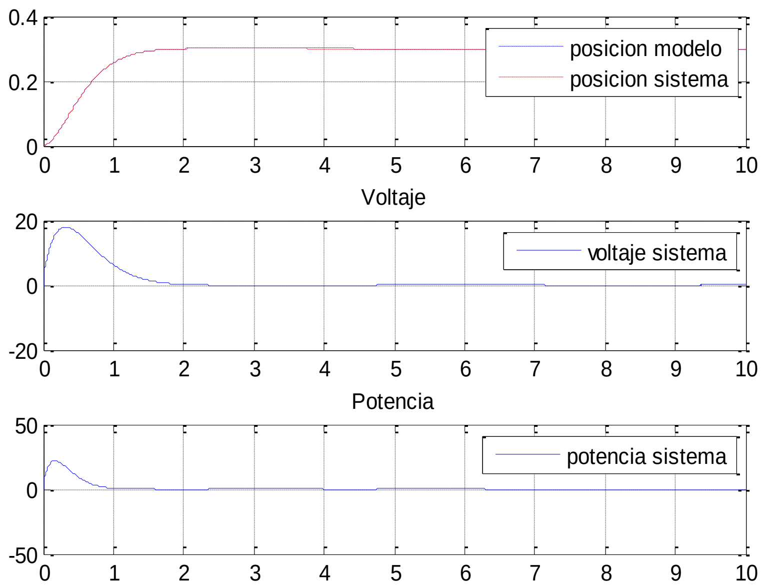
$$Am = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & -2\xi w \end{bmatrix}$$

$$Bm = \begin{bmatrix} 0 \\ w^2 \end{bmatrix}$$

$$Cm = [1\ 0]$$

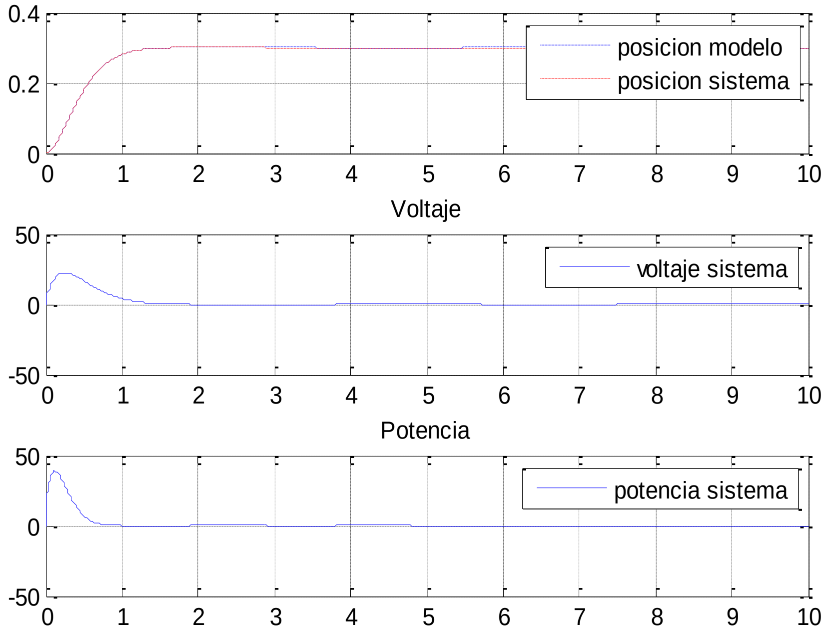
Se hacen las pruebas con el peso q = 1e10.

- Con F = 1.2*0.4



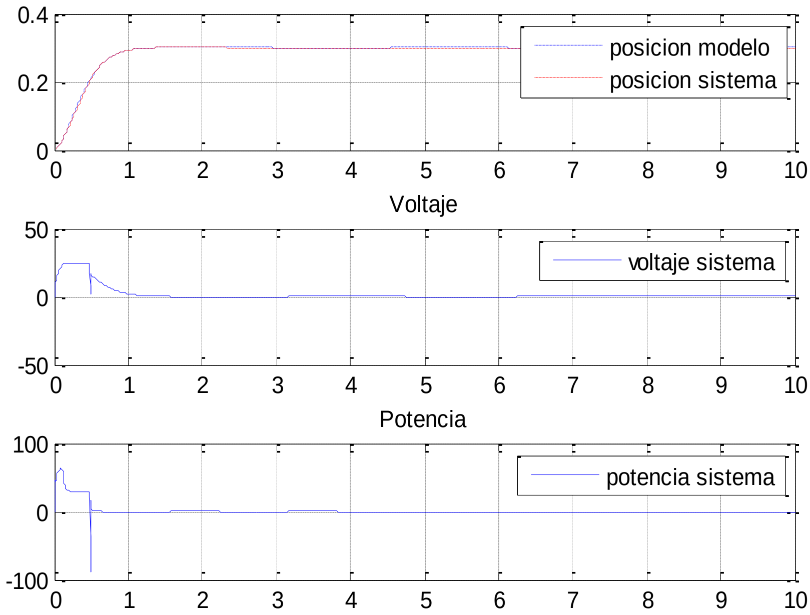
El sistema sigue al modelo y poseen la misma rapidez de asentamiento.

- Con F = 1.5*0.4



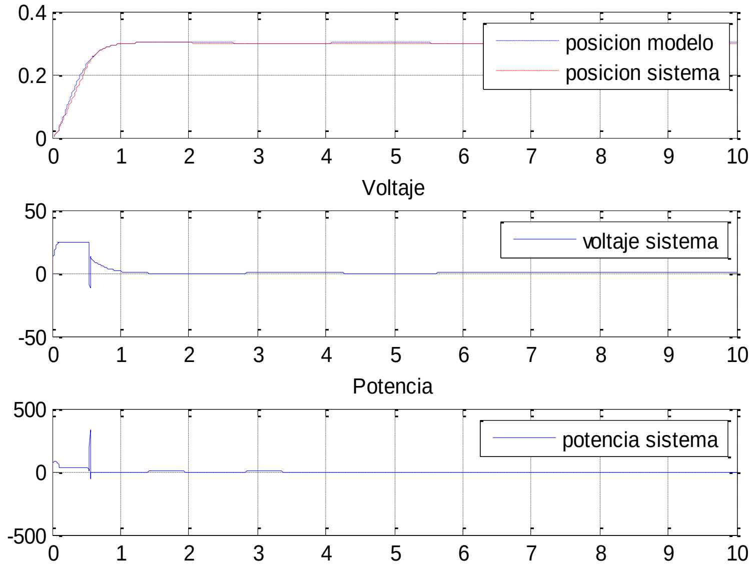
El sistema sigue al modelo y poseen la misma rapidez de asentamiento.

- Con F = 1.8*0.4



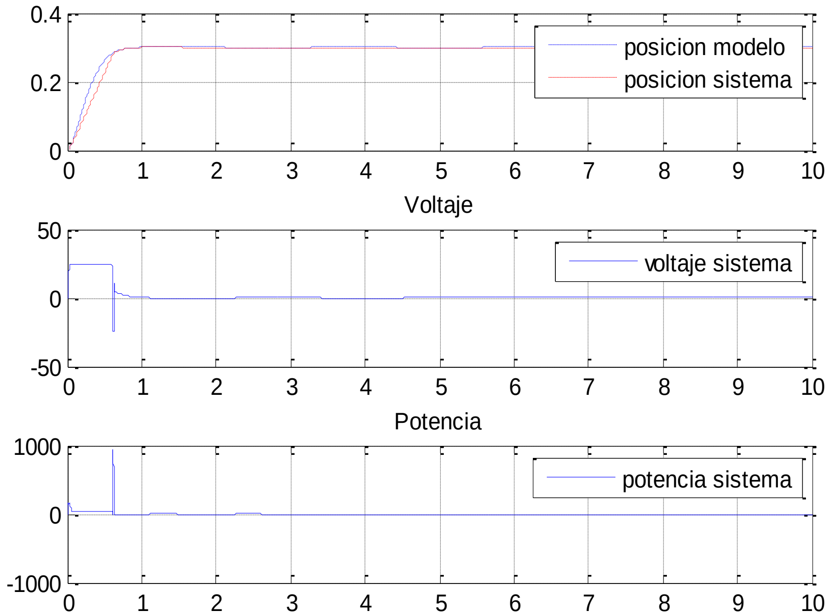
El sistema sigue al modelo y poseen la misma rapidez de asentamiento, sin embargo la señal de control y potencia ya no tiene un comportamiento suave.

- Con F = 2*0.4



El sistema sigue al modelo pero se observa que posee menos velocidad en la subida, además como en el caso anterior se observa un cambio brusco en la señal de control y potencia.

- Con F = 2.5*0.4



La respuesta del modelo es más rápido que la del sistema.
Además como en el caso anterior se observa un cambio brusco en la señal de control y potencia.

4. Comparar Feedback + Feedforwad vs. (Feedback + Feedforwad + Acción integral)

Utilizamos el sistema aumentado para considerar la acción integral:

$$\dot{X}_i = A_i X_i + B_i u + W_i\, r$$

Sean:

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \int (x_1 - r) \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{3x3} & 0_{3x1} \\ [1\ 0\ 0] & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = [1\ 0\ 0\ 0]$$

El Sistema total Feedback + Feedforward:

$$\dot{\mathbb{X}}i = \mathbb{A}\mathbb{X}i + \mathbb{B}iu + \mathbb{W}ir$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_1 - r \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ai & 0_{4x2} \\ 0_{2x4} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \int x_1 - r \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{2x1} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \bar{B}_{2x1} \end{bmatrix} r$$

Se plantea la función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (q(y - y_m)^2 + qi\left(\int (x_1 - r)\right)^2 + ru^2)dt$$

Siendo:

$$q_i \neq 0$$

Se forma:

$$Q_{i_{4x4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_i \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^{\infty} [X_i \; Z] \begin{bmatrix} Ci^T qCi + Qi & -Ci^T q\bar{C} \\ -\bar{C}qCi & -\bar{C}^T q\bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Z \end{bmatrix} + u^T Ru$$

De tal manera se obtiene:

$P_{i_{11}}$ $se\ resuelve\ mediante\ Riccati$:

$$Ai^T P_{i_{11}} + P_{i_{11}} Ai - P_{i_{11}} B_i r^{-1} Bi^T P_{i_{11}} + Ci^T qCi + Qi = 0$$

$P_{i_{12}}$ $se\ resuelve\ mediante\ Lyapunov$:

$$(Ai^T - P_{i_{11}} Bir^{-1} Bi^T) P_{i_{12}} + P_{i_{12}} Ai - Ci^T q\bar{C} = 0$$

Luego las ganancias:

$$K_{i_x} = r^{-1} Bi^T P_{i_{11}}$$

$$K_{i_z} = r^{-1} Bi^T P_{i_{12}}$$

Entonces la señal de control es:

$$u_i = [K_{i_x} \, K_{i_z}] \, \mathbb{X}i$$

$$u_i = [r^{-1} Bi^T P_{i_{11}} \quad r^{-1} Bi^T P_{i_{12}}] \begin{bmatrix} X_i \\ Z \end{bmatrix}$$

Script en Matlab:

```
%sistema aumentado

Ai = [ 0    1    0   0
       0   a22  a23  0
       0   a32  a33  0
       1    0    0   0 ];          %Matriz Ai
Bi = [ 0
       0
      b31
       0 ];                        %Matriz Bi
Wfi = [ 0
        0
        0
       -1];                        %Fricción seca actúa como una
perturbación no lineal
Ci = [ 1   0   0   0];
Di = [0];
Q  = [q];
qi = input('Peso del integrador   [1e9]: ');
Qi   = [0  0  0  0
        0  0  0  0
        0  0  0  0
        0  0  0  qi];
RRi = [1];
%% Hallamos Kx
QQi = Ci'*Q*Ci+Qi;                      % CTqC para Riccati
P11i = are(Ai,Bi*inv(RRi)*Bi',QQi);  %Hallamos P11 para Kx
Kfbi = inv(RRi)*Bi'*P11i;               %Hallamos Kx

%% Hallamos Kz
APRi = Ai'-P11i*Bi*inv(RR)*Bi';      %Para Lyapunov
CQCmi = -Ci'*Q*Cm;                   % -CTqCb para Lyapunov
P12i = lyap(APRi,Am,CQCmi);          %Hallamos P12 para Kz
Kffi = inv(RR)*Bi'*P12i;             %Hallamos Kz




%% Condiciones iniciales
xi = [ 0;   0;   0];     %Valor inicial de las variables de control
xmi = [ 0;   0 ];        %Valor inicial de las variables del modelo
k = 1;                   %Inicializa la interación
int_err = 0;             % Valor incial de integral del error
```

Script del Algoritmo :

```
for tt = ti:dt:tf                     %Tiempo de la simulación

    xm1i(k,1) = xmi(1,1);             %Variable posicion del modelo
    xm2i(k,1) = xmi(2,1);             %Variable del modelo
    x1i(k,1) = xi(1,1);               %Variable posicion del sistema
    x2i(k,1) = xi(2,1);               %Variable velocidad del sistema
    x3i(k,1) = xi(3,1);               %Variable corriente del sistema
    int_err = int_err + (xi(1,1)-rast(k,1))*dt; %error de acumulacion
    time(k,1) = tt;                   %Tiempo para graficar

    ui = -Kfbi(1,1:3)*xi -Kfbi(1,4)*int_err - Kffi*xmi;  %señal de
control feedback + feedforward

    if(ui > umax)
       ui = umax;
    elseif(ui < -umax)
       ui = -umax;
    end
    if(xi(2,1) >= 0)
        F = Fric;
    elseif(xi(2,1) < 0)
        F = -Fric;
    end
    uci(k,1) = ui;                    %Para graficar la señal de control
    poti(k,1) = ui*xi(3,1);           %Para graficar la potencia
    xi = Ak*xi + Bk*ui + Wk*F;        %Calculamos X
    xmi = Amk*xmi + Bmk*rast(k,1);%Calculamos Z
    k = k + 1;                        %Aumentamos la interación
end
```

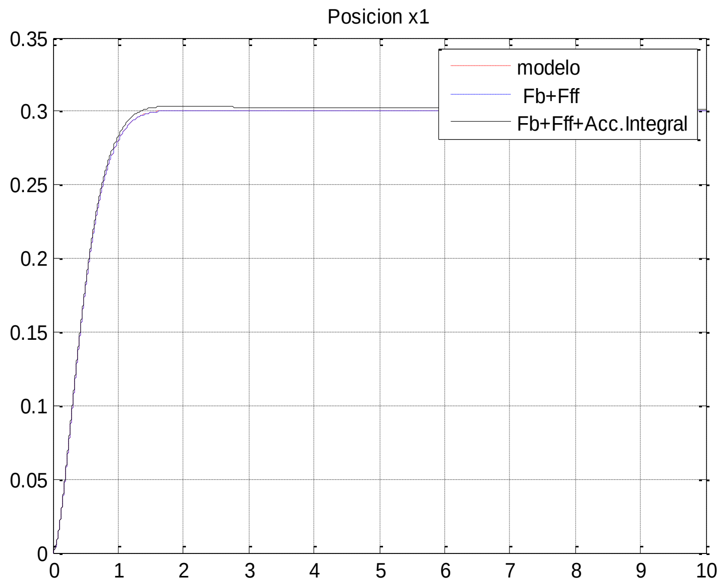
Ploteo:

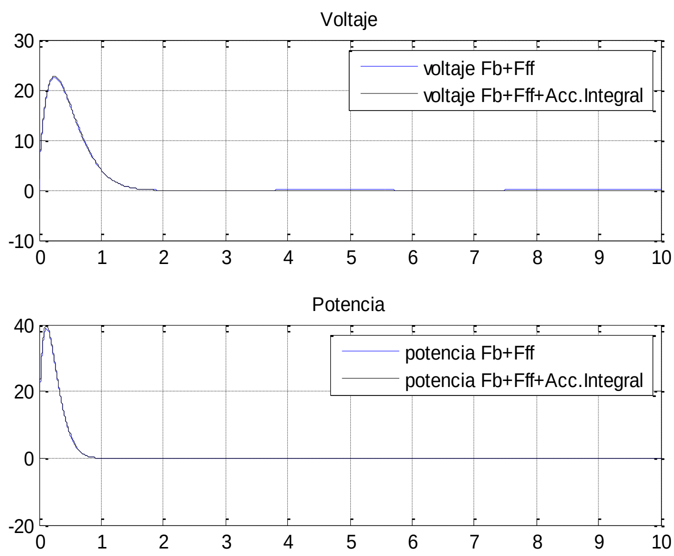
```
figure(1);                                          %Graficamos la posición
plot(time,xm1,'--r',time,x1,'--b',time,x1i,'k');
legend('modelo',' Fb+Fff ','Fb+Fff+Acc.Integral')
title('Posicion x1'); grid;

figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(time,uc,'-b',time,uci,'k');                    %Graficamos el voltaje
legend('voltaje Fb+Fff','voltaje Fb+Fff+Acc.Integral');
title('Voltaje'); grid;

subplot(2,1,2);
plot(time,pot,'-b',time,poti,'k');                  %Graficamos la potencia
legend('potencia Fb+Fff','potencia Fb+Fff+Acc.Integral');
title('Potencia'); grid;
```

4.1. Analizar las respuestas variando las fricciones

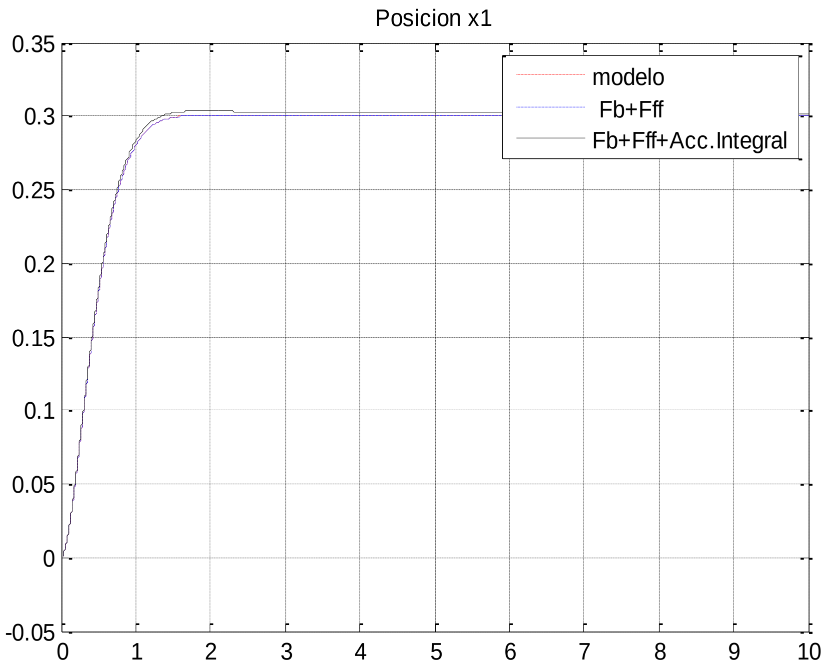
Se utiliza el peso calculado anteriormente para un buen seguimiento q = 1e10, y además para la acción integral qi = 1e9, ya que se obtuvo mejor respuesta para dicho peso en la acción integral.

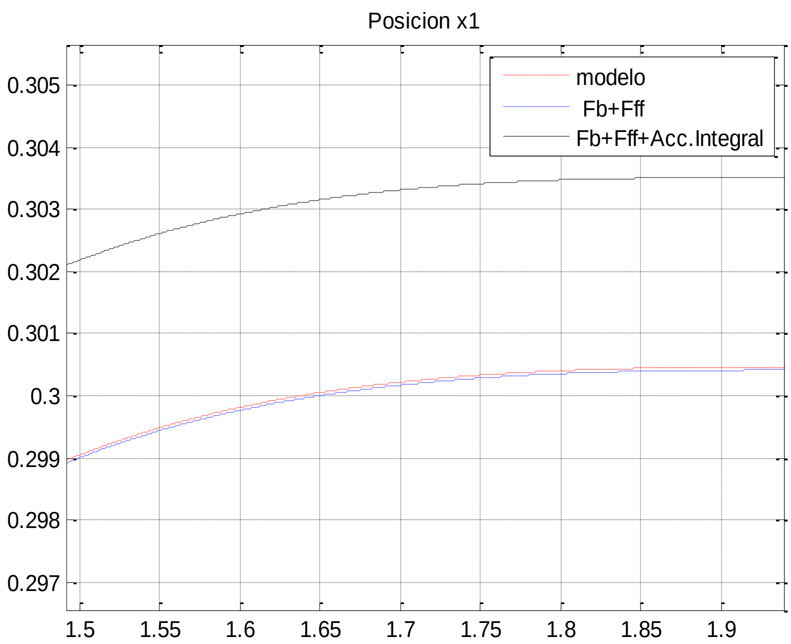
- Fric = 0*10



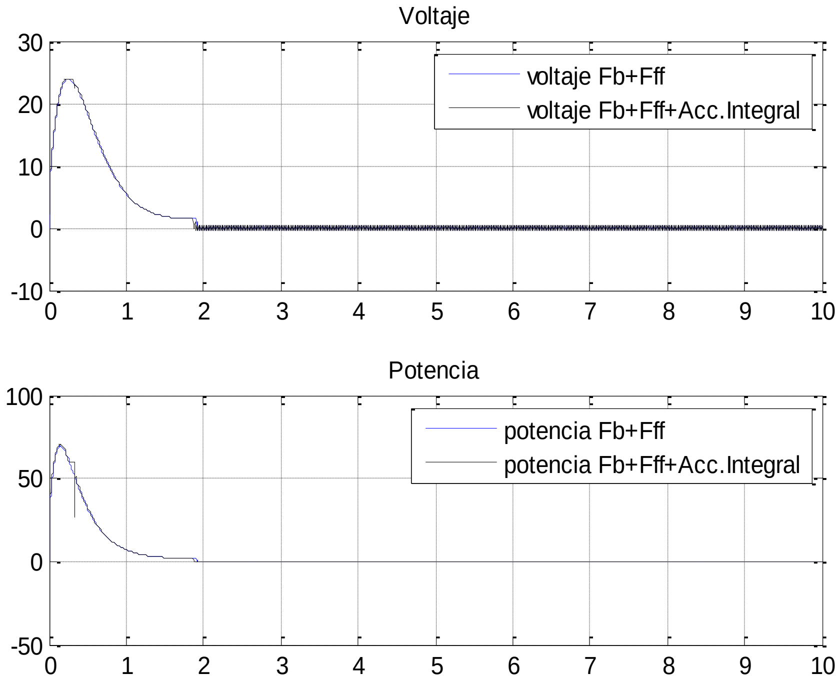


- Fric = 0.5*10

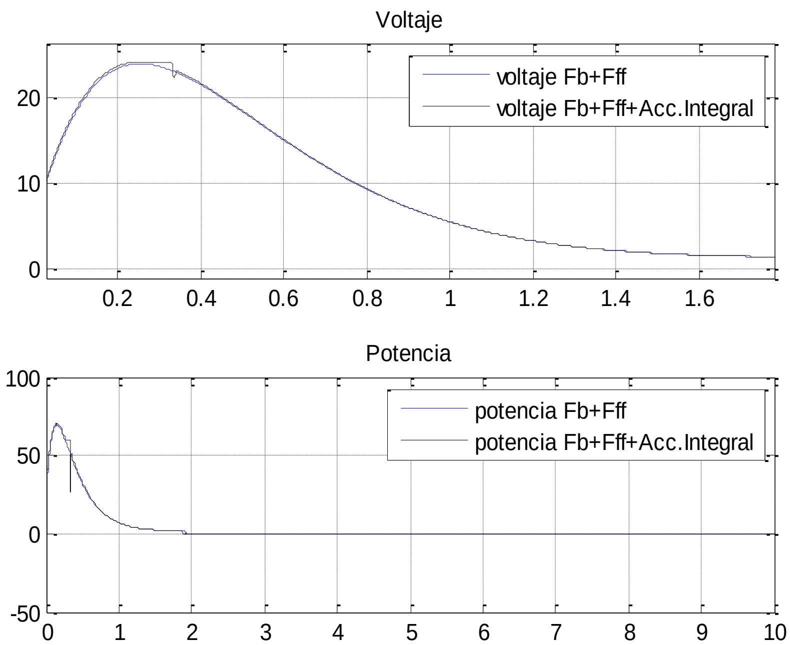




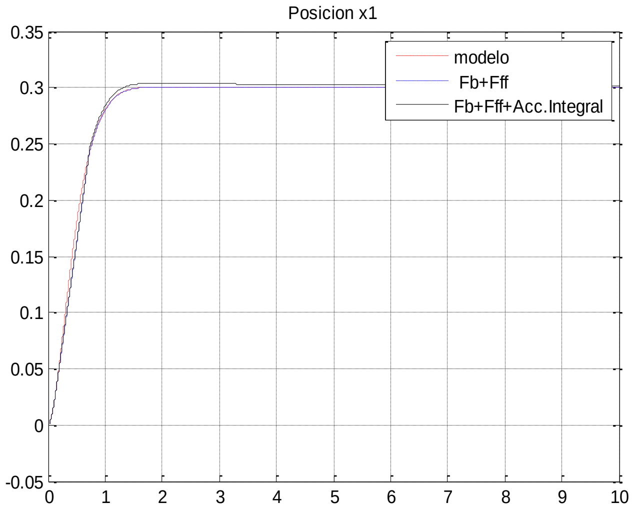
Se aprecia que la respuesta de la estructura Fb + Ff entrega mejor repuesta que al añadir la acción integral, ya que se aproxima más al modelo.



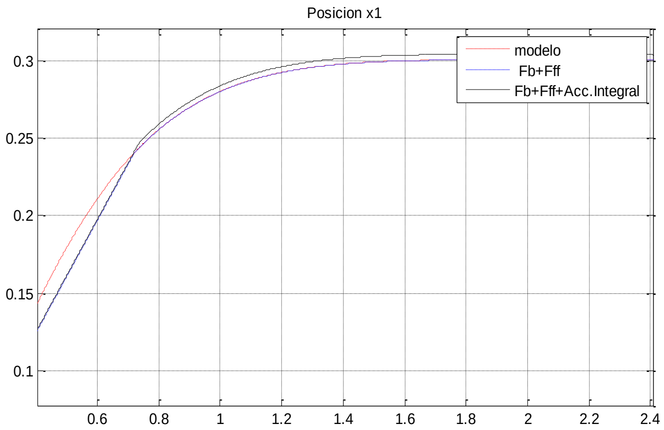
La acción de control y potencia , es muy similar en ambos casos, solo se aprecia que “u” es un poco mayor para el caso de acción integral.



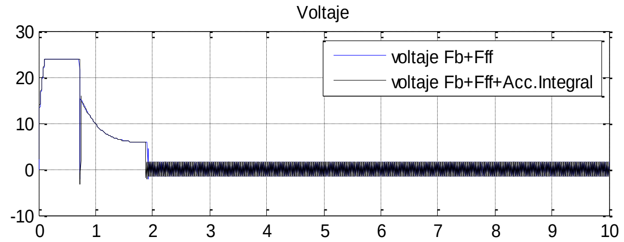
- Fric = 2*10

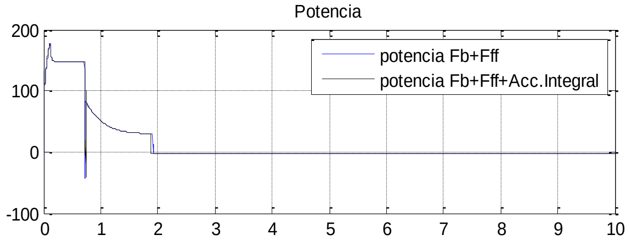


Al aumentar la fricción seca , se observa un poco más de diferencia, siguiendo mejor la respuesta con Feedback + Feedforward.

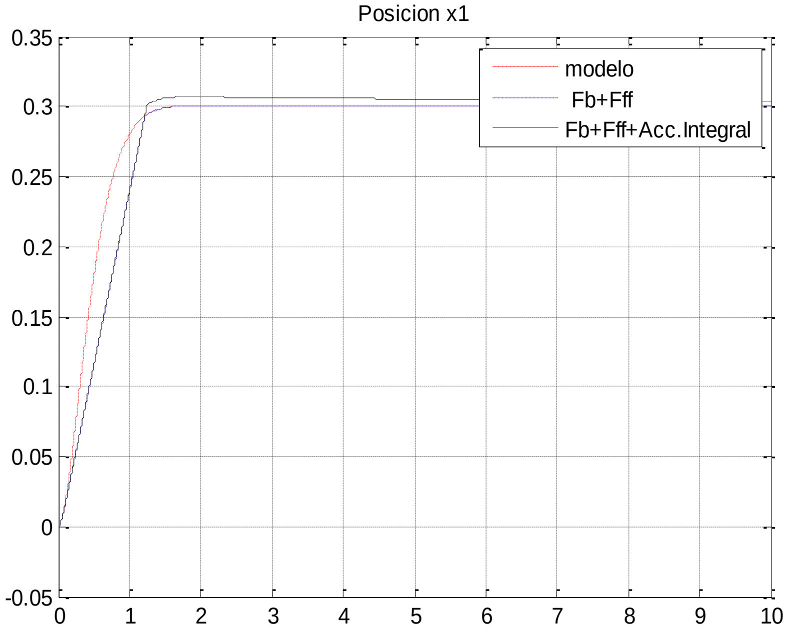


Además se observa que ambas respuestas son más lentas respecto a la respuesta del modelo.

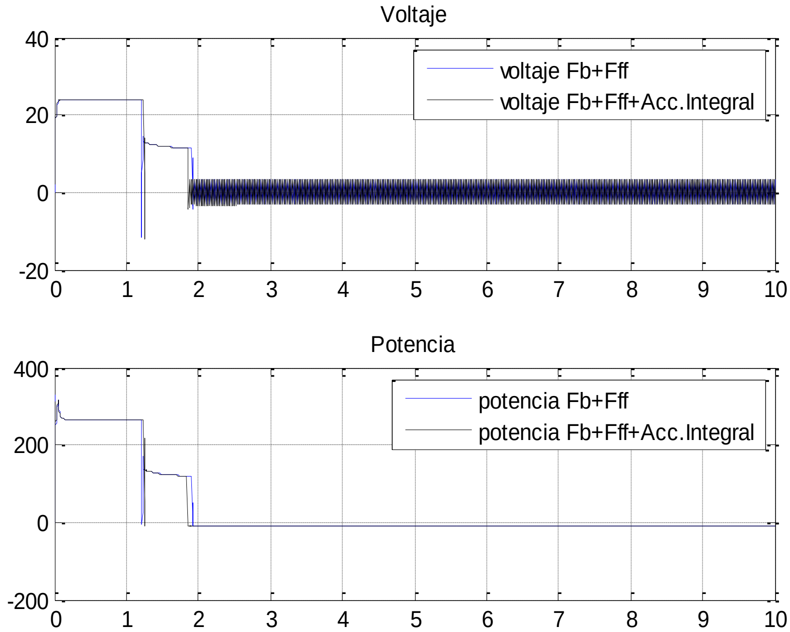




- Fric = 4*10

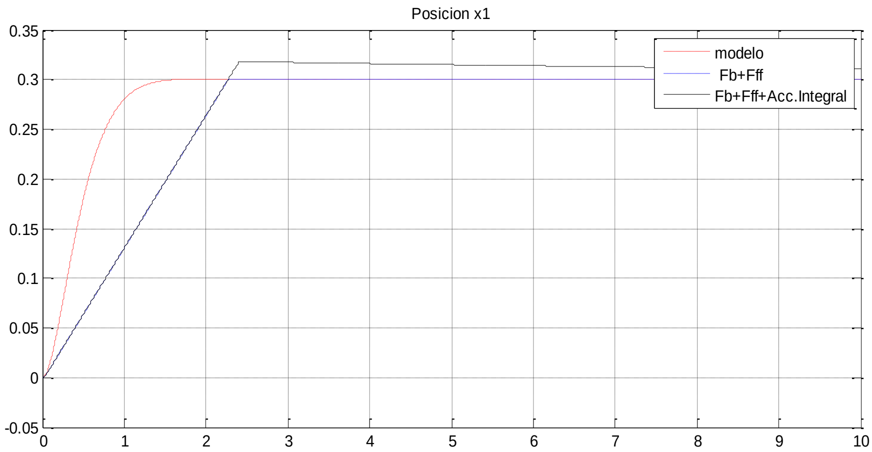


Al aumentar la fricción seca , se observa más de diferencia, siguiendo mejor la respuesta con Feedback + Feedforward, ambas de respuesta más lenta que el modelo.

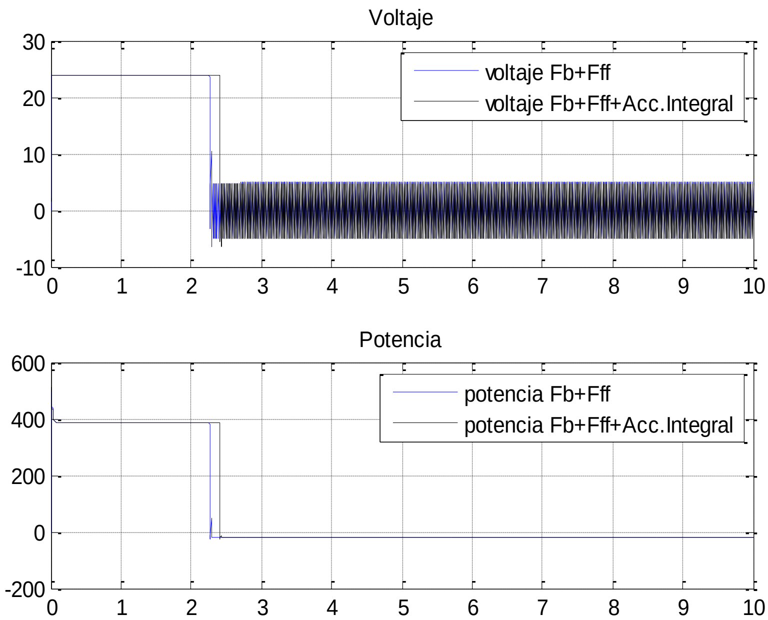


La acción de control y el consumo de potencia son muy similares, sin embargo se observa algunos desfasajes entre los 2 tipos de estructuras.

- Fric = 6*10



La respuesta con Feedback + Feedforward, resulta mejor(se aprecia una diferencia más grande) que la de Feedback + Feedforward + acción integral, aunque ambas ya no siguen a la velocidad de la respuesta del modelo.



Se aprecia que la actuación de la estructura Feedback + Feedforward, está anticipada con respecto a la actuación de Feedback + Feedforward + acción integral.

Conclusiones:

1.