PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Maestría de Control y Automatización

Matemática computacional para control

Título : Examen final

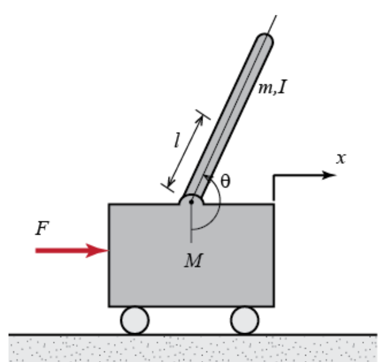
Sobre: Análisis del puente de Tacoma

Nombre: Dimel Arturo Contreras Martínez

Código: 20156458

Profesor: Msc. Agapito Ruiz, Rubén Ángel

Fecha: 07 de Noviembre del 2015



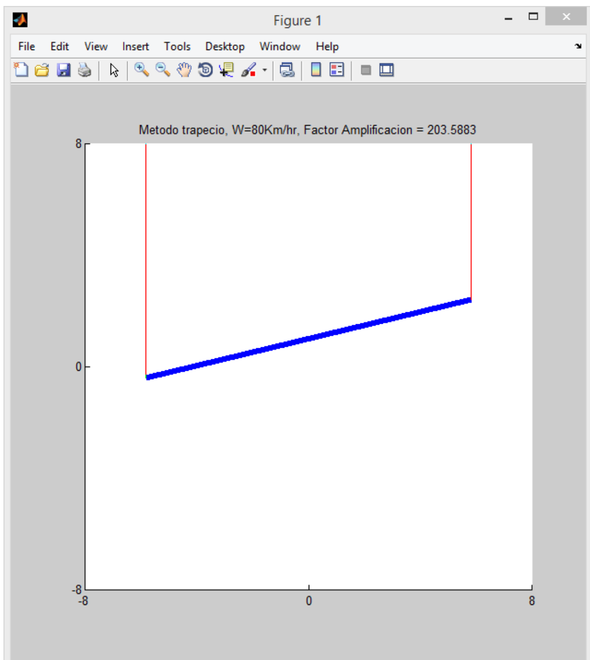
2015

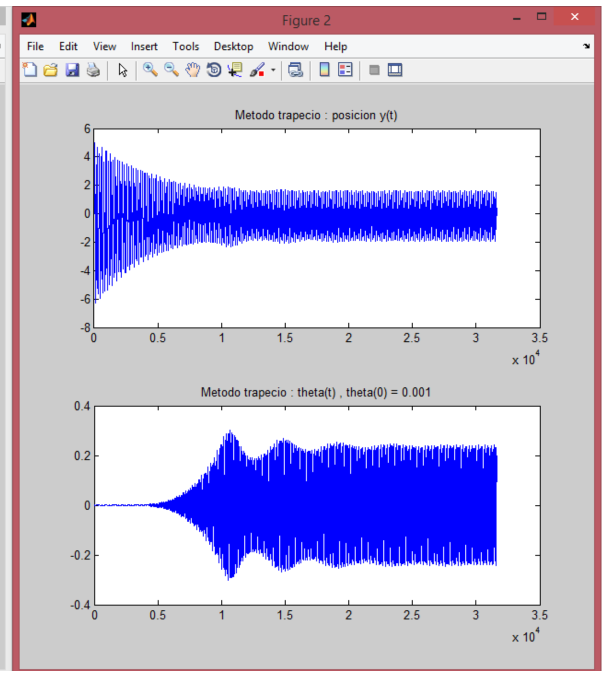
Trabajo Final – Análisis numérico del modelo matemático del puente de Tacoma

1. Ejecute tacoma.m con la velocidad del viento W = 80 km/h y las condiciones iniciales y = y' $=\dot{\theta}=0$ y $\theta = 0.001$. El puente es estable en la dimensión torsional si las pequeñas perturbaciones se terminan; y es inestable si éstas crecen mucho más allá de su tamaño original. ¿Qué ocurre para este valor de W?

Solución:

Inestabilidad de la dimensión torsional para W = 80.
Para las condiciones iniciales: y = y' $=\dot{\theta}=0$ y $\theta = 0.001$.





El factor de amplificación del valor final del ángulo torsional es 203.58, además no se terminan las perturbaciones sino que más bien aumentan hasta un valor casi constante muy alto que en la realidad haría que el puente se rompa.

2. Reemplace el método del trapecio por Runge-Kutta de cuarto orden para mejorar la exactitud. Además, agregue nuevas ventanas de figuras para graficar $y(t)$ y $\theta(t)$.

Solución:

Se utiliza el algoritmo de Runge Kutta 4 para mejorar la aproximación numérica.

El código de la implementación del algoritmo es:

Como función en MATLAB:

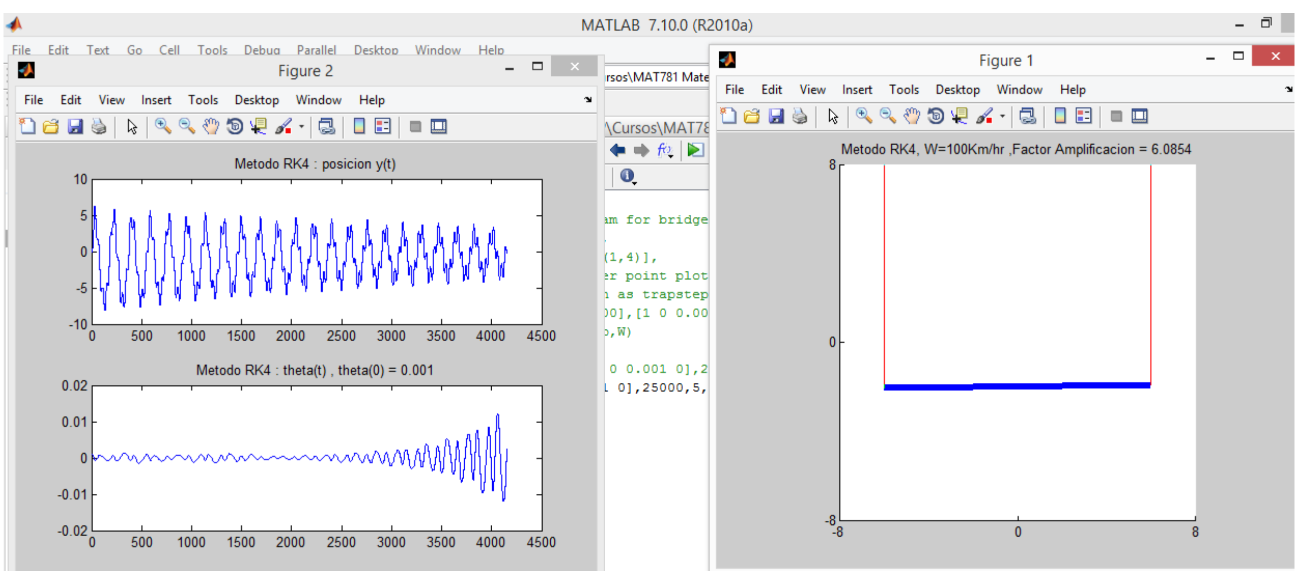
```
function y=runge_step(t,x,h,w)

    k1 = ydot(t,x,w);
    g1 = x + 0.5*h*k1;

    k2 = ydot(t+0.5*h,g1,w);
    g2 = x + 0.5*h*k2;

    k3 = ydot(t+0.5*h,g2,w);
    g3 = x + h*k3;

    k4 = ydot(t+h,g3,w);

    y = x + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
```

Dicha función se encuentra en un bucle.

```
for i=1:p
    t(i+1)=t(i)+h;
    %y(i+1,:)=trapstep(t(i),y(i,:),h,w);
    y(i+1,:)=runge_step(t(i),y(i,:),h,w);
    yy(5*k+i-5)= y(1,1);
    theta(5*k+i-5) = y(1,3);
end
```

Pruebas:

<u>Gráfica de $y(t)$ y $\theta(t)$</u>

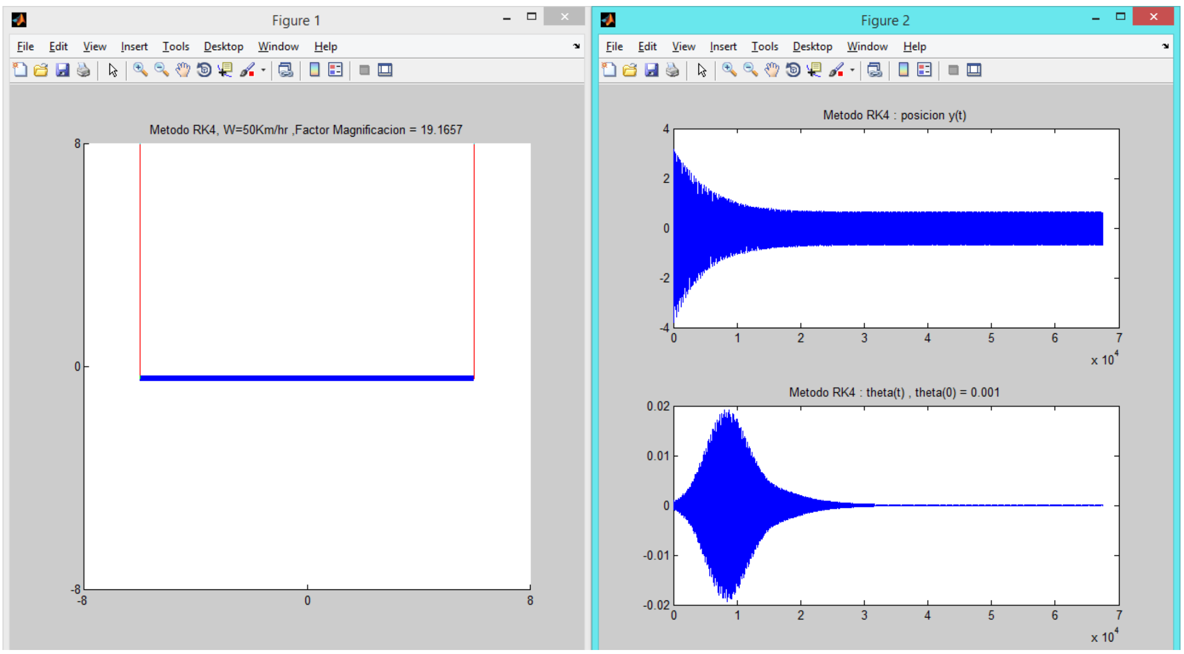


3. El sistema es torsionalmente estable para W = 50 km/h. Encuentre el factor de magnificación para un ángulo inicial pequeño. Es decir, establezca $\theta(0) = 10^{-3}$ y encuentre la relación del ángulo máximo $\theta(t)$, $0 \leq t < \infty$, con $\theta(0)$. ¿El factor de magnificación es aproximadamente constante para los ángulos iniciales $\theta(0) = 10^{-4}, 10^{-5}, \ldots$?

Solución:

El sistema es torsionalmente estable para W = 50Km/h.

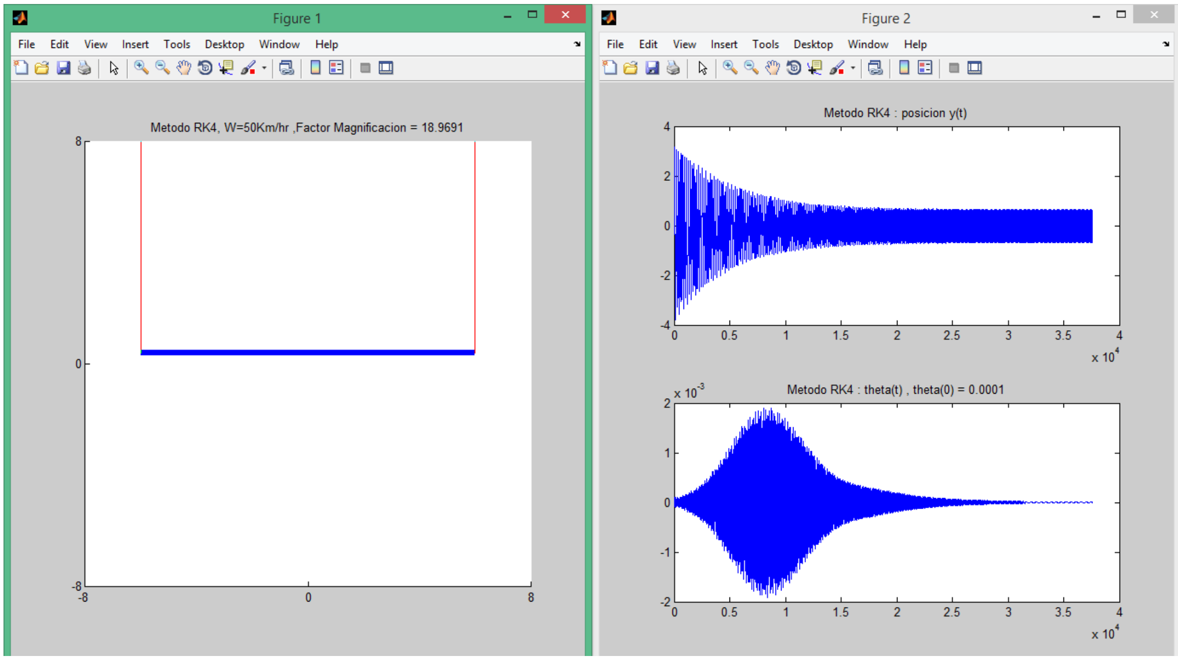
a. Factor de magnificación para $\theta(0) = 10^{-3}$



Resulta factor de magnificación (FM) igual a 19.1

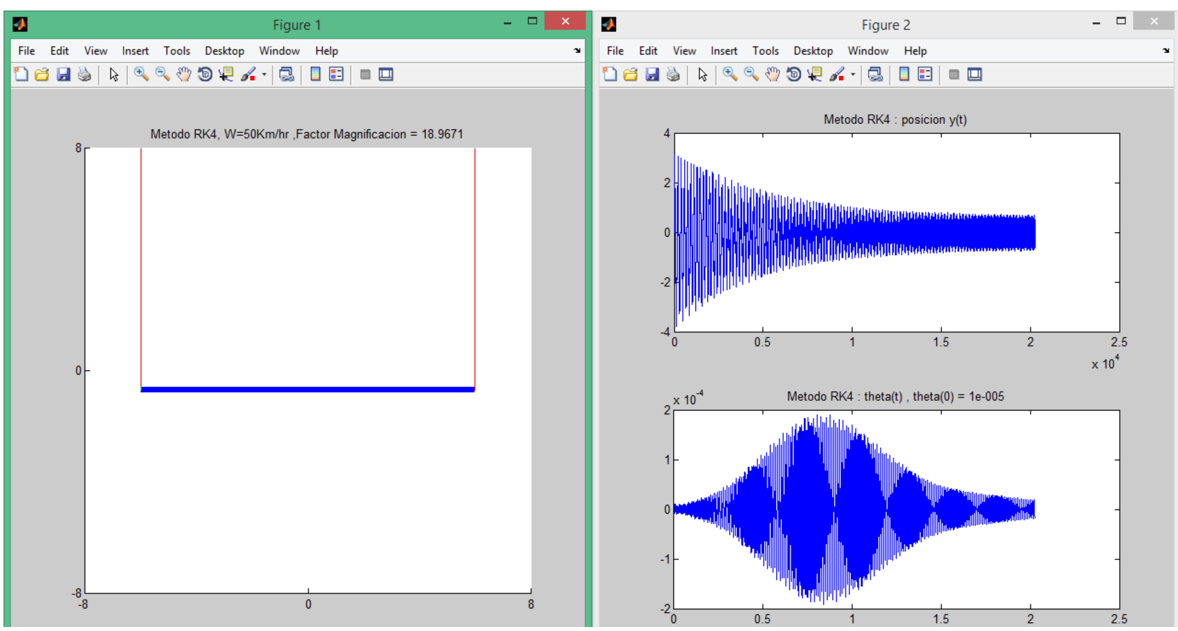
b. Factor de magnificación para diferentes valores iniciales de theta:

- Prueba para Factor de magnificación para $\theta(0) = 10^{-4}$



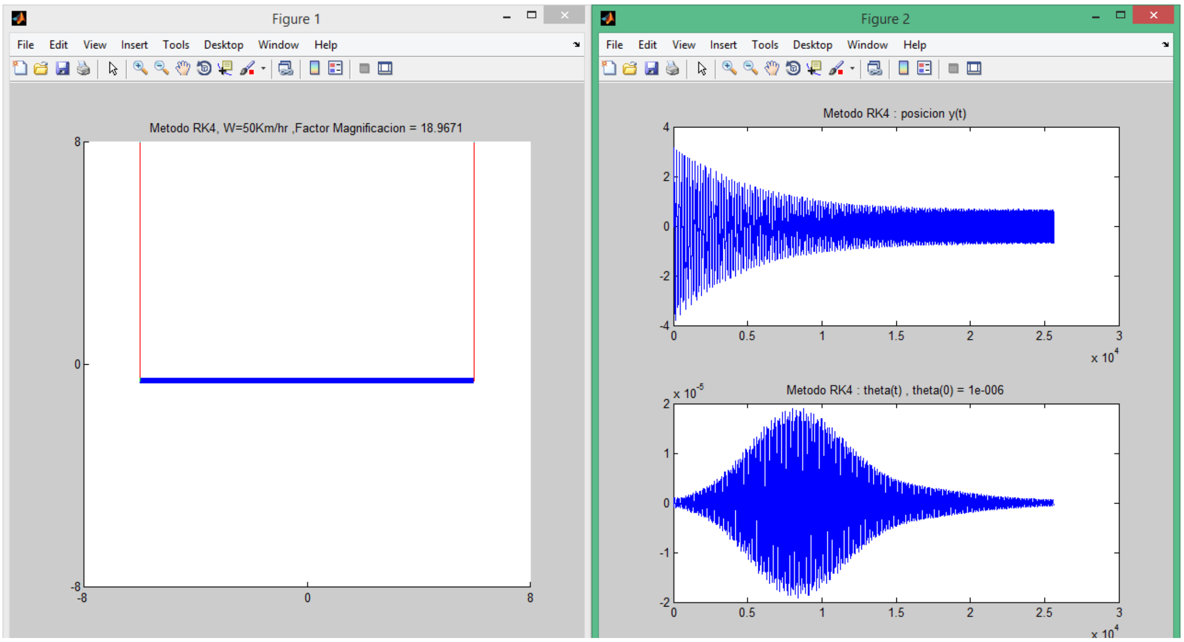
Resulta factor de magnificación (FM) igual a 18.9

- Prueba para Factor de magnificación para $\theta(0) = 10^{-5}$



Resulta factor de magnificación (FM) igual a 18.9

- Prueba para Factor de magnificación para $\theta(0) = 10^{-6}$



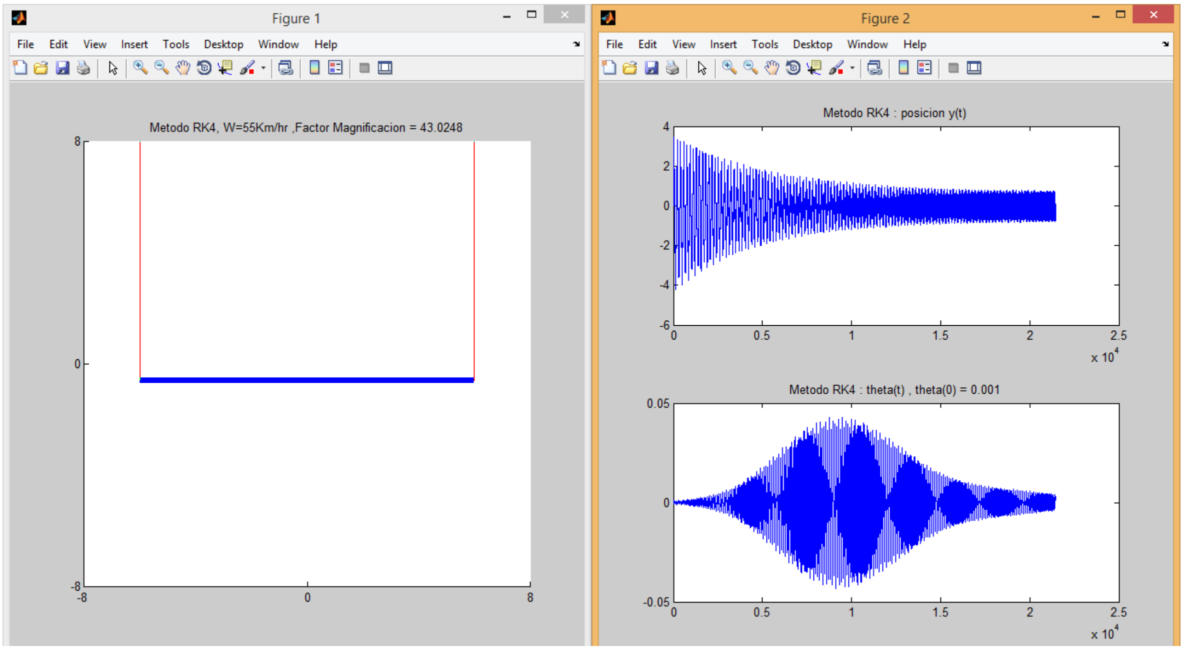
Resulta factor de magnificación (FM) igual a 18.9

Conclusión : **El factor de magnificación resulta constante igual a 18.9 aproximadamente para** $\theta(0) = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, \ldots$

4. Encuentre la velocidad mínima *W* del viento para que una pequeña perturbación $\theta(0) = 10^{-3}$ tenga un factor de magnificación de 100 o más. ¿Puede definirse un factor de magnificación constante para esta W?
   Solución:

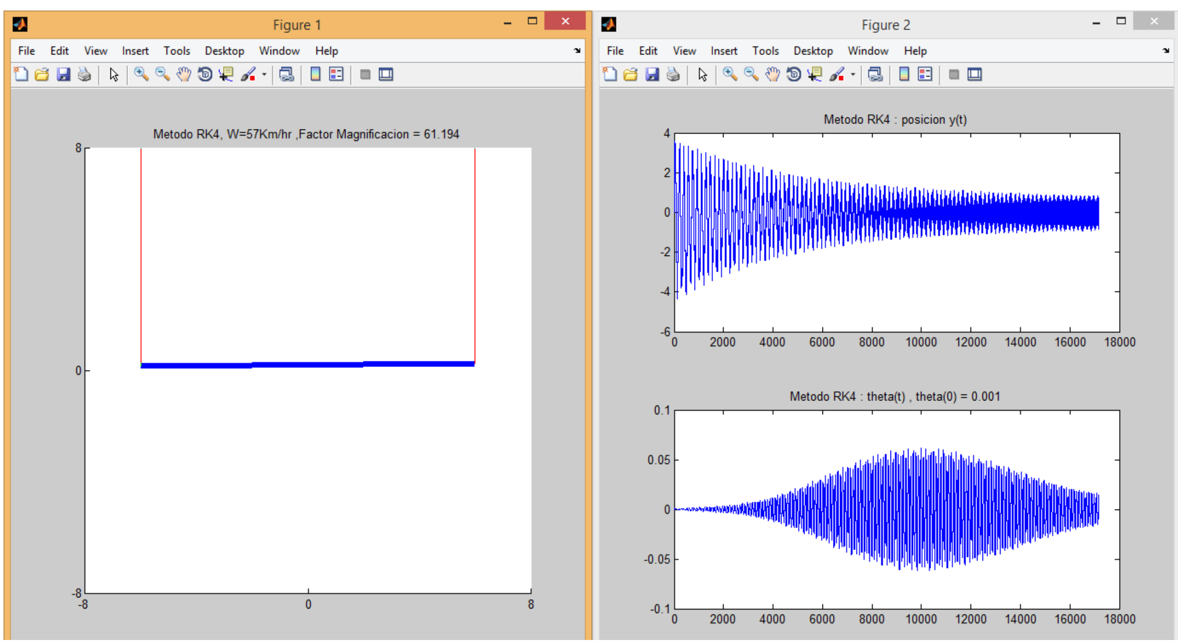
   Se realizan diferentes pruebas desde W = 55Km/hr a más. Se utiliza método de solución de Runge Kutta 4.

   a. Prueba para W = 55 y $\theta(0) = 10^{-3}$



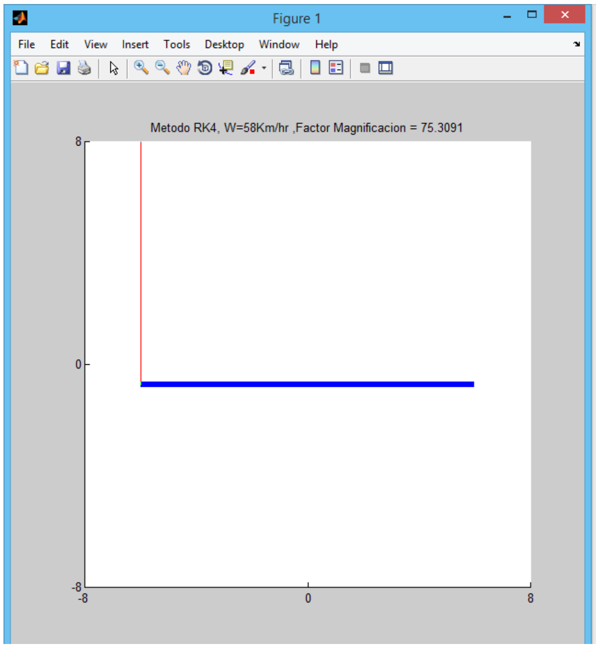
Resulta factor de magnificación (FM) igual a 43 que es menor a 100.

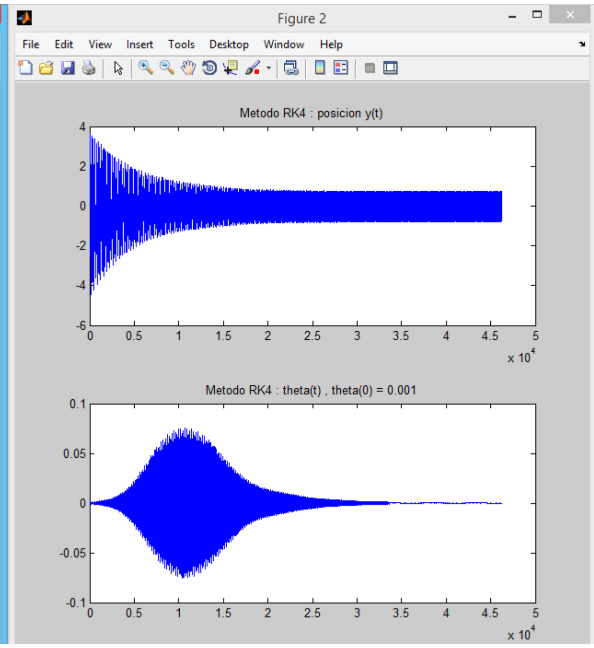
b. <u>Prueba para W = 57 y $\theta(0) = 10^{-3}$</u>



Resulta factor de magnificación (FM) igual a 61 que es menor a 100.

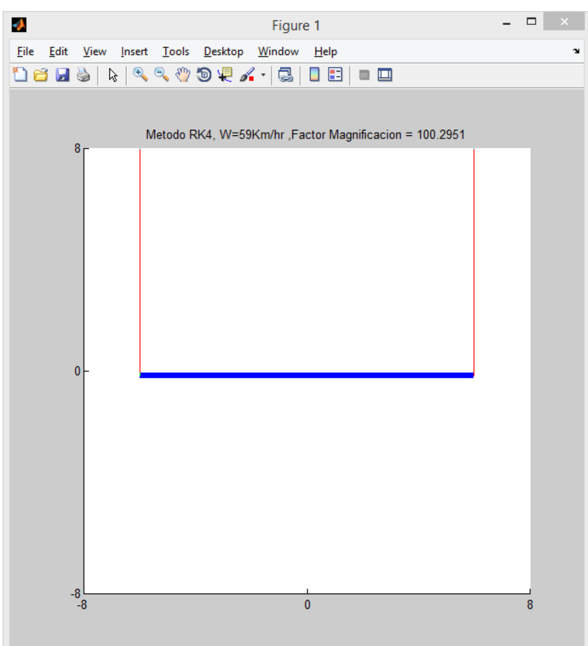
c. <u>Prueba para W = 58 y $\theta(0) = 10^{-3}$</u>

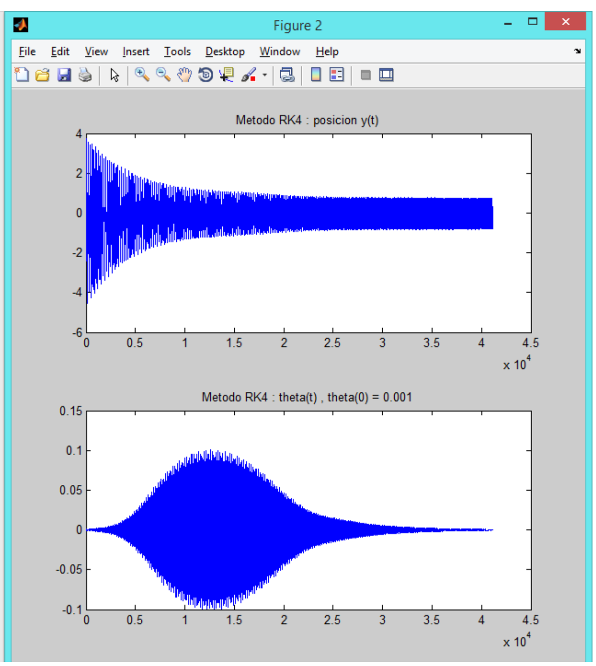




Resulta factor de magnificación (FM) igual a 75 que es menor a 100.

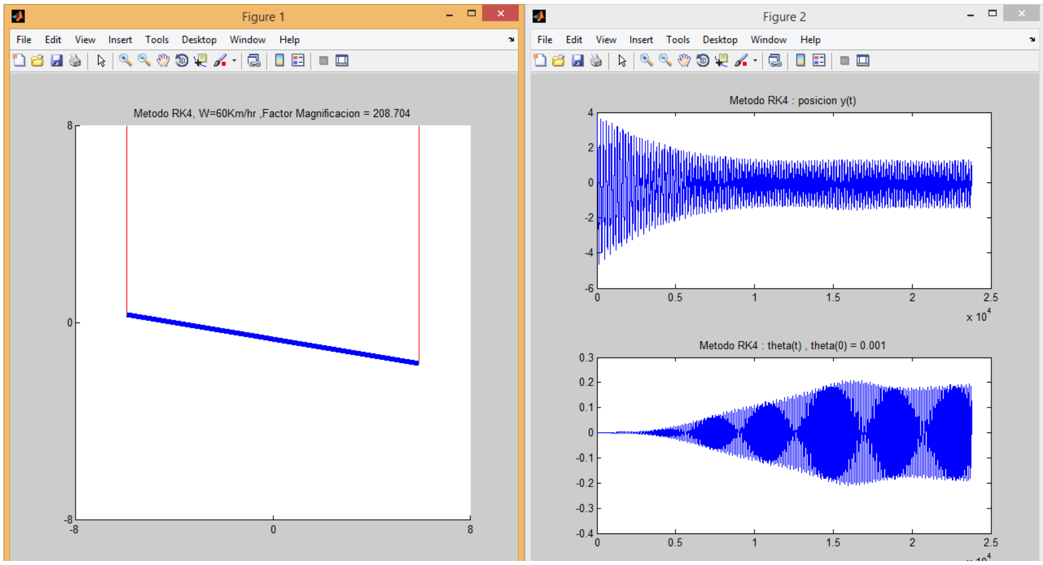
d. <u>Prueba para W = 59 y $\theta(0) = 10^{-3}$</u>





Resulta factor de magnificación (FM) igual a 100.29 que es mayor a 100.

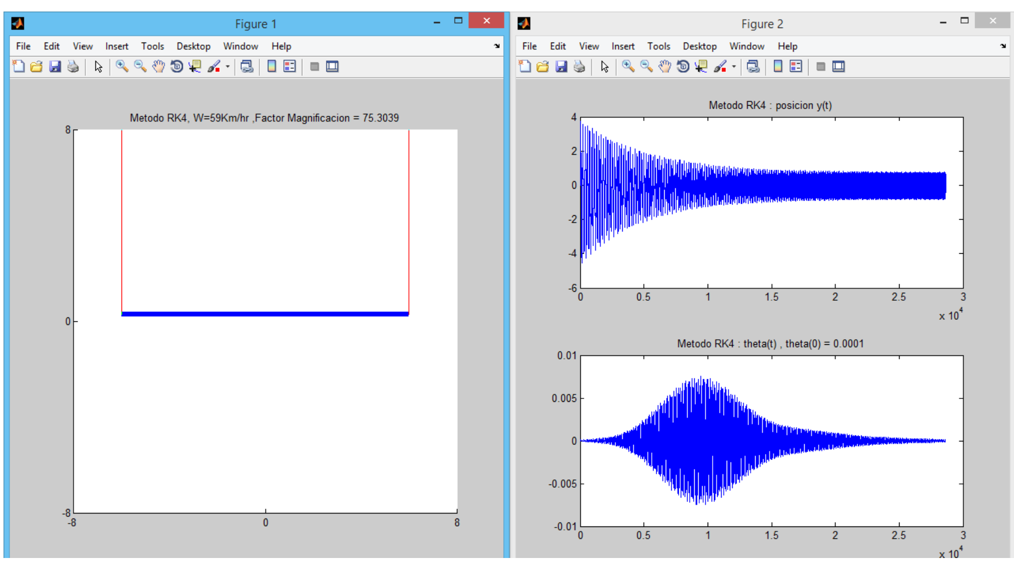
Conclusión: Por lo tanto W = 59 Km/hr es el mínimo W encontrado.



4.1. Análisis si el FM es una constante para W = 59:

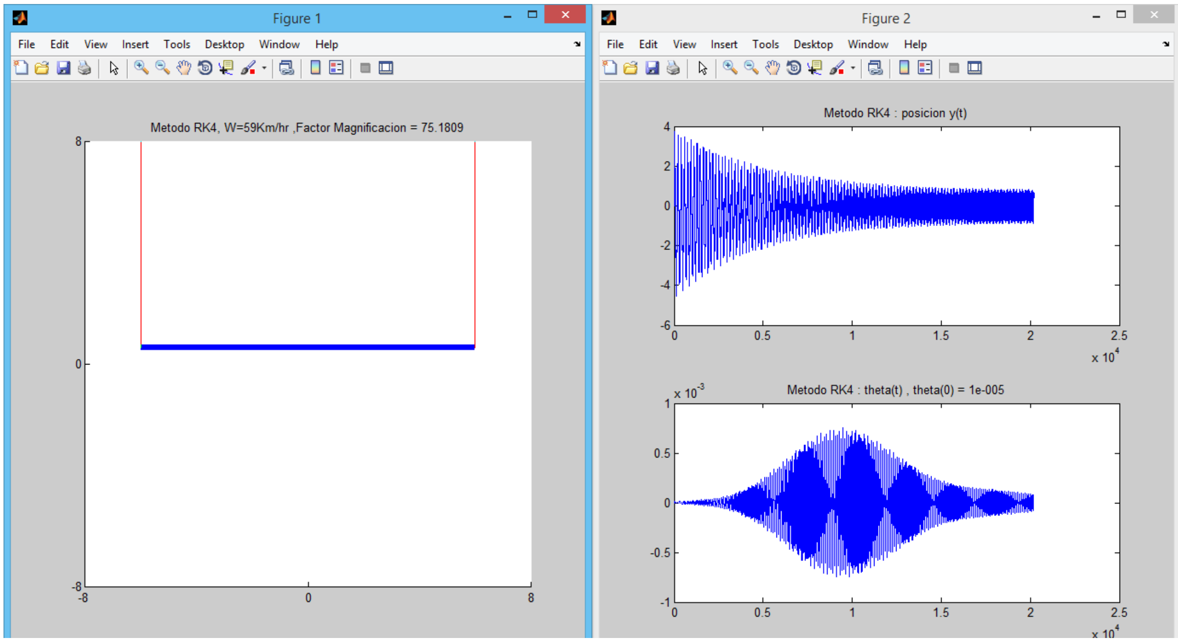
Valor de magnificación para diferentes valores de theta(0) y W = 59Km/h

a. **Se prueba para W = 59 y $\theta(0) = 10^{-4}$**



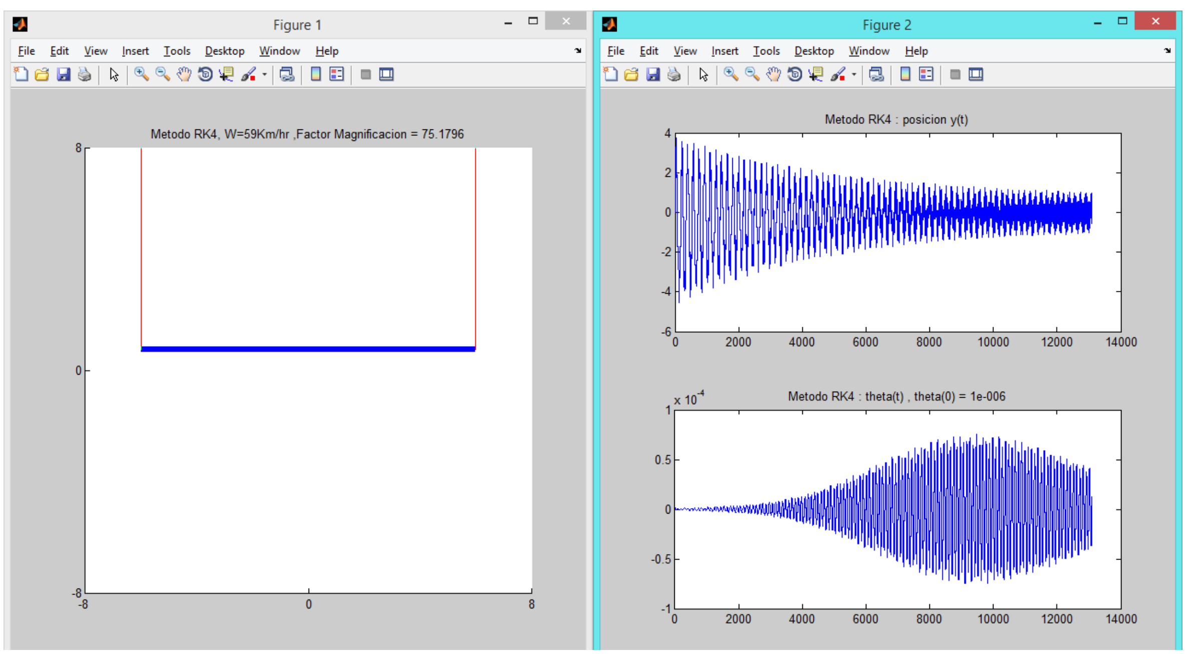
Resulta factor de magnificación (FM) igual a 75.3

b. **Se prueba para W = 59 y $\theta(0) = 10^{-5}$**



Resulta factor de magnificación (FM) igual a 75.18

c. **Se prueba para W = 59 y $\theta(0) = 10^{-6}$**



Resulta factor de magnificación (FM) igual a 75.18

Conclusión: Por lo tanto para valores de $\theta(0) = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$ **sí se obtiene una constante del factor de magnificación igual a FM = 75 aproximadamente.**

5. Diseñe e implemente un método para el cálculo de la velocidad mínima del viento del paso 4, hasta 0.5 x 10^{-3} km/h. Es posible que desee utilizar un método del capítulo 1.

Solución:

Se desarrolla un algoritmo para poder iterar valores de velocidades desde un valor de velocidad mínimo(0.5 x 10^{-3} km/h) hasta un valor máximo referencial (en este caso 80 km/h, podría ser un poco menos o un poco más).

Implementación del algoritmo en código MATLAB:

5.1. Utilizando el método de Euler

Con referencia del método de aproximación basado en Euler newton se implementa el siguiente código.

```
m1=input('FM buscado = ');
in=input('Condiciones iniciales= ');
mag=m1*in(1,3);

l=6; m=2500; a=0.2;K=1000;
omega=2*pi*38/60;
dt=0.04;
ti=0;tf=1000;
t=ti:dt:tf;
n=500;
k=1;
y=in(1,1);
y_init=y;

yp=in(1,2);
yp_init=yp;

th=in(1,3);
th_init=th;

th_p=in(1,4);
th_p_init=th_p;
```

```
for j=0.5:0.5:80
    k=1;
    yg=zeros(length(t),1);
    thg=zeros(length(t),1);
    y=y_init;
    yp=yp_init;
    th=th_init;
    th_p=th_p_init;

for i=ti:dt:tf
  a1=exp(a*(y-l*sin(th)));
  a2=exp(a*(y+l*sin(th)));
  ypp=-0.01*yp-K/(m*a)*(a1+a2-2)+0.2*j*sin(omega*i);
  th_pp=-0.01*th_p+(3*cos(th)*K)/(l*m*a)*(a1-a2);

  yp=yp+dt*ypp;
  y=y+dt*yp;
  yg(k,1)=y;

  th_p=th_p+dt*th_pp;
  th=th+dt*th_p;
  thg(k,1)=th;
  k=k+1;
end

if (max(thg)>=m1*th_init)
    maximo_valor=j
 break
end

end
```

Prueba del código:

```
<< FM buscado = 100

<< Condiciones iniciales = [0 0 0.001 0]



maximo_valor =

   59
```

5.2. Utilizando el método de Runge Kutta 4

Se hace uso de una modificación de la función utilizada en las primeras preguntas para solución de la ecuación diferencial basada en RK4.

Implementación del algoritmo en código MATLAB:

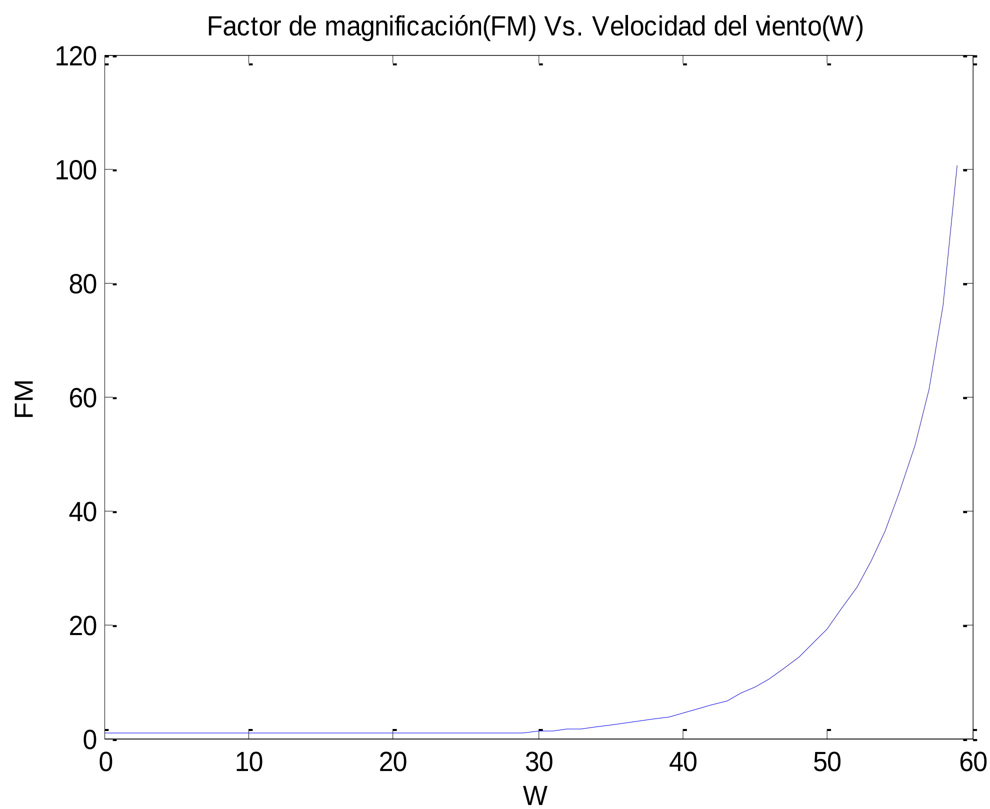
Script:

```
factor_buscado = 100;
v_min = 0.5*10^-3;
%v_min = 50;
v_max = 80;
%function tacoma(inter,ic,n,p,W)
k=1;
for v = v_min:1:v_max

    factor = tacoma_rk_entrega_FM([0 1000],[0 0 0.001 0],20000,5,v) %factor
de magnificación
    FM(k) = factor;
    W(k) = v;
    disp(v)

    if(factor > factor_buscado) %si el factor de magnificacion es mayor
        break                   % que el factor buscado, sale de la busqueda
    end

    k=k+1;

end

plot(W,FM)
```

Función:

```
function factor = tacoma_rk_entrega_FM(inter,ic,n,p,w)
clf % clear figure window
h=(inter(2)-inter(1))/n;
y(1,:)=ic; % enter initial conds in y
t(1)=inter(1);len=6;

for i=1:n
    t(i+1)=t(i)+h;
    y(i+1,:)=runge_step(t(i),y(i,:),h,w);
    theta(i) = y(i,3);
    factor = max(theta)/ic(1,3);%el maximo general para el
factor de magnificacion

end

function y=runge_step(t,x,h,w)

   k1 = ydot(t,x,w);
   g1 = x + 0.5*h*k1;

   k2 = ydot(t+0.5*h,g1,w);
   g2 = x + 0.5*h*k2;

   k3 = ydot(t+0.5*h,g2,w);
   g3 = x + h*k3;

   k4 = ydot(t+h,g3,w);

   y = x + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);

function ydot=ydot(t,y,w)
len=6;a=0.2; W=w; omega=2*pi*38/60;
a1=exp(a*(y(1)-len*sin(y(3))));
a2=exp(a*(y(1)+len*sin(y(3))));
ydot(1)=y(2);
ydot(2)=-0.01*y(2)-0.4*(a1+a2-2)/a+0.2*W*sin(omega*t);
ydot(3)=y(4);
ydot(4)=-0.01*y(4)+1.2*cos(y(3))*(a1-a2)/(len*a);
```

<u>Gráfica FM vs W obtenida por el método de RK4</u>



Se observa que para W = 59 ya sobrepasó por un poco el valor de FM = 100.

6. Pruebe algunos de los valores más grandes de W. ¿Todos los ángulos iniciales muy pequeños crecen con el tiempo hasta tamaños catastróficos?

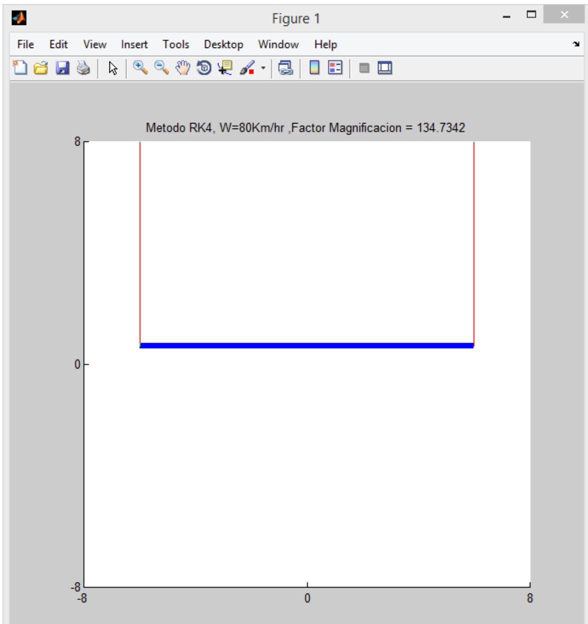
<u>Solución:</u>

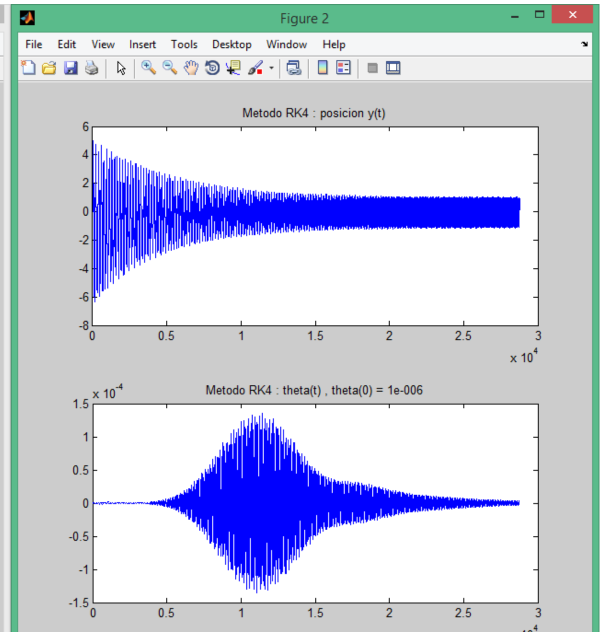
Se toma como valor muy pequeño de ángulo inicial: $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$,

(ASUMIDO!) Según el video del puente de Tacoma, se considera valores CATASTRÓFICOS de torsión a theta >= 40°. Ya que para este ángulo puede producirse destrozos físicos y perjuicios sobre lo que transita en el puente.

Se realizan las siguientes pruebas de simulación:

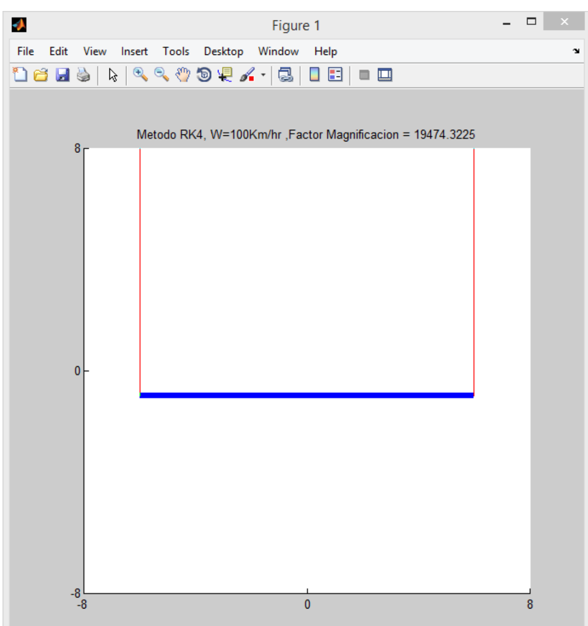
a. **Para W = 80 Km/hr**

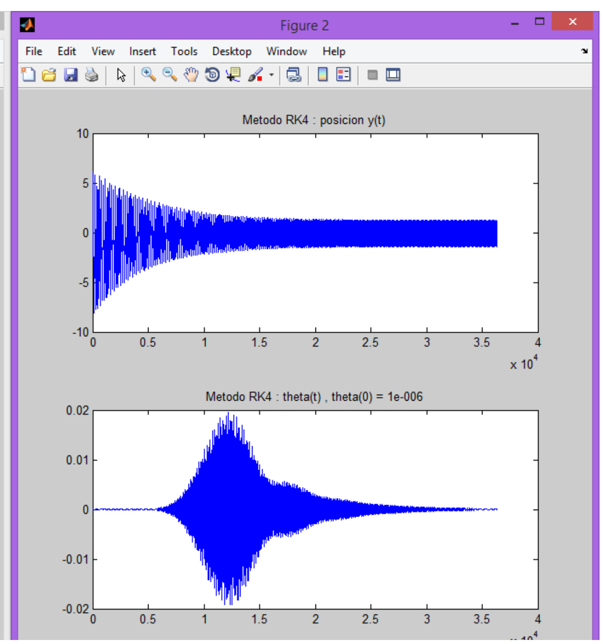




Con W = 80Km/hr se produce un ángulo de torsión máximo de 0.00015rad = 0.0085°. Lo cual es un valor de torsión pequeño que no tiene efecto peligroso.

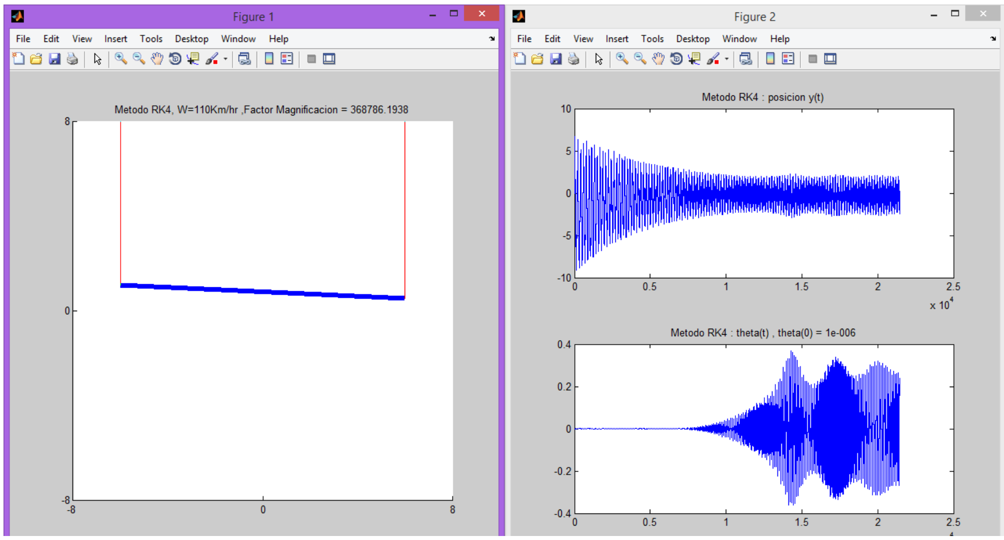
b. **Para W = 100 Km/hr**





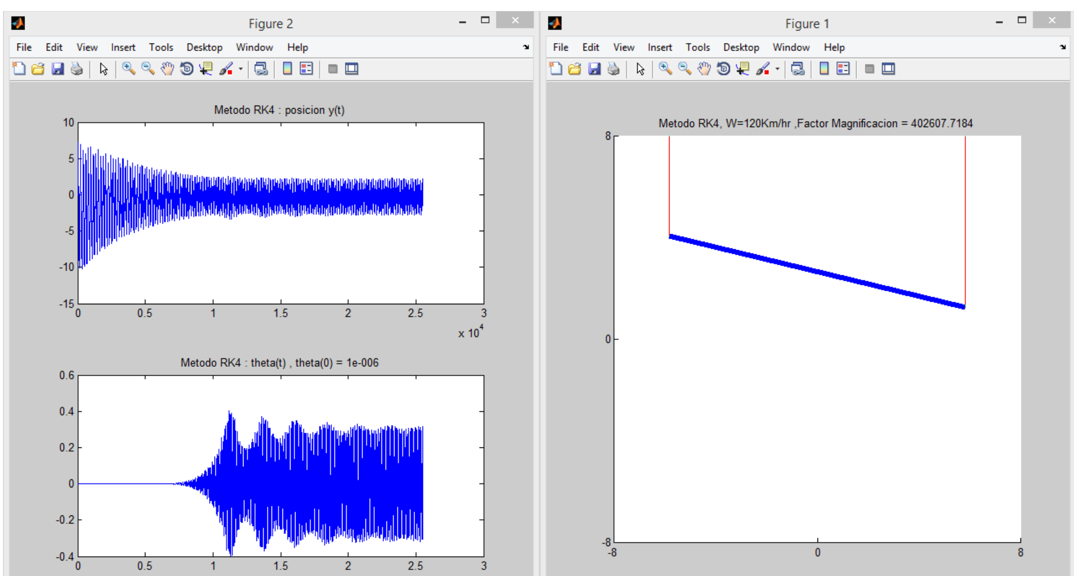
Con W = 100 Km/hr se produce un ángulo de torsión máximo de 0.02rad = 1.14°. Lo cual es un valor de torsión pequeño que no tiene efecto peligroso.

c. **<u>Para W = 110 Km/hr</u>**



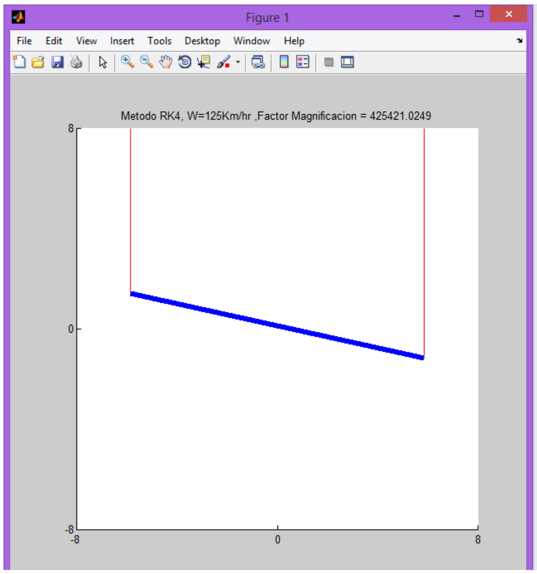
Con W = 110Km/hr se produce un ángulo de torsión máximo **(según la gráfica)** de 0.35 rad = 19.95°. Lo cual es un valor de torsión mediano que puede causar mucho balanceo en el puente pero aún no supero el valor catastrófico asumido.

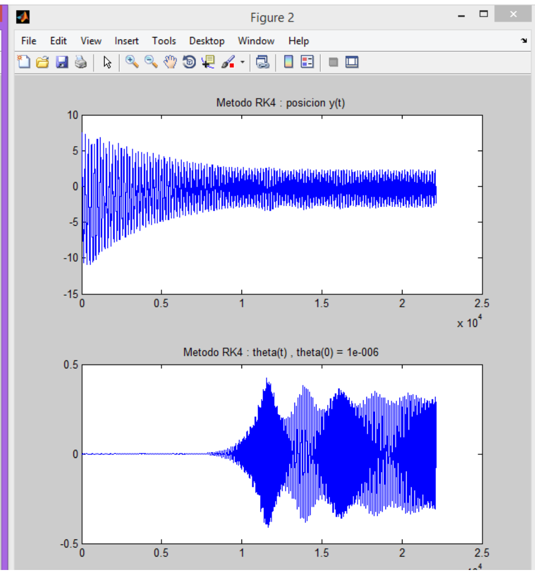
d. **<u>Para W = 120 Km/hr</u>**



Con W = 120Km/hr se produce un ángulo de torsión máximo de 0.4 rad = 22.9°. Lo cual es un valor de torsión mediano que puede causar mucho balanceo en el puente pero aún no supero el valor catastrófico asumido.

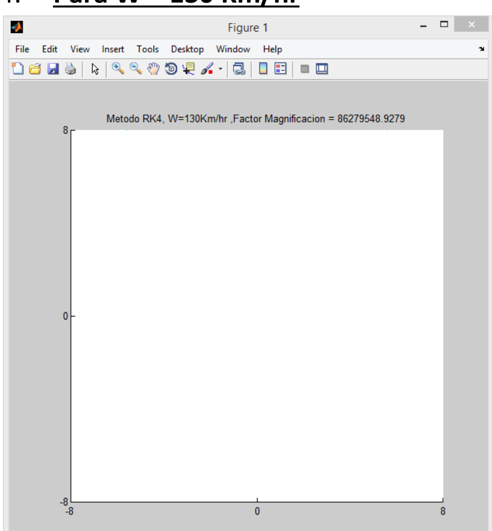
e. **Para W = 125 Km/hr**

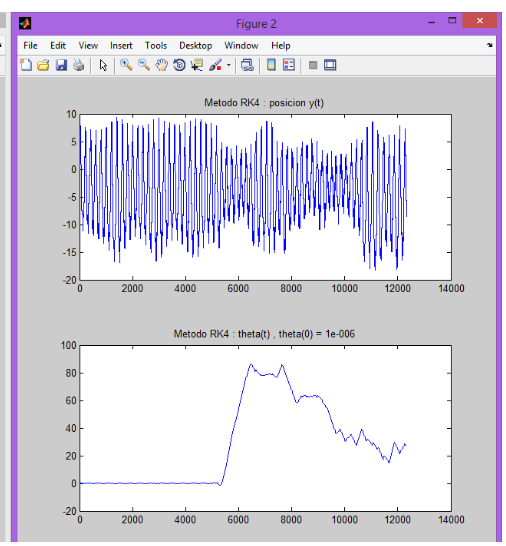




Con W = 125Km/hr se produce un ángulo de torsión máximo de 0.45rad = 25.7° ***(consideramos que 40° ya es un ángulo que causa daños en el puente y en los que lo circulan.)***

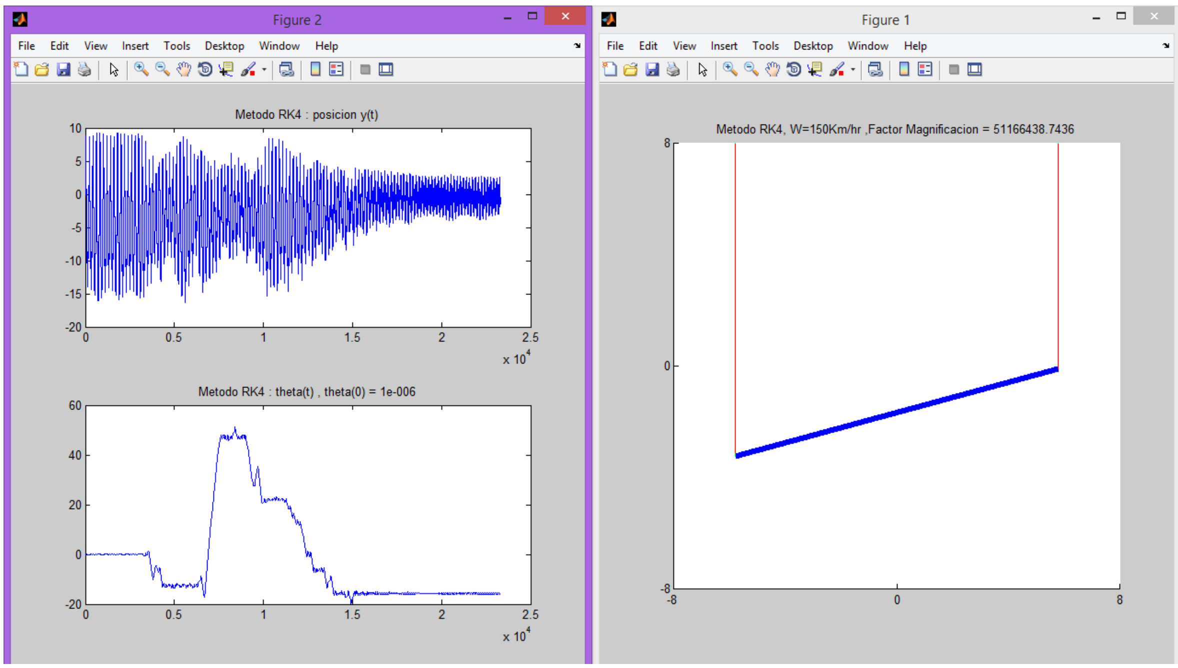
f. **Para W = 130 Km/hr**



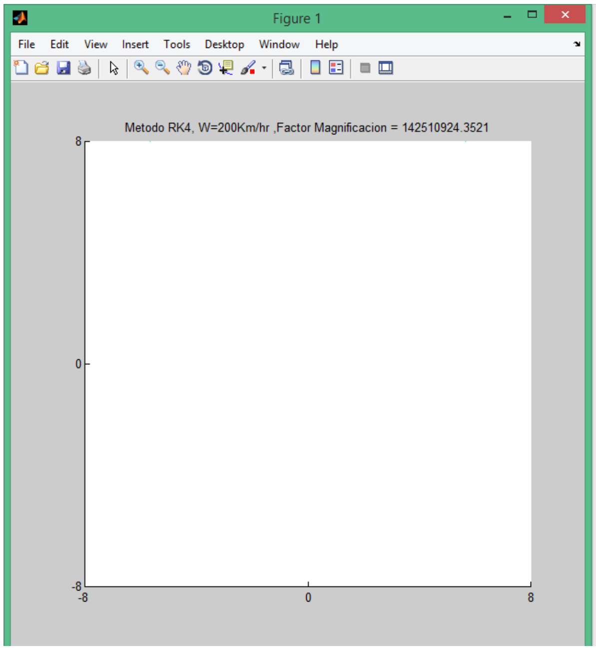


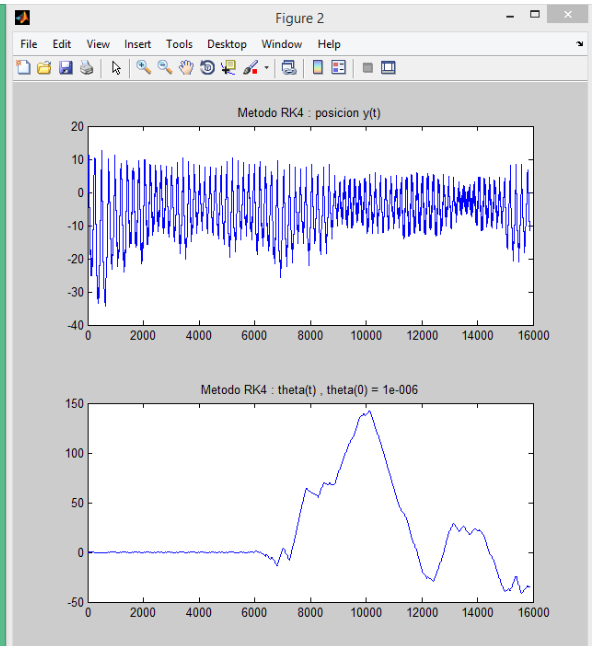
Con W = 130Km/hr se produce un ángulo de torsión máximo (**según la gráfica)** de 85 rad. Lo cual es un cambio brusco respecto a la tendencia anterior, por lo cual valor para éste valor de W supera todo límite permisible y el resultado real **SERÍA CATASTRÓFICO.**

g. **Para W = 150 Km/hr**



h. **Para W = 200 Km/hr**





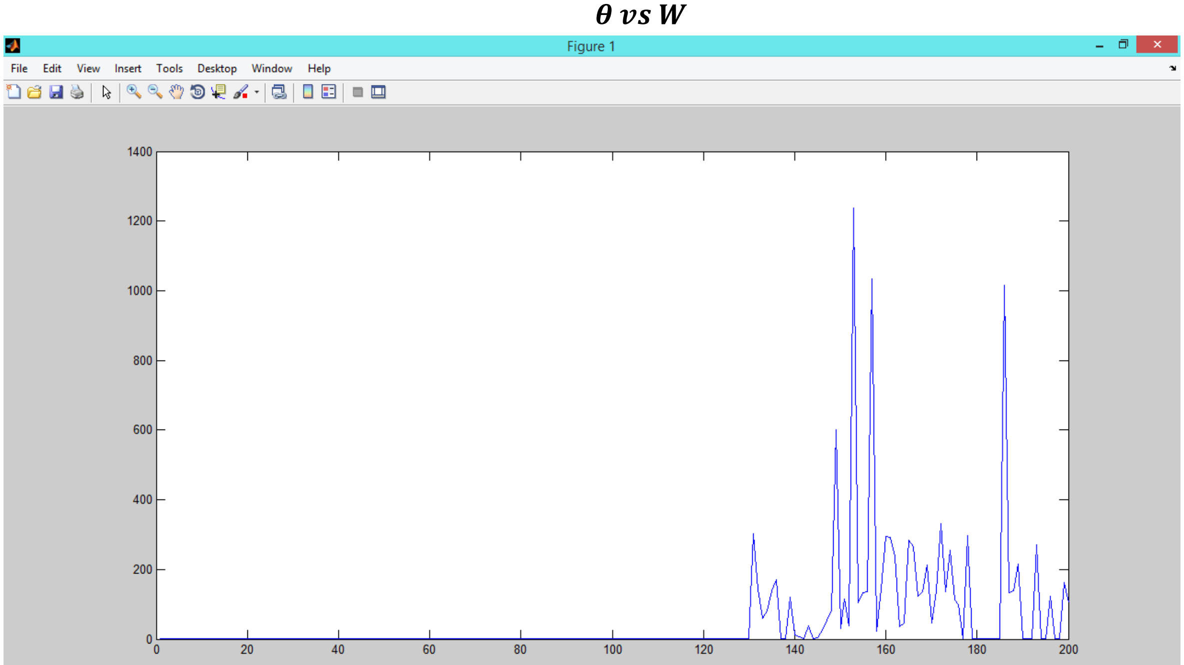
Con W = 150 y 200 Km/hr se producen también resultados **CATASTRÓFICOS.**

Conclusión:

En conclusión para valores mayores a 130Km/hr los resultados son verdaderamente CATASTRÓFICOS.

Como un adicional se hizo una prueba para un bucle de 0.0005 hasta 200 KM/hr de valor de velocidad del viento para $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$, **y se obtuvo:**

$\boldsymbol{\theta\ vs\ W}$



Lo cual muestra que después de 130 los resultados poseen picos grandes de ángulo pero no tiene una tendencia fija pero de es seguro que al pasar por dicha hay mucha probabilidad de un CATÁSTROFE.

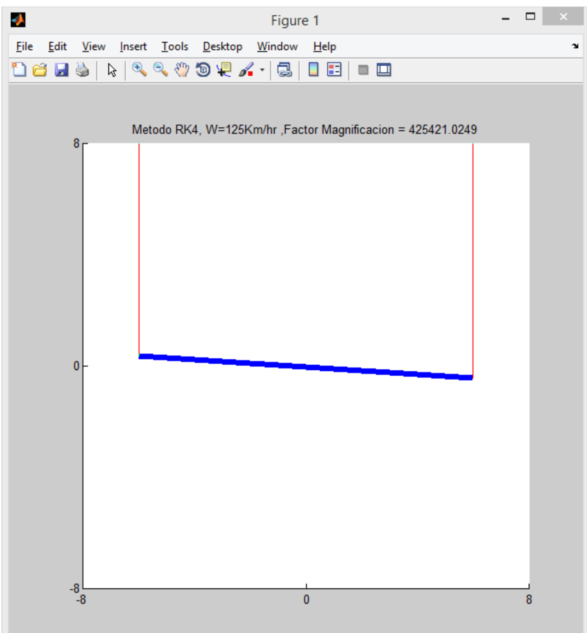
7. ¿Cuál es el efecto de aumentar el coeficiente de amortiguación? Duplique el valor actual y compare la *A* crítica cuando w = 3. ¿Puede sugerir posibles cambios en el diseño que podrían haber hecho al puente menos susceptible a la torsión?

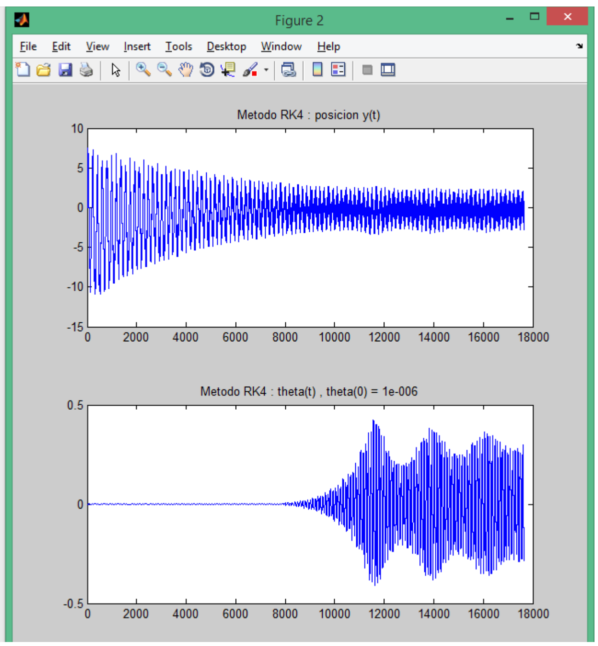
Se considera el Vcritico el valor para el cual se produce un catástrofe.

7.1. Efecto de aumentar el coeficiente de amortiguación (d)

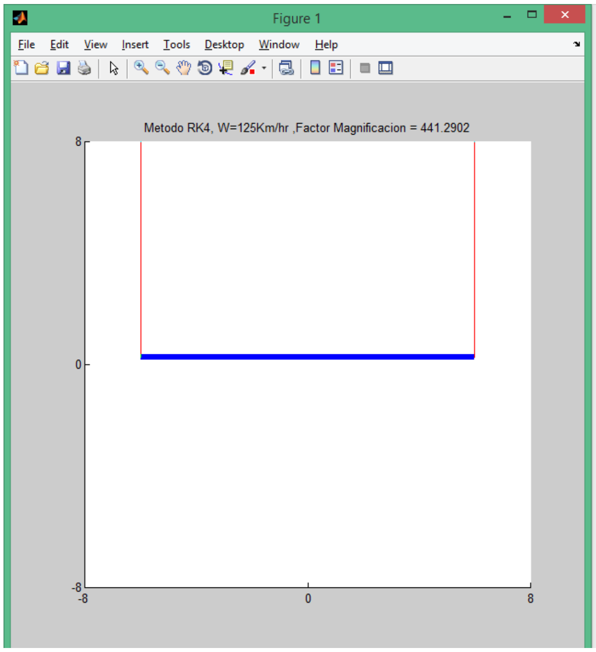
No se va a variar el w = `2*pi*38/60, para este caso.`

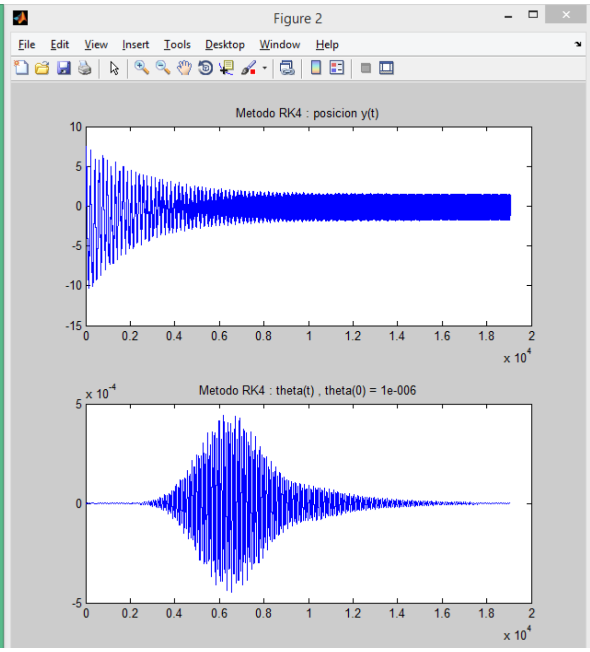
a. Con el W = 125, $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$, `y d = 0.01`



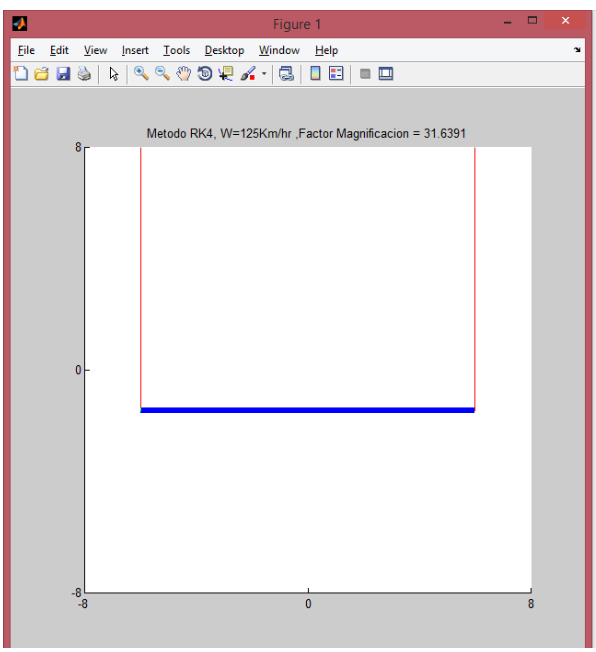


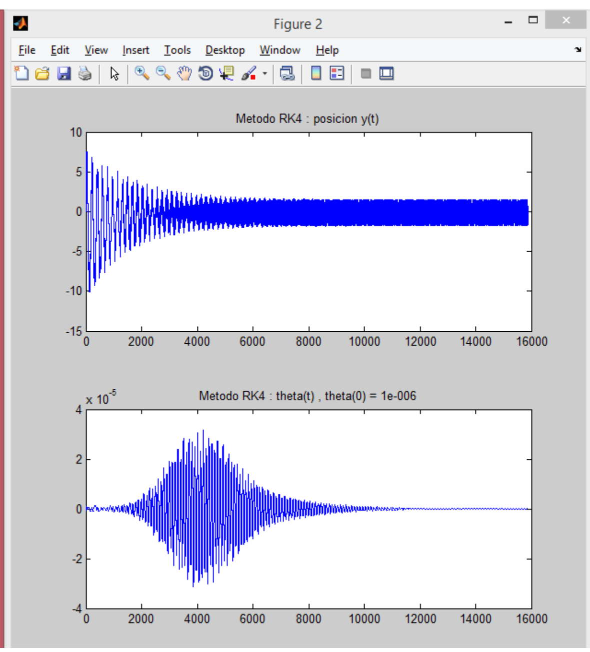
b. Con el W = 125, $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$, `y d = 0.02`





c. Con el W = 125, $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$, y d = 0.03





Conclusión: A mayor coeficiente de amortiguamiento, se reduce el factor de magnificación por ende es una buena forma de reducir los ángulos torsionales.

7.2. Analizando los cambios de "w" , frecuencia de la velocidad del viento para el "a " crítico.

Se analizará con el doble de amortiguamiento:

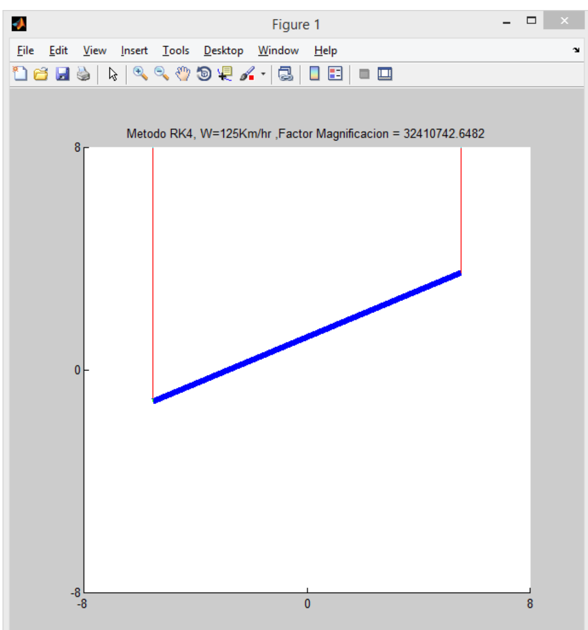
$$d = 2 * 0.01 = 0.02$$

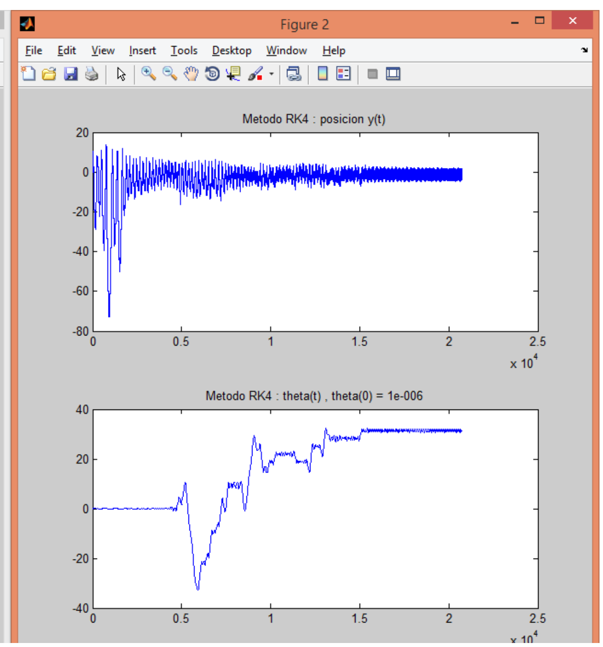
$$w = 3$$

$$\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$$

Analizaremos para W = 125Km/hr. Variando A.

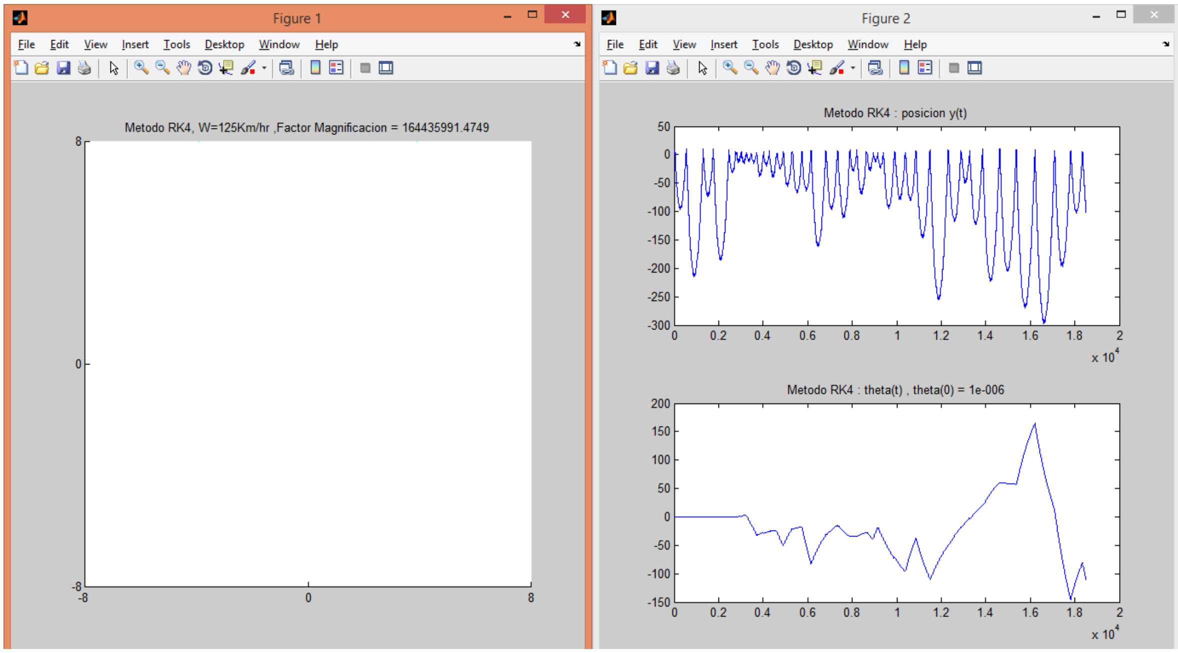
- Con el valor original a = 0.2





Se obtiene theta_max = 32 radianes(muy grande)

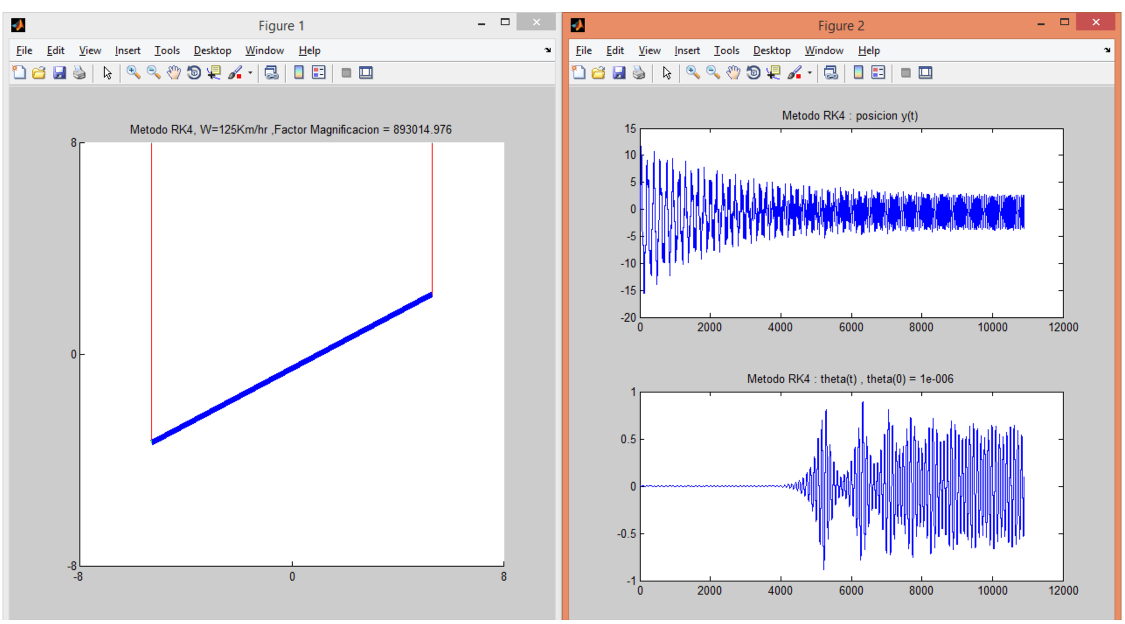
- Con el valor original a = 0.4



Se obtiene theta_max = 160 radianes(muy grande)

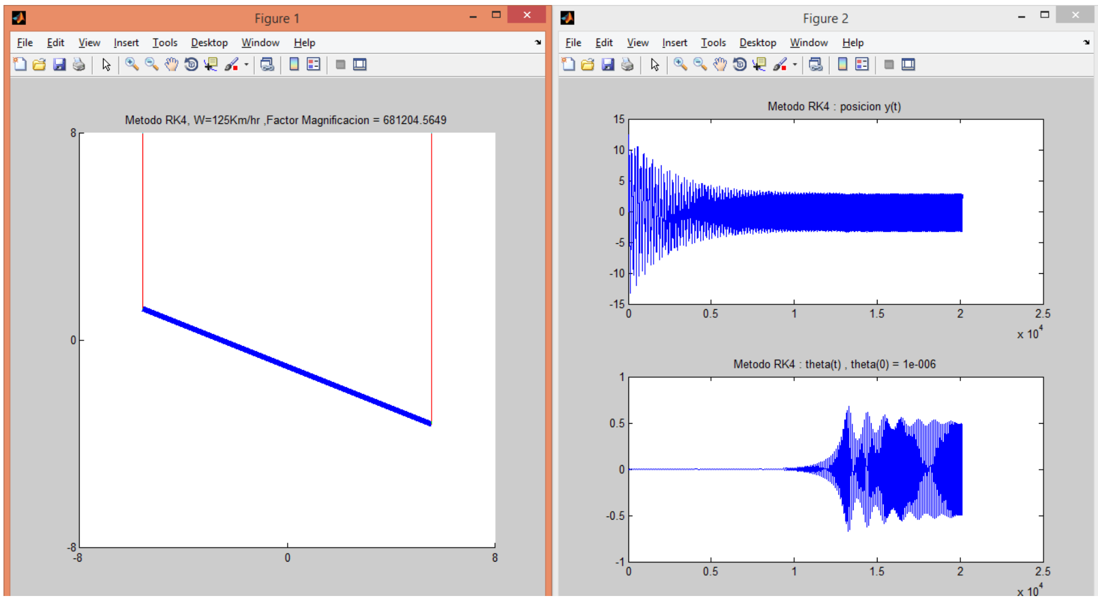
Entonces reducimos en valor de “a”:

- Con el valor original a = 0.1



Se obtiene theta_max =0.8 radianes = 45° (**Éste sería el valor crítico para el theta_max asumido**)

➢ Con el valor original a = 0.05



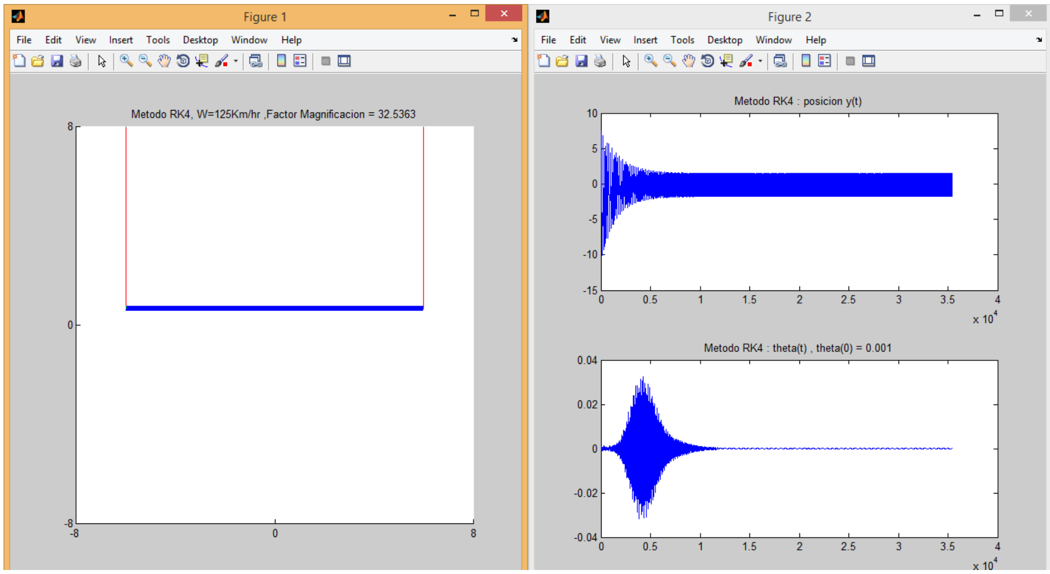
Se obtiene theta_max =0.5 radianes = 28.6°.

Conclusión: A valor de “a”, coeficiente de no linealidad máximo, para el caso elegido anteriormente resulto ser a = 0.1. Y además como se observó que al aumentar “a” se aumenta en FM por ende conviene disminuir “a”.

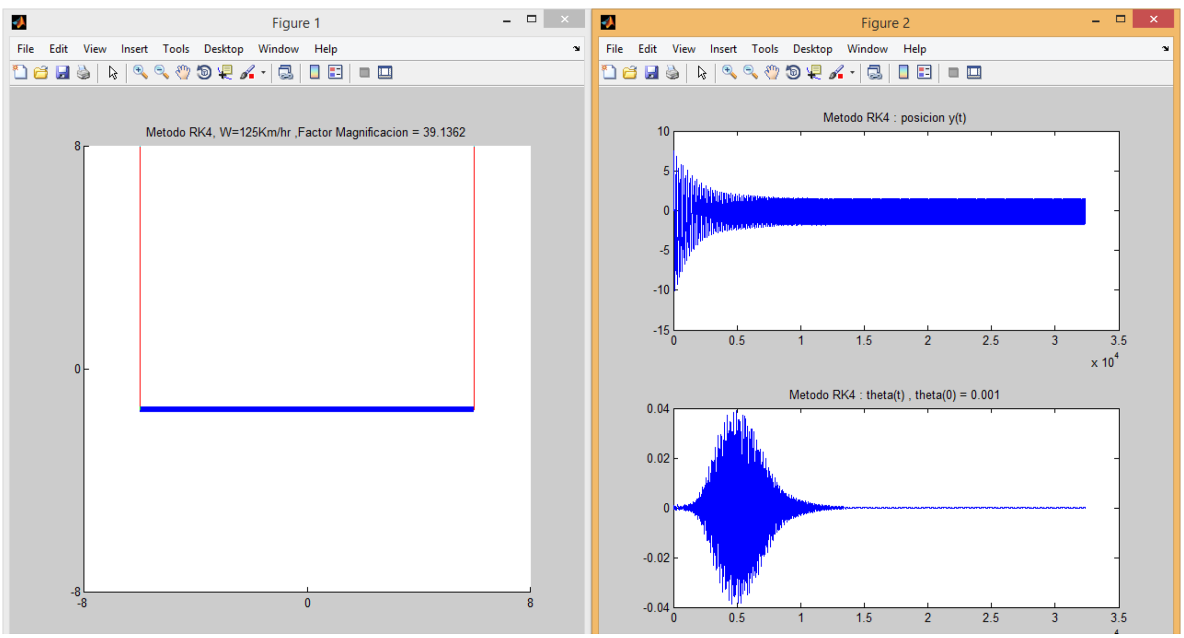
7.3. Cambios en el diseño para mejorar la robustez del puente ante la torsión

a. Variando el ancho del puente “2*l”

➢ Con ancho = 20



- Con ancho = 50

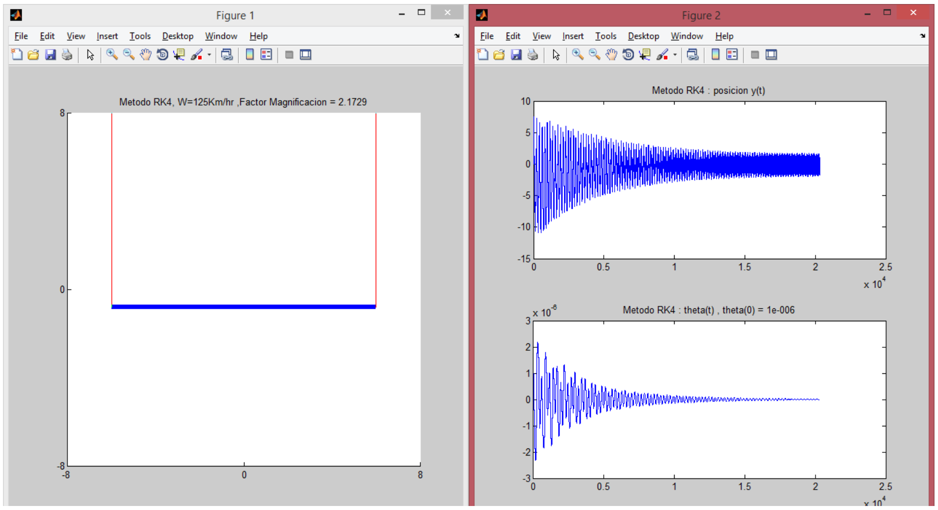


Se observa que al variar el ancho del puente no varía considerablemente el factor de magnificación, por ende esta alternativa no ayudaría de mucho.

b. Variando la masa del puente "m"

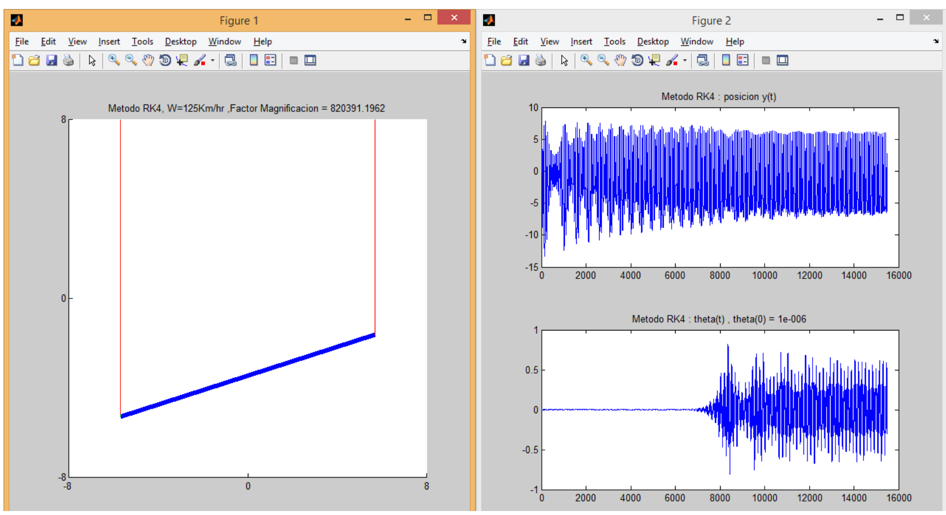
- Variando la masa de 2500 - > 2500*5

W = 125, $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$, w = `2*pi*38/60 , d = 0.01`



- Variando la masa de 2500 - > 2500/5

W = 125, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}) = \mathbf{10^{-6}}$, w = `2*pi*38/60 , d = 0.01`



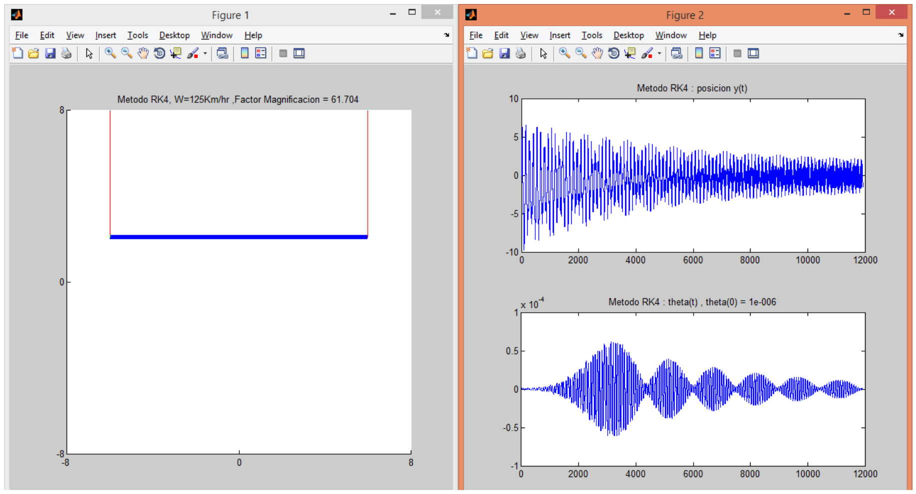
Se observa que al variar la masa del puente sí se logra variar el factor de magnificación, de tal manera que se puede reducir el FM aumentando la masa del puente.

c. Variando la constante de resorte "K".

Para esto se tendrá que usar otro material con el fin de mejorar la estabilidad del puente.

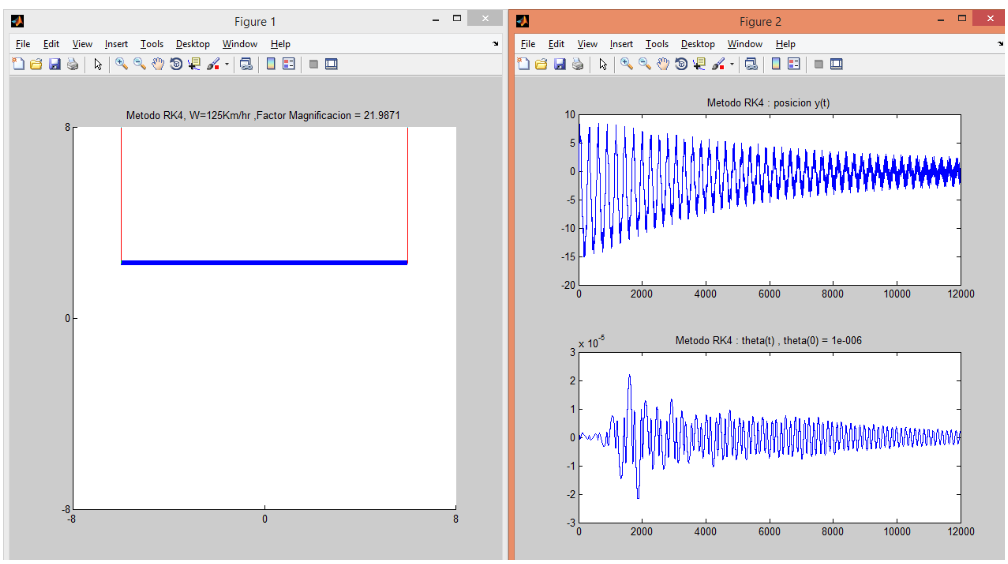
- Variando K de 1000 - > 2000

W = 125, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}) = \mathbf{10^{-6}}$, w = `2*pi*38/60 , d = 0.01`
En las pruebas de aumento de K, a veces sube y a veces disminuye. Por lo tanto no es algo determinado general, depende de la velocidad.



- Variando K de 1000 - > 500

W = 125, $\boldsymbol{\theta(0) = 10^{-6}}$, w = `2*pi*38/60 , d = 0.01`



*En las pruebas realizadas se observó que bajando el K se puede mejorar en ciertos casos de W.

Se observa que al variar la constante de resorte K varía el FM. Conviene disminuir el K para disminuir el FM.

Conclusión general:

Para mejorar el diseño del puente conviene aumentar la masa (más volumen) y el coeficiente de amortiguamiento (otro material). Además reducir el valor de K(constante del resorte).