



ESCUELA DE POSGRADO

Curso:

CONTROL ÓPTIMO

Tema:

Pesos dependientes de la frecuencia y observadores

Presentado por:

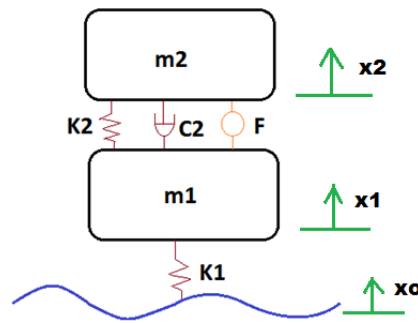
CONTRERAS MARTINEZ, DIMEL ARTURO

Docente:

DR. ANTONIO MORÁN

2016

1. Respuesta del sistema suspensión con entrada ruido coloreado

Sistema de suspensión

$$\dot{X} = AX + Bu + W\dot{x}_0$$

$$X = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ x_{21} \\ \dot{x}_1 \\ x_{10} \end{bmatrix}$$

w=camino: modelado en éste caso como ruido coloreado

$$J = 0.5 \int_0^\infty q_1 \ddot{x}_2^2 + q_1 x_{21}^2 + q_3 \dot{x}_{10}^2 + ru^2$$

Modelando el ruido coloreado, a partir del ruido blanco:

Sea w un ruido blanco.

$$\frac{\dot{X}_o(s)}{w(s)} = G(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

Se pasa a la forma espacio de estados, con xop

$$\dot{x}_{op} = -0.5x_{op} + 0.5w$$

$$y = x_{op}$$

Entonces se tiene:

$$Ar = -0.5$$

$$Br = 0.5$$

$$Cr = 1$$

Uniendo el modelo del sistema con el modelo del ruido coloreado, además se considera que la entrada es w – ruido blanco.

Sistema resultante:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{x}_{op} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{4x4} & WC_r \\ 0 & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ x_{op} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{4x1} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0_{4x1} \\ 1 \end{bmatrix} w$$

$$x_{op} = \dot{x}_o$$

El nuevo vector de estados y matrices A,B resulta:

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} X \\ x_{op} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_{4x4} & WC_r \\ 0 & A_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B_{4x1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La nueva función de costo:

$$J = 0.5 \int_0^\infty \dot{\mathbb{X}}^T Q \dot{\mathbb{X}} + \mathbb{X}^T S \mathbb{X} + u^T R u$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} q1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quedaría:

$$J = 0.5 \int_0^\infty \mathbb{X}^T (Q + \mathbb{A}^T S \mathbb{A}) \mathbb{X} + 2\mathbb{X}^T (\mathbb{A}^T S \mathbb{B}) u + u^T (R + \mathbb{B}^T S \mathbb{B}) u$$

$$N = \mathbb{A}^T S \mathbb{B}$$

$$\mathbb{R} = R + \mathbb{B}^T S \mathbb{B}$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{A} - \mathbb{B} \mathbb{R}^{-1} N^T$$

Entonces mediante la solución de Riccati, se obtiene:

$$P = are(\mathbb{A} - \mathbb{B} \mathbb{R}^{-1} N^T, \mathbb{B} \mathbb{R}^{-1} \mathbb{B}^T, \mathbb{Q} - N \mathbb{R}^{-1} N^T)$$

Script en Matlab

- El Sistema:

```

m2 = 10;
m1 = 1;
f2 = 1;    w2 = 2*pi*f2;
f1 = 10;   w1 = 2*pi*f1;
k2 = w2*w2*m2;
k1 = w1*w1*m1;
eta2 = 0.5;
c2 = 2*eta2*w2*m2;

a11 = -c2/m2;    a12 = -k2/m2;    a13 = c2/m2;
a31 = c2/m1;     a32 = k2/m1;     a33 = -c2/m1;    a34 = -k1/m1;
b1 = 1/m1;    0;    b3 = -1/m1;
A = [ a11    a12    a13    0
      1      0      0     -1      0
      a31    a32    a33    a34
      0      0      0      1      0 ];
B = [ b1;    0;    b3;    0 ];
W = [ 0;    0;    0;    -1 ];
C = A(1,:);
D = B(1,:);

```

El ruido coloreado

```

%% Funcion para el transformar ruido blanco a coloreado
%De la FT : G(s) = Xop(s)/w(s) = 1/2s +1 ;
% Xopp(t) = -0.5Xop(t) + 0.5*w(t);
% y = C*Xop = Xop
Cr = 1;
Ar = -0.5;
Br = 0.5;
Z14 = zeros(1,4);

```

Uniendo los dos sistemas :

```

AA = [ A      W*Cr
      Z14     Ar ];
BB = [ B
      0 ];

```

Ingreso del peso

```
q1 = input('Peso x2pp: ');
q2 = input('Peso x21: ');
q3 = input('Peso x10: ');
QQ = diag([ 0 q2 0 q3 0]);
R = [ 1 ];
S = diag([q1,0,0,0,0]);
```

Utilizando Riccati para calcular el controlador:

```
N = AA'*S*BB;
RR = R+BB'*S*BB;
QQ = QQ + AA'*S*AA;
PP = are(AA - BB*inv(RR)*N', BB*inv(RR)*BB', QQ-N*inv(RR)*N');
K = inv(RR)*BB'*PP;
```

Discretización del sistema , condiciones iniciales y simulación:

```
ti = 0;    tf = 5;    dt = 0.001;
t = ti:dt:tf;    t = t';
nt = length(t);
[Ak Bk ] = c2d(A,B,dt);
[Ak Wk ] = c2d(A,W,dt);
[Ark Brk ] = c2d(Ar,Br,dt);
x = [ 0; 0; 0; 0 ];
xp = [0]; %valor inicial
k = 1;
w = randn(nt,1); %ruido blanco

for tt = ti:dt:tf
    xx21(k,1) = x(2,1);
    xx10(k,1) = x(4,1);
    u = -K*[ x; xp ];
    FF(k,1) = u;
    xx2_2p(k,1) = C*x + D*u;
    x = Ak*x + Bk*u + Wk*xp;
    xp = Ark*xp + Brk*w(k,1);
    ruido_coloreado(k,1) = xp;
    k = k+1 ;
end

figure(1);
subplot(3,1,1); plot(t,xx21,'-k',t,xx10,'-r');
legend('x21','x10'); grid;
subplot(3,1,2); plot(t,xx2_2p,'-k'); legend('Accel x2p');grid;
subplot(3,1,3); plot(t,w,'-k',t,ruido_coloreado,'-r');
legend('ruido blanco','coloreado'); grid;
```

Espectros:

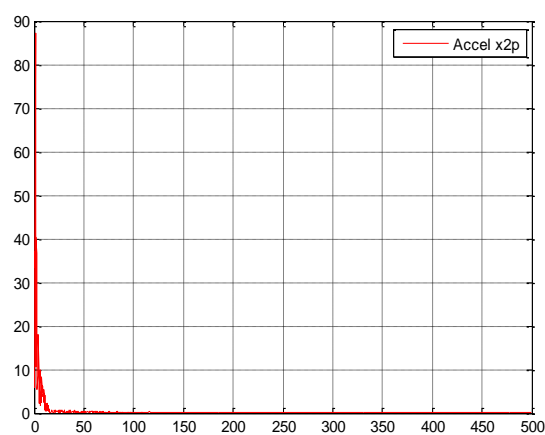
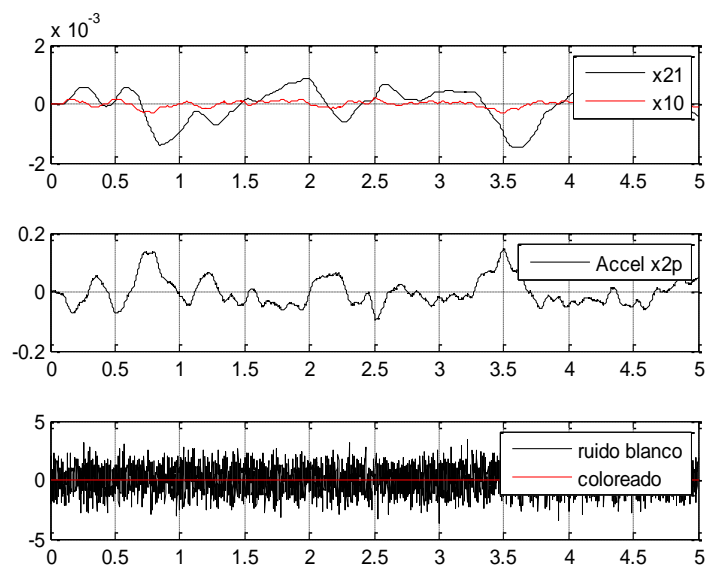
```

xx2_2p = xx2_2p - mean(xx2_2p);
N = 4096;
fftxx2 = fft(xx2_2p(1:N,1));
absfftxx2 = abs(fftxx2(1:(N/2+1),1));
K = 0:(N/2);
K = K';
wr = 2*pi*K/N;
fHz = wr/(2*pi*dt);
figure(2);
plot(fHz,absfftxx2,'-r'); legend('Accel x2p'); grid;

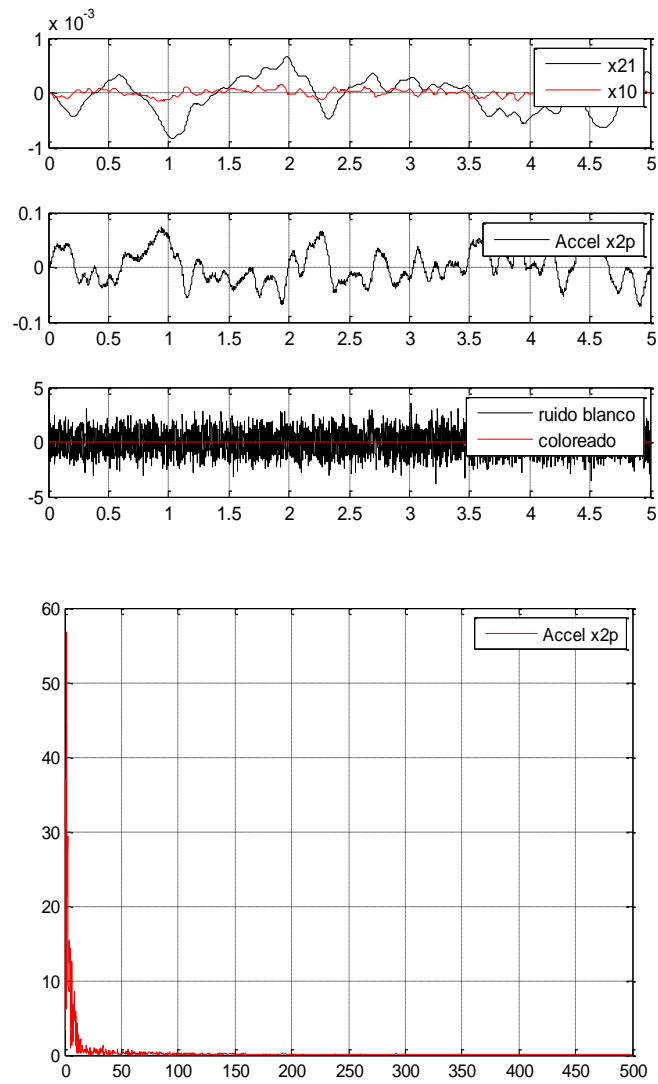
```

Variando el peso “q”

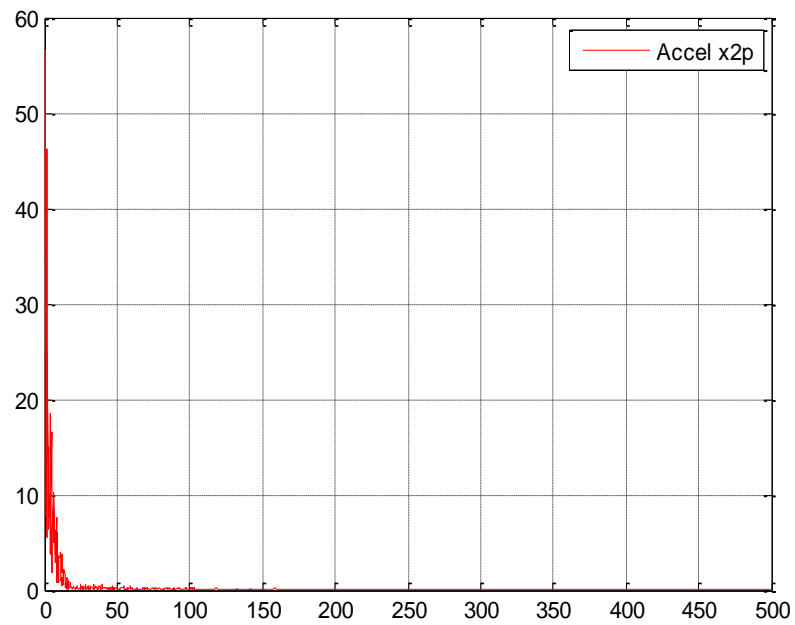
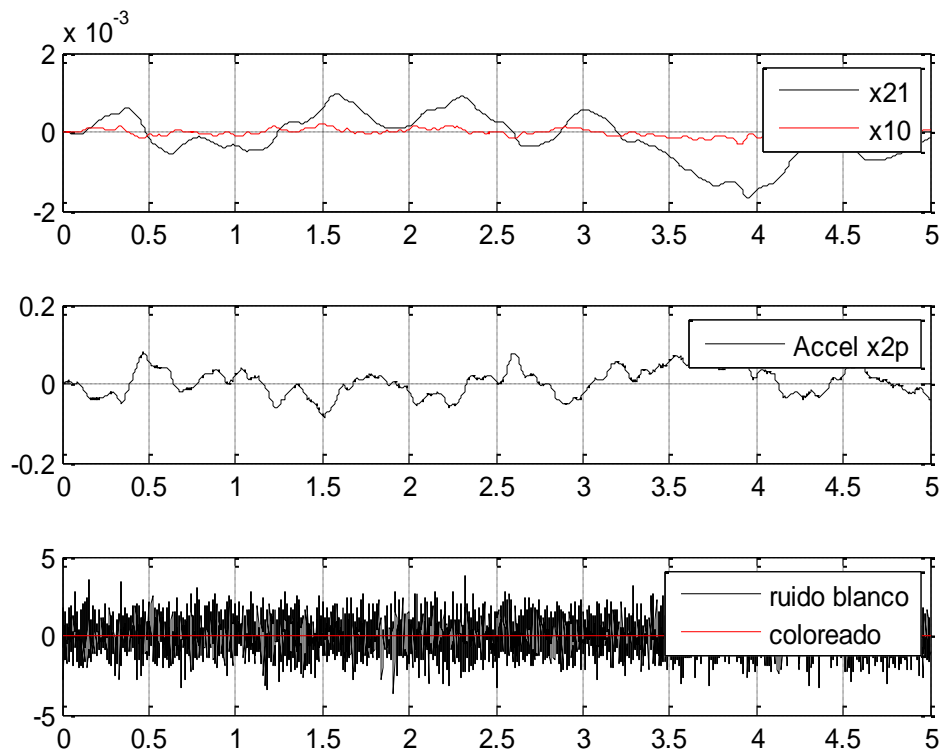
- Peso $q_{x2pp} = 1$, $q_{x21} = 0$, $q_{x10} = 0$



- Peso $q_{x2pp} = 10$, $q_{x21} = 0$, $q_{x10} = 0$



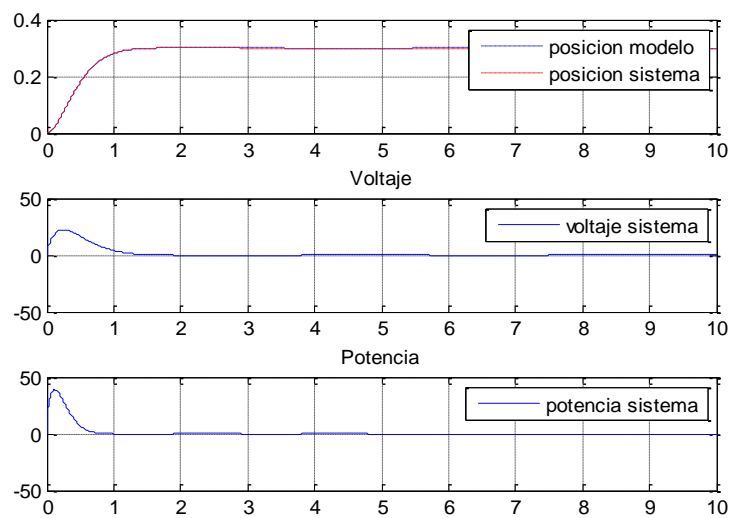
- Peso $q_{x_{2p}} = 100$, $q_{x_{21}} = 0$, $q_{x_{10}} = 0$



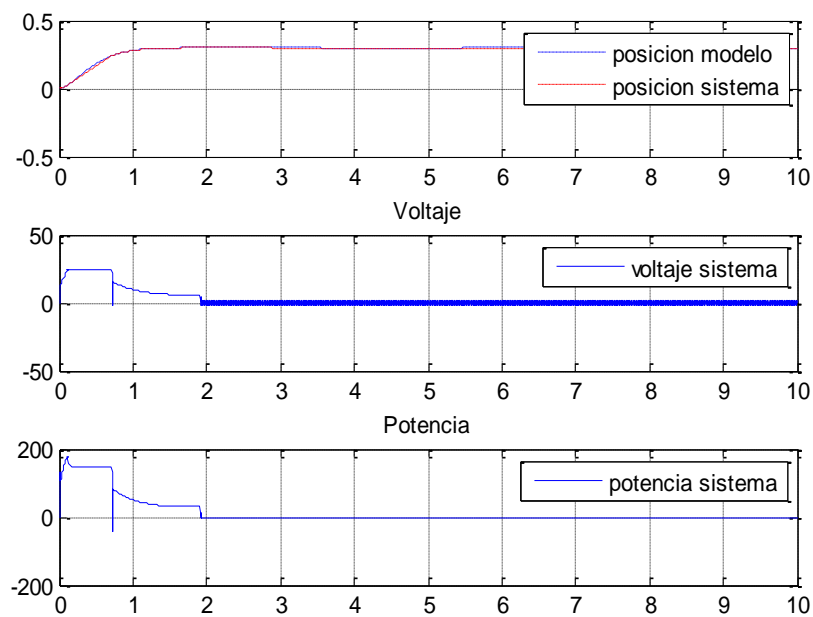
2. Análisis variando la fricción seca:

Se hacen las pruebas con el peso $q = 1e10$.

- $Fric = 0 \cdot 10$

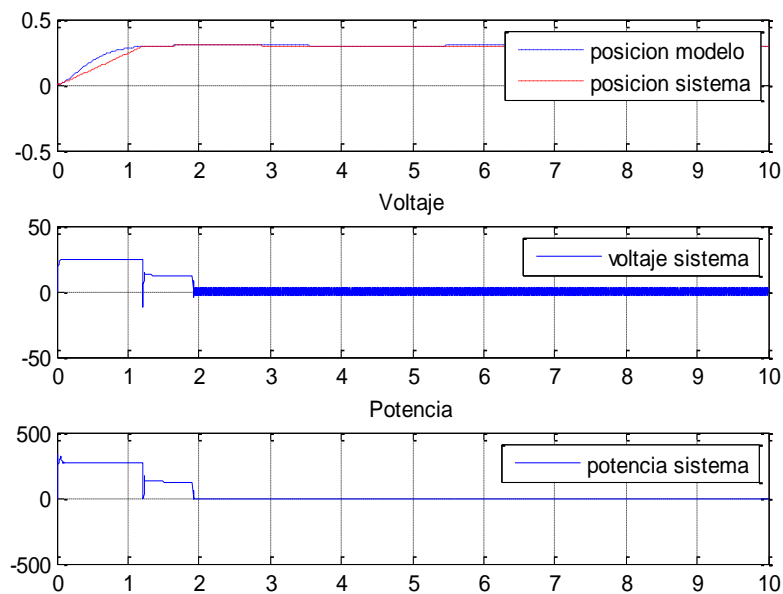


- $Fric = 2 \cdot 10$



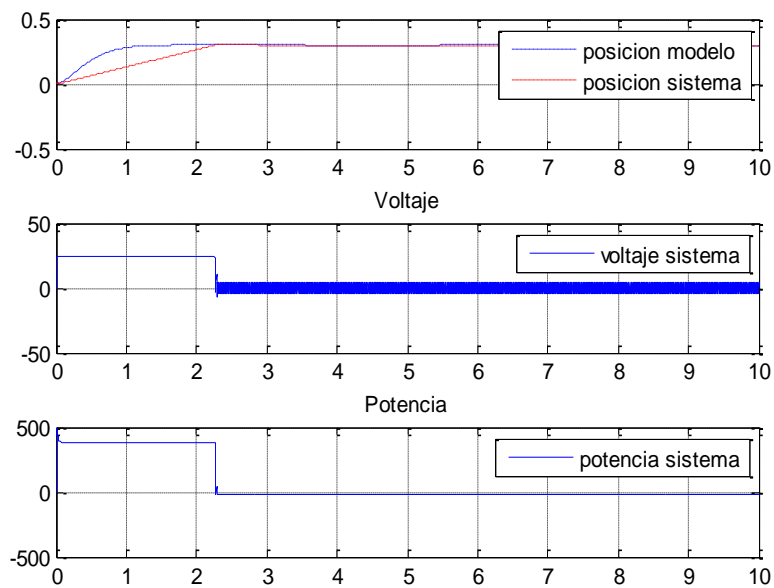
La respuesta del sistema es aún sigue a la respuesta del modelo, pero se incrementó el valor de la señal de control “u” y la potencia.

- $Fric = 4 \cdot 10$



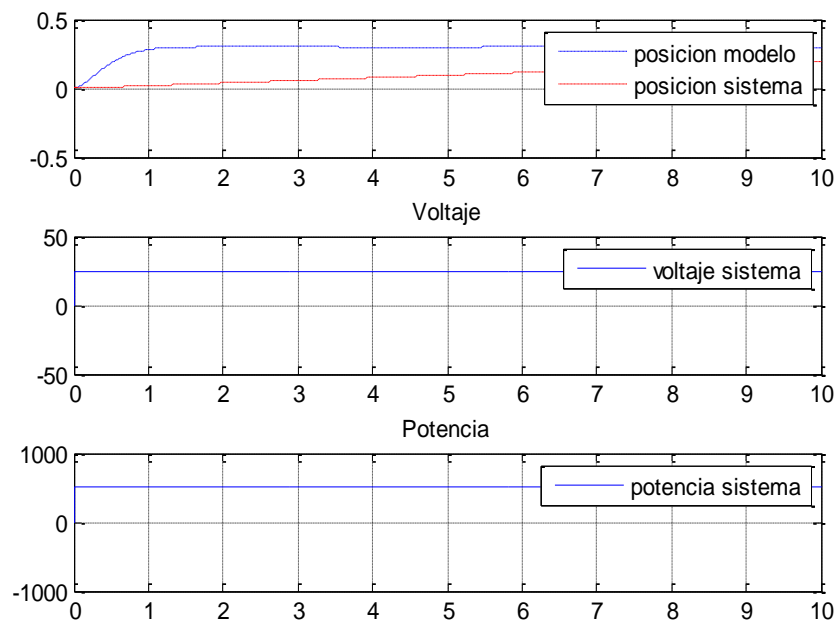
La respuesta del sistema es más lenta que la respuesta del modelo, además se produce un incremento de la potencia.

- $Fric = 6 \cdot 10$



La respuesta del sistema ya no sigue al modelo debido a la fricción seca de valor alto, esto hace que la respuesta del sistema sea más lenta. Además se produce un incremento notable de potencia.

- $Fric = 8 \cdot 10$



La respuesta del sistema no sigue al modelo en su totalidad, este valor de fricción es demasiado alto.

3. Variar el F en el Feedback + Feedforwad

Del modelo a seguir:

$$F = K * 0.4$$

Se variará F, utilizando K = 1.2, 1.5, 1.8, 2, 2.5

Esto se relaciona con la velocidad de respuesta del modelo.

$$\omega = 2\pi F$$

$$\xi = 0.9$$

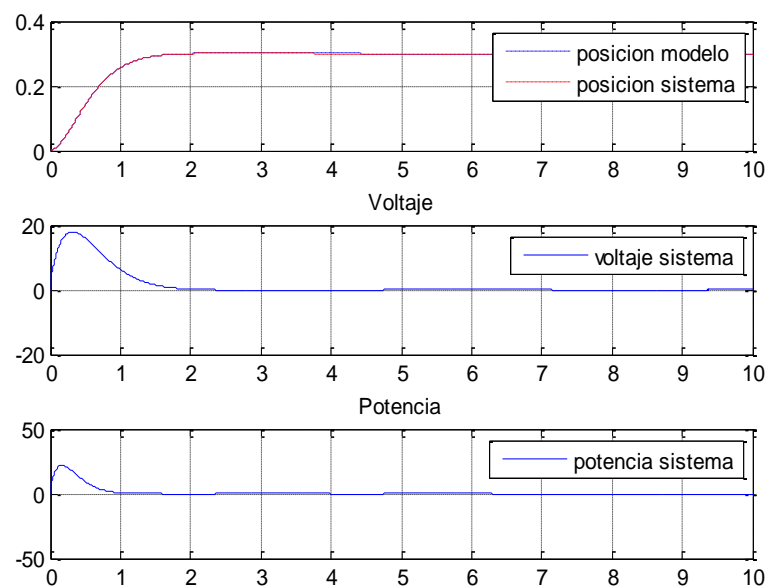
$$Am = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}$$

$$Bm = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$Cm = [1 \ 0]$$

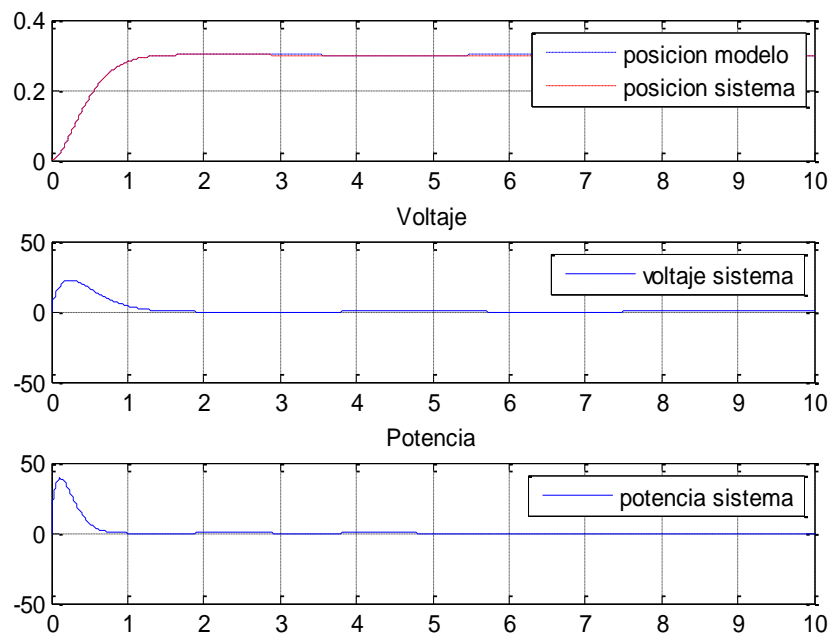
Se hacen las pruebas con el peso q = 1e10.

- Con F = 1.2*0.4



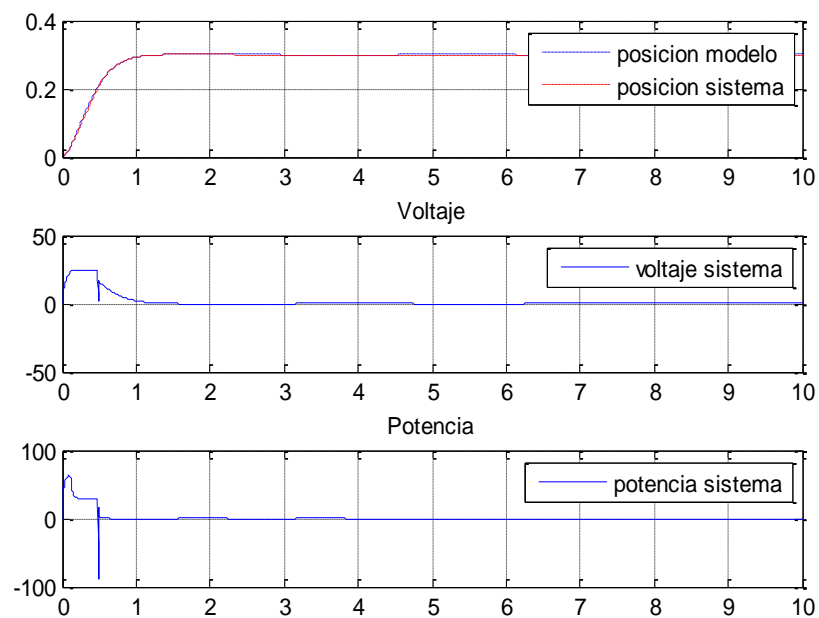
El sistema sigue al modelo y poseen la misma rapidez de asentamiento.

- Con $F = 1.5 \cdot 0.4$



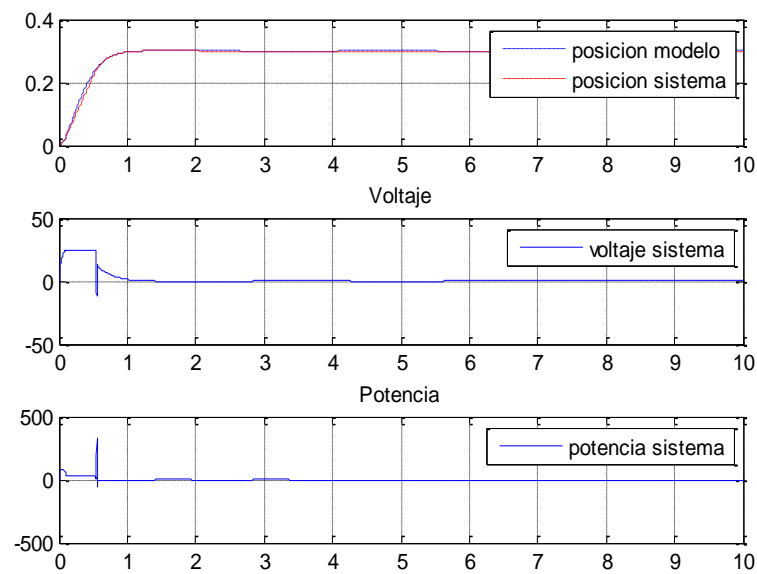
El sistema sigue al modelo y poseen la misma rapidez de asentamiento.

- Con $F = 1.8 \cdot 0.4$



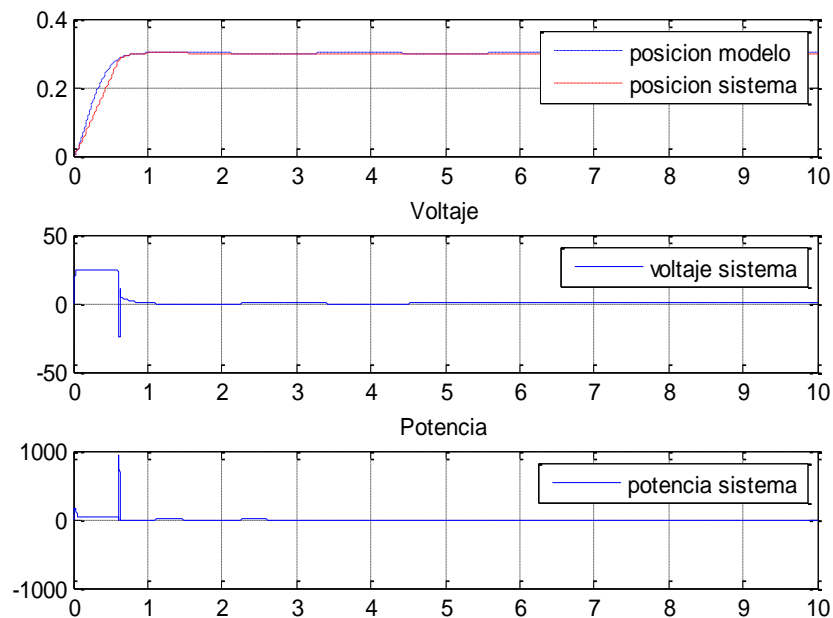
El sistema sigue al modelo y poseen la misma rapidez de asentamiento, sin embargo la señal de control y potencia ya no tiene un comportamiento suave.

- Con $F = 2 \cdot 0.4$



El sistema sigue al modelo pero se observa que posee menos velocidad en la subida, además como en el caso anterior se observa un cambio brusco en la señal de control y potencia.

- Con $F = 2.5 \cdot 0.4$



La respuesta del modelo es más rápido que la del sistema.

Además como en el caso anterior se observa un cambio brusco en la señal de control y potencia.

4. Comparar Feedback + Feedforward vs. (Feedback + Feedforward + Acción integral)

Utilizamos el sistema aumentado para considerar la acción integral:

$$\dot{X}_i = A_i X_i + B_i u + W_i r$$

Sean:

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \int (x_1 - r) \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ [1 \ 0 \ 0] & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_i = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

El Sistema total Feedback + Feedforward:

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= A_i X_i + B_i u + W_i r \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ x_1 - r \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_i & 0_{4 \times 2} \\ 0_{2 \times 4} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \int x_1 - r \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0_{2 \times 1} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \bar{B}_{2 \times 1} \end{bmatrix} r \end{aligned}$$

Se plantea la función de costo:

$$J = \int_0^{\infty} (q(y - y_m)^2 + q_i \left(\int (x_1 - r) \right)^2 + ru^2) dt$$

Siendo:

$$q_i \neq 0$$

Se forma:

$$Q_{i_{4 \times 4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_i \end{bmatrix}$$

$$J = \int_0^{\infty} [X_i \ Z] \begin{bmatrix} Ci^T q Ci + Qi & -Ci^T q \bar{C} \\ -\bar{C} q Ci & -\bar{C}^T q \bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Z \end{bmatrix} + u^T R u$$

De tal manera se obtiene:

$P_{i_{11}}$ se resuelve mediante Riccati :

$$Ai^T P_{i_{11}} + P_{i_{11}} Ai - P_{i_{11}} B i r^{-1} B i^T P_{i_{11}} + Ci^T q Ci + Qi = 0$$

$P_{i_{12}}$ se resuelve mediante Lyapunov :

$$(Ai^T - P_{i_{11}} B i r^{-1} B i^T) P_{i_{12}} + P_{i_{12}} Ai - Ci^T q \bar{C} = 0$$

Luego las ganancias:

$$K_{i_x} = r^{-1} B i^T P_{i_{11}}$$

$$K_{i_z} = r^{-1} B i^T P_{i_{12}}$$

Entonces la señal de control es:

$$u_i = [K_{i_x} \ K_{i_z}] \mathbb{X}i$$

$$u_i = [r^{-1} B i^T P_{i_{11}} \quad r^{-1} B i^T P_{i_{12}}] \begin{bmatrix} X_i \\ Z \end{bmatrix}$$

Script en Matlab:

```

% sistema aumentado

Ai = [ 0   1   0   0
       0  a22 a23  0
       0  a32 a33  0
       1   0   0   0 ];           %Matriz Ai
Bi = [ 0
       0
       b31
       0 ];                       %Matriz Bi
Wfi = [ 0
        0
        0
        -1 ];                     %Fricción seca actúa como una
perturbación no lineal
Ci = [ 1  0  0  0 ];
Di = [ 0 ];
Q = [ q ];
qi = input('Peso del integrador [1e9]: ');
Qi = [ 0 0 0 0
       0 0 0 0
       0 0 0 0
       0 0 0 qi ];
RRi = [ 1 ];
%% Hallamos Kx
QQi = Ci'*Q*Ci+Qi;                % CTqC para Riccati
P11i = are(Ai,Bi*inv(RRi)*Bi',QQi); %Hallamos P11 para Kx
Kfbi = inv(RRi)*Bi'*P11i;          %Hallamos Kx

%% Hallamos Kz
APRi = Ai'-P11i*Bi*inv(RR)*Bi';   %Para Lyapunov
CQCmi = -Ci'*Q*Cm;                % -CTqCb para Lyapunov
P12i = lyap(APRi,Am,CQCmi);        %Hallamos P12 para Kz
Kffi = inv(RR)*Bi'*P12i;           %Hallamos Kz

%% Condiciones iniciales
xi = [ 0; 0; 0 ];                 %Valor inicial de las variables de control
xmi = [ 0; 0 ];                   %Valor inicial de las variables del modelo
k = 1;                             %Inicializa la interacción
int_err = 0;                       % Valor inicial de integral del error

```

Script del Algoritmo :

```

for tt = ti:dt:tf                                %Tiempo de la simulación

    xml1(k,1) = xmi(1,1);                        %Variable posicion del modelo
    xm2i(k,1) = xmi(2,1);                        %Variable del modelo
    xli(k,1) = xi(1,1);                          %Variable posicion del sistema
    x2i(k,1) = xi(2,1);                          %Variable velocidad del sistema
    x3i(k,1) = xi(3,1);                          %Variable corriente del sistema
    int_err = int_err + (xi(1,1)-rast(k,1))*dt; %error de acumulacion
    time(k,1) = tt;                              %Tiempo para graficar

    ui = -Kfbi(1,1:3)*xi -Kfbi(1,4)*int_err - Kffi*xmi; %señal de
    control feedback + feedforward

    if(ui > umax)
        ui = umax;
    elseif(ui < -umax)
        ui = -umax;
    end
    if(xi(2,1) >= 0)
        F = Fric;
    elseif(xi(2,1) < 0)
        F = -Fric;
    end
    uci(k,1) = ui;                               %Para graficar la señal de control
    poti(k,1) = ui*xi(3,1);                      %Para graficar la potencia
    xi = Ak*xi + Bk*ui + Wk*F;                  %Calculamos X
    xmi = Amk*xmi + Bmk*rast(k,1);               %Calculamos Z
    k = k + 1;                                   %Aumentamos la interacción
end

```

Ploteo:

```

figure(1);                                       %Graficamos la posición
plot(time,xml,'--r',time,xl,'--b',time,xli,'k');
legend('modelo',' Fb+Fff ','Fb+Fff+Acc.Integral')
title('Posicion xl'); grid;

figure(2);
subplot(2,1,1);
plot(time,uc,'-b',time,uci,'k');               %Graficamos el voltaje
legend('voltaje Fb+Fff','voltaje Fb+Fff+Acc.Integral');
title('Voltaje'); grid;

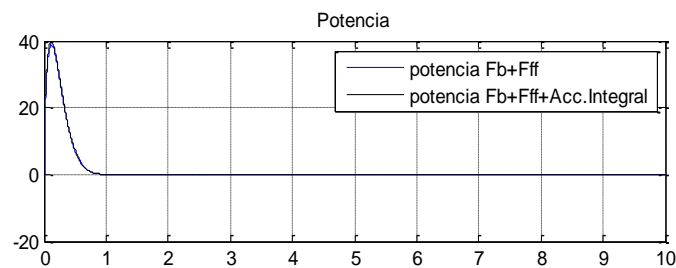
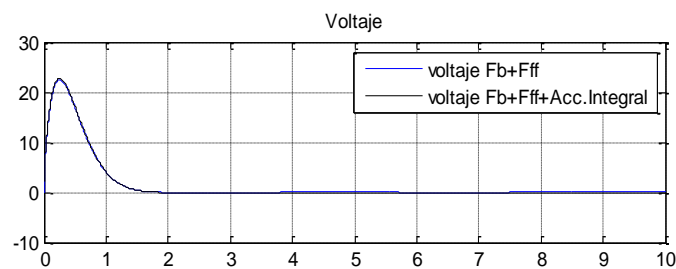
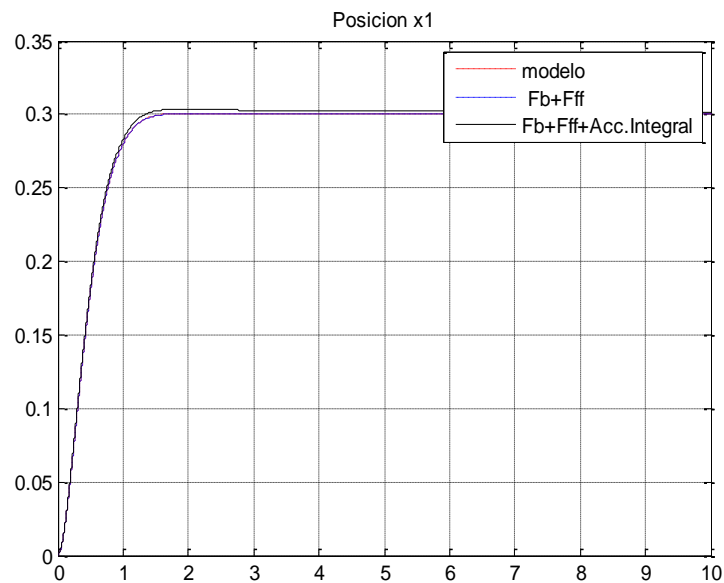
subplot(2,1,2);
plot(time,pot,'-b',time,poti,'k');             %Graficamos la potencia
legend('potencia Fb+Fff','potencia Fb+Fff+Acc.Integral');
title('Potencia'); grid;

```

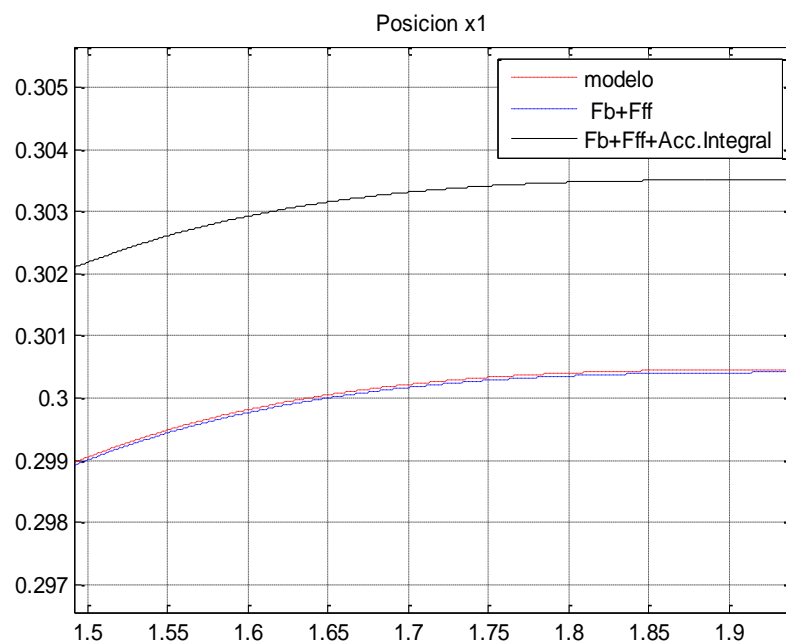
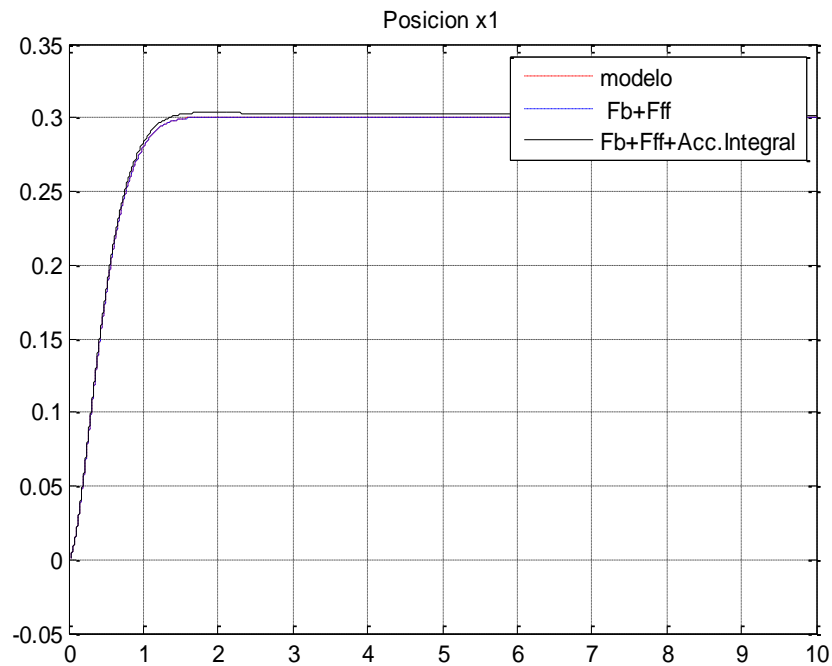
4.1. Analizar las respuestas variando las fricciones

Se utiliza el peso calculado anteriormente para un buen seguimiento $q = 1e10$, y además para la acción integral $q_i = 1e9$, ya que se obtuvo mejor respuesta para dicho peso en la acción integral.

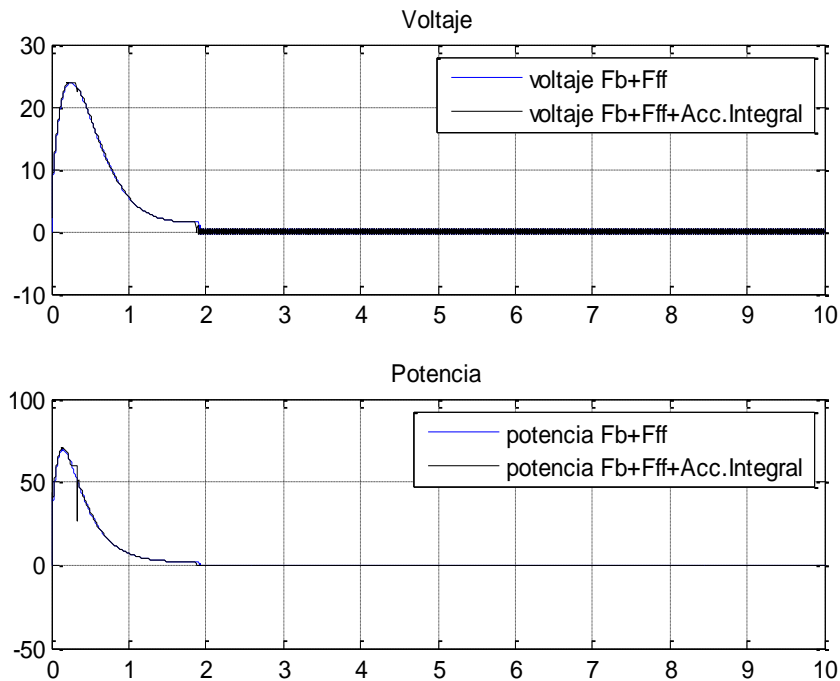
- $Fric = 0 \cdot 10$



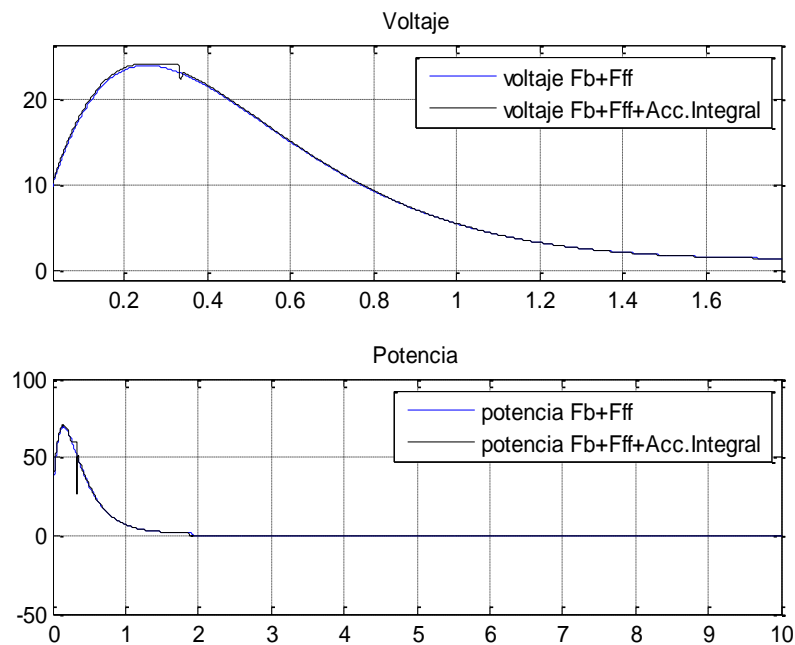
- $F_{ric} = 0.5 \cdot 10$



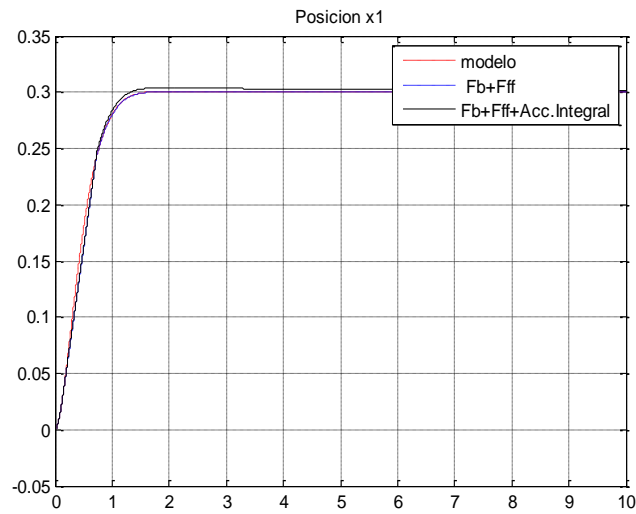
Se aprecia que la respuesta de la estructura $F_b + F_f$ entrega mejor repuesta que al añadir la acción integral, ya que se aproxima más al modelo.



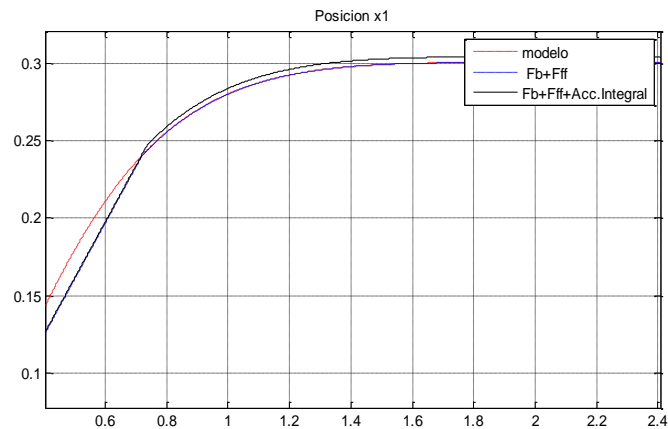
La acción de control y potencia , es muy similar en ambos casos, solo se aprecia que “u” es un poco mayor para el caso de acción integral.



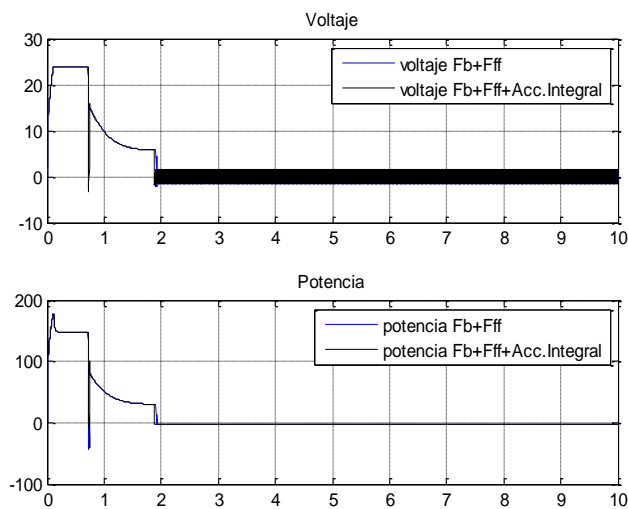
- $Fric = 2 \cdot 10$



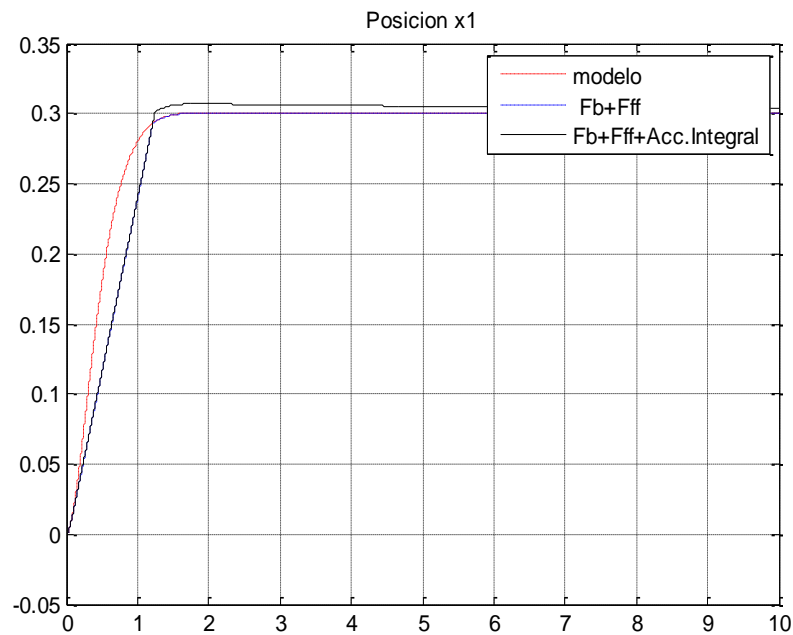
Al aumentar la fricción seca , se observa un poco más de diferencia, siguiendo mejor la respuesta con Feedback + Feedforward.



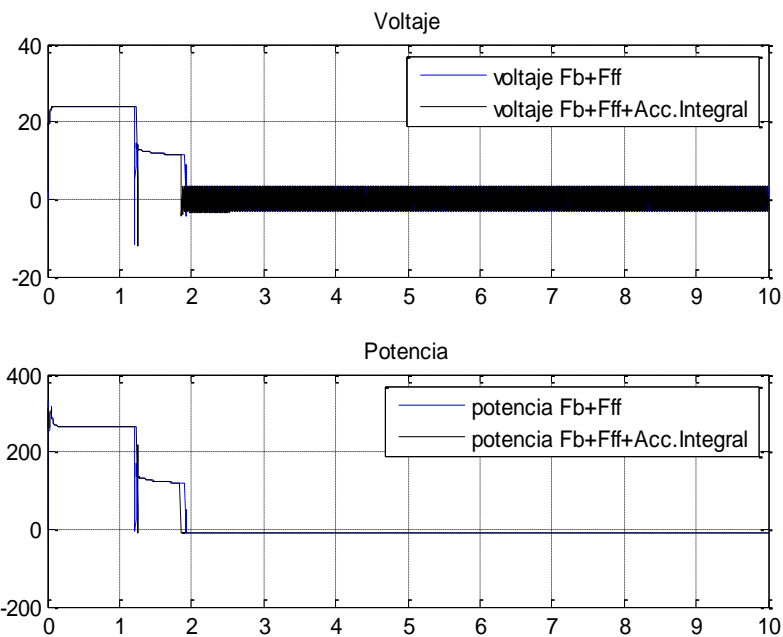
Además se observa que ambas respuestas son más lentas respecto a la respuesta del modelo.



- $Fric = 4 \cdot 10$

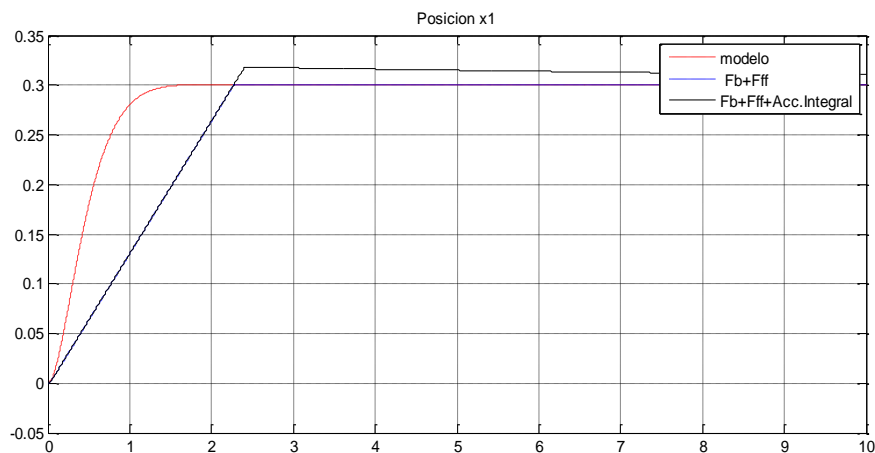


Al aumentar la fricción seca , se observa más de diferencia, siguiendo mejor la respuesta con Feedback + Feedforward, ambas de respuesta más lenta que el modelo.

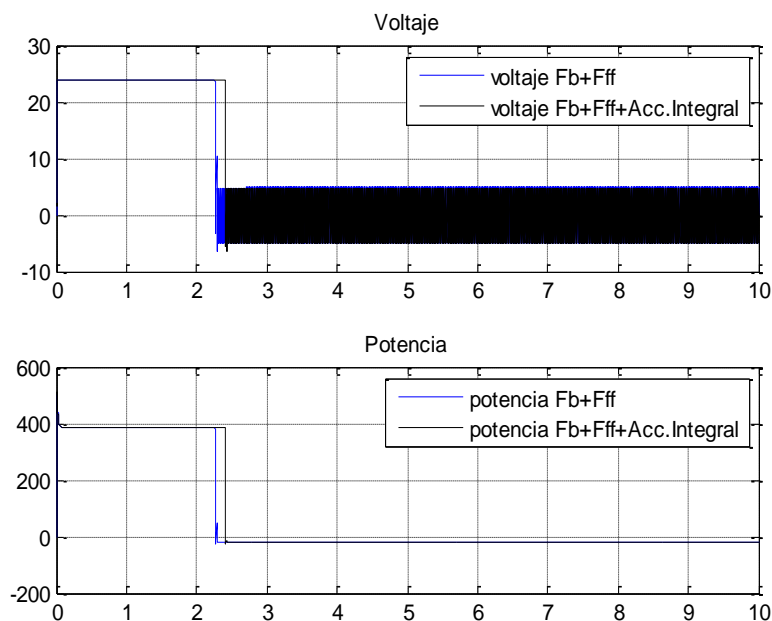


La acción de control y el consumo de potencia son muy similares, sin embargo se observa algunos desfases entre los 2 tipos de estructuras.

- $F_{ric} = 6 \cdot 10$



La respuesta con Feedback + Feedforward, resulta mejor(se aprecia una diferencia más grande) que la de Feedback + Feedforward + acción integral, aunque ambas ya no siguen a la velocidad de la respuesta del modelo.



Se aprecia que la actuación de la estructura Feedback + Feedforward, está anticipada con respecto a la actuación de Feedback + Feedforward + acción integral.

Conclusiones:

1.