PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO

Curso:

CONTROL ÓPTIMO

Tema:

Optimización

Presentado por:

CONTRERAS MARTINEZ, DIMEL ARTURO

Docente:

DR. ANTONIO MORÁN

2016

1. Problema de optimización en los generadores

Minimizar:

$$F = 1 - P1 + {P_1}^2 + 1 + 0.6 * P_2 + {P_2}^2$$

Restricción:

$$P_1 + P_2 \geq 60$$

<u>Solución</u>:

De la restricción:

$$-P_1 - P_2 + 60 + s^2 = 0$$

Condición necesaria

$$\mathrm{L} = 1 - P1 + {P_1}^2 + 1 + 0.6 * P_2 + {P_2}^2 + u(-P_1 - P_2 + 60 + s^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_1} = -1 + 2P_1 - u = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_2} = 0.6 + 2P_2 - u = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -P_1 - P_2 + 60 + s^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 2us = 0$$

u = 0 , s ≠0	u ≠ 0 , s= 0	u = 0 , s =0
$P_1 = 1/2$ $P_2 = -0.3$ No cumple	$P_1 = 30.4$ $P_2 = 29.6$ u=59.8	No es posible

Condición suficiente:

$$\partial L = \begin{bmatrix} -1 + 2P_1 - u \\ 0.6 + 2P_2 - u \end{bmatrix}$$

$$\partial^2 L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es una matriz positivo definida, por ende, el punto calculado si es un minino local, ahora evaluaremos si es un mínimo global analizando la función:

Mínimo Global:

$$\partial F = \begin{bmatrix} -1 + 2P_1 \\ 0.6 + 2P_2 \end{bmatrix}$$

$$\partial^2 L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es una matriz positivo semidefinida -> Es un problema convexo –> El punto es minimo global.

Verificación en MATLAB:

a. Utilizando el comando "fmincon":

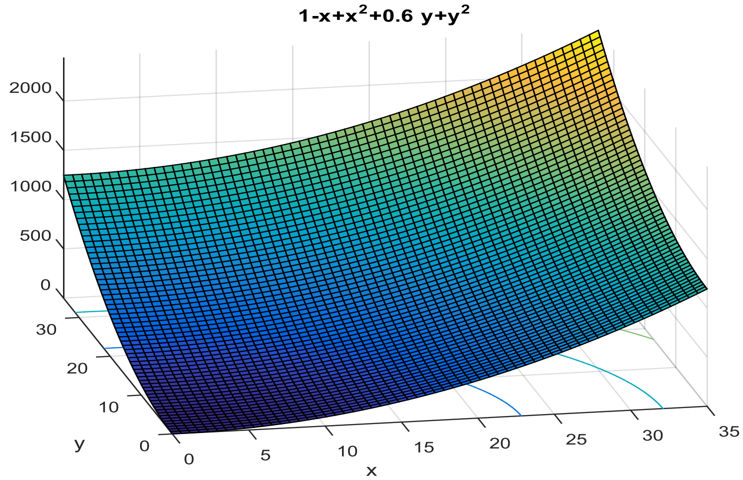
$$x = P1 \ , \qquad y = P2$$

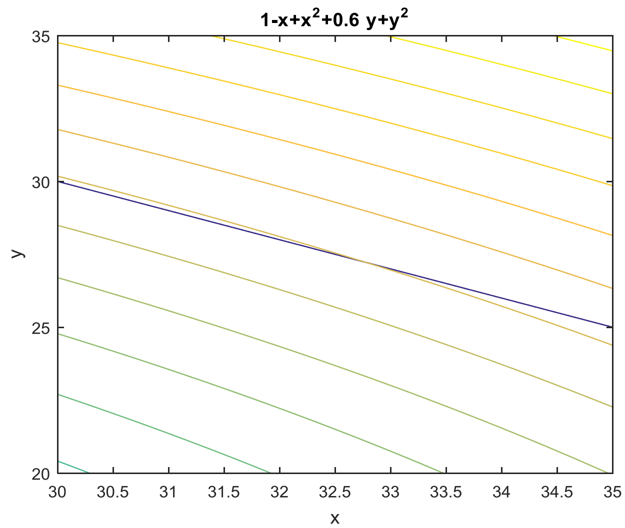
```
% Minimizacion sin restricciones
% Grafica de la superficie tridimensional
f = @(x,y) 1 - x + x.^2 + 0.6*y + y.^2;
figure(1);
ezsurfc(f,[0,35],[0,35]);

% Minimizacion con restriciones
% Definicion de funcion
fun = @(x) f(x(1),x(2));
g = @(x,y) -x -y + 60;
figure(2);
ezplot(g,[30,35,20,35]);      % Grafica la función g(x,y)=0
hold on;
ezcontour(f,[30,35,20,35]);      % Grafica lineas de f(x,y) para varios valores de f
%legend('Restriccion','Curvas de f(x,y)=cte');
hold off

 %Valor inicial para iniciar proceso iterativo
x0 = [-1 -1];
options = optimset('Algorithm','interior-point','Display','iter');
A = [ -1  -1];
B = [-60];
% Minimizacion con restricion
[x,fval] = fmincon(fun,x0,A,B,[],[],[],[],[],options);
```

Resultados:





Iter	F-count	f(x)	Feasibility	First-order optimality	Norm of step
0	3	3.400000e+00	6.200e+01	3.000e+00	
1	6	9.342366e-01	5.977e+01	7.701e-01	1.577e+00
2	9	1.789239e+03	0.000e+00	8.909e-01	4.227e+01
3	12	1.789057e+03	0.000e+00	8.686e-01	1.226e+00
4	15	1.788681e+03	0.000e+00	1.672e-05	6.129e-01

Local minimum found that satisfies the constraints.

Solución x = [30.4 29.6]

Valor mínimo de f(x) = 1788.681

b. Utilizando el comando "quadprog":

$$f = 1 - x + x^2 + 1 + 0.6y + y^2$$

Siendo X = [x;y]

Se da la forma cuadrática representativa:

$$f = \frac{1}{2}X^T HX + f^T X$$

$$f = \frac{1}{2}X^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.6 \end{bmatrix}^T X + 2$$

En Matlab:

```
H = [2 0
     0 2];
f = [-1
     0.6];

lb = [0
       0];
options=optimset('Algorithm','interior-point-convex');
[x fval]= quadprog(H,f,A,B,[],[],lb,[],[],options)
```

Resultados:

```
X =

  30.4000
  29.6000


fval =

  1.7877e+03
```

2. Maximización de ganancias:

	A(Kg)	B(Kg)	Stock(Kg)
Ganancia ($)	10	8	
Materia prima C	0.4 KgC/kgA	0.5 KgC/kgB	100
Materia prima D	0.6 KgD/kgA	0.5 KgD/kgB	80
Mercado	70	110	
	x1	x2	

Se pide maximizar ganancia f:

$$G = 10x_1 + 8x_2$$

<u>Solución:</u>

Pasamos a un problema de minimización:

$$f = -10x_1 - 8x_2$$

Con las restricciones:

$$0.4x_1 + 0.5x_2 \leq 100$$
$$0.6x_1 + 0.5x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 700$$
$$x_2 \leq 110$$
$$0 \leq x_1$$
$$0 \leq x_2$$

a. Solución mediante Multiplicadores de Lagrange

$$f = -10x_1 - 8x_2$$

Con las restricciones:

$$0.4x_1 + 0.5x_2 - 100 + \ s1^2 \leq 0$$
$$0.6x_1 + 0.5x_2 - 80 + s2^2 \leq 0$$

$$-x_1 + s3^2 \leq 0$$
$$-x_2 + s4^2 \leq 0$$

$$x_1 - 70 + s5^2 \leq 0$$
$$x_2 - 110 + s6^2 \leq 0$$

Entonces :

$$L = -10x_1 - 8x_2 + u1(0.4x_1 + 0.5x_2 - 100 + s1^2) + u2(0.6x_1 + 0.5x_2 - 80 + s2^2) + u3(-x_1 + s3^2) + u4(-x_2 + s4^2) + u5(x_1 - 70 + s5^2) + u6(x_2 - 110 + s6^2)$$

Por la primera derivada:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -10x_1 + 0.4u1 + 0.6u2 - u3 + u5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -8 + 0.5u1 + 0.5u2 - u4 + u6 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u1} = 0.4x_1 + 0.5x_2 - 100 + s1^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u2} = 0.6x_1 + 0.5x_2 - 80 + s2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u3} = -x_1 + s3^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u4} = -x_2 + s4^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u5} = x_1 - 70 + s5^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u6} = x_2 - 110 + s6^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s1} = 2u1s1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s1} = 2u2s2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s1} = 2u3s3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s1} = 2u4s4 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s1} = 2u5s5 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s1} = 2u6s6 = 0$$

De todas las posibles de soluciones se descartan :

$$s3 \neq 0$$
$$s4 \neq 0$$

$$s1 > s2$$

Se deduce:

$$s2 = 0$$
$$s3 = 0$$
$$u1 = 0$$

Y mediante evaluaciones teniendo en cuenta $s1^2 > 0$.

Se obtiene:

$$\boldsymbol{x_1 = 70}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 76}$$

$$s1 = \sqrt{34}$$
$$s2 = 0$$
$$s3 = 0$$
$$s5 = 0$$
$$s6 = \sqrt{34}$$
$$u1 = 0$$
$$u2 = 16$$
$$u5 = 0.4$$
$$u6 = 0$$

b. Solución mediante programación lineal

Sea X = [x1;x2]

f : $\begin{bmatrix} -10 \\ -8 \end{bmatrix}$X’

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} X \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

$$AX \leq b$$

$$X \leq \begin{bmatrix} 70 \\ 110 \end{bmatrix}$$

$$X \leq ub$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq X$$

$$lb \leq X$$

En MATLAB

```
%% Minimizacion utilizando linprog
% Minimizacion con restriciones
ff = [  -10
       -8];
A = [ 0.4  0.5
      0.6  0.5];
b = [ 100
      80];
lb = [ 0
       0];
ub = [ 70
       110];
[x feval] = linprog(ff,A,b,[],[],lb,ub);
x
feval
```

Resultados:

```
x =

  70.0000
  76.0000

feval =

 -1.3080e+03
```

Ganancia máxima = 1.3080e+03

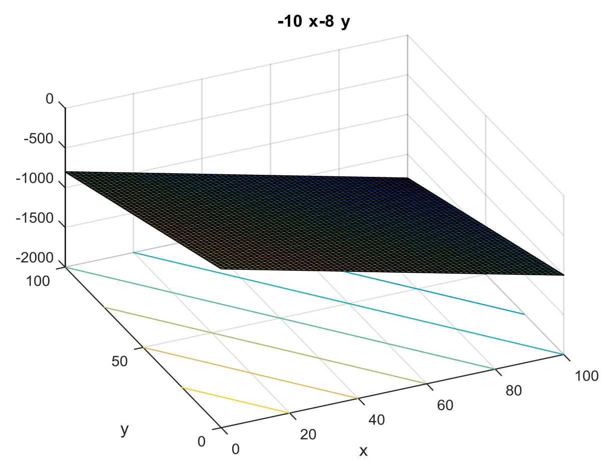
c. Solución mediante “fmincon”

```
% Grafica de la superficie tridimensional
f = @(x,y) -10*x-8*y;
figure(1);
ezsurfc(f,[0,35],[0,35]);

% Minimizacion con restriciones
% Definicion de funcion
fun = @(x) f(x(1),x(2));
x0 = [1 1];

options = optimset('Algorithm','interior-
point','Display','iter');
% Minimizacion con restricion
[x,fval] = fmincon(fun,x0,A,b,[],[],lb,ub,[],options)
```

Resultados :



Iter	F-count	f(x)	Feasibility	First-order optimality	Norm of step
0	3	-1.800000e+01	0.000e+00	9.900e+00	
1	6	-1.683594e+02	0.000e+00	9.819e+00	1.174e+01
2	9	-9.752962e+02	0.000e+00	9.819e+00	6.301e+01
3	12	-1.149510e+03	0.000e+00	9.224e+00	1.360e+01
4	15	-1.154285e+03	0.000e+00	7.832e+00	5.333e-01
5	18	-1.307231e+03	0.000e+00	7.549e+00	1.912e+01
6	21	-1.307995e+03	0.000e+00	4.068e-02	9.603e-02
7	24	-1.307999e+03	0.000e+00	3.432e-04	2.206e-03
8	27	-1.308000e+03	0.000e+00	2.874e-06	1.314e-03

Local minimum found that satisfies the constraints.

x = 70.0000 76.0000

fval = -1.3080e+03

Al ser un problema de optimización lineal se concluye que el mínimo local calculado, es también el minino global.

3. Minimizar el volumen:

$$f = 50A_1 + 40A_2$$

Mediante resistencia de materiales se obtienen las siguientes restricciones:

$$g_1 = \frac{2 * 10^6}{A_1} - 16000 \leq 0$$

$$g_2 = \frac{1.6 * 10^6}{A_2} - 16000 \leq 0$$

$$A_1 \geq 0$$

$$A_2 \geq 0$$

Solución:

a. Utilizando multiplicadores de Lagrange:

$$L = 50A_1 + 40A_2 + u1\left(\frac{2 * 10^6}{A_1} - 16000 + s1^2\right) + u2\left(\frac{1.6 * 10^6}{A_2} - 16000 + s2^2\right) + u3(-A1 + s3^2) + u4(-A2 + s4^2)$$

- **Mediante la primera derivada:**

$$\frac{\partial L}{\partial A_1} = 50 - \frac{2 * 10^6}{{A_1}^2} - u3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_2} = 40 - \frac{1.6 * 10^6}{{A_2}^2} - u4 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = \frac{2 * 10^6}{A_1} - 16000 + s1^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = \frac{1.6 * 10^6}{A_2} - 16000 + s2^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = -A1 + s3^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_4} = -A2 + s4^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2s1u1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_2} = 2s2u2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_3} = 2s3u3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_4} = 2s4u4 = 0$$

Analizando todos los casos se obtiene:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = 0$$

$$u_3 = 0$$

$$u_4 = 0$$

$$u_1 = 0.391$$

$$u_2 = 025$$

$$A_1 = 125$$

$$A_2 = 100$$

- **Mediante de la segunda derivada, de la región para ver convexidad:**

$$\partial^2 g = \begin{bmatrix} \frac{4e6}{{A_1}^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como A1>0, se obtiene una matriz definido positiva -> por ende el minimo obtenido por K-T será un **mínimo global.**

b. Utilizando el comando “fmincon” en MATLAB , método iterativo

Acomodando:

$$g_1 = \frac{2 * 10^6}{A_1} - 16000 \leq 0$$

$$-16000 * A_1 \leq -2 * 10^6$$

$$g_2 = \frac{1.6 * 10^6}{A_2} - 16000 \leq 0$$

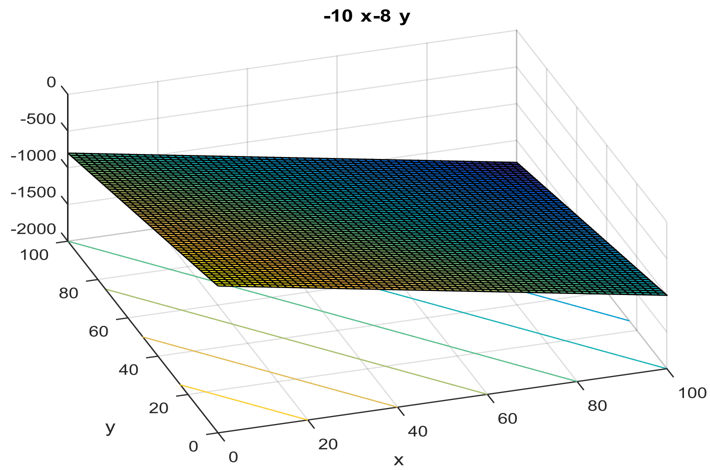
$$-16000 * A_2 \leq -1.6 * 10^6$$

$$-A_1 \leq 0$$

$$-A_2 \leq 0$$

```
f = @(A1,A2) 50*A1 +40*A2;
figure(1);
ezsurfc(f,[-100,100],[-100,100]);
fun = @(x) f(x(1),x(2));
options = optimset('Algorithm','interior-point','Display','iter');
A=[-16000 0; 0 -16000];
b=[-2e6;-1.6e6];
lb=[0;0];
ub=[inf;inf];
X0=[1 1];
[X fval]=fmincon(fun,X0,A,b,[],[],lb,ub,[],options)
```

El resultado que se obtiene:



Iter	F-count	f(x)	Feasibility	First-order optimality	Norm of step
0	3	9.000000e+01	1.984e+06	3.125e-03	
1	6	1.025001e+04	0.000e+00	3.125e-03	1.587e+02
2	9	1.025001e+04	0.000e+00	3.125e-03	8.630e-05
3	12	1.025000e+04	0.000e+00	9.999e-04	1.508e-04
4	15	1.025000e+04	0.000e+00	1.000e-05	3.169e-05

Local minimum found that satisfies the constraints.

X = 125.0000 100.0000

fval =
1.0250e+04

Conclusiones:

1.