



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA  
DEL PERÚ

## ESCUELA DE POSGRADO

### **Curso:**

Control por Computadora

### **Tema:**

Análisis de Estabilidad

### **Presentado por:**

CONTRERAS MARTINEZ, DIMEL ARTURO

### **Docente:**

Dr. Juan Javier Sotomayor Moriano

Msc. Luis Enciso Salas

**2016**

## **LABORATORIO 2 ANALISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE CONTROL**

1.-En la figura 1 muestra una maquina fresadora de control numérico (CN) con dos ejes movidos por servomotores .suponiendo propulsores de alimentación de tuerca – tornillo esféricos comunes para cada eje , un modelo sencillo de la maquina puede representarse por  $G_m(s)$ , que relaciona la velocidad del tornillo o deslizamiento  $\omega$  con la fuerza de torsión  $T_f$  (torque) de propulsión en términos de la inercia equivalente J y el coeficiente de amortiguamiento  $\beta$

$$G_m(s) = \frac{\omega(s)}{T_f(s)} = \frac{1}{Js + \beta}$$

La relación entre la variable de control (elaborada por el controlador) con la fuerza de torsión  $T_f$  viene dada por :

$$\frac{T_f(s)}{U(s)} = 1$$

Por otro lado la FT indicada por  $G_f(s)$  relaciona la fuerza de corte con la tasa de alimentación

$$G_f(s) = \frac{F(s)}{\omega(s)} = \frac{K_f}{\tau s + 1}$$

Una estructura de control típica para estas máquinas herramientas es el control en cascada como se muestra en la fig 2 que consiste en un lazo de control interno (de velocidad) y un lazo externo (de la fuerza) .El control de esta fuerza es útil para asegurar la calidad de acabado del fresado y para determinar el desgaste de la herramienta de fresado.

Los valores de los parámetros de esta maquia en UI son

$$J = 0.02 \quad \beta = 0.065 \quad K_f = 20, \tau = 0.2$$

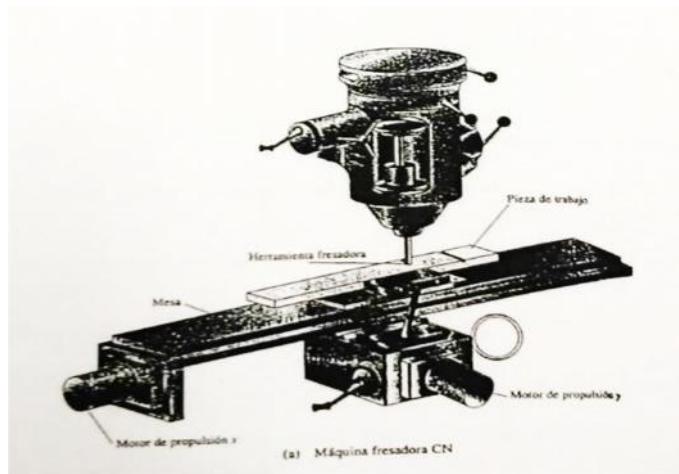


Figura 1

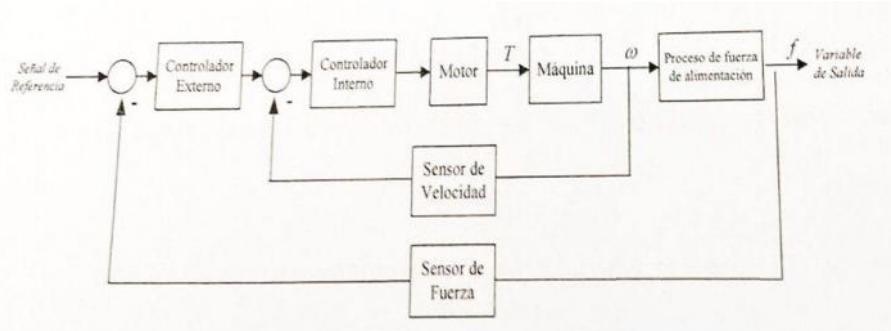
Se elige para el control de lazo interno, un controlador PI – analógico

$$G_{ci}(s) = K_{pi} \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Con  $K_{pi} = 0.014$ ,  $T_i = 0.25$

Para el control del lazo externo, se elige un controlador digital con FT-z.

$$G_{ce}(z) = K_{pe}$$

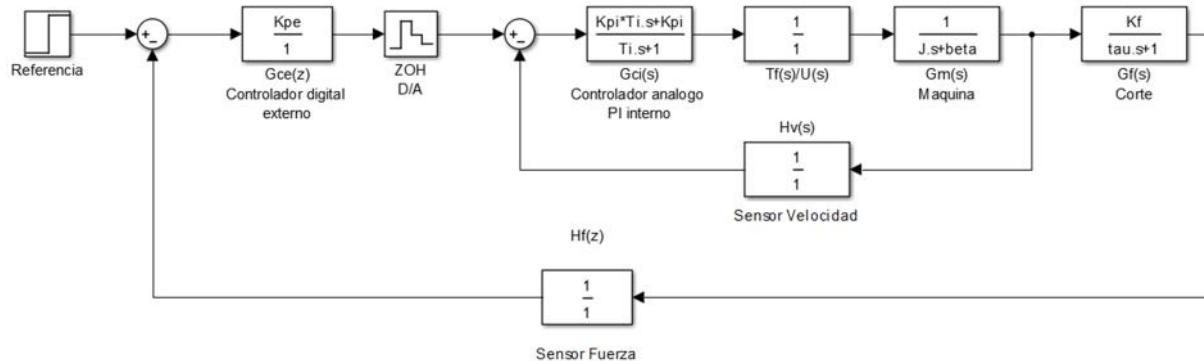


El sensor del lazo interno es un sensor analógico con FT:  $H_v(s) = 1$

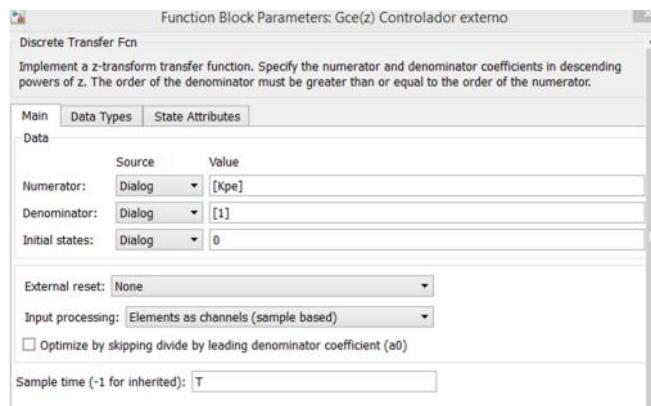
El sensor del lazo externo es un sensor digital con FT:  $H_f(z) = 1$

Elegir un tiempo de muestreo T.

- a) Trazar el diagrama de bloques incluyendo las FT de los elementos del sistema.

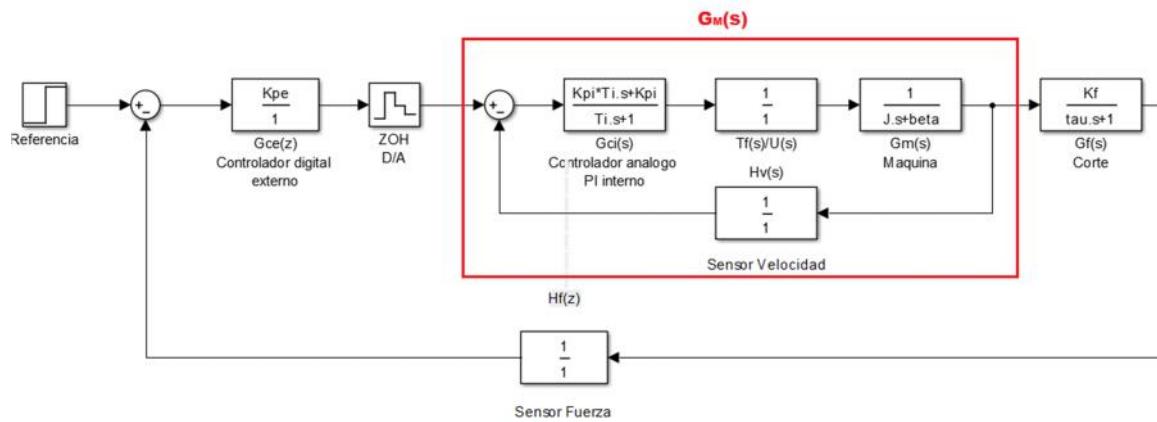


Se coloca el tiempo de muestreo a todos los bloques discretos.



El tiempo de muestreo será calculado en parte b.

- b) Obtener la FT-z de lazo abierto del sistema



#### Selección del tiempo de muestreo T.

Se elegirá en función a la menor constante de tiempo del sistema a controlar.

La función de transferencia del lazo interno es:

$$G_M(s) = \frac{G_{ci}(s)G_m(s)}{1 + G_{ci}(s)G_m(s)H_v(s)}$$

$$G_M(s) = \frac{0.0035s + 0.014}{0.005s^2 + 0.01975s + 0.014}$$

Con las constantes de tiempo:

$$\tau_1 = 0.3306$$

$$\tau_2 = 1.076$$

Además:

$$G_f(s) = \frac{K_f}{\tau s + 1}$$

$$\tau_3 = 0.2$$

Como la función de transferencia resultante es  $G_M(s) * G_f(s)$ , eligiendo la menor constante de tiempo:

$$T_{min} = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0.2$$

Entonces el periodo de muestreo es:

$$T = \frac{T_{min}}{5} = 0.04s$$

#### Función de transferencia en lazo abierto

$$GH(z) = Z\{G_{zoh}(s)G_M(s)G_f(s)\}H_f(z)$$

Reemplazando el valor de las funciones de transferencia:

$$G_{Mf}(s) = G_M(s)G_f(s)$$

$$G_{Mf}(s) = \frac{0.0035s + 0.014}{0.005s^2 + 0.01975s + 0.014} \left( \frac{20}{0.2s + 1} \right)$$

$$H_f(z) = 1$$

$$GH(z) = Z\{G_{zoh}(s)G_{Mf}(s)\}$$

```
%% FTs

Gm = tf([1],[J beta]); %modelo de la maquina
Gci = tf([Kpi*Ti Kpi],[Ti 0]); %controlador de lazo interno
GM = feedback(Gci*Gm,1); %Lazo interno
pole(GM) %Polos del lazo interno

Gf = tf([Kf],[tau 1]); %Fuerza de corte, tasa de alimentacion
Gmf = GM*Gf; %FT lazo abierto
T = 0.04;

%% Lugar de las raices
Gmfz = c2d(Gmf,T,'zoh'); %discretizacion
```

Se usa una Discretización mediante ZOH, con  $T = 0.04s$  ya calculado. Entonces la función de transferencia en lazo abierto del sistema:

$$GH(z) = \frac{0.05246 z^2 + 0.004407 z - 0.04185}{z^3 - 2.668 z^2 + 2.368 z - 0.6991}$$

Si se considera el controlador ( $K_{pe}$ ) resulta:

$$GH(z) = K_{pe} \frac{0.05246 z^2 + 0.004407 z - 0.04185}{z^3 - 2.668 z^2 + 2.368 z - 0.6991}$$

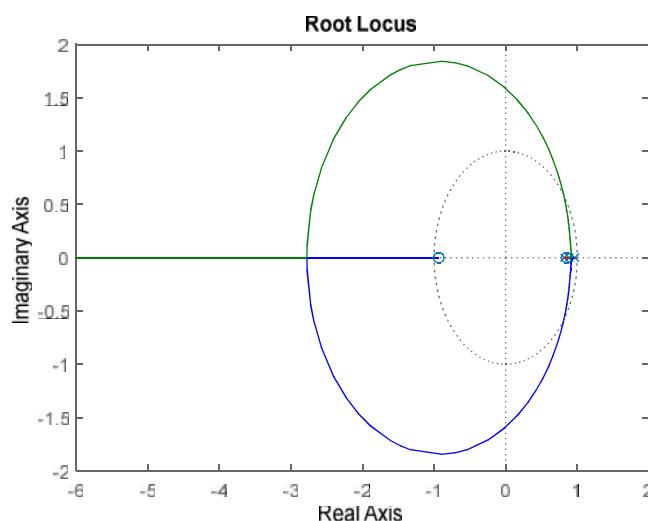
c) Obtener la Ec. Característica del sistema.

$$1 + K_{pe} * GH(z) = 0$$

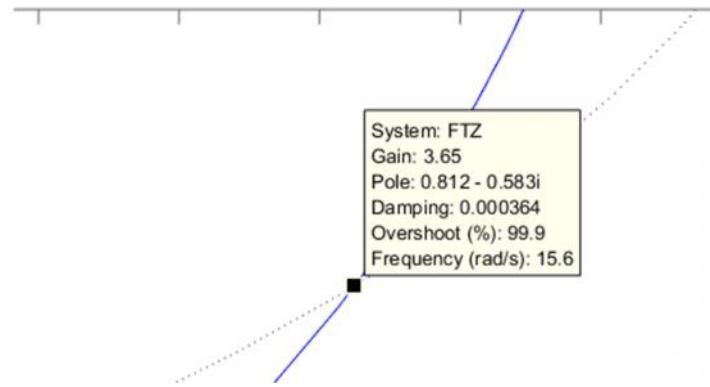
$$1 + K_{pe} \frac{0.05246 z^2 + 0.004407 z - 0.04185}{z^3 - 2.668 z^2 + 2.368 z - 0.6991} = 0$$

d) Empleando el método del lugar de las raíces deduzca el rango de valores de  $K_{pe}$  con el cual el sistema es estable. Realice conclusiones.

```
%% Lugar de las raices
Hz = 1
GHz = Gmf*Hz;
[numLA denLA]=c2d(GHz,T, 'zoh'); %discretizacion
FTZ = tf(numLA , denLA , T) %f.T. lazo abierto discreta
figure(1)
rlocus(FTZ)
```



Acercando la zona donde el lugar de las raíces corta el círculo unitario:



Se observa que la ganancia en el límite es aproximadamente  $Kpe = 3.65$ . Por lo tanto el rango de valores para el cual el sistema controlado es estable es:

$$0 \leq Kpe < 3.65 \text{ (Aproximadamente)}$$

El lugar de las raíces inicia en los polos y terminan en los ceros, es por ello que al variar el valor de  $Kpe$  desde 0 → infinito, sólo se obtendrá un sistema estable si el lugar geométrico se encuentran dentro del círculo unitario.

- e) Empleando la respuesta en frecuencia, determinar MF y MG para dos valores de  $K_{pe}$

( $K_{pe} = 1$  y  $K_{pe} = K_{cr}$  = ganancia crítica con MG=0).

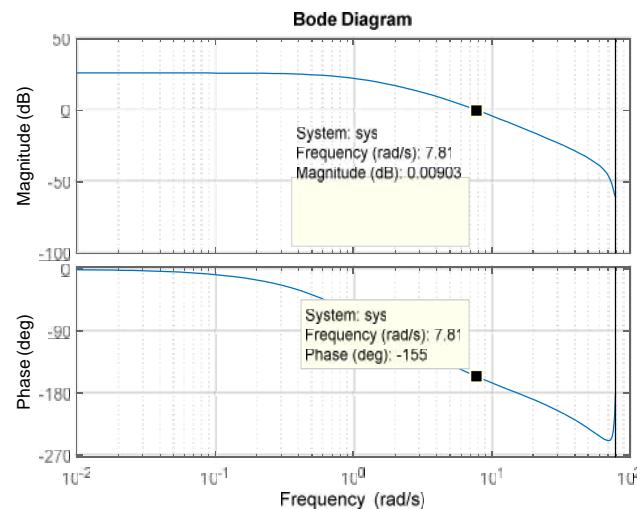
Realice sus comentarios con respecto a la respuesta en el tiempo del sistema, para los dos valores de  $K_{pe}$  ( $K_{pe} = 1$  y  $K_{pe} = K_{cr}$ ).

Deduzca el rango de valores de  $K_{pe}$  con el cual el sistema es estable.

Calcular valores de la ganancia  $K_{pe}$  que alcancen valores de MF=30° y MF=60°. Realice sus comentarios con respecto a la respuesta a la respuesta en el tiempo del sistema en ambos casos

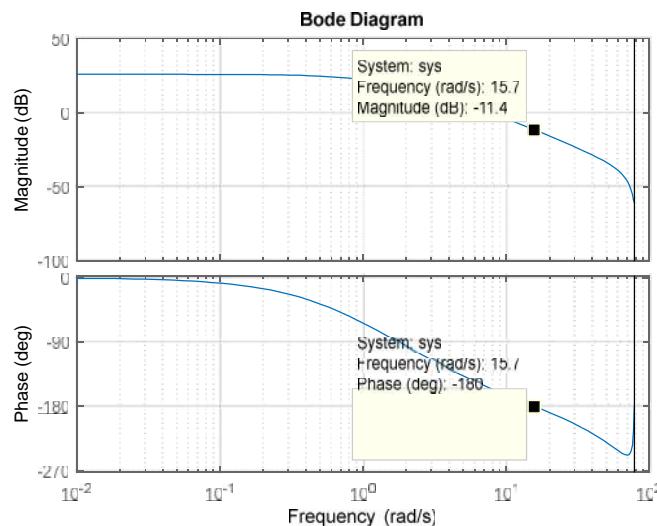
#### Prueba con $K_{pe} = 1$

- Margen de Fase:



El margen de fase resulta MF= 25°

- Margen de ganancia



El margen de fase resulta MG = 11.4dB

Utilizando el comando “margin” de Matlab, para verificar:

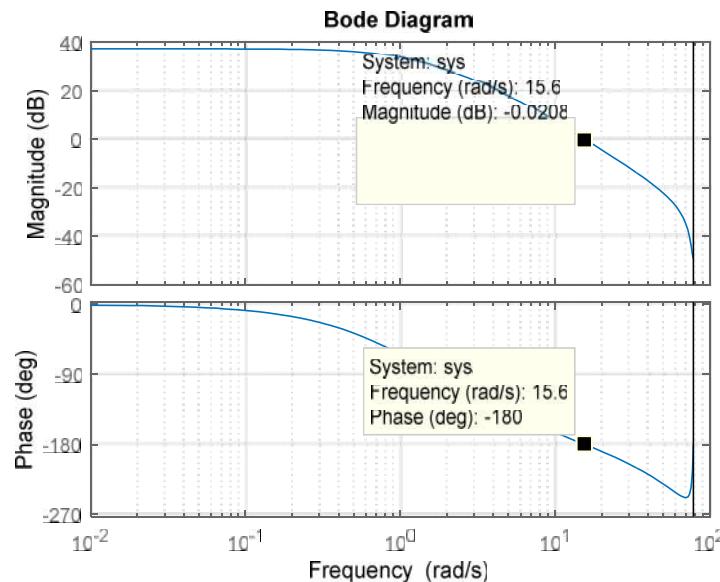
```
%> Diagrama de Bode
figure(2)
dbode(Kpe*numLA , denLA , T)
[Gm,Pm,Wgm,Wpm] = margin(FTZ)
grid on
```

Gm = 3.6488  
Pm = 24.4564  
Wgm = 15.5539  
Wpm = 7.8165  
MF = 24.4564  
MG = 11.2430

#### Prueba con Kpe = Kcr

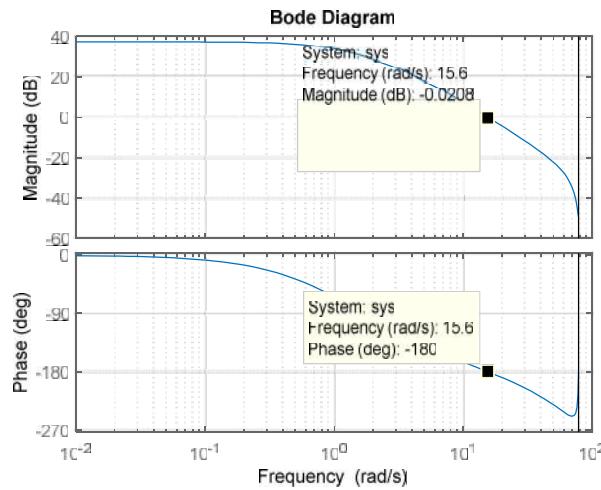
Con el valor obtenido de Kcr en el Root Locus, Kcr = 3.65.

- Margen de Fase:



El margen de fase resulta MF = 0°

- Margen de ganancia

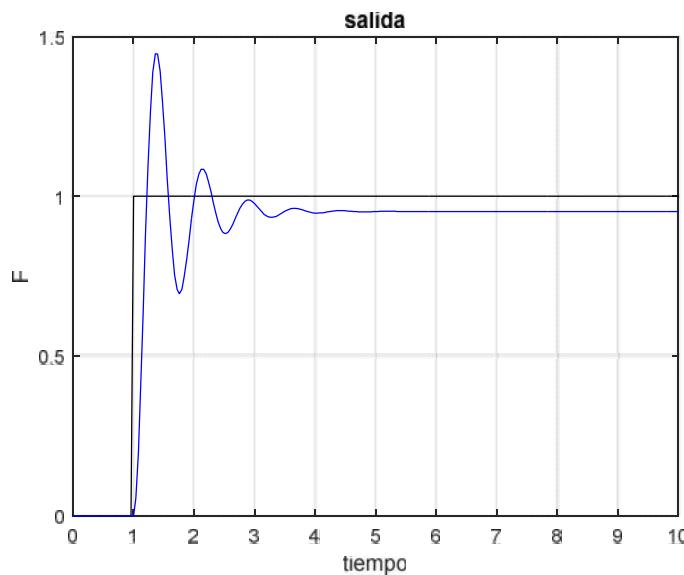


El margen de fase resulta  $MF = 0^\circ$

Estos resultados tienen sentido ya que en el borde de la inestabilidad los márgenes son 0.

#### Respuesta en el Tiempo

- $K_{pe} = 1$

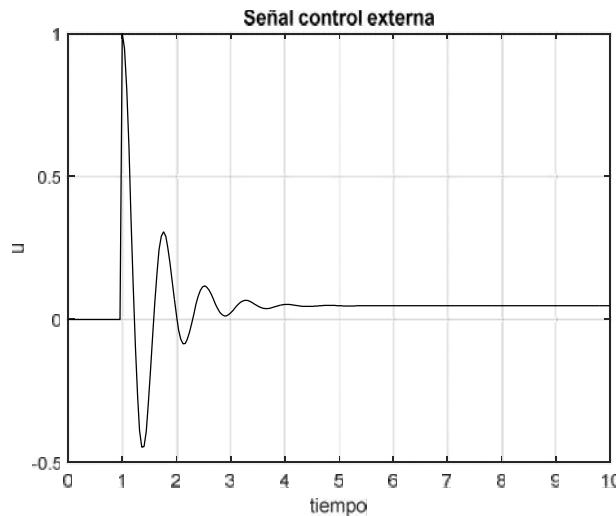


**Sobreimpulso:**

$$M_p(\%) = \frac{1.447 - 1}{1} * 100 = 44.7\%$$

**Error estacionario:**

$$e_{ss} = \frac{1 - 0.9522}{1} * 100 = 4.8\%$$

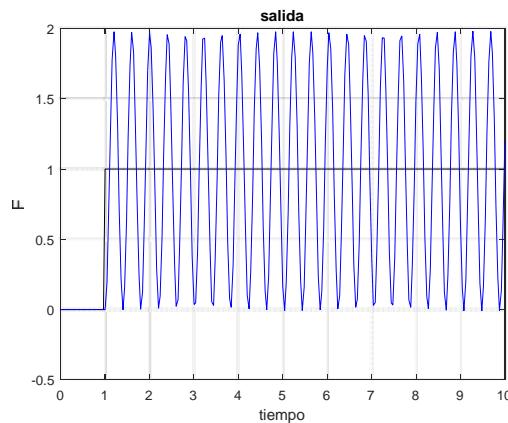


La señal de control tiene un pico de “1”.

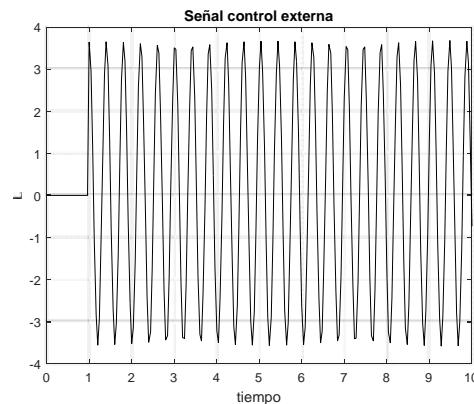
- $K_{pe} = K_{cr} = 3.65$

El sistema para el valor de  $K$  crítico, el sistema está en el límite de estabilidad.

Se puede observar que la respuesta se vuelve oscilatoria.



La señal de control también se vuelve oscilatoria.

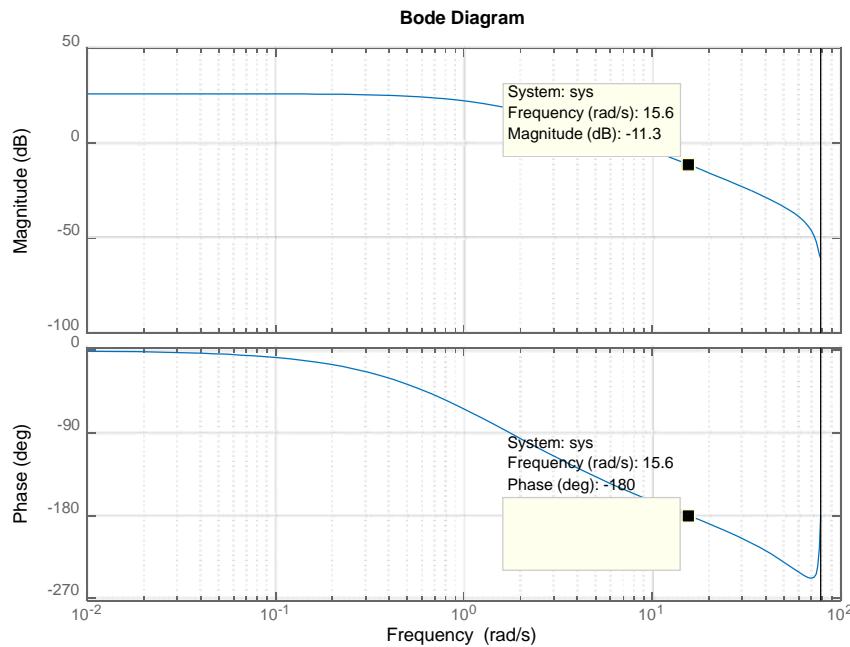


Rango de valores de  $K_{pe}$  con el cual el sistema es estable.

Se utiliza el diagrama de bode sin controlador, es decir solo se considera  $GH(z)$  sistema en lazo abierto sin  $K_{pe}$ .

```
%% Lugar de las raices
Hz = 1
GHz = Gmf*Hz;
[numLA denLA]=c2d(GHz,T, 'zoh'); %discretizacion
FTZ = tf(numLA , denLA , T)%--> FT lazo abierto

%% Diagrama de Bode
figure(1)
Kpe = 1;
dbode(numLA , denLA , T)
[Gm,Pm,Wgm,Wpm] = margin(FTZ)
grid on
```



El margen de ganancia se iguala a la perdida de margen que se incurre al aumentar el valor de  $K_{pe}$ .

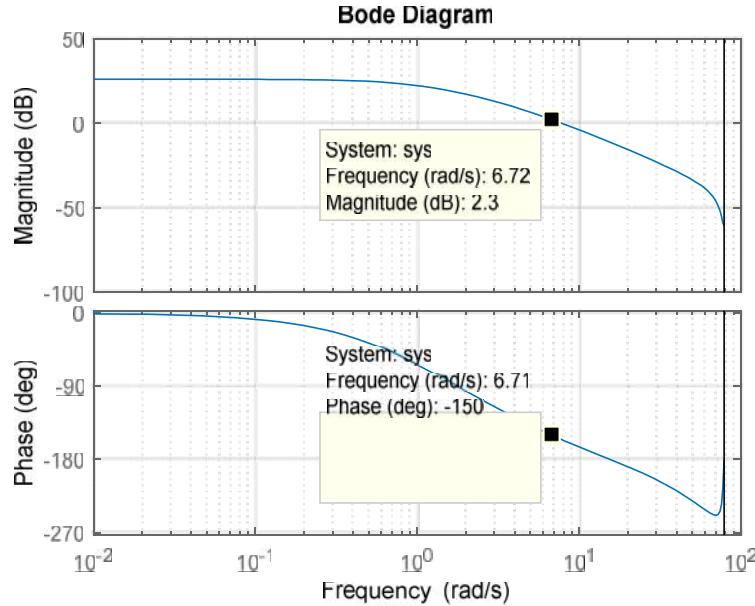
$$20 \log(K_{cr}) = 11.3$$

$$K_{cr} = 3.67$$

Que es aproximadamente igual al que se obtuvo con el método de Root Locus. La diferencia es solamente por errores de redondeo.

Con margen de fase MF=30°

En el sistema en lazo abierto, seleccionamos la frecuencia en la cual el margen de fase es MF = 30°

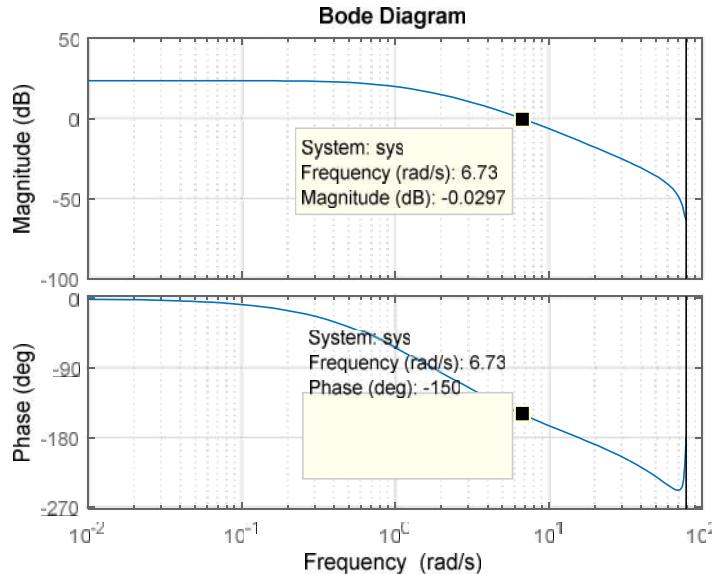


En el cual el margen que se tiene que compensar es de 2.3dB. Entonces:

$$20 \log(Kce) = -2.3$$

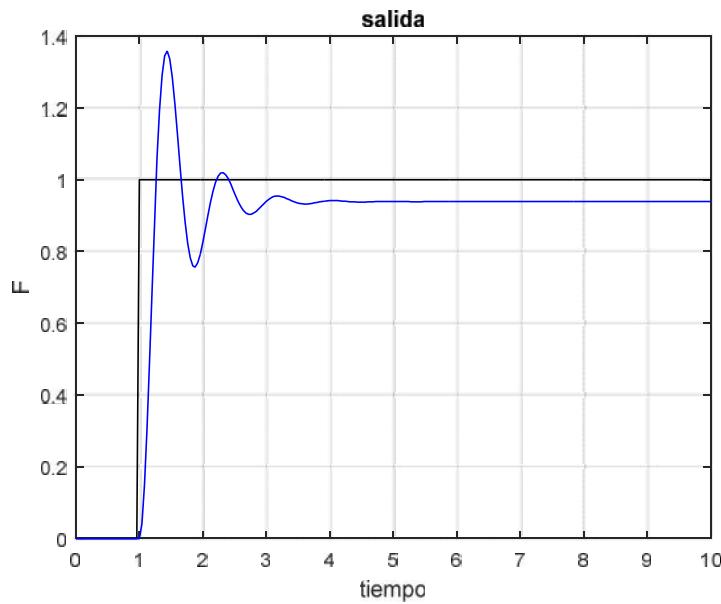
$$Kce = 0.767$$

Ahora utilizando el sistema en lazo abierto con el control “Kce” calculado, obtenemos el siguiente diagrama de Bode:



Se puede verificar que el margen de fase MF = 30°.

- Respuesta en el tiempo ( Kpe = 0.767 , MF =30° ):

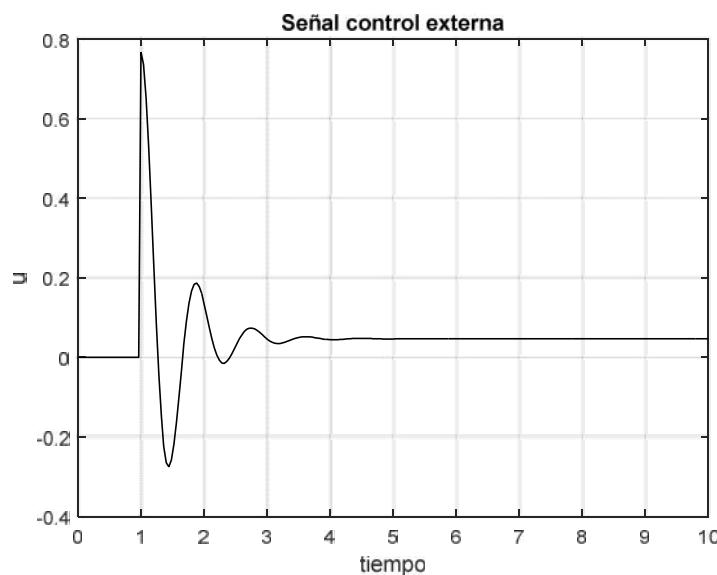


**Sobreimpulso:**

$$M_p(\%) = \frac{1.358 - 1}{1} * 100 = 35.8\%$$

**Error estacionario:**

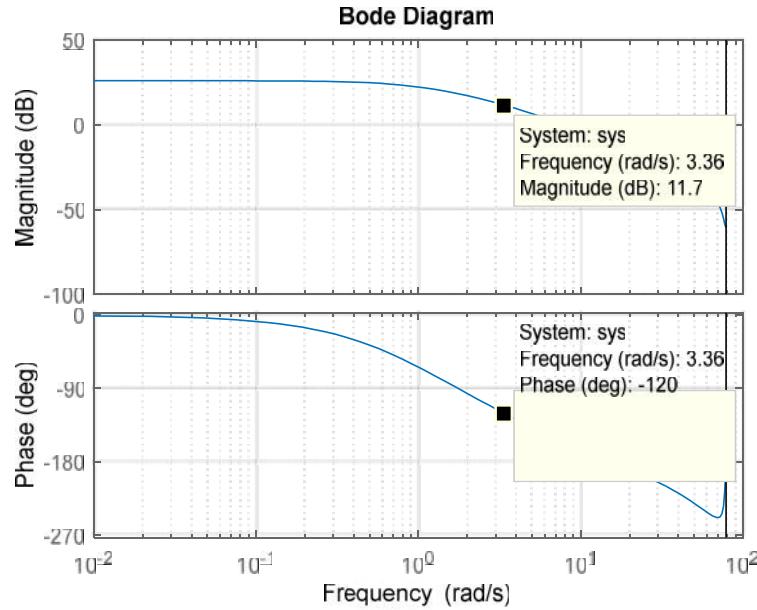
$$e_{ss} = \frac{1 - 0.9387}{1} * 100 = 6.13\%$$



La señal de control tiene un pico de “0.76”.

Con margen de fase MF=60°

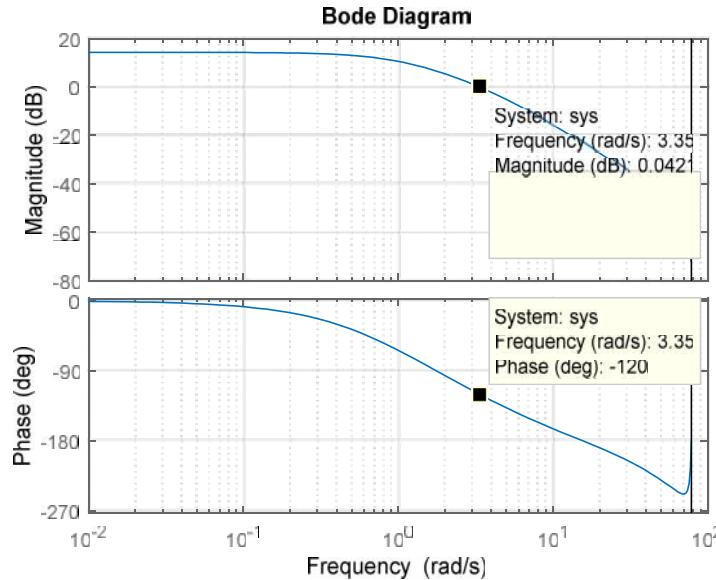
En el sistema en lazo abierto, seleccionamos la frecuencia en la cual el margen de fase es MF = 60°



En el cual el margen que se tiene que compensar es de 11.7dB. Entonces:

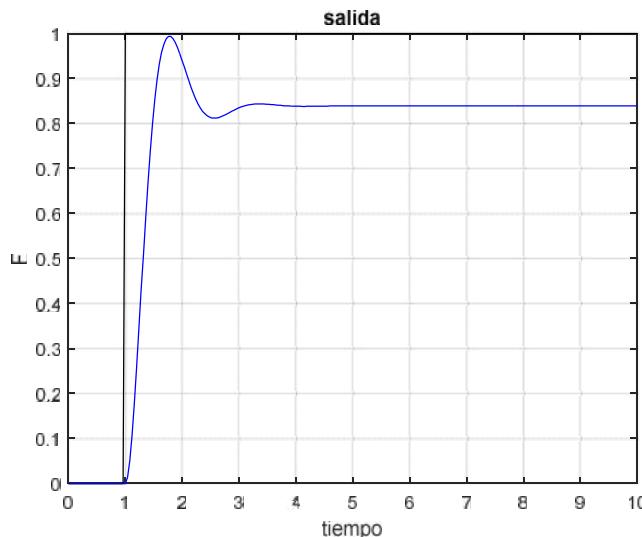
$$20 \log(Kce) = -11.7$$

$$Kce = 0.26$$



Se puede verificar que el margen de fase MF = 60°.

- Respuesta en el tiempo ( Kpe = 0.26 , Mf =60° ):

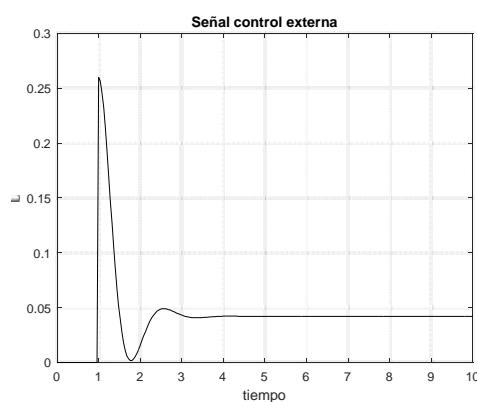


**Sobreimpulso:**

$$M_p(\%) = 0\%$$

**Error estacionario:**

$$e_{ss} = \frac{1 - 0.8387}{1} * 100 = 16.13\%$$



**La señal de control tiene un pico de "0.26".**

**COMENTARIO SOBRE LA RESPUESTA EN EL TIEMPO:** Al aumentar el margen de fase, la respuesta se hace un poco más lenta y se incrementa el error en estado estacionario pero se reduce y sobreimpulso (%Mp) y el error en estado estacionario (ess).

Lo cual significa que el **MF es inversamente proporcional al Mp y ess**. Sin embargo él problema de error estacionario se puede solucionar con una acción integral, ya que en éste caso solo se uso acción proporcional.

f) Empleando el Diagrama de Nyquist, determinar MF y MG para tres valores de  $K_{pe}$ .

Deduzca el rango de valores de  $K_{pe}$  con el cual el sistema es estable. Realice conclusiones:

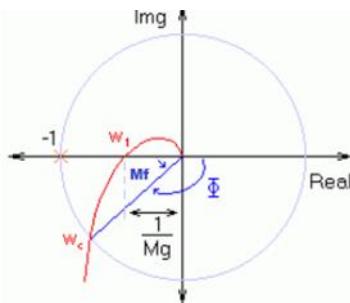
Aunque el diagrama de Nyquist trabaja con frecuencias positivas y negativas (son simétricas), solo nos sirve la frecuencia positiva.

Se utiliza el siguiente Script Matlab:

```
[numLA denLA]=c2d(GHz,T,'zoh'); %discretizacion
FTZ = tf(Kpe*numLA , denLA , T)%--> funcion de transferencia
lazo abierto discreta

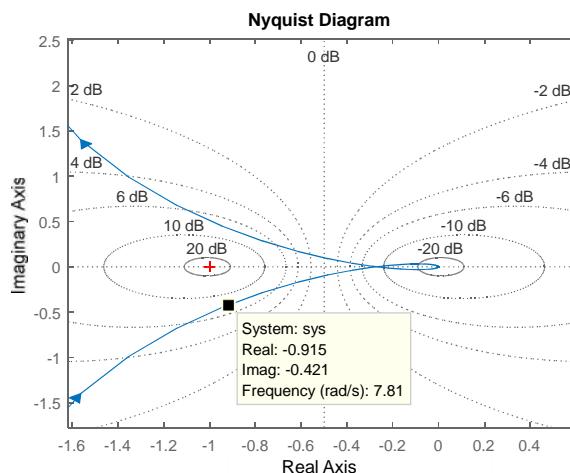
figure(1)
dnyquist(Kpe*numLA , denLA , T)
grid on
```

El margen de fase se obtiene al ubicar el cruce de la gráfica de Nyquist con el círculo unitario y calcular el ángulo, además el margen de ganancia se calcula como la inversa el cruce con el eje real de la gráfica. A continuación se muestra:



Para  $K_{pe} = 1$

- Margen de fase MF



Se obtiene el cruce con el círculo unitario en  $w = 7.81 \text{ rad/s}$ . El punto de cruce es:

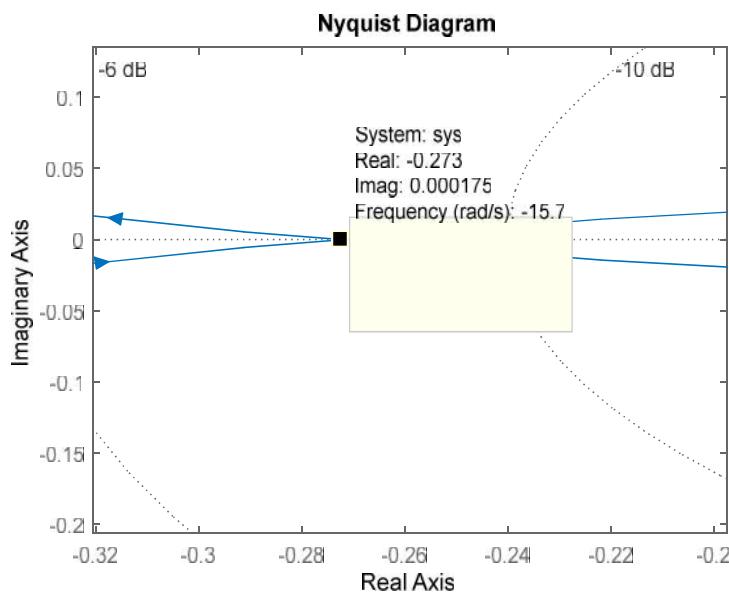
$$P = -0.915 - 0.421j$$

El margen de fase es:

$$MF = \tan\left(\frac{-0.421}{-0.915}\right) = 24.71^\circ$$

El valor de Mf es prácticamente igual al obtenido con el diagrama de Bode.

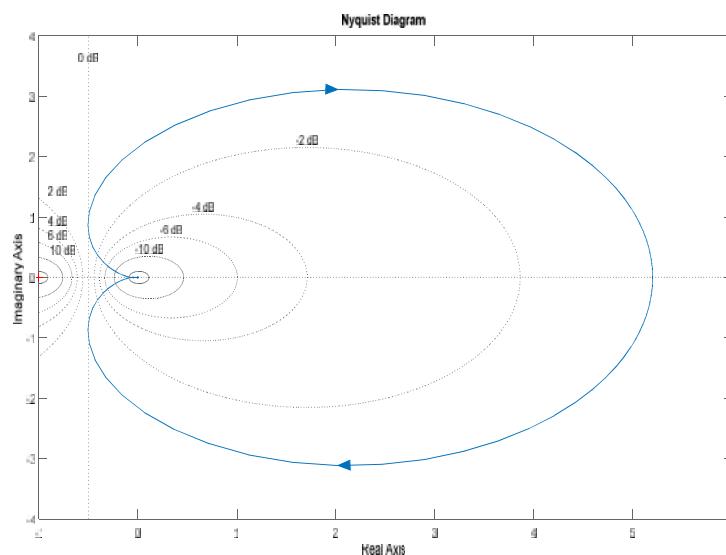
- Margen de ganancia MG



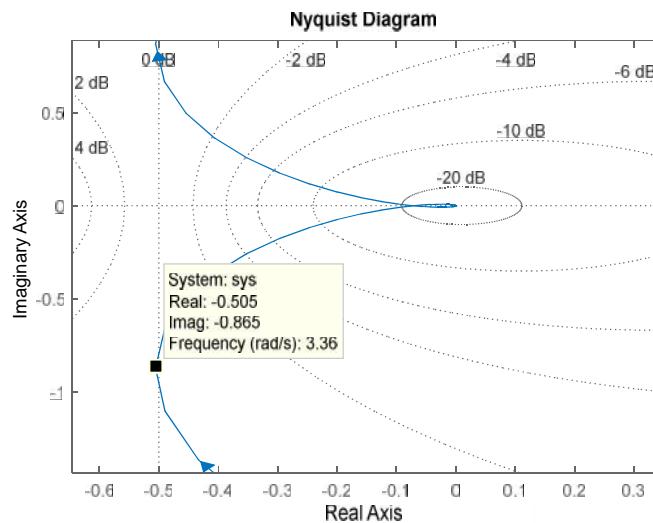
$$MG = \frac{1}{0.273} = 3.66$$

$$MG_{dB} = 20\log(MG) = 11.27dB$$

Para Kpe = 0.26



- Margen de fase MF



Se obtiene el cruce con el círculo unitario en  $w = 7.81 \text{ rad/s}$ . El punto de cruce es:

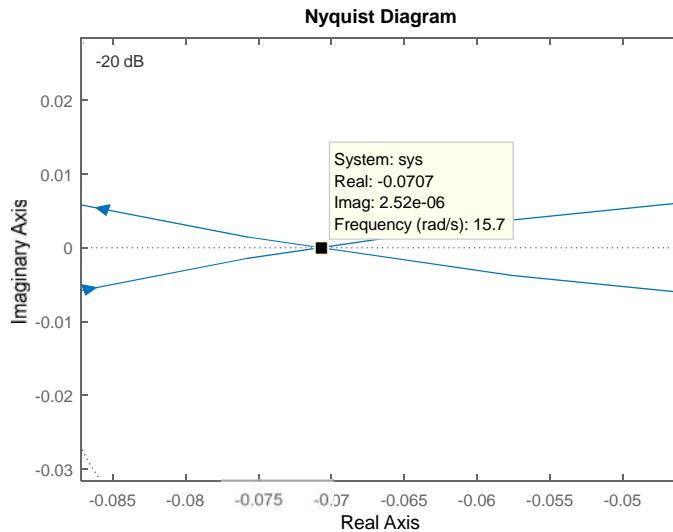
$$P = -0.915 - 0.421j$$

El margen de fase es:

$$MF = \tan\left(\frac{-0.865}{-0.505}\right) = 59.73^\circ$$

El valor de MF es prácticamente igual al obtenido con el diagrama de Bode, para dicha ganancia.

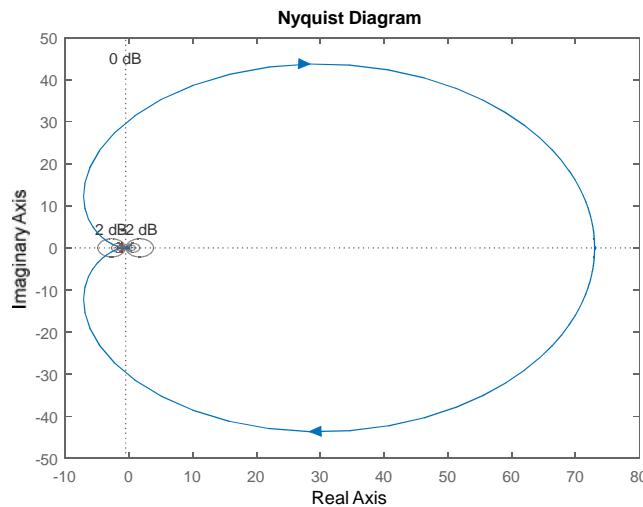
- Margen de ganancia MG



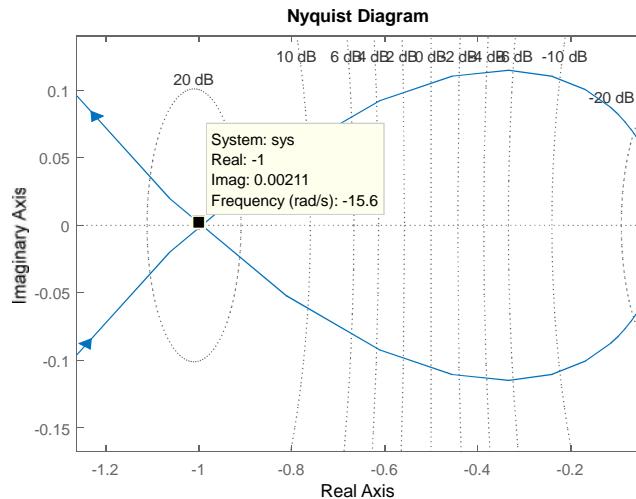
$$MG = \frac{1}{0.0707} = 14.15$$

$$MG_{dB} = 20 \log(MG) = 23dB$$

Para  $K_{pe} = K_{cr} = 3.65$



- Margen de fase MF



El margen de fase MF es igual a “0”, ya que la recta desde el centro al cruce de la gráfica de Nyquist con el círculo unitario se da en el eje real y es horizontal.

- Margen de ganancia MG

Se puede observar que el cruce sobre el eje real se da en “-1”, con lo cual se ratifica que el sistema se encuentra en el margen de estabilidad.

Por lo tanto el margen de fase MF es “0”.

## Conclusiones

1. Para diseñar el control digital, se requiere conocer la menor constante de tiempo para así calcular el periodo de muestreo.
2. El método de Root Locus permite encontrar rápidamente el rango de valores de ganancia Kpe del controlador externo que no desestabilizan el diagrama.
3. Los métodos para analizar estabilidad en el análisis en frecuencia de diagrama de Bode y Nyquist, entregan resultados de grados de estabilidad (MF y MG) muy similares.
4. Se obtuvo que para este sistema al aumentar el margen de fase MF se reduce el sobreimpulso de la respuesta, sin embargo se aumentó el error en estado estacionario y el tiempo de subida.
5. Debido a que el controlador digital en este caso es solo proporcional no se pudo compensar el error estacionario, sin embargo con una acción integral se puede compensar dicho error estacionario y con una acción derivativa se puede reducir el tiempo de subida.
6. Un sistema en el margen de estabilidad posee  $MF = 0$  y  $MG = 0$ , y en la región de estabilidad uno de ellos o los 2 se vuelven negativos.