PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

Maestría en Control y Automatización

Sistemas Lineales ICA600

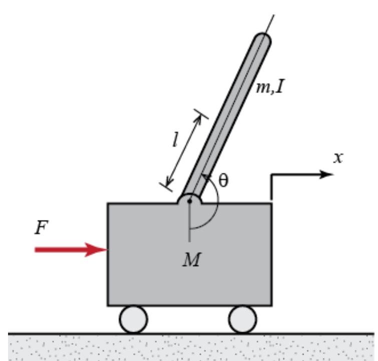
Título : Control de sistemas con retardo / Modelamiento Espacio de estados

Nombre: Dimel Arturo Contreras Martínez

Código: 20156458

Profesor: Dr. Morán Cárdenas, Antonio Manuel

Fecha: 31 de Octubre del 2015



2015

Controladores para sistemas con retardo

1. Para la planta mostrada:

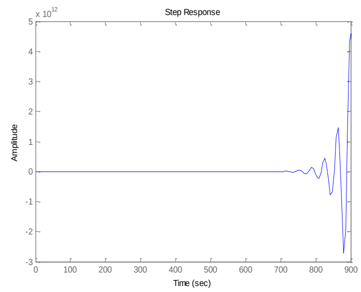
$$G(s) = \frac{s+2}{s^3+3s^2+5s+9}$$

Controlador:

$$K(s) = Kp + \frac{Ki}{s}$$

Para el controlador propuesto inicialmente:

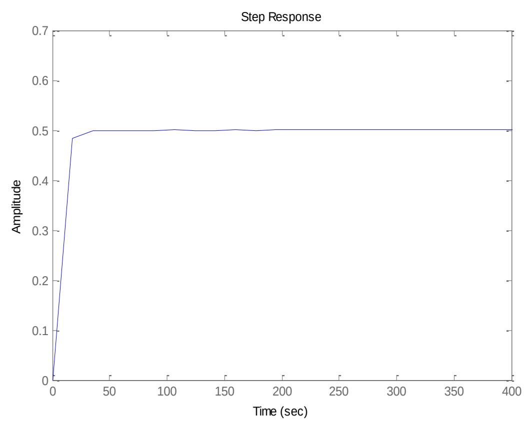
$$K(s) = 10 + \frac{12}{s}$$



Se hace inestable, por ello se eligen otras constantes, haciendo uso del PIDTOOL

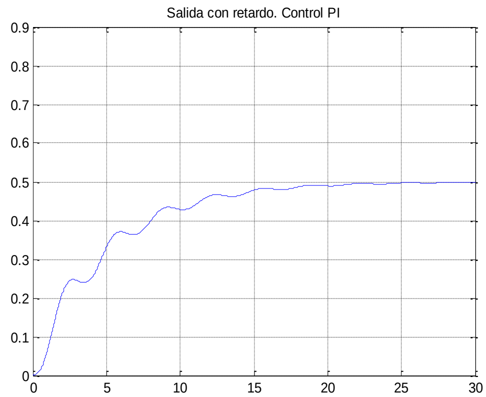
$$Kp = 0.1\,, Ki = 0.9$$

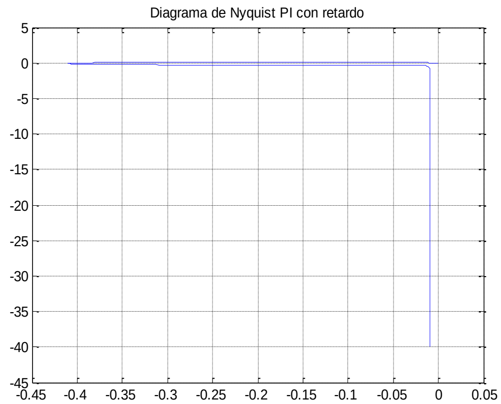
a. La respuesta sin retardo para escalón: r = 0.5



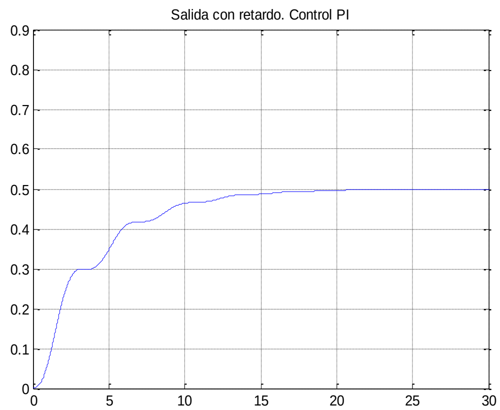

```
clear all;close all;clc
Kp = 0.1;
Ki = 0.9;
s = tf('s')
G = (s+2)/(s^3+3*s^2+5*s+9);
%K = 10 + 12/s;
K = Kp + Ki/s;

FT = G*K/(1+G*K);
step(FT/2)
```

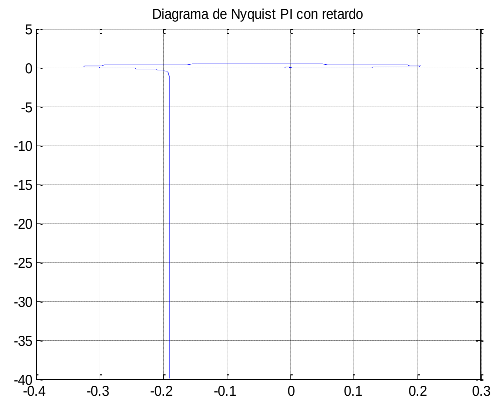
Para tau = 0.1:



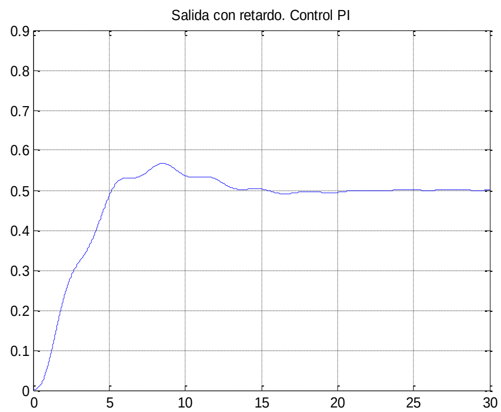


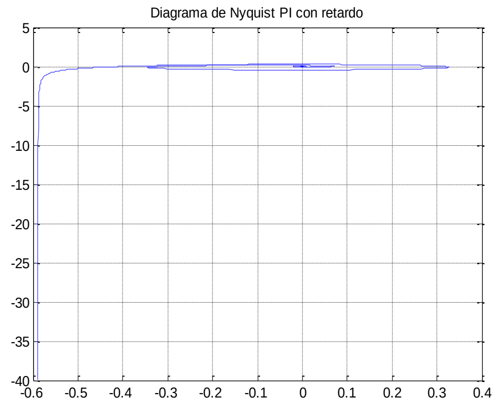
Para tau = 1:





Para tau = 3:



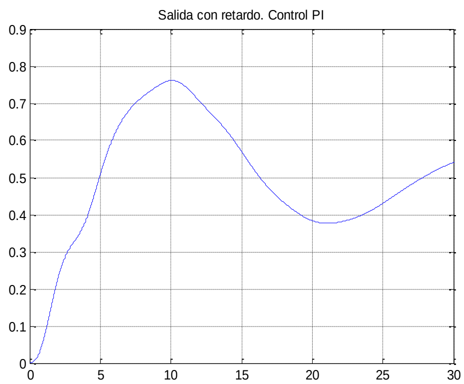


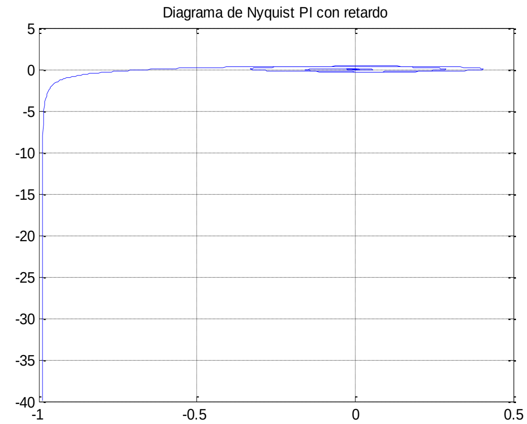
Se observa que mientras se aumenta “tau”, el diagrama de Nyquist se va acercando más a “-1” y por ende a la región de inestabilidad.

b. Retardo límite de estabilidad.

Realizando las pruebas aumentando “*tau” hasta el valor de 5*, el sistema en lazo cerrado está a punto de volverse inestable.
Gracias al diagrama de Nyquist podemos observar que la curva está cercana a “-1” y por ende a la región de inestabilidad.

Para tau = 5:

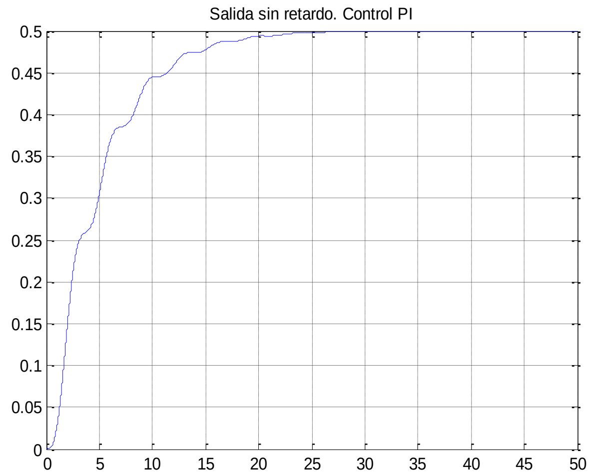




c. Predictor de Smith y comparaciones

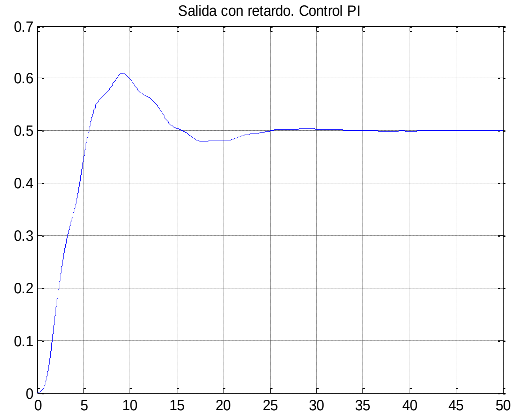
c.1. Discretización y sin retardo:

```
b0 = 2; b1 = 1;
a0 = 9; a1 = 5; a2 = 3; a3 = 1;
numG = [ b1 b0 ];
denG = [ a3 a2 a1 a0 ];
Kp = 0.1;
Ki = 0.9;

%%% Simulacion sin retardo. Control PI
y = 0;    yp = 0; y2p=0; up=0; ua=0;
ti = 0;   dt = 0.001;   tf = 50;

tt = ti:dt:tf;     tt = tt';
nt = length(tt);
r = 0.5*ones(nt,1);
interr = 0;
k = 1;
for t = ti:dt:tf
    yy(k,1)= y;
    err = r(k,1) - y;
    interr = interr + err*dt;
    u = Kp*err + Ki*interr;
    y3p = (-a2*y2p - a1*yp - a0*y + b0*u+b1*up)/a3;
    y   =   y  + yp*dt;     %y(k)
    yp  =  yp  + y2p*dt;    %yp(k)
    y2p =  y2p + y3p*dt;    %y2p(k)
    k = k + 1;
end
figure(1);
plot(tt,yy);    grid;
title('Salida sin retardo. Control PI');
```



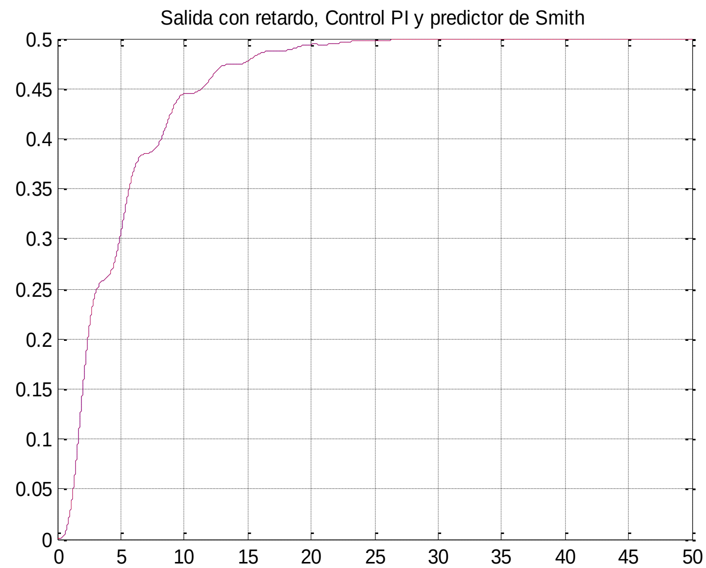
c.2. Con retardo para tau = 0.5

```
tau = input('tau: ');
dt = 0.001;
ntau = round(tau/dt);
if(ntau == 0)      % Se da un punto adicional para el
caso en que tau = 0.
    ntau = 1;
end
yy = zeros(ntau,1);

y = 0;     yp = 0; y2p=0; up=0; y3p=0; ua=0;
ti = 0;    dt = 0.001;    tf = 50;
tt = ti:dt:tf;      tt = tt';
nt = length(tt);
r = 0.5*ones(nt,1);
interr = 0;
k = 1;
for t = ti:dt:tf
    ytau = yy(k,1);
    err = r(k,1) - ytau;
    interr = interr + err*dt;
    u = Kp*err + Ki*interr;
    y3p = (-a2*y2p - a1*yp - a0*y + b0*u+b1*up)/a3;
    y   =   y  + yp*dt;      %y(k)
    yp  =  yp  + y2p*dt;     %yp(k)
    y2p =  y2p + y3p*dt;     %y2p(k)
    yy(ntau+k,1) = y;
    k = k + 1;
end
yout = yy(ntau:nt+ntau-1,1);
figure(2);
plot(tt,yout);    grid;
title('Salida con retardo. Control PI');
```

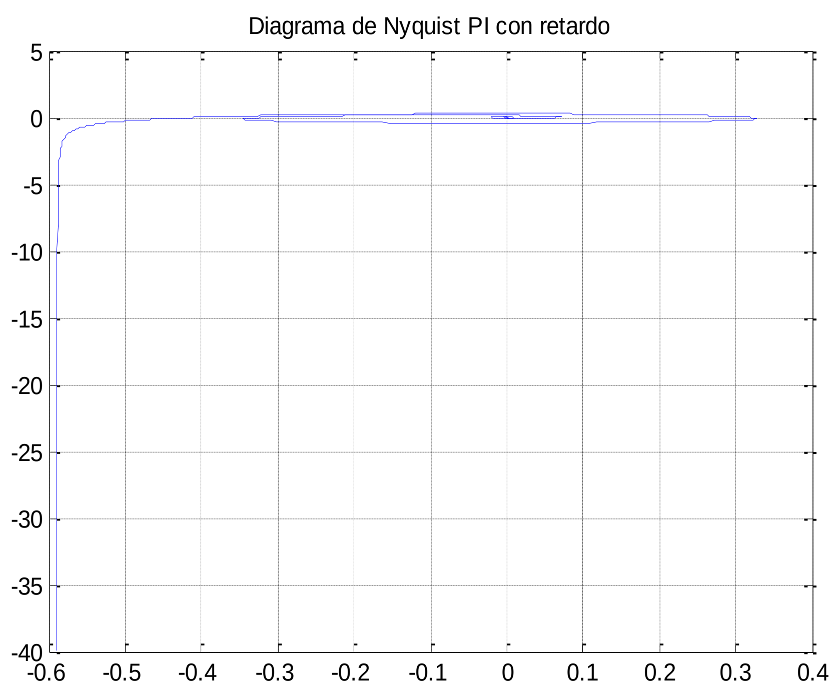


c.3. Con predictor de Smith

```
ntau = round(tau/dt);
if(ntau == 0)      % Se da un punto adicional para el caso en
que tau = 0.
    ntau = 1;
end
yy = zeros(ntau+20,1);    % Retardo en la salida
y = 0;     yp = 0; y2p=0; up=0; y3p=0; ua=0;
yc = 0;  ypc = 0;  y2pc=0; y3pc=0;  % Estado inicial modelo
yyc = zeros(ntau,1);    % Retardo a considerar en el control
ti = 0;   dt = 0.001;   tf = 50;
tt = ti:dt:tf;      tt = tt';
nt = length(tt);
r = 0.5*ones(nt,1);
interr = 0;
k = 1;
for t = ti:dt:tf
 %   yout(k,1) = y;
    ytau = yy(k,1);
    ytaut(k,1)= ytau;
    yest = yc - ytau + yyc(k,1);
    yestim(k,1) = yest;
    err = (r(k,1) - yest);
    interr = interr + err*dt;
    u = Kp*err + Ki*interr;
    y3p = (-a2*y2p - a1*yp - a0*y + b0*u+b1*up)/a3;
    y   =   y  + yp*dt;      %y(k)
    yp  =  yp  + y2p*dt;     %yp(k)
    y2p =  y2p + y3p*dt;     %y2p(k)
    yy(ntau+k,1) = y;
%%%%

    y3pc = (-a2*y2pc - a1*ypc - a0*yc + b0*u+b1*up)/a3;
    yc = yc + ypc*dt;
    ypc = ypc + y2pc*dt;
    y2pc =  y2pc + y3pc*dt;     %y2p(k)

    yyc(ntau+k,1) = yc;
    k = k + 1;
end
yout = yy(ntau:nt+ntau-1,1);
figure(3);
plot(tt,yout,'-b',tt,yestim,'--r');    grid;
title('Salida con retardo, Control PI y predictor de Smith');
```

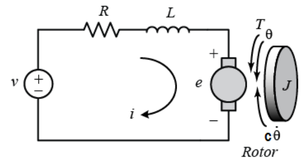


c.2. Diagrama de Nyquist



Modelamiento en Espacio de Estados

1. Motor DC: Modelamiento en espacio de estados.



Ecuaciones:

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + K_v\dot{\theta}$$

$$T = K_i\, i = J\ddot{\theta} + c\dot{\theta}$$

$$i = \frac{J}{K_i}\ddot{\theta} + \frac{c}{K_i}\dot{\theta}$$

Se derivan:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{K_i}\left(J\dddot{\theta} + c\ddot{\theta}\right)$$

$$v = R(\frac{J}{K_i}\ddot{\theta} + \frac{c}{K_i}\dot{\theta}) + L(\frac{1}{K_i}\left(J\dddot{\theta} + c\ddot{\theta}\right)) + K_v\dot{\theta}$$

$$v = (\frac{JL}{K_i})\dddot{\theta} + (\frac{RJ + LC}{K_i})\ddot{\theta} + (\frac{RC + K_vK_i}{K_i})\dot{\theta}$$

Resulta:

$$\dddot{\theta} = \frac{K_i}{JL}v - \frac{RJ + LC}{JL}\ddot{\theta} - \frac{RC + K_vK_i}{JL}\dot{\theta}$$

Vector estados:

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

Salida del sistema es: θ

La representación en espacio de estados es:

$$\frac{d\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{RC + K_vK_i}{JL} & -\dfrac{RJ + LC}{JL} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_i}{JL} \end{bmatrix}v$$

$$y = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

2. Motor con tornillo sin fin

De los apuntes de clase, se obtiene la siguiente ecuación:

a. Corriente consumo del motor

$$i = \left(\frac{2\pi}{pK_t} + \frac{mr}{K_t \tan \alpha}\right)\ddot{x} + (\frac{cr}{K_t \tan \alpha})\dot{x}$$

Sea:

$$z_1 = \frac{2\pi}{pK_t} + \frac{mr}{K_t \tan \alpha}$$

$$z_2 = \frac{cr}{K_t \tan \alpha}$$

$$i = z_1\ddot{x} + z_2\dot{x}$$

Se obtiene:

$$\ddot{x} = \frac{1}{z_2}i - \frac{z_1}{z_2}\dot{x}$$

b. Voltaje de entrada al motor

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + eb$$
$$eb = K_v\dot{\theta}$$
$$eb = Kb\frac{2\pi}{p}\dot{x}$$

Se obtiene:

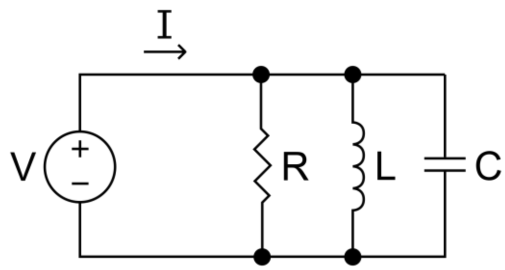
$$\frac{di}{dt} = \frac{v}{L} - \frac{Ri}{L} - K_v\frac{2\pi}{L\,p}\dot{x}$$

Se obtiene las siguientes ecuaciones de espacio de estado:

$$\frac{d\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{z_1}{z_2} & \frac{1}{z_2} \\ 0 & -K_v\frac{2\pi}{L\,p} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}v$$

$$y = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix}$$

3. Circuito RLC



Ecuaciones:

$$I = ir + il + ic$$

$$ir = \frac{v}{R}$$

$$il = \frac{1}{L}\int vdt$$

$$ic = C\frac{dv}{dt}$$

Como nos piden tomar la corriente “I” como salida, entonces analizaremos como un sistema SISO primero para ver si la función de transferencia es propia, ya que debido a las integrales y derivadas observadas en las ecuaciones dan sospecha de algún inconveniente al pasarlo a espacio de estados.

$$I = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int vdt + C\frac{dv}{dt}$$

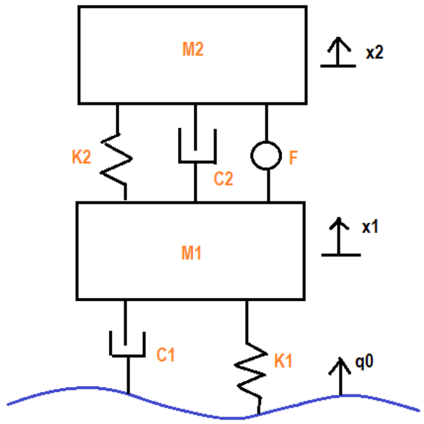
Calculando la función de transferencia, tomando transformada de Laplace:

$$I(s) = V(s)(\frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs)$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{LCs2 + Ls + R}{RLs}$$

Como se observa, es una FT impropia, por lo cual calcular su representación espacio de estados no es directamente posible (hasta lo estudiado ese es el criterio que se está tomando).

4. Sistema de amortiguamiento



Ecuaciones:

$$\sum F = ma$$

$$-K_2(X_2 - X_1) - C_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + F = m_2\ddot{X}_2$$

$$K_2(X_2 - X_1) + C_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - K_1(X_1 - X_0) - C_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_0) - F = m_1\ddot{X}_1$$

La salida del sistema es:

$$Y = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ \ddot{X}_2 \end{vmatrix}$$

A continuación se ordenarán las ecuaciones de tal manera que cumplan con el vector de estados propuesto.

a. Para el vector de estados:

$$X = \begin{vmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{vmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{vmatrix} \dot{X}_1 - \dot{X}_0 \\ \dot{X}_2 \\ \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-\frac{K_2}{m_1} - \frac{K_1}{m_1}) & \frac{K_2}{m_1} & (-\frac{C_2}{m_1} - \frac{C_1}{m_1}) & \frac{C_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_2} & -\frac{K_2}{m_2} & \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2}{m_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{C_1}{m_1} \\ 0 \end{vmatrix} \dot{X}_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{K_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_2} \end{vmatrix} X_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{vmatrix} F$$

$$Y = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ \ddot{X}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{m_2} & -\frac{K_2}{m_2} & \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2}{m_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ \frac{K_2}{m_2} \end{vmatrix} X_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{vmatrix} F$$

b. Para el vector de estados:

$$X = \begin{vmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 - \dot{X}_0 \\ \dot{X}_2 \end{vmatrix}$$

$$\dot{X} = \begin{vmatrix} \dot{X}_1 - \dot{X}_0 \\ \dot{X}_2 \\ \ddot{X}_1 - \ddot{X}_0 \\ \ddot{X}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (-\frac{K_2}{m_1} - \frac{K_1}{m_1}) & \frac{K_2}{m_1} & (-\frac{C_2}{m_1} - \frac{C_1}{m_1}) & \frac{C_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_2} & -\frac{K_2}{m_2} & \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2}{m_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 - \dot{X}_0 \\ \dot{X}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \ddot{X}_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{C_2}{m_1} \\ \frac{C_2}{m_2} \end{vmatrix} \dot{X}_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{K_2}{m_1} \\ \frac{K_2}{m_2} \end{vmatrix} X_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \end{vmatrix} F$$

$$Y = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ \ddot{X}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{m_2} & -\frac{K_2}{m_2} & \frac{C_2}{m_2} & -\frac{C_2}{m_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 - X_0 \\ X_2 \\ \dot{X}_1 - \dot{X}_0 \\ \dot{X}_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{m_2} \end{vmatrix} \dot{X}_0 + \begin{vmatrix} -1 \\ \frac{K_2}{m_2} \end{vmatrix} X_0 + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{vmatrix} F$$