TEMA 1

IDEAS BASICAS SOBRE CONJUNTOS DIFUSOS Y LÓGICA DIFUSA

1.- Introducción a la idea de S.D.

2.- Las Lógica Multivaluadas

3.- Definiciones básicas de la Teoria de S.D.

4.- Teorema de Representación

5.- El Principio de Extensión

INTRODUCCION

Los conjuntos difusos fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1965 para procesar/manipular información y datos afectados de incertidumbre/imprecisión no probabilística.

- L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8(1965) 338-353.

Fueron diseñados para representar matemáticamente incertidumbre y vaguedad y proporcionar herramientas formalizadas para trabajar con la imprecisión intrínseca en muchos problemas.

No obstante la historia de la Lógica Difusa comienza mucho antes...

Realmente hay que remontarse a Aristóteles quien introdujo las denominadas LEYES DEL PENSAMIENTO, COMO BASE PARA DESARROLLAR UNA Teoría concisa de la Lógica y posteriormente las Matemáticas.

LA LEY DEL TERCERO EXCLUIDO

Esta "ley básica del pensamiento" establece que cualquier proposición solo puede ser Verdadera o Falsa y que ningún otro valor de verdad intermedio está permitido.

El propio Aristoteles e incluso Parminedes (300 aC), que propuso la primera versión de esta ley, ya encontró serias e inmediatas objeciones (las proposiciones contingentes)

Heraclito propuso cosas que podían ser simultáneamente ciertas y falsas. En general se formularon muchos casos en donde esta ley era falsa

Seria Platón quien pusiera la "primera piedra" de la Lógica Difusa indicando que "hay una tercera región entre lo verdadero y lo falso donde los opuestos se presentan juntos"

LA LOGICA TRIVALUADA DE LUKASIEWICZ

Una de las primeras formulaciones sistemáticas de una alternativa a la lógica bivaluada de Aristóteles fue formulada por J. Lukasiewicz entre 1917 y 1920.

Este autor introdujo un tercer valor de verdad, “posible”, y formuló consecuentemente una lógica trivaluada.

Lukasiewicz también asignó un valor numérico entre 0 y 1 al término posible y construyo las matemáticas correspondientes a esa lógica. Lukasiewicz propuso una notación completa y un sistema axiomático para derivar lo que llamó “matemática moderna”.

Lógica trivaluada de Lukasiewcz

Proposiciones contingentes futuras (proposiciones futuras de cosas que no se saben si van a ser V o F):

“mañana me toca la lotería”

$$w(p) \in \{v, f, n\}$$

A	¬A		A ^ B	v	f	n		A v B	v	f	n		A ⇒ B	v	f	n
v	f		v	v	f	n		v	v	v	v		v	v	f	n
f	v		f	f	f	f		f	v	f	n		f	v	v	v
n	n		n	n	f	n		n	v	n	n		n	v	n	V**

Los valores simbólicos de verdad se pueden dar numéricamente de varias maneras.

Hay que mencionar que D.E. Knutz también ha propuesto en 1968-1973 una lógica de tres valores similar a la de Lukasiewicz. Knuth argumentaba que su lógica permitía un desarrollo de las Matemáticas más elegante que el de la lógica bivaluada.

OTRAS LOGICAS MULTIVALUADAS

Lógica de Kleene

Proposiciones matemáticas indecidibles

$$w\ (p) \in \{v, f, i\}$$

A	¬A		$A \wedge B$	v	f	i		$A \vee B$	v	f	i		$A \Rightarrow B$	v	f	i
v	f		v	v	f	i		v	v	v	v		v	v	f	i
f	v		f	f	f	f		f	v	f	i		f	v	v	v
i	i		i	i	f	i		i	v	i	i		i	v	i	i

Aplicación epistemológica → i≡ no se sabe.

La única diferencia con la lógica trivaluada de Lukasiewicz es que aquí

Si A y B son indecidibles $A \Rightarrow B$ es indecidible

Mientras que allí

Si A y B son contingentes futuras $A \Rightarrow B$ es verdadera

Mañana me toca la lotería$\Rightarrow$me compraré un coche,

es verdadera”

Lógica de Bochvar

Paradojas semánticas (proposiciones que llevan una negación implícita cuya afirmación implica su falsedad).

w(q) ={v,f,p}

A	¬A		A ^ B	v	f	p		A v B	v	f	p		A ⇒ B	v	f	p
v	f		v	v	f	p		v	v	v	p		v	v	f	p
f	v		f	f	f	p		f	v	f	p		f	v	v	p
p	p		p	p	p	p		p	v	p	p		p	v	p	p

Lógica de Belnap

Representante de la lógicas de 4 valores de verdad. Orientada a la deducción de la verdad a partir de una base de conocimiento

B: base de conocimiento

P: proposición

W(p) = v sii {B |-p , B|/- ¬p}

W(p) = f sii {B |/-p , B|- ¬p}

W(p) = c sii {B |-p , B|- ¬p}

W(p) = i sii {B |/-p , B|/- ¬p}

Se puede pasar a 3 estados como v, f, c y el i se mete en f, haciendo uso de la Hipótesis del Mundo Cerrado.

Lukasiewicz exploró posteriormente la posibilidad de manejar lógicas con cuatro, cinco, ... valores de verdad, llegando a la conclusión de que no existía impedimento formal para la derivación de una lógica infinito-valorada.

Esta lógica seria completamente formalizada hacia 1930.

Lukasiewicz consideraba que la lógica trivalorada y la infinito-valorada eran las más interesantes desde el punto de vista de sus propiedades, si bien la tetravalorada era la más fácilmente adaptable a los postulados aristotélicos clásicos.

Lógica de Lukasiewicz infinitamente valuada

$w(q) \in [0,1]$

Se da un grado de verdad a las proposiciones:

w(q): 0 : completamente falso

w(q)=1: absolutamente cierto

$w(\neg q) = 1 - w(q)$

$w(q \wedge r) = \min \{w(q), w(r)\}$

$w(q \vee r) = \max \{w(q), w(r)\}$

$w(q \Rightarrow r) = \min \{1, 1 - w(q) + w(r)\}$

min $\in$ {t-normas}

max $\in$ {t-conormas}

$\min(1, 1 - r_1 + r_2) \in$ {función implicación}

Se puede obtener otras lógicas infinitamente valoradas empleando distintos operadores de estas familias.

- Teoría de conjuntos difusos
- Lógica difusa (borrosa).

Algunas aplicaciones de las Lógicas Multivaluadas

No se trata de un juego matemático o lógico sino que tienen aplicaciones reales en:

Lingüística: Tratamiento de los supuestos. Por ejemplo, al decir

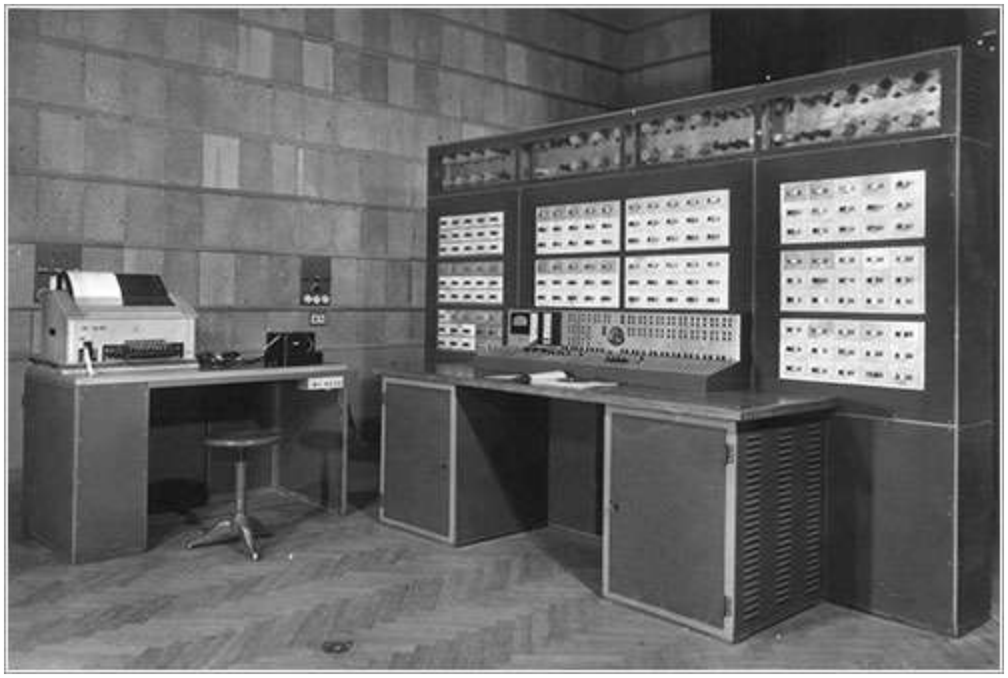
"El actual presidente del gobierno es gallego"

se está dando por supuesto que España tiene un presidente del gobierno.

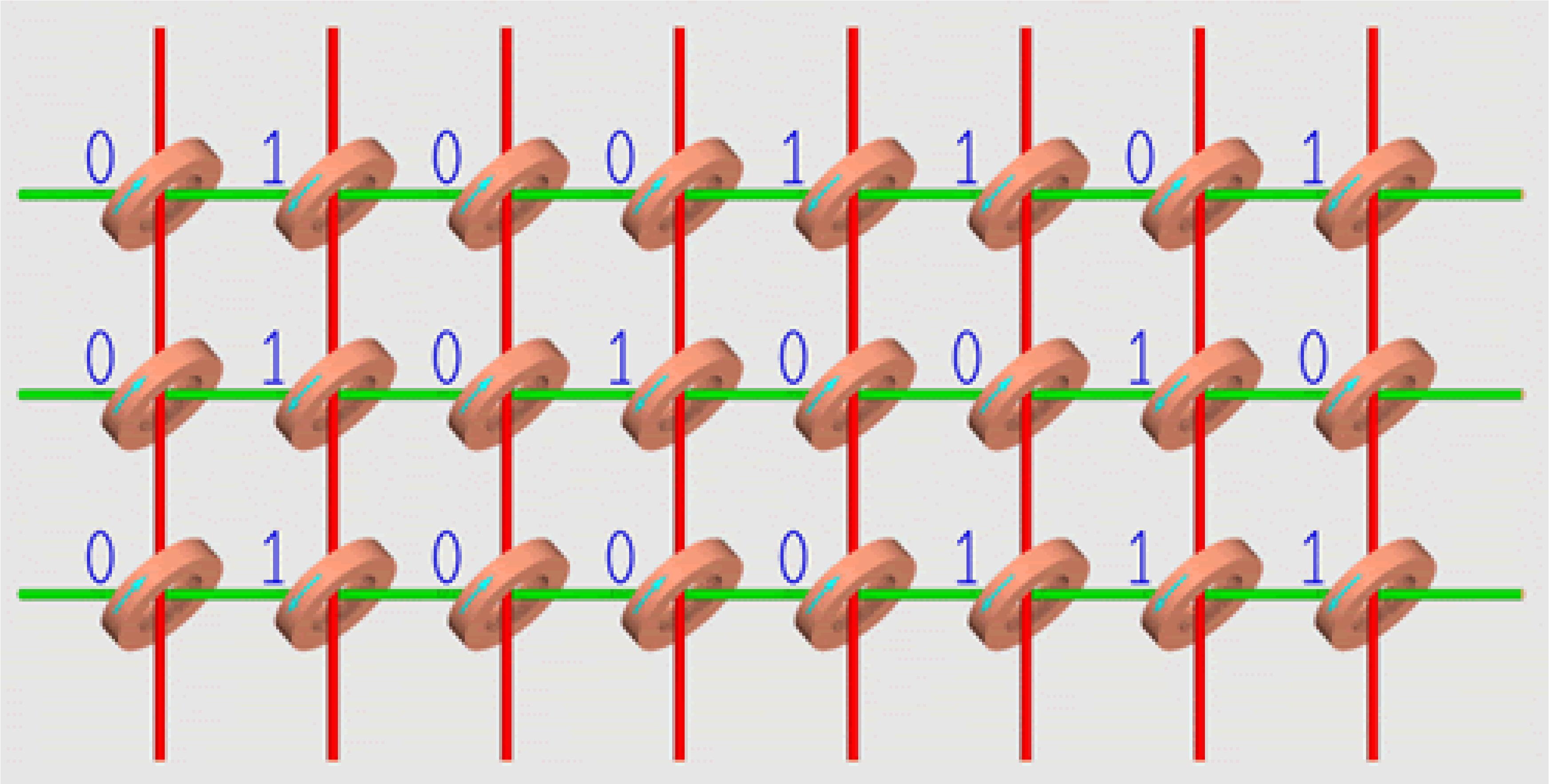
Diseño de Hardware: Lógica n-valuada para diseñar y verificar circuitos con n estados.

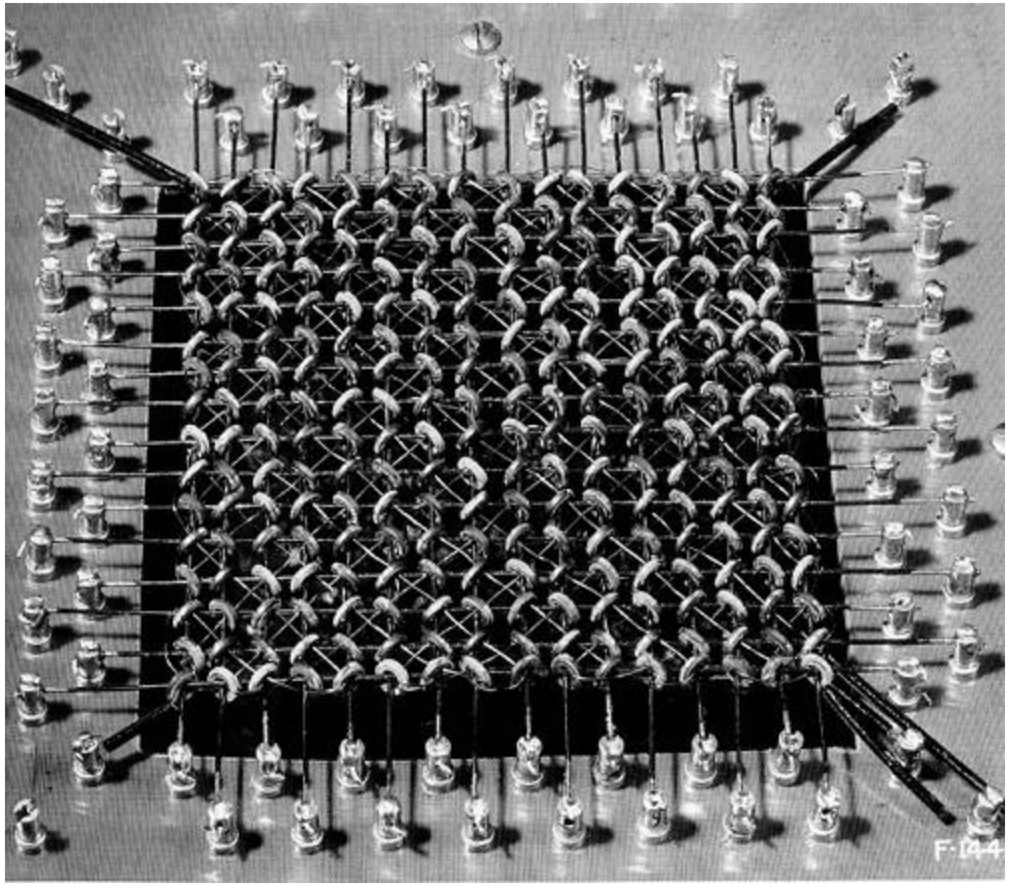
Matemáticas: Manejo preciso de entes imprecisos.

Curiosidad: El ordenador Setun



Propuesto por Nikolay Brusentsov en Universidad Estatal de Moscú en 1956, se basó en la idea de que los núcleos de ferrita se adaptaban mejor a una **lógica ternaria** que a una lógica binaria, pues esta última desaprovechaba uno de los tres estados posibles de estos núcleos.


0 1 0 0 1 1 0 1
0 1 0 1 0 0 1 0
0 1 0 0 0 1 1 1


F-144

Tras un rápido desarrollo el primer Setun entró en funcionamiento en 1958, aunque hasta 1960 no entró en producción.

A partir de entonces demostró ser muy fiable, y llegaron a fabricarse unas 50 unidades antes de que las autoridades decidieran que ya estaba bien de esas «chorradas de universitarios» y cancelaran la producción, aún a pesar de que aún quedaban muchos pedidos sin servir.

A pesar de eso llegó a fabricarse un nuevo modelo, el **Setun 70,** pero la obsolescencia de la tecnología de los nucleos de ferrita marcó el punto final de estos proyectos.

LOS CONJUNTOS DIFUSOS (Fuzzy Sets)

La palabra fuzzy (fotografia) alude a "movido o borroso" en el sentido de imágenes con los contornos mal definidos. De ahí la traducción de Difuso o Borroso que empleamos en castellano

En 1965 L.A. Zadeh caracteriza el concepto de CONJUNTO DIFUSO y por extensión la LOGICA DIFUSA.

Es la Teoria de conjuntos asociada a la Lógica infinito valorada de Lukasiewicz.

La idea de Zadeh es hacer que el rango de valores de pertenencia de un elemento a un conjunto pueda variar en el intervalo [0,1] en lugar de limitarse a uno de los valores del par {0,1} (o lo que es lo mismo Falso, Verdadero).

A continuación Zadeh extiende los operadores conjuntistas clásicos (operadores lógicos) a la nueva formulación, probando que la formulación así obtenida extiende la lógica (Teoria de Conjuntos) clásica.

A partir de la Teoria de Conjuntos Difusos (borrosos) Zadeh introduce la Lógica Difusa como una extensión de las lógicas multivaluadas.

Lo que justifica el desarrollo de la Lógica difusa es la necesidad de un marco conceptual donde tratar la incertidumbre no probabilística y la imprecisión léxica.

En palabras de Zadeh (1992), las características más notables de la Lógica difusa son:

- En Lógica Difusa (LD) todo es cuestión de grado
- El Razonamiento Exacto es un caso limite del Razonamiento Aproximado.
- En LD el conocimiento se interpreta como una colección de restricciones elásticas (difusas) sobre un conjunto de variables.
- En LD la inferencia puede verse como la propagación de un conjunto de restricciones elásticas.
- Sistema Difuso (SD): resultado de la "fuzzificacion" de un sistema convencional
- Los Sistemas Difusos operan con conjuntos difusos en lugar de números.
- En esencia la representación de la información en Sistemas Difusos imita el mecanismo de Razonamiento Aproximado que realiza la mente humana.

- **¿Cuándo usar la tecnología fuzzy o difusa?**
  - En procesos complejos, si no existe un modelo de solución sencillo.
    - En procesos no lineales.
    - Cuando haya que introducir la experiencia de un operador "experto" que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia.
    - Cuando ciertas partes de un sistema a controlar sean desconocidas y no puedan medirse de forma fiable (con errores posibles).
    - Cuando el ajuste de una variable puede producir el desajuste de otras.
    - En general, cuando se quieran representar y operar con conceptos que tengan imprecisión o incertidumbre (como los procesos de decisión en Economía o Finanzas).

ALGUNAS DEFICIONES BASICAS

Sea X un conjunto no vacío de objetos que consideraremos como Referencial o Universo de discurso.

Definición: Un conjunto difuso A sobre X es un conjunto de pares de valores $\{(x,r), x \in X, r \in [0,1]\}$.

Cada elemento $x \in X$ con su grado de pertenencia a A.

Por extensión de la función característica se asocia a cada conjunto difuso A por una Función de Pertenencia que asocia cada elemento de X con un valor del intervalo [0,1]:

Caracterización. (fuzzy set) Un conjunto difuso se caracteriza por una función $\mu A : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu A(x)$ representa el grado de pertenencia a A de cada $x \in X$.

Normalmente se escribe se escribe $A(x)$ en lugar de $\mu A(x)$ o lo que es lo mismo $A = \{ A(x)/x, x \in X\}$.

Los valores de pertenencia varían entre 0 (no pertenece en absoluto) y 1 (pertenencia total).

Los conjuntos clásicos son un caso particular de conjunto difuso con función de pertenencia (función característica) con valores en $\{0,1\}$.

Si $X = \{x1, . . . , xn\}$ es un conjunto finito y A es un subconjunto difuso de X, a veces se usa la notación

$$A = \mu 1/x1 + \cdot \cdot \cdot + \mu n/xn$$

CARACTERÍSTICAS DE UN CONJUNTO DIFUSO

• Altura de un Conjunto Difuso (height): El mayor valor de su función de pertenencia: sup{A(x) $x \in X$}.

• Conjunto Difuso Normalizado (normal): Aquel para el que existe un elemento que pertenece al conjunto difuso totalmente, es decir, con grado 1. Dicho de otro modo Altura(A) = 1.

• Soporte de un Conjunto Difuso (support): Elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a 0: Soporte(A) = $\{x \in X \mid A(x) > 0\}$.

• Núcleo de un Conjunto Difuso (core): Elementos de X que pertenecen al conjunto con grado 1: Nucleo(A) = $\{x \in X \mid A(x) = 1\}$. El Nucleo(A) siempre esta incluido en el Soporte(A).

• α-Corte: Valores de X con grado de pertenencia minimo igual a α: $A\alpha = \{x \in X \mid \alpha \leq A(x)\}$.

Restricción de Consistencia: Si $\alpha1 > \alpha2$, entonces $A_{\alpha 1} \subset A_{\alpha 2}$

• Conjunto Difuso Convexo o Concavo: Aquel cuya función de pertenencia cumple

Convexo: $A(\lambda x1 + (1-\lambda)x2) \geq \min\{A(x1), A(x2)\}$.

Concavo: $A(\lambda x1 + (1-\lambda)x2) \leq \max\{A(x1), A(x2)\}$

Para cualesquiera x1 y x2 de X y $\lambda \in [0,1]$.

• Cardinalidad de un Conjunto Difuso (Muy diversas definiciones) pero en general puede decirse que “no se trata de contar el numero de elementos” que tiene el sino determinar “una medida de su tamaño”.

Teorema de Representación o Principio de Identidad

Todo conj. difuso puede descomponerse y reconstruirse a partir en una familia de conjs. no difusos.

1)Cualquier conjunto difuso A se representa por el conjunto de sus α-cortes y $A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha A_\alpha(x)\}$; $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$

donde $A_\alpha(x) = 1$ ó $A_\alpha(x) = 0$, dependiendo de si x pertenece o no al α-corte A_α.

2) Cualquier familia de conjuntos indexados y anidados permite definir un conjunto difuso tomándolos como una familia de alfa cortes $\{A_\alpha, \alpha \in [0,1]\}$.

.

Conclusion:

- Cualquier problema formulado en el marco de los conjuntos difusos puede resolverse transformando esos conjuntos difusos en su familia de α-cortes anidados, determinando la solución para cada uno usando técnicas no difusas.

- Resalta la idea de que los conjuntos difusos son una generalización.

Principio de Extensión (Extensión Principle)

Permite transformar conjuntos difusos de iguales o distintos universos por medio de una función.

Sean X e Y dos universos y f: $X \longrightarrow Y$.
Sea A un s.d. sobre X.

El Principio de Extensión establece que B=f(A) es un s.d. de Y con función de pertenencia

$$B(y) = \sup\{A(x) \mid x \text{ en } X \text{ tal que } y=f(x)\}$$

Se puede generalizar este Principio para el caso en el que el Universo X sea el producto cartesiano de n Universos:

$$X = X1 \times X2 \times ... \times Xn$$

Sea f: $X \rightarrow Y$, $y = f(x)$, con $x = (x1, x2, ... , xn)$.

Por el Principio de Extensión se transforma n Conjuntos Difusos A1, A2, ...An, de los universos X1, X2, ... y Xn respectivamente, en un conjunto difuso B=f (A1, A2, ... , An) en Y, con función de pertenencia:

$$B(y) = \sup \{ \min[A1 (x1), A2 (x2), ... , An (xn)] \mid x \in X, y=f(x) \}$$

<u>Ejemplos</u>

Sean X e Y, ambos, el universo de los números naturales.

E1.- Función sumar 4: $y = f(x) = x + 4$:

$A = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5$;

$B = f(A) = 0.1/6 + 0.4/7 + 1/8 + 0.6/9$;

E2.-Función suma: $y = f(x1, x2) = x1 + x2$:

$A1 = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5$;

$A2 = 0.4/5 + 1/6$;

$B = f(A1, A2) = 0.1/7 + 0.4/8 + 0.4/9 + 1/10 + 0.6/11$;