

## **TEMA 2**

### Medición de las Funciones de pertenencia

- 1.-Planteamiento del problema
- 2.-Posibles interpretaciones posibles de la función de pertenencia
- 3.-Métodos de elicitación de la función de pertenencia

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Como implícitamente se recoge en todo lo dicho hasta ahora, trabajar con S.D. requiere:

1. Especificar con precisión el dominio  $X$ . ¿Cuál es el universo de los objetos bajo consideración? Podría ser un conjunto que se pueda enumerar con facilidad, como todos los países del mundo, o empresas que cotizan en Bolsa, o podría ser un conjunto, como el de todas las personas menores de 100, donde dicha lista no es práctica.
2. Asignación de grados de pertenencia a los objetos en los conjuntos borrosos en  $X$ . ¿Qué propiedades representan los conjuntos difusos? ¿Qué significa un grado de pertenencia?

Desde que Zadeh introdujo los Conjuntos Difusos una de las principales dificultades en el uso de este concepto está relacionada con el significado y la medición de las funciones de pertenencia.

Un Conjunto Difuso está totalmente caracterizado por su función de pertenencia y por ello establecer rigurosamente la semántica de la misma así como diseñar los métodos prácticos de obtención de las funciones de pertenencia se hace necesario.

Ahora bien, no ha habido consenso sobre el significado de las funciones de pertenencia, como consecuencia natural de que la Teoría de Conjuntos Difusos se ha empleado para

- 1) resolver problemas de muy diversa índole,
- 2) en contextos muy diferentes,
- 3) la apreciación de la vaguedad es una cuestión muy personal.

El objeto de este tema es presentar los modelos teóricos para las diversas interpretaciones, y los métodos de elicitación de Funciones de Pertenencia, pero hay que indicar que podemos encontrar autores que plantean versiones algo diferentes de lo que diremos a continuación.

## INTERPRETACIONES DE LA FUNCIÓN DE PERTENENCIA

- 1.- Formalista
- 2.- Probabilística
- 3.- Desde el punto de vista de la Teoría de la Decisión
- 4.- Desde el punto de vista de la Teoría Axiomática de la Medida

Las tres primeras interpretaciones son las más comunes en aplicaciones.

## INTERPRETACIÓN FORMALISTA

Se admite que los valores de pertenencia se asignan por medio de una función construida al efecto a partir de razonamientos abstractos.

Dicha función suele construirse a partir de la distancia a uno o más prototipos que pueden venir dados por una persona o por consenso entre varias.

Un hombre se supone que es calificable como alto a partir de 1.70 y que obviamente lo es por encima de 1.90.

Podemos entonces admitir  $M(e) = 0$  si  $e < 1.70$

$f(e)$  si  $1.70 \leq e \leq 1.90$

1 si  $e > 1.90$

$f$  creciente con  $f(1.70)=0$ ,  $f(1.90)=1$ .

Por tanto “Juan es alto con grado 0.7” significa que  $M(\text{estatura-Juan}) = 0.7$ .

## INTERPRETACIÓN PROBABILISTICA

La función de pertenencia se considera como una medida de regularidad en una cierta población que puede obtenerse mediante “encuestas” o “muestreos”.

Bajo esta interpretación la afirmación “Juan es alto con grado 0.7” puede verse de dos maneras distintas:

El 70% de una cierta población de encuestados califica a Juan como “alto”.

El 70% de una cierta población de encuestados describe el calificativo “alto” mediante un intervalo que contiene la estatura de Juan.

## INTERPRETACIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA DE LA DECISIÓN

En este enfoque el grado de pertenencia de  $x$  a  $A$  se asocia con una “recompensa” o “utilidad” que se recibe al establecer “ $x$  pertenece a  $A$ ”, relacionada con el grado de verdad de dicha proposición, es decir con nuestra credibilidad.

Bajo esta interpretación la afirmación “Juan es alto con grado 0.7” significa que se recibe una utilidad de 0.7 al decir que “Juan es alto”, utilidad que será nuestra credibilidad al establecer el calificativo “alto” para Juan.



## INTERPRETACIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA TEORÍA AXIOMÁTICA DE LA MEDIDA

Bajo este enfoque el grado de pertenencia es una medida (en sentido axiomático formal) de una propiedad de un cierto objeto.

En este caso la proposición “Juan es alto con grado 0.7” significa que cuando comparamos a Juan con otros resulta ser más alto que alguno de ellos (escala ordinal) y este hecho puede codificarse numéricamente con 0.7 en alguna escala.

Este enfoque es muy formal.

## MÉTODOS DE ELICITACIÓN DE LA FUNCIÓN DE PERTENENCIA

Existen diversos métodos para construir efectivamente la Función de Pertenencia que, por supuesto, están relacionados con la forma en que se interpreta la misma.

1. Construcción formalista a partir de prototipos,
2. Ejemplificación de la función de pertenencia,
3. Sondeo o encuesta,
4. Calificación directa,
5. Calificación inversa,
6. Estimación de Intervalos,
7. Comparación a pares.
8. Cluster difuso

## CONSTRUCCIÓN FORMALISTA A PARTIR DE PROTOTIPOS

Los valores de pertenencia se asignan por medio de una función construida al efecto a partir de razonamientos abstractos.

En muchos casos dicha función se construye a partir de la distancia a uno o varios prototipos. Estos pueden ser establecidos por una sola persona o por consenso entre varias.

Recordemos el ejemplo:

Un hombre se supone que es calificable como alto a partir de 1.70 y que obviamente lo es por encima de 1.90.

Podemos entonces admitir  $M(e) = 0$  si  $e < 1.70$

$$f(e) = (e - 1.70)/20 \text{ si } 1.70 \leq e \leq 1.90$$

$$1 \text{ si } e > 1.90$$

## EJEMPLIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE PERTENENCIA

Se hacen preguntas directas a personas más o menos expertas acerca del valor de pertenencia y a partir de ahí se estima la función de pertenencia.

¿Cuál es el grado de O en F?

¿Cuál es el grado de pertenencia de Juan al conjunto de los “hombres altos”?

¿Cuál es el grado de pertenencia del color C al conjunto de los “colores oscuros”?

## SONDEO O ENCUESTA

Se basa en las respuestas de un grupo de **N** “expertos”.

La pregunta tiene el formato siguiente:

“¿Puede O ser considerado compatible con el concepto A ?”.

Sólo se acepta un “SÍ” o un “NO”, de forma que:

$$A(O) = (\text{Respuestas Afirmativas}) / N.$$

¿Pertenece Juan al conjunto de los “hombres altos”?

¿Pertenece el color C al conjunto de los “colores oscuros”?

## CALIFICACIÓN DIRECTA

Se muestra a una persona (o un conjunto de personas) ejemplos de un concepto y se pide que los califique con un grado. A partir de estas calificaciones se estima la función de pertenencia.

Por ejemplo, para la estatura, un encuestador muestra a una persona diferentes individuos de distintas estaturas (sin que dicha persona conozca el valor real de la misma) y se le pide que califique con un grado la pertenencia a los conjuntos Bajo, Alto, etc.

A partir de las respuestas se estima la función de pertenencia de dichos conjuntos

## CALIFICACIÓN INVERSA

Se le pide a una persona (o conjunto de personas) que identifique objetos que cumplan un concepto con grado  $\alpha$  para distintos valores de  $\alpha$ . A partir de la muestra obtenida se estima la función de pertenencia.

Por ejemplo, para la estatura, un encuestador pide a una persona (o conjunto de personas) que identifique diferentes individuos que puedan ser calificados como “Alto” (sin que dicha persona conozca el valor real de su estatura) con un cierto grado  $\alpha$ . Variando  $\alpha$  y midiendo la estatura de los calificados en cada caso se estima  $\text{Alto}(\cdot)$ .

## ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

Es un método orientado a la medición de funciones de pertenencia para conjuntos difusos sobre dominios numéricos.

Sea “C” un concepto referido a una variable “V” con dominio en R. Se hace una encuesta preguntando en que intervalo debe estar V para ser considerar que cumple C.

A partir de la encuesta se estima la función de pertenencia del siguiente modo:  $C(x)$  será el porcentaje de encuestados que establecieron para C un intervalo que contenía a x.

$\text{Alto}(1.75) = 0.6$  si el 60% de los encuestados establecieron para “Alto” un intervalo conteniendo el valor 1.75.



## COMPARACIÓN A PARES

Es la forma que mejor se ajusta a las interpretaciones axiomáticas de la Teoría de la Medida.

Para un cierto concepto  $C$  se presenta a una persona (o personas) un conjunto de objetos  $\{O_i, i=1,2,\dots,N\}$  y se le pide que compare los objetos a pares en términos del cumplimiento de  $C$ , estimando además los grados de la diferencia de cumplimiento.

A partir de la matriz que se genera de este modo se estima la función de pertenencia del concepto  $C$  con técnicas apropiadas.

## TECNICAS CLUSTER

Esta muy orientado a variables con dominio numérico.

Se toma un conjunto de objetos y sobre él se mide el valor de una variable de interés.

Sea  $V=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$  el conjunto de medidas.

Aplicando una técnica como el fuzzy C-mean sobre  $V$  podemos agrupar las medidas en  $C$  clases, cada una de las cuales identifica una propiedad difusa relativa a la variable sobre el conjunto de objetos.

Volveremos sobre el tema cuando hablemos de variables lingüísticas.

## NOTAS FINALES

Comparación entre los distintos métodos

Dependencia del contexto

Discreto vs. Continuo. Interpolación