Universidad Nacional de San Juan

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica
y Automática

"INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL
Y
MODELO MATEMÁTICO PARA SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO."

Cátedra: Control I.
Carreras: Ingeniería Electrónica y Bioingeniería.

Autores: Ing. Mario Alberto Perez.
Ing. Analía Perez Hidalgo.
Bioing. Elisa Perez Berenguer.

Año: 2008

1- INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL.

1.1- Importancia del Control Automático.

Los controles automáticos tienen una intervención cada vez más importante en la vida diaria, desde los simples controles que hacen funcionar un tostador automático hasta los complicados sistemas de control necesarios en vehículos espaciales, en guiado de proyectiles, sistemas de pilotajes de aviones, etc. Además el control automático se ha convertido en parte importante e integral de los procesos de manufactura e industriales modernos. Por ejemplo el control automático resulta esencial en operaciones industriales como el control de presión, temperatura, humedad, viscosidad y flujo en las industrias de procesos, maquinado manejo y armado de piezas mecánicas en las industrias de fabricación, entre muchas otras.

En la actualidad en las modernas fábricas e instalaciones industriales, se hace cada día más necesario de disponer de sistemas de control o de mando, que permitan mejorar y optimizar una gran cantidad de procesos, en donde la sola presencia del hombre es insuficiente para gobernarlos. La industria espacial y de la aviación, petroquímica, papelera, textil, del cemento, etc. son algunos ejemplos de lugares en donde se necesitan sistemas de control, cuya complejidad ha traído como consecuencia el desarrollo de técnicas dirigidas a su proyecto y construcción.

El control automático ha jugado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. Como los avances en la teoría y práctica del control automático brindan los medios para lograr el funcionamiento óptimo de sistemas dinámicos, mejorar la calidad y abaratar los costos de producción, liberar de la complejidad de muchas rutinas de tareas manuales respectivas, etc; la mayoría de los ingenieros tienen contacto con los sistemas de control, aún cuando únicamente los usen, sin profundizar en su teoría.

Los sistemas de control son sistemas dinámicos y un conocimiento de la teoría de control proporcionará una base para entender el comportamiento de tales sistemas, por ejemplo, muchos conceptos de la teoría de control pueden usarse en la solución de problemas de vibración. En este sentido, la teoría de control automático no es sino una pequeña parte de una teoría más general que estudia el comportamiento de todos los sistemas dinámicos.

En todos los sistemas de control se usan con frecuencia componentes de distintos tipos, por ejemplo, componentes mecánicos, eléctricos, hidráulicos, neumáticos y combinaciones de estos. Un ingeniero que trabaje con control debe estar familiarizado con las leyes físicas fundamentales que rigen estos componentes. Sin embargo, en muchos casos y principalmente entre los ingenieros, los fundamentos existen como conceptos aislados con muy pocos lazos de unión entre ellos. El estudio de los controles automáticos puede ser de gran ayuda para establecer lazos de unión entre los diferentes campos de estudio haciendo que los distintos conceptos se usen en un problema común de control.

El estudio de los controles automáticos es importante debido a que proporciona una comprensión básica de todos los sistemas dinámicos, así como una mejor apreciación y utilización de las leyes fundamentales de la naturaleza.

1.2- Fundamento Histórico.

Uno de los primeros sistemas de control fue el dispositivo de Herón para la apertura de puertas en un templo en el siglo primero, como se visualiza en la Fig. 1. La señal de mando del sistema fue el encendido del fuego, el aire se calienta, dilatándose y produce el traslado del agua de un tanque de depósito a una cuba. Al aumentar la cuba de peso, desciende y abre la puerta del altar por medio de una cuerda, dando lugar a la subida de un contrapeso; la puerta puede cerrarse apagando o atenuando el fuego. Al enfriarse el aire en el recipiente y reducirse su presión, el agua de la cuba por efecto sifón, vuelve al depósito; así la cuba se hace más liviana y al ser mayor el contrapeso se cierra la puerta. Esto tiene lugar siempre que la cuba esté más alta que el depósito.

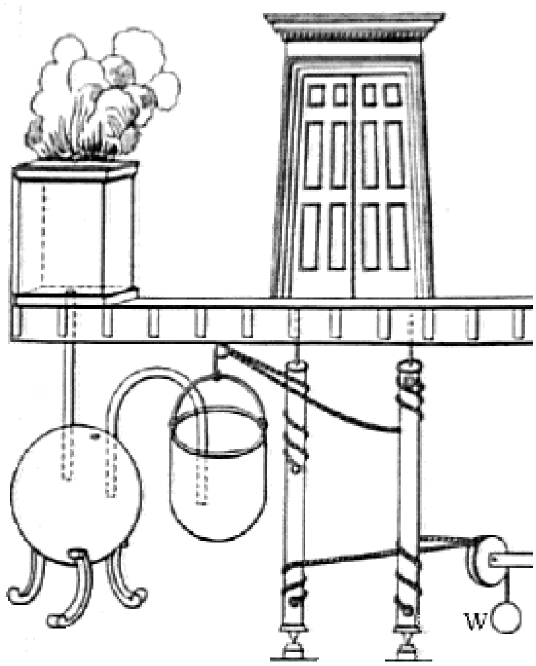


Figura 1. Puerta de Heron.

El primer trabajo significativo en control automático fue el regulador centrífugo de James Watt desarrollado en 1778, para el control de velocidad de una máquina de vapor, la Fig 2 muestra el dispositivo.

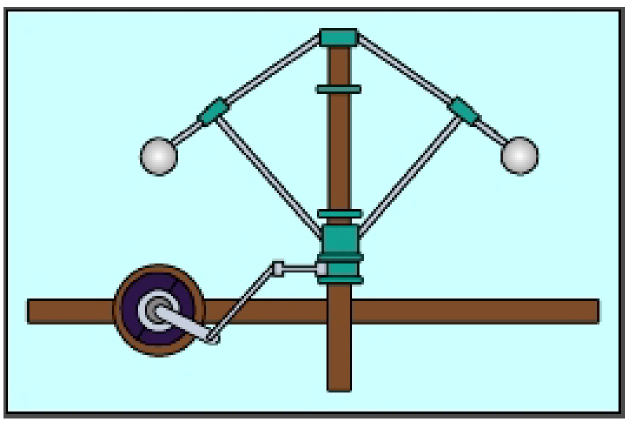


Figura 2. Regulador Centrífugo.

Otras etapas relevantes en el del desarrollo de la teoría de control son debidas a Minorsky, Hazen y Nyquist entre muchos otros.

En 1922 Minorsky trabajó en centrales automáticas de dirección en barcos y mostró como se podía determinar la estabilidad a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932 **Nyquist** desarrolló un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de los sistemas de lazo cerrado sobre la base de la respuesta de lazo abierto con excitación senoidal en régimen permanente. En 1934, fecha de mucha importancia para los sistemas de control automático, es cuando Hazen publica el artículo “Teoría de Servomecanismos”, relacionado con dispositivos de control de posición, marcando el principio de esta nueva actividad, el nombre empleado para describir tales mecanismos proviene de las palabras siervo y mecanismo, así la palabra servomecanismo significa un mecanismo esclavo o servidor. Es interesante hacer notar que apareció en el mismo año un importante artículo de Black sobre amplificadores realimentados. Durante los siguientes seis años se realizaron menos estudios básicos. Debido al sigilo impuesto por la segunda guerra mundial, los avances conseguidos durante el período 1940 a1945 quedaron ocultos demorándose así el rápido progreso de este campo. Desde la supresión del secreto militar, en 1945, se ha hecho un rápido progreso en esta ciencia; se han escrito libros y millares de artículos, así como la aplicación de los sistemas de control en los campos industrial y militar ha sido extensiva.

Los métodos de respuesta en frecuencia posibilitaron a los ingenieros el diseño de sistemas de control lineales realimentados que satisfacían las necesidades de los comportamientos de los mismos. También el desarrollo del método del lugar de las raíces posibilitó rápidos avances en el estudio de los sistemas de control.

Los métodos de respuesta de frecuencia y del lugar de las raíces que son el corazón de la teoría de control clásica, llevan a sistemas que son estables y que satisfacen un conjunto de requerimientos de funcionamiento más o menos arbitrarios. Estos sistemas, en general, no son óptimos en ningún sentido significativo. Desde fines de la década del 50, se orientó el énfasis en el proyecto de diseño de sistemas óptimos en algún sentido determinado.

Como las plantas modernas con muchas entradas y salidas se van haciendo cada vez más complejas, la descripción de un sistema moderno de control requiere una gran cantidad de ecuaciones.

La teoría del control clásica que trata de sistemas de entrada y salida únicas se vuelve obsoleta ante sistemas de múltiples entradas y salidas. Desde aproximadamente 1960 se ha desarrollado la teoría del control moderna para afrontar la creciente complejidad de las plantas modernas y las necesidades rigurosas en exactitud, peso, costo en aplicaciones militares, espaciales e industriales.

El uso de computadoras digitales cada vez más potentes, de menor costo, y fácil disponibilidad se ha convertido en una práctica habitual para la realización de cálculos complejos y la implementación de algoritmos de control en el proyecto de sistemas de control.

Los desarrollos más recientes en la teoría de control moderna se hallan orientados en la dirección del control óptimo de sistemas tanto determinísticos como estocásticos, así como en sistemas de control moderno a campos no ingenieriles como la biología, economía y sociología.

1.3- El Concepto de Control.

De una manera informal, el problema de control consiste en seleccionar, de un conjunto específico o arbitrario de elementos (o parámetros, configuraciones, funciones, etc), aquellos que aplicados a un sistema fijo, hagan que este se comporte de una manera predeterminada. Así un problema de control es seleccionar el punto de apoyo de la palanca de un regulador de nivel como se ve en la Fig. 3, para que la altura del líquido en el recipiente se mantenga constante a pesar de las variaciones del caudal de salida.

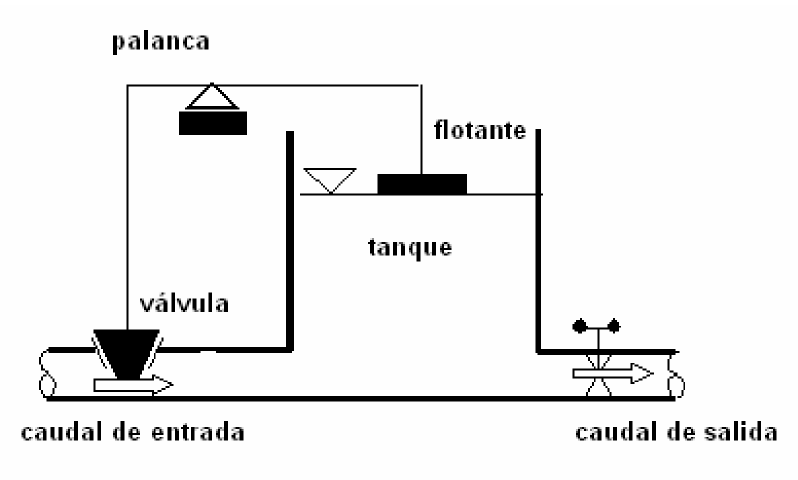


Figura 3. Regulador de Nivel.

Otro problema de control es el siguiente: un inversionista posee cierta cantidad de dinero al principio del año y desea colocarla en el mercado de valores. Suponiendo que el inversionista no puede solicitar préstamos y que su única fuente de información son las cotizaciones que se publican en la sección financiera del periódico, ¿cuál debe ser su política de inversión para tener mayor capital posible al finalizar el año?

Un tercer problema de control es el que se plantea a continuación: la constitución del torrente de salida de un reactor químico depende de la temperatura y la composición del flujo de entrada, ¿cómo debe variarse dicha temperatura para obtener una máxima conversión a cierto producto de salida que presente una composición óptima?

A pesar de que las disciplinas bajo las cuales sería necesario analizar los problemas anteriores son diferentes, muestran tres elementos en común:

Uno que se puede modificar: se denomina entrada.
Otro llamado salida, que se desea que tenga ciertas características.
Un tercero denominado planta, que relaciona la entrada con la salida y que no puede ser modificado.

PROBLEMA	ENTRADA	SALIDA	PLANTA
Control de Nivel	Localización del puente de apoyo	Variaciones en el nivel de líquido.	Relaciones mecánicas del sistema
Inversionista	Cantidad de acciones a comprar y vender en cierta fecha	Cantidad de efectivo al finalizar el año	Mecanismo de la bolsa de valores.
Reactor Químico	Temperatura del Flujo de alimentación.	Composición química del torrente de salida	Relaciones de balance y cinética del reactor.

Figura 4. Entradas y salidas de diferentes problemas de Control.

En la Fig.5 se ve la representación esquemática de un sistema.

Figura 5. Esquema de un Sistema.

Entonces podemos decir que el problema de control consiste en seleccionar, para un sistema dado, una entrada que haga responder a la planta de una manera deseada; esto es, que se obtenga una salida con cierta característica. En la tabla 1 se visualizan las diferentes entradas y salidas para los diferentes problemas de Control. En el primer ejemplo sería mantener invariable el nivel del líquido; en el segundo, sería obtener el máximo capital al finalizar el año; en el tercer ejemplo; se pretende obtener la máxima conversión a un producto determinado.

1.4- Definiciones.

A continuación se define la terminología necesaria para introducirnos en la teoría de control automático. Estas definiciones están basadas, en parte, en las propuestas de normas de la IEEE. Las variaciones en las definiciones dadas a continuación respecto a las normalizadas obedecen a la necesidad de emplearlas en los temas de introducción general.

Planta: se designará como planta a cualquier objeto físico que pueda ser controlado. Puede ser un equipo, quizás simplemente un juego de piezas de una máquina funcionando juntas, cuyo objetivo es realizar una operación determinada. Ejemplos de plantas son: horno de calentamiento, reactor químico, etc.

Proceso: se definirá como una operación o conjuntos de pasos con una secuencia determinada, que producen una serie de cambios graduales que llevan de un estado a otro, y que tienden a un determinado resultado final. Se denominará proceso a cualquier operación que se vaya a controlar. Ejemplos de procesos son: químicos, económicos, biológicos, etc.

Sistema: de forma más general, podemos definir a un sistema como un arreglo, conjunto o combinación de cosas conectadas o relacionadas de manera que constituyen un todo.
De forma científica podemos definirlo como un arreglo de componentes físicos conectados o relacionados de tal manera que formen una unidad completa o que puedan actuar como tal; en otras palabras: Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente, con un determinado objetivo a cumplir.

Cómo puede observarse el término sistema no está aplicado únicamente a objetivos físicos, el concepto de sistema puede ser aplicado a fenómenos abstractos y dinámicos como por ejemplo la economía. Por tanto cuando se hable de sistemas implicará referirse a fenómenos físicos, biológicos, económicos, sociológicos, etc.

La planta junto con el proceso, conforman un sistema.

Control: esta palabra se usa para designar regulación, gobierno, dirección o comando.

Sistema de control: es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que el arreglo pueda comandar, dirigir o regular, asimismo o a otro sistema. Estos sistemas comandan dirigen o controlan dinámicamente.

Entrada de un sistema: Es una variable del sistema elegida de tal manera que se la utiliza como excitación del mismo.

Salida de un sistema: Es una variable del sistema elegida de tal modo que se la utiliza para analizar los efectos que produjo una excitación en la entrada del mismo.

Entrada de un sistema de control: Es una variable del sistema controlado que se elige de modo tal que mediante su manipulación se logra que el sistema cumpla un objetivo determinado.
Las variables de entrada, son variables que ingresan al sistema y no dependen de ninguna otra variable interna del mismo.

No solo la señal de referencia (valor deseado de la salida del sistema) conforma una variable de entrada, también hay ciertas señales indeseadas, como son algunas perturbaciones externas, que se generan fuera del sistema y actúan sobre la planta, afectando desfavorablemente la salida del sistema, comportándose también como una variable de entrada, cuyo valor no dependen de ninguna otra variable interna al sistema.

Salida de un sistema de control: Es una variable del sistema controlado que se elige de modo tal que mediante su estudio se analiza si el sistema cumple o no con los objetivos propuestos. Se verá más adelante que en los sistemas realimentados esta señal de salida contribuye a realizar el control propuesto.

Realimentación: es una propiedad de los sistemas que permiten que la salida del sistema o cualquier variable del mismo sea comparada con la entrada al sistema o con cualquier componente del sistema, de tal manera que pueda establecerse la acción de control apropiada entre la entrada y la salida.

En general, se dice que la realimentación existe en un sistema cuando hay una secuencia cerrada de relaciones causa-efecto entre las variables de un sistema. Este concepto de realimentación juega un papel muy importante en ingeniería de control. Aunque el término parece tener un significado muy sencillo, es bastante difícil encontrar una definición precisa para él. La existencia de realimentación en los sistemas físicos es difícil de demostrar, en cambio cuando deliberadamente se introduce realimentación con el afán de controlar su existencia y su función se identifica más fácilmente.

En consecuencia, se interpretará que existe una realimentación, cuando se presenta una secuencia cerrada de relaciones causa-efecto entre las variables de un sistema.

Existen dos tipos de realimentación, la forma de cómo se comparan las dos variables que dan lugar a la misma, permite que se pueda hablar de realimentación positiva o negativa.

Realimentación positiva: cuando ambas variables comparadas son de igual signo.
Realimentación negativa: cuando ambas variables comparadas son de signo contrario.

En control se usa y aplica la **realimentación negativa.** Un sistema realimentado negativamente modifica las propiedades y características del sistema sin realimentar.

Los rasgos más importantes que la realimentación negativa impone a un sistema son:

- Aumento de la exactitud.
- Se reducen los efectos de no linealidad y distorsión.
- Aumenta el ancho de banda del sistema.
- Disminuye la ganancia del sistema.
- El sistema tiende a ser menos estable.

Todas estas características pueden ser demostradas matemáticamente y se explicaran en secciones posteriores cuando se dan las diferencias entre Sistemas de Control de Lazo Abierto y Sistemas de Control de Lazo Cerrado.

Perturbaciones: es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema. Si lo perturbación se genera dentro del sistema se la denomina interna, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema. Las perturbaciones actúan sobre un sistema modificando, su funcionamiento por lo que su presencia implica la necesidad de control.
Normalmente las perturbaciones actúan sobre un sistema aleatoriamente.

Control de Realimentación: es una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir las diferencias entre la salida y la entrada del sistema-, y lo hace sobre la base de esta diferencia, la cual se denomina señal de error.

Cuando se utiliza control de realimentación se considera perturbación a aquellas que tienen carácter aleatorio (no previsible), porque las perturbaciones que pueden ser predichas siempre se puede incluir una compensación dentro del sistema de modo que sea innecesario el control.

Sistema de control realimentado: es aquel que tiende, a mantener una relación preestablecida entre la salida y la entrada de referencia, comparando ambas y utilizando la diferencia como variable de control.

Es de notar que los sistemas de control realimentado no están limitados al campo de la ingeniería sino que se los puede encontrar en áreas ajenas a la misma, como la economía y la psicología. Por ejemplo, el organismo humano, en un aspecto es análogo a una planta química compleja con una enorme variedad de operaciones unitarias. El control de procesos de esta red de transporte y reacciones químicas involucra una variedad de lazos de control. De hecho, el organismo humano es un sistema de control realimentado extremadamente complejo.

1.5- Fundamentos Matemáticos.

Los primeros estudios de sistema de control se basaban en la solución de ecuaciones diferenciales por los medios clásicos. Salvo en los casos simples, el análisis en este camino es pesado y no indica fácilmente que cambios deben hacerse para mejorar el comportamiento del sistema. El empleo de la transformada de Laplace simplifica algo este análisis. El artículo de Nyquist, publicado en 1932 trata de la aplicación de los cálculos en el proyecto de amplificadores realimentados basados en la respuesta frecuencial en régimen permanente. Este trabajo fue ampliado por Black.y Bode. Hall y Harris aplicando entonces éste estudio de respuesta frecuencial a los sistemas realimentados aumentaron considerablemente el valor de la teoría de control como disciplina nueva. Otro avance se logró en 1948 cuando Evans presentó su teoría del lugar de las raíces. Esta teoría ofrece una visión gráfica de las propiedades de estabilidad de un sistema y permite el cálculo gráfico de la respuesta frecuencial.

En las diversas fases del análisis lineal presentado en el estudio que se realizará se emplean modelos matemáticos. Una vez, descrito un sistema físico por un juego de ecuaciones matemáticas, estas se transforman para lograr un determinado modelo matemático y, una vez logrado esto, es independiente la manera de analizarlo, tanto si el sistema es de naturaleza eléctrica, mecánica o de cualquier otra.

Esta técnica permite al proyectista establecer similitudes con casos vistos en su experiencia anterior. El interesado deberá tener en cuenta, al pasar por las diferentes fases del análisis que se presentará a continuación, que no se intenta el empleo de un aspecto con exclusión de los demás. Según los factores conocidos y la simplicidad o complejidad del problema de control tratado, un proyectista puede hacer uso de uno o varios métodos de aná1isis aislados o combinados entre sí. Al adquirirse experiencia en el campo del problema de control por realimentación se adquiere la facultad de apreciar mejor las ventajas de cada método. El empleo de computadoras ayuda enormemente al proyectista en sus problemas de síntesis de un problema de control.

1.6- Control de Lazo Abierto y Control de Lazo Cerrado.

Primero se han de definir los sistemas de control de lazo abierto y de lazo cerrado, luego se ha de realizar una comparación entre ambos tipos.

1.6.1- Control de Lazo Abierto.

Es decir, en un sistema de control de lazo abierto **la salida ni se mide ni se realimenta para compararla con la entrada**. Los sistemas de control de lazo abierto son sistemas de control en los que **la salida no tiene efecto sobre la señal o acción de control**. La Fig. 6 muestra la forma de como se implementa un sistema de control de este tipo.

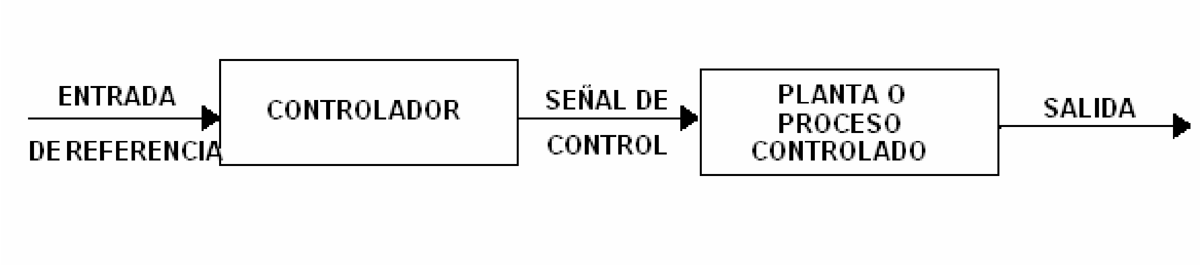


Figura 6. Sistema de Control de Lazo Abierto

Los elementos de un sistema de control en lazo abierto, se pueden dividir en dos partes: el controlador, y el proceso controlado. Una señal de entrada o comando se aplica al controlador, cuya salida actúa como una señal de control o señal actuante, la cual regula el proceso controlado, de tal forma que la variable de salida o variable controlada se desempeñe de acuerdo a ciertas especificaciones o estándares establecidos. En los casos simples, el controlador puede ser un amplificador, filtro, unión mecánica u otro elemento de control. En los casos más complejos puede ser una computadora tal como un microprocesador.

En los sistemas de control de lazo abierto, **no se compara la salida con la entrada de referencia.** Por lo tanto, para cada entrada de referencia corresponde una condición de operación fijada.

Así la exactitud del sistema depende de la **calibración.** Calibrar significa establecer una relación entre la entrada y la salida con el fin de obtener del sistema la exactitud deseada. Así la exactitud del sistema depende de la calibración. Hay que hacer notar que cualquier sistema de control que actúa sobre una base de control de tiempo (temporizador), es un sistema de lazo abierto.

Los sistemas de lazo abierto son económicos pero normalmente inexactos. Un sistema de control de lazo abierto es insensible a las perturbaciones; por consiguiente un sistema de control de este tipo es útil cuando se tiene la seguridad que no existen perturbaciones actuando sobre el mismo. En la práctica solo se puede usar el control de lazo abierto si la relación entre la entrada y la salida es conocida, y si no hay perturbaciones internas ni externas importantes.

De lo dicho anteriormente no deberá concluirse que los sistemas de control de lazo abierto sean ineficaces. Debido a la simplicidad y economía se los utiliza en muchas aplicaciones no críticas.

Existen muchos sistemas de lazo abierto que cumplen una función útil. Las máquinas automáticas para lavado de ropa son un ejemplo conveniente de un dispositivo con controles de lazo abierto. Las variables de entrada y salida son el grado de suciedad con que entra la ropa y el grado de limpieza con que sale respectivamente. Para efectuar el lavado se programan una serie de operaciones de tiempo fijo (lavado, enjuague, centrifugado, etc.) que son la calibración de la máquina. Una vez transcurridas todas las operaciones, la lavadora automática entrega la ropa con un cierto grado de limpieza, sin comparar esta variable de salida con la variable de entrada. Sin embargo si un operador maneja la máquina de modo, que repite las operaciones de lavado hasta conseguir un grado de limpieza de la ropa prefijado, el sistema ya no es más de lazo abierto.

Otro ejemplo de sistema de control de lazo abierto es el sistema de control de tránsito mediante semáforos, el buen funcionamiento de este sistema de control depende exclusivamente de la calibración del mismo (tiempos que tienen que estar encendidas las luces rojas y verdes) lo que se hace en base al estudio de circulación de volumen de vehículos por las vías de circulación.

1.6.2- Sistemas de Control de Lazo Cerrado.

En los sistemas de control de lazo cerrado, la salida o señal controlada, debe ser realimentada y comparada con la entrada de referencia, y se debe enviar una señal actuante o acción de control, proporcional a la diferencia entre la entrada y la salida a través del sistema, para disminuir el error y corregir la salida.

Un sistema de control de lazo cerrado es aquel en el que la **señal de salida tiene efecto directo sobre la acción de control**. Esto es, los sistemas de control de lazo cerrado son sistemas de control realimentados. La diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida se la denomina señal de error del sistema; esta señal es la que actúa sobre el sistema de modo de llevar la salida a un valor deseado. En otras palabras el término lazo cerrado implica el uso de acción de realimentación negativa para reducir el error del sistema.
La Fig. 7 muestra la relación entrada-salida de un sistema de control de lazo cerrado.

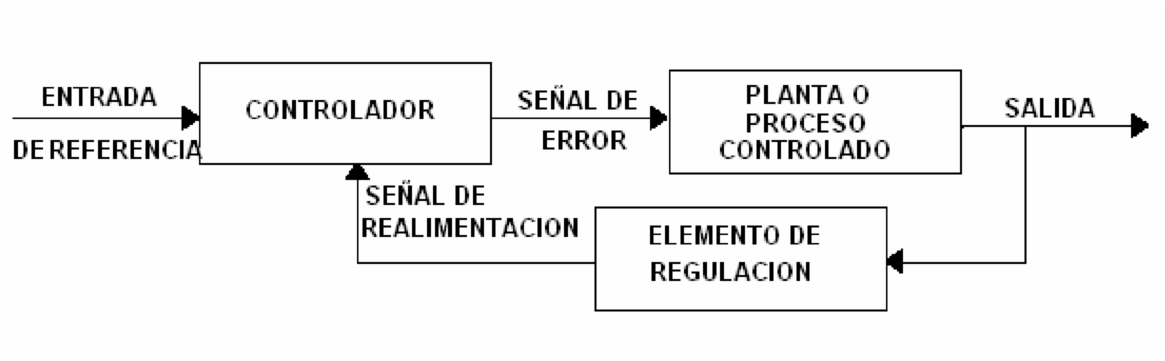


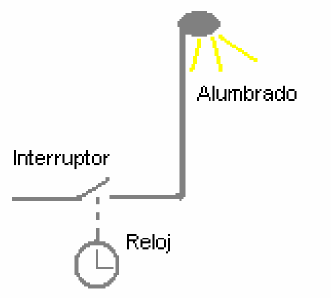
Figura 7. Sistema de Control de Lazo cerrado.

Para ilustrar más claramente el concepto de lazo cerrado se consideraron una serie de ejemplos.
<u>Ejemplo 1</u>. Alumbrado Público.

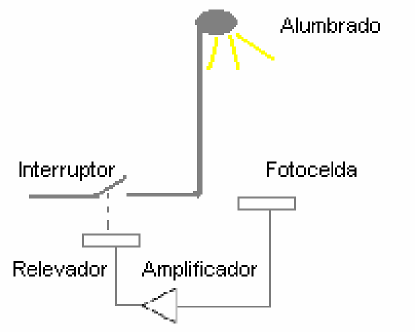
El objetivo del alumbrado público es mantener un nivel mínimo de iluminación en las calles, al menor costo. Para lograr este objetivo se pueden proponer dos soluciones: la primera consiste en encender los focos del alumbrado a la hora en que comúnmente empieza a oscurecer, y apagarlos al amanecer. Así, pues se puede decidir encender el alumbrado a las 20 hs y apagarlo a las 6:30 hs. En este sistema, la entrada (cambio de posición del interruptor) es independiente de la salida (cantidad de luz en la calle). Este mecanismo, simple y económico de llevar a cabo, puede acarrear dificultades, ya que la hora en que empieza a aclarar, varían de acuerdo con las estaciones del año, además, en días nublados se puede tener una oscuridad indeseable.

La otra solución, más efectiva, consiste en instalar un dispositivo (fotocelda, fototransistor, etc) para detectar la cantidad de iluminación y de acuerdo con esto, encender o apagar el alumbrado público. En este caso, la entrada (cantidad óptima de luz en las calles) se compararía con la salida (cantidad de luz real en las calles) a los efectos de que la señal de error generada accione o no el interruptor de luz.

En la Fig. 8 se muestran ambas soluciones.



a



b

Figura 8. Alumbrado Público a) Primera Solución, b) Segunda Solución

El diagrama de bloques que se presenta en la Fig. 9 sería para el caso de control realimentado de lazo cerrado.

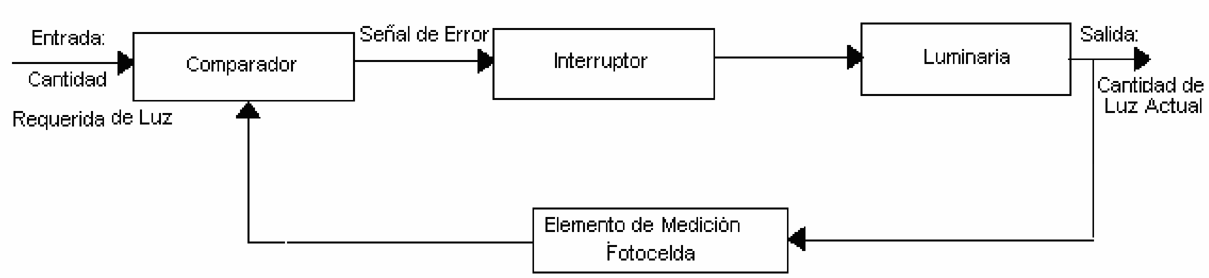
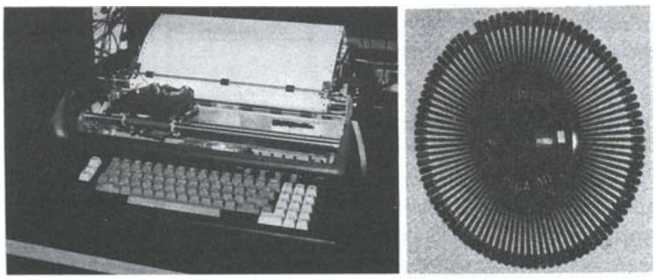


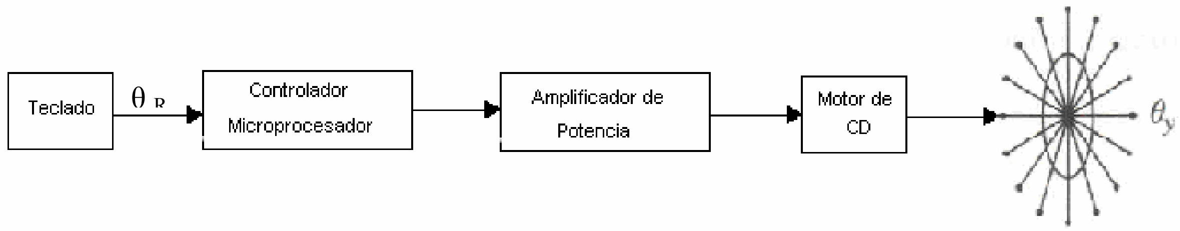
Figura 9. Diagrama en Bloques de Alumbrado Público

<u>Ejemplo 2</u>. Sistema de Control de una Rueda de Impresión (margarita)

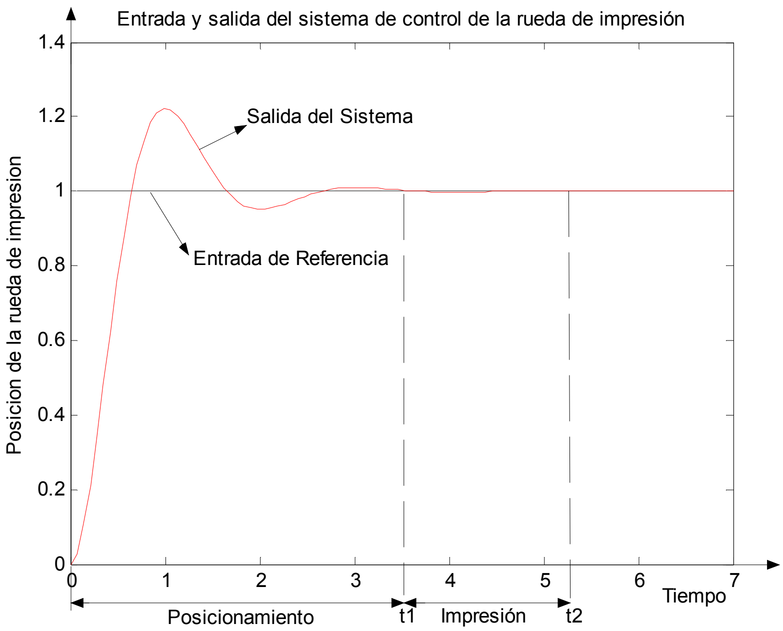
En la Fig. 10 b) se muestra un ejemplo del sistema de control de una rueda de impresión (margarita) de un procesador de textos o una máquina de escribir electrónica. La margarita, que típicamente tiene 96 o 100 caracteres, se mueve a la posición donde se encuentra el carácter deseado para colocarlo frente al martillo para la impresión por impacto. La selección del caracter se realiza en la forma usual mediante el teclado. Cada vez que alguna tecla se presiona, un microprocesador de control calcula la dirección y la distancia a recorrer y envía la señal lógica de control al amplificador de potencia, que controla el motor que a su vez maneja la margarita. En la práctica, las señales de control generadas por el microprocesador de control deben ser capaces de mover la margarita de una posición a otra lo suficientemente rápido y con una alta calidad de impresión, lo cual significa que la posición de la margarita debe ser controlada con exactitud. También se muestra un conjunto típico de entradas y salidas para este sistema. Cuando se proporciona la entrada de referencia, la señal se representa como un escalón. Como las bobinas eléctricas del motor tienen inductancia y las cargas mecánicas tienen inercia, la margarita no puede responder a la entrada en forma instantánea. Típicamente, la margarita sigue la respuesta que se muestra, y se establece en la nueva posición después de un tiempo t_1. La impresión no debe comenzar hasta que la margarita haya alcanzado el alto total, si no, el caracter será embarrado. Luego se muestra que después que la margarita se ha detenido, el periodo de t_1 a t_2 está reservado para la impresión, de tal forma que el sistema esté listo para recibir un nuevo comando después del tiempo t_2.



a)



b)



c)

Figura 10. a) Figura de la Rueda de Impresión. b) Diagrama en Bloques del Sistema de Control de la Rueda Impresión. θ_r c) Entrada y Salida Típica del Sistema de Impresión.

En la Fig.11 se muestra un sistema de control de una rueda de impresión (margarita) con realimentación. En este caso la posición de la margarita se establece mediante un detector de posición cuya salida se compara con la posición deseada alimentada desde el teclado y procesada por el microprocesador. Por tanto, el motor es controlado para colocar la rueda de impresión en la posición deseada en una forma exacta. La información de la velocidad de la margarita se puede procesar en el microprocesador a partir del dato de posición de tal forma que el perfil de movimiento de la margarita se pueda controlar de una mejor forma.

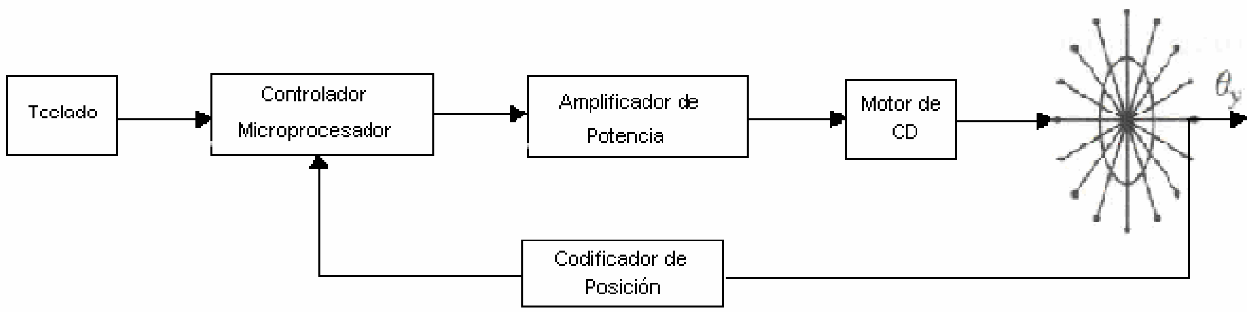


Figura 11. Sistema de Control de una Rueda de Impresión en Lazo Cerrado..

1.6.3- ¿Que es la realimentación y cuáles son sus efectos?

El motivo de utilizar realimentación, ilustrado en los ejemplos anteriores es de alguna forma muy simplificada. En estos ejemplos, el uso de la realimentación es para reducir el error entre la entrada de referencia y la salida del sistema. Sin embargo, el significado de los efectos de la realimentación en sistemas de control es más amplio. La reducción del error es solo uno de los efectos más importantes que la realimentación realiza en los sistemas. Pero se verá que la realimentación también tiene efectos en características del desempeño del sistema como la **estabilidad, ancho de banda, ganancia global, perturbaciones y sensibilidad.**

Para entender los efectos de la realimentación sobre un sistema de control, es esencial examinar el fenómeno en el sentido más amplio. **En general, se puede establecer que cuando una secuencia cerrada de relaciones causa-efecto existe entre variables de un sistema, se dice que existe realimentación.** Esta definición general permite que numerosos sistemas, con o sin realimentación, sean estudiados en una forma sistemática una vez que la existencia de la realimentación en el sentido anteriormente definido es establecida.

Se considera el sistema realimentado con una configuración sencilla de la Fig. 12. Donde *r,* es la señal de entrada, *y,* la señal de salida, *e,* el error y *b,* la señal de realimentación. Los bloques G y H se pueden considerar como ganancias constantes.

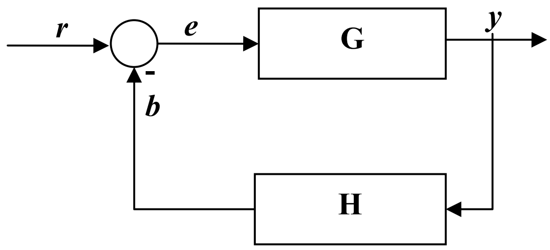


Figura 12. Sistema de Control Realimentado.

Mediante manipulación algebraica simple, es fácil mostrar la relación entrada-salida del sistema, la misma es:

$$e = r - b \tag{1}$$

$$b = y * H \tag{2}$$

$$y = e * G \tag{3}$$

Despejando de la Ec. (3) la señal de error y reemplazando la ecuación resultante en la Ec (2), luego si reemplazamos la Ec. (2) y (3) en la Ec. (1) obtenemos una ecuación solo en función de las variables de entrada y salida del sistema:

$$\frac{y}{G} = r - y * H \tag{4}$$

Agrupando en un solo término la variable *y,* y sacando factor común obtenemos:

$$y\left(\frac{1+GH}{G}\right) = r \tag{5}$$

Colocando la ecuación anterior en una forma convenientemente de manera que exprese la relación de la variable de salida sobre la variable de entrada, se obtiene:

$$M = \frac{y}{r} = \frac{G}{1+GH} \qquad (6)$$

Ahora analizaremos algunos efectos significativos de la realimentación:

- **<u>Efecto de la realimentación en la ganancia global:</u>** Como se observa en la Ec. (6) la realimentación afecta la ganancia G de un sistema no realimentado por un factor de 1/(1+GH). El efecto general de la realimentación es que puede aumentar o disminuir la ganancia G.
  Como G y H son funciones de la frecuencia, la magnitud de (1+G.H) puede ser mayor que uno en un intervalo de frecuencia o menor que uno en otro. En consecuencia:
  <u>Conclusión:</u> La realimentación puede incrementar la ganancia del sistema en un intervalo de frecuencia, pero reducirlas en otro.
- **<u>Efecto de la realimentación en la estabilidad:</u>** La estabilidad es una característica que describe si un sistema es capaz de seguir el comando de entrada, o en general si dicho sistema es útil. Un sistema se dice estable, si al verse sometido a una excitación, responde sin que su salida diverja sin límites de su entrada. Por el contrario, un sistema es inestable si su salida sale fuera de control y nunca llega a un valor útil de estado estacionario en un tiempo razonable. La realimentación es un arma de doble filo, cuando no se usa adecuadamente puede ocasionar serios problemas: Por ejemplo, si observamos el denominador de la Ec. (6), si GH = -1, la salida del sistema es infinita para cualquier entrada finita y el sistema se dice **inestable**. Por lo tanto la realimentación puede ocasionar que un sistema que es originalmente estable, se convierta en inestable, o viceversa, siempre y cuando se realice la manipulación correcta de la misma.
  <u>Conclusión</u>: La realimentación puede mejorar la estabilidad o ser perjudicial para la misma.

- **<u>Efecto de la realimentación en la sensibilidad</u>:** Las consideraciones sobre sensibilidad son importantes en el diseño de sistemas de control. Ya que todos los elementos físicos tienen propiedades que cambian con el tiempo y con las condiciones ambientales, no se pueden considerar a los parámetros de un sistema de control como completamente estacionarios durante la vida de operación del sistema.
  Un sistema de control **robusto**, es un sistema que es **insensible** a las **variaciones de los parámetros.** En general, un **buen sistema de control debe ser robusto, es decir insensible a la variación de los parámetros, pero sensible a los comandos de la entrada.** Se mostrará, qué efectos tiene la realimentación sobre la sensibilidad a la variación de los parámetros. Consideramos a G como la ganancia de los parámetros, la cual puede variar. La sensibilidad de la ganancia del sistema total, M, con respecto a la variación de G se define como:

$$S_G^M = \frac{\partial M/M}{\partial G/G} = \frac{porcentaje\,de\,cambio\,en\,M}{porcentaje\,de\,cambio\,en\,G}$$

  en donde ∂M denota el cambio incremental en M debido al cambio incremental en G, ∂G. Utilizando la Ec (6), la función sensibilidad se escribe de la siguiente manera:

$$S_G^M = \frac{\partial M}{\partial G}\frac{G}{M} = \frac{1}{1+GH} \qquad (7)$$

La relación muestra que si *GH* es una constante positiva, la magnitud de la función de sensibilidad se puede disminuir incrementando *GH*, mientras el sistema permanezca estable. Pero como la magnitud de 1+ GH es función de la frecuencia, podría ser menor que uno para algunas frecuencias, por lo tanto en algunos casos, la realimentación puede aumentar la sensibilidad del sistema.
Conclusión: La realimentación puede incrementar o reducir la sensibilidad de un sistema.

- **Efecto de la realimentación sobre perturbaciones externas o ruido:** Todos los sistemas físicos están sujetos a algunos tipos de señales exógenas o ruido durante su operación. Ejemplos de estas señales son el voltaje de ruido térmico en circuitos electrónicos y el ruido de conmutación en motores eléctricos. Por lo tanto, en el diseño de sistemas de control, se deben dar consideraciones para que el sistema sea insensible al ruido y perturbaciones externas y sensibles a los comandos de entrada.
El efecto de la realimentación sobre el ruido y perturbaciones depende grandemente de en qué parte del sistema ocurren las señales exógenas. No se pueden obtener conclusiones generales, pero en muchas situaciones, la realimentación puede reducir los efectos del ruido y las perturbaciones en el desempeño del sistema. En referencia al sistema de la Fig. 13, en la que *r* denota la señal de comando y *p* es la señal de ruido, en ausencia de realimentación, $H = 0$, la salida *y* debida a *p* actuando sola es:

$$y = G_2 p \qquad (8)$$

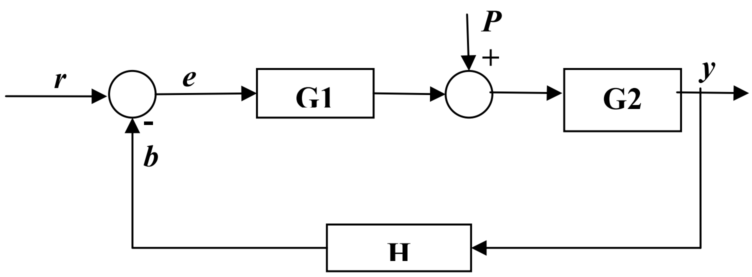


Figura 13. Sistema Realimentado con Señal de Perturbación.
Con la presencia de realimentación, la salida del sistema debido a *p* actuando sola es:

$$y = \frac{G_2}{1+G_1G_2H}\,p \qquad (9)$$

Al comparar la ecuación (9) con la (8) se observa que la componente de ruido en la salida de la ecuación (9) se reduce por el factor $1+G_1G_2H$ siempre y cuando, éste último sea mayor que la unidad y el sistema permanezca estable.
Conclusión: La realimentación puede reducir el efecto del ruido.

En general la realimentación también tiene efectos sobre el ancho de banda, la impedancia, la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia, estos conceptos se verán más adelante.

1.6.4- Comparación entre los Sistemas de Lazo Abierto y Cerrado.

La ventaja de los sistemas de control de lazo cerrado, es que al usar de forma adecuada la realimentación, como se vio en la sección anterior, se puede lograr que el sistema sea relativamente insensible a las perturbaciones externas o exógenas y a variaciones internas de los parámetros del sistema. De esta manera se pueden utilizar en el diseño y experimentación componentes más inexactos y económicos, logrando exactitud de control, mientras esto sería mucho más complicado de solucionar proponiendo un diseño de un sistema de lazo abierto.

Desde el punto de vista de la estabilidad, en los sistemas de lazo abierto es más difícil de lograr, ya que no constituye un problema importante. Por otro lado, en los sistemas de lazo cerrado, la estabilidad siempre constituye un problema importante por la tendencia a sobrecorregir errores lo que puede introducir oscilaciones de amplitud constante o variable. Hay que recalcar que para sistemas en los que las entradas son conocidas y no existen perturbaciones, es preferible usar sistemas de control de lazo abierto. Los sistemas de control de lazo cerrado se deben usar si o sí en sistemas que estén sometidos a perturbaciones externas.

1.7- Tipos de Sistemas de Control Realimentados.

Los sistemas de control realimentados se pueden clasificar en diversas formas, dependiendo del propósito de la clasificación. Por ejemplo, de acuerdo con el método de análisis y diseño, los sistemas de control se clasifican en lineales y no lineales, variantes en el tiempo o invariantes en el tiempo. De acuerdo con los tipos de señales usados en el sistema, se hace referencia a sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, o sistemas modulados y no modulados. A menudo, los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su propósito principal. Por ejemplo, un sistema de control de posición y un sistema de control de velocidad controlan las variables de salida de acuerdo con la forma como su nombre lo indica. En general, existen muchas formas de identificar un sistema de control de acuerdo con alguna función especial del sistema. Es importante que algunas de estas formas comunes de clasificar a los sistemas de control sean conocidas para obtener una perspectiva propia antes de embarcarse en su análisis y diseño.

1.7.1- Sistemas de Control Lineales vs. No lineales.

Esta clasificación está hecha de acuerdo con los métodos de análisis y diseño. Estrictamente hablando, los sistemas lineales no existen en la práctica, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado. **La mayoría de los sistemas de la vida real tienen características no lineales.** Los sistemas de control realimentados son modelos ideales fabricados por el analista para simplificar el análisis y diseño. **Cuando las magnitudes de las señales en un sistema de control están limitadas en intervalos en los cuales los componentes del sistema exhiben una característica lineal, (es decir que se puede aplicar el principio de superposición), el sistema es esencialmente lineal**. Pero cuando las magnitudes de las señales se extienden más allá del intervalo de porción lineal, dependiendo de la severidad de la no linealidad, el sistema no se debe seguir considerando lineal. Por ejemplo, los amplificadores usados en los sistemas de control a menudo exhiben un efecto de saturación cuando la señal de entrada es muy grande; el campo magnético de un motor normalmente tiene propiedades de saturación. Otros efectos no lineales que se encuentran en sistemas de control son el juego entre dos engranajes acoplados, la característica de resorte no lineal, la fuerza de fricción no lineal o par entre dos miembros móviles, etc. Muy a menudo las características no lineales son introducidas en forma intencional en un sistema de control para mejorar su desempeño o proveer un control más efectivo (por ejemplo: un tipo de controlador **si-no** se emplea en muchos misiles o control de naves espaciales para manejar los motores de reacción en una forma totalmente encendido o totalmente apagados para controlar la altitud del vehículo espacial). Para sistemas lineales, existe una gran cantidad de técnicas analíticas y gráficas para fines de diseño y análisis. ***En Control Clásico*** el material está enfocado al análisis y diseño de **sistemas lineales**. Por otro lado, los sistemas no lineales son difíciles de tratar en forma matemática, y no existen métodos generales disponibles para resolver una gran variedad de clases de sistemas no lineales. En el diseño de sistemas de control, es práctico, primero diseñar el controlador basado en un modelo de un sistema lineal **despreciando las no linealidades.** Entonces, el controlador diseñado se aplica al modelo del sistema no lineal para su evaluación o rediseño mediante simulación en computadora.

Sistema Lineal:

- **Físicamente** hablando, analizando la respuesta de un sistema, **un sistema es lineal si la salida sigue fielmente los cambios producidos en la entrada.** En la mayoría de los sistemas de control lineales, la salida debe seguir la misma forma de la entrada, pero en los casos que la salida no verifique la misma forma de la entrada, para ser considerado un sistema lineal **la salida deberá reflejar los mismos cambios generados en la entrada.**

Por ejemplo, un integrador puro, es un operador lineal, ante una entrada escalón produce a la salida una señal rampa, la salida no es de la misma forma de la entrada, pero si la entrada escalón varía en una constante, la rampa de salida se verá modificada en la misma proporción.
De la linealidad del sistema se desprenden **dos propiedades importantes:**

-a) Si las entradas son multiplicadas por una constante, las salidas también son multiplicadas por la misma constante.

- b) Los sistemas lineales se caracterizan por el hecho de que se puede aplicar el principio de superposición.

- **Principio de superposición**:
Si un sistema como el mostrado en la Fig. 14, posee más de una variable de entrada se puede obtener la salida total del sistema como la suma de las salidas parciales, que resultan de aplicar cada entrada por separado, haciendo las demás entradas cero.

Figura 14. Sistema Lineal Multivariable.

$$S_{Total} = S_1 + S_2 + \ldots.. + S_n$$
$$S_{Total} = FT_1\big|_{e_2,..,e_n=0} * e_1 + FT_2\big|_{e_1,..,e_n=0} * e_2 + \ldots + FT_n\big|_{e_1,..,e_{n-1}=0} * e_n$$

Dicho de otra forma: Si el sistema es excitado por mas de una entrada actuando a la vez, por ejemplo ***$e_1(t)$* y *$e_2(t)$*,** siendo ***$S_1(t)$*** la respuesta a la función excitadora ***$e_1(t)$*** anulando ***$e_2(t)$*,** y ***$S_2(t)$*** la respuesta a la función excitadora ***$e_2(t)$*** anulando ***$e_1(t)$*.** La **respuesta total del sistema *S(t)*** a la **suma** de las dos señales de entrada ***($e_1(t)$ + $e_2(t)$)*** actuando simultáneamente, **es igual a la suma de las respuestas individuales a las señales de entrada actuando por separado es decir tomando una entrada a la vez *(S1(t)+S2(t))***

$E(t) = e_1(t) + e_2(t)$ **Entrada total**

$S_1(t) = f[e_1(t)]_{e2=0} = F.T_1\big|_{e2=0} * e_1$ **Salida Parcial 1**

Donde $F.T_1\big|_{e2=0}$ Función de Transferencia parcial 1 actuando $e_1(t)$ y anulando $e_2(t)$

$S_2(t) = f[e_2(t)]_{e1=0} = F.T_2\big|_{e1=0} * e_2$ **Salida Parcial 2**

Donde $F.T_2\big|_{e1=0}$ Función de Transferencia parcial 2 actuando e_2 (t) y anulando $e_1(t)$

$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ **Salida total**

- **Matemáticamente**, hablando los sistemas lineales son aquellos sistemas que están representado por ecuaciones diferenciales lineales:
-

  <u>Ecuaciones diferenciales lineales</u>: Son aquellas ecuaciones en donde la **variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado**, es decir la potencia de todo término función de la variable dependiente es uno y además los coeficientes de todos los términos son constantes o si son variables, solo dependen del **tiempo (t), que es la variable independiente**.

Es importante recordar que una ecuación diferencial lineal, no debe contener potencias, productos entre variables, u otras funciones de la variable dependiente y sus derivadas (por ejemplo una función senoidal, cuyo argumento es función de la variable dependiente).

A su vez se pueden distinguir entre ellos, **sistemas lineales invariantes en el tiempo**, representados por ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes o parámetros constantes, y **sistemas lineales variables con el tiempo**, representados por ecuaciones diferenciales lineales cuyos coeficientes o parámetros varían con el tiempo.

Para aclarar lo expresado, es necesario recordar algunos conceptos de las ecuaciones diferenciales:

-*<u>Orden de una ecuación diferencial</u>*: es el orden de la derivada de mayor rango que aparece en la ecuación. O es igual a la derivada de más alto orden que aparece en la misma.

Ejemplo:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial t^3} + x = 7 \qquad (10) \qquad \text{Ecuación de tercer orden.}$$

-***<u>Grado de una ecuación diferencial</u>***: es la potencia a la que se encuentra elevada la derivada más alta o de rango superior cuando la ecuación diferencial está dada en forma polinomial.

Ejemplos:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + x = 0 \qquad (11) \qquad \text{Ecuación de segundo grado y orden uno.}$$

$$a * \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + x = 0 \qquad (12) \qquad \text{Ecuación de primer grado y orden dos.}$$

-***<u>Ecuaciones diferenciales invariantes en el tiempo</u>***: son aquellas en las que los coeficientes que acompañan a las derivadas de todos los términos son constantes en el tiempo.

-***<u>Ecuaciones diferenciales variantes en el tiempo</u>***: son aquellas en las que los coeficientes que acompañan a la derivada son función de la variable independiente, es decir función del tiempo.

Ejemplo:

$$8\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4\frac{\partial y}{\partial t} + 2y = 0 \qquad (13) \qquad \text{Ecuación diferencial LINEAL INVARIANTE en el tiempo.}$$

$$(t^3)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + (t)\frac{\partial x}{\partial t} + x = 15\,sen\,3t \qquad (14) \qquad \text{Ecuación diferencial LINEAL VARIANTE en el tiempo.}$$

<u>Sistemas no lineales:</u>

Los sistemas no lineales son todos los demás, regidos por ecuaciones no lineales, por ejemplo ecuaciones diferenciales con coeficientes que son función de la variable dependiente, ecuaciones diferenciales parciales, multiplicación entre variables, funciones senoidales con argumentos en función de la variable dependiente, o cualquier otro tipo de ecuación funcional, por ejemplo:

1- Considérese la ecuación que representa el movimiento de un vehículo submarino en forma simplificada:

$$\dot{v} + v|v| = u \qquad (15)$$

donde v es la velocidad y u la propulsión.
Es una ecuación diferencial no lineal porque existe multiplicación entre la variable velocidad y la variable módulo.

2- Un ejemplo de fuerza de fricción es la fuerza viscosa o amortiguamiento del aire, que suele modelarse como una función no lineal de la velocidad $Fv = h(\dot{y}),\ h(0) = 0$. Para velocidades pequeñas podemos asumir $Fv = c\dot{y}$. Combinando un resorte duro con amortiguamiento lineal y una fuerza externa periódica $F = A\cos(\omega t)$ obtenemos la ecuación de Duffing:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A\cos(\omega t) \qquad (16)$$

Es una ecuación diferencial no lineal porque el grado de la variable y es 3, esta ecuación es un ejemplo clásico en el estudio de excitación periódica de sistemas no lineales.

3- Uno de los problemas más simples en robótica es el de controlar la posición de una junta de robot usando un motor ubicado en el punto de giro. Matemáticamente esto no es más que un péndulo. Usando la segunda ley de Newton podemos escribir la ecuación de movimiento en la dirección tangencial:

$$ml\ddot{\theta} + mgsen(\theta) + kl\dot{\theta} = 0 \qquad (17)$$

Donde m es la masa de la bola, l es la longitud del brazo, θ es el ángulo entre la vertical y el brazo, g es la aceleración de la gravedad, y k es el coeficiente de fricción.
Es una ecuación diferencial no lineal, porque el argumento de la senoide es función de la variable dependiente θ .

Como se mencionó en las secciones anteriores todos los sistemas físicos son no lineales pero sin embargo, si las no linealidades son suaves y el rango de operación del sistema es pequeño, el sistema puede ser aproximado por un modelo lineal.

1.7.2- Sistemas Invariantes con el Tiempo vs Sistemas Variantes con el Tiempo.

Hay que diferenciar entre variables y parámetros de un sistema. **Las variables,** como su nombre lo indica son magnitudes cambiantes en el tiempo, las cuales determinan el estado de un componente, bloque o sistema. (Por Ejemplo: tensión, intensidad de corriente, velocidad, temperatura, nivel etc). **Los parámetros** son magnitudes que pueden permanecer constantes o variar según sea el sistema. Los mismos reflejan las propiedades o características inherentes de los componentes (Ejemplo: masa, inductancia, capacitancia, resistencia, conductividad, constante de elasticidad, coeficiente volumétrico de flujo, etc).
Cuando los parámetros del sistema de control son estacionarios con respecto al tiempo durante la operación del sistema, es decir **son magnitudes que permanecen constantes en el tiempo**, el sistema se denomina **Sistema Invariante con el tiempo.**
Cuando **los parámetros varían con el tiempo**, el Sistema se denomina **Variante en el tiempo**. En la práctica, la mayoría de los sistemas físicos contienen elementos que derivan o varían con el tiempo. Por ejemplo, la resistencia de la bobina de un motor eléctrico variará cuando el motor es excitado por primera vez y su temperatura está aumentando. Otro ejemplo de un sistema variante es el sistema de control de un misil guiado en el cual la masa del misil decrece a medida que el combustible a bordo se consume durante el vuelo. Un sistema variante en el tiempo sin no linealidades, es aún un Sistema Lineal. El análisis y diseño de esta clase de sistemas son mucho más complejos que los de un sistema lineal invariante con el tiempo. Dentro de los sistemas

invariantes con el tiempo tenemos los sistemas de control de tiempo continuo y los de tiempo discreto, a continuación se describirán este tipo de sistemas.

1.7.3- Sistemas de Control en Tiempo Continuo Vs Sistemas de control de tiempo discreto.

Sistemas de Control en Tiempo Continuo:

Son aquellos en los que las señales, en varias partes del sistema, son todas funciones de la variable continua tiempo t, es decir el flujo de señales en todas partes del sistema es siempre contínuo. Las señales de información fluyen continuamente entre los componentes en lazo cerrado. La característica fundamental de un sistema de control automático contínuo o analógico es la comparación contínua o permanente entre el valor actual de la variable controlada y el valor deseado de esta variable. Entre todos los sistemas de control en tiempo continuo, las señales se pueden clasificar posteriormente como de ca o cd. A diferencia de la definición general de señales de ca y cd utilizadas en ingeniería eléctrica, los sistemas de control de ca y cd tienen un significado especial en la terminología de sistemas de control. Cuando se hace referencia a un sistema de control de ca, usualmente significa que las señales en el sistema están moduladas según algún esquema de modulación. Por otro lado, cuando se hace referencia a un sistema de control de cd, no significa que todas las señales en el sistema sean unidireccionales; entonces no habría movimientos de control correctivo. Un sistema de control de cd simplemente implica que las señales no son moduladas, pero aún son señales de ca de acuerdo con la definición anterior. En la práctica, no todos los sistemas de control son estrictamente de cd o ca. Un sistema puede incorporar una mezcla de componentes de ca y cd, empleando moduladores y demoduladores para acoplar las señales en varios puntos del sistema.

Sistemas de Control de Tiempo Discreto:

Los sistemas de control en tiempo discreto difieren de los sistemas de control en tiempo continuo en que las señales en uno, o más puntos del sistema son en forma de pulsos (tren de ondas rectangulares) o son un código numérico digital. Normalmente, los sistemas en tiempo discreto se subdividen en sistemas de control de datos muestreados y sistemas de control digital. Los sistemas de control de datos muestreados se refieren a una clase más general de sistemas en tiempo discreto en los que las señales están en la forma de pulsos de datos u ondas rectangulares. Un sistema de control digital se refiere al uso de una computadora o controlador digital en el sistema, de tal forma que las señales están en código digital, tal como un código binario.
En general, un sistema de datos muestreados recibe datos o información sólo en forma intermitente en instantes determinados. Por ejemplo, la señal de error en un sistema de control se puede proporcionar en la forma de pulsos, en cuyo caso el sistema de control no recibe información acerca del error durante los periodos entre dos pulsos consecutivos. Estrictamente, un sistema de datos muestreados también se puede clasificar como un sistema de ca, ya que la señal del sistema está modulada por pulsos.

Debido a que las computadoras digitales proveen ciertas ventajas en tamaño y flexibilidad, el control por computadora se ha hecho muy popular en los últimos años.
La figura 15 muestra un sistema de control digital. La existencia de señales digitales, tales como números binarios, en cualquier parte del sistema, implica el empleo de convertidores tanto analógicos – digitales como digital-analógicos

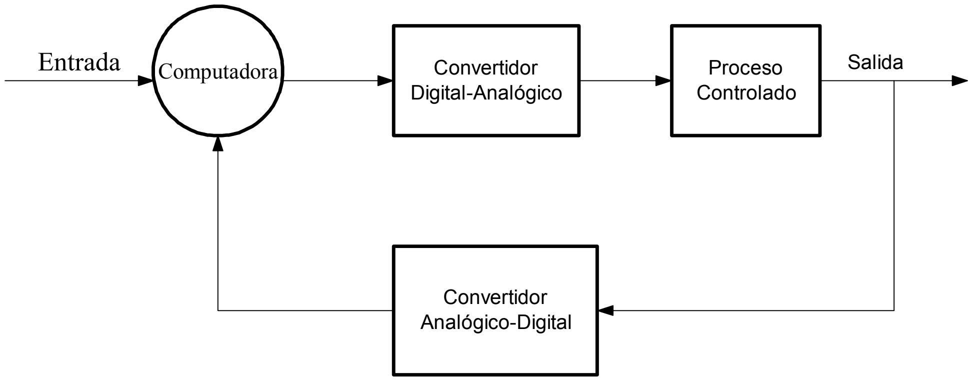


Figura 15. Sistema de Control digital

1.7.4- Sistemas determinísticos.

Son aquellos sistemas cuyo comportamiento futuro se puede predecir, siempre que se usen entradas determinísticas, las mismas se pueden definir por una función o por una variable determinística.

1.7.5-Sistemas aleatorios.

Son sistemas que como consecuencia de la forma de variación de sus parámetros, tiene como salida una variable aleatoria. Si la entrada es aleatoria, aunque el sistema sea determinístico, su salida es aleatoria. Las perturbaciones de un sistema son aleatorias, las mismas se estudian estadísticamente y se aproximan con una función estadística.

1.7.6-Sistemas de parámetros concentrados.
Los parámetros reflejan las propiedades o características inherentes de los componentes.
Son aquellos sistemas, en los que se puede considerar para determinados rangos de funcionamiento, los valores de los parámetros concentrados en un punto. La representación matemática de este tipo de sistemas son ecuaciones diferenciales totales.

1.7.7- Sistemas de parámetros distribuidos.

Son aquellos sistemas que los parámetros no se pueden considerar concentrados en un punto. La representación matemática de estos tipos de sistemas implica que aparezcan ecuaciones con derivadas parciales.

1.7.8- Sistemas Causales.

Se denominan también sistemas **no anticipatorios. La respuesta depende de los valores presentes y pasados de la entrada.** La respuesta del sistema es de la misma forma que la entrada en el mismo tiempo. En la Fig. 16 se observa que para cualquier valor de tiempo t_1, el valor de la salida y(t) depende únicamente de la función de la entrada r(t) en el intervalo (to, t_1).

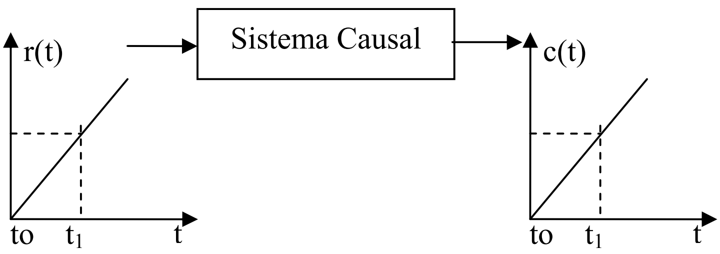


Figura 16. Sistema Causal.

1.7.9-Sistemas no Causales o Anticipatorios.

La respuesta puede anticiparse a un estado futuro de la entrada. La salida del sistema depende de valores futuros de la entrada. En un sistema no causal, la salida en un tiempo t_1, me da una función que corresponde a la función de entrada en un tiempo t_2.

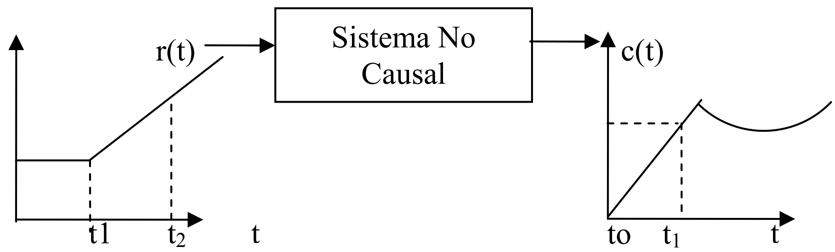


Figura 17. Sistema no Causal.

Nota: en control clásico se analizarán sistemas causales y determinísticos, los cuales comúnmente se conocen en la literatura especializada como sistemas dinámicos.

1.7.10- Sistemas de Control Automático Continuo.

Son aquellos sistemas de control realimentados negativamente, en donde el flujo de señales en todas partes del sistema es siempre continuo, además debe aclararse que no hay factor humano interviniente como parte del sistema. La característica fundamental de un sistema de control automático continuo es la comparación continua entre el valor actual de la variable controlada y el valor deseado de esta variable; la diferencia entre estos valores es llamada error del sistema.

Un sistema de control automático continuo tiende a eliminar el error realizando ajustes convenientes en el sistema. La detección continua del valor actual de la variable controlada y comparación con el valor deseado de la misma es llamada realimentación.

El sistema de control actúa solamente cuando la señal de error tiene un error finito; además el error actúa de un modo tal que en el sistema él tiende a eliminarse.
Un sistema de de control automático continuo, consiste de una serie de componentes ligados entre sí para realizar la función de control deseada. Las señales de información fluyen continuamente entre los componentes en el lazo cerrado. Las señales representan los valores instantáneos de las variables del sistema.

En la Fig. 18 se muestra un diagrama más detallado de un sistema de control automático continuo. Cada bloque representa un componente físico, que recibe una señal de entra y generan la correspondiente señal de salida.

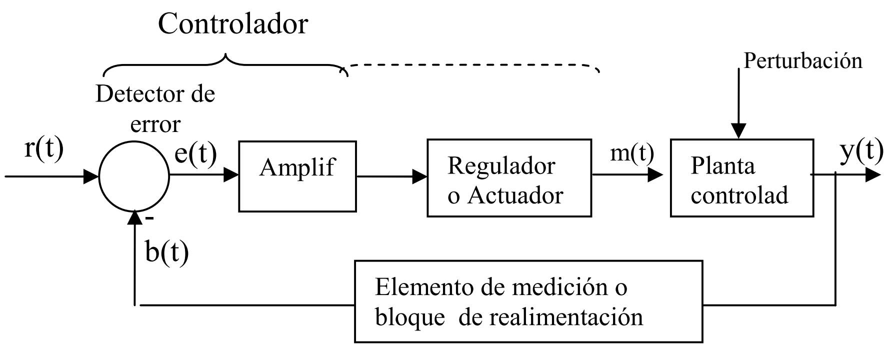


Figura 18. Diagrama de Bloques de un Sistema de Control Automático Continuo.

A continuación se describirá cada componente de este diagrama:

Detector de error o comparador: recibe dos señales, el valor deseado de la variable controlada r(t), (entrada de referencia) y el valor de la señal de realimentación b(t) que es proporcional al valor actual de la variable controlada. Estas dos señales son comparadas para entregar como salida la señal de error e(t).

Amplificador: aparece si la señal de error no posee un nivel adecuado para excitar al componente que sigue. Es usado cuando se requiere que el sistema sea más sensible aún con pequeños errores.

Controlador: Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (valor deseado), determina la desviación o error, y produce una señal de control que reducirá la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina **acción de control.** El controlador detecta la señal de error, que por lo general está en un nivel de potencia muy bajo, y lo amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador automático, alimenta a un actuador tal como un motor hidráulico o un motor eléctrico, una válvula neumática, etc.

Comúnmente se considera que el comparador y amplificador forman el controlador pero algunas opiniones, pueden incluir al regulador como integrante del controlador, en este caso, la acción de control es la salida del regulador m(t).

Regulador o Actuador: Es un dispositivo de potencia que produce la señal de entrada a la planta de acuerdo con la señal o acción de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia. Es el componente físico que permite ajustar o regular la variable que se inyecta a la planta para corregir o mejorar la variable de salida.

Sensor, elemento de medición o bloque de realimentación: es quien lleva la señal de salida hasta el comparador. Es el dispositivo que convierte la variable de salida, en otra variable manejable tal como desplazamiento, presión, voltaje, que pueda usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia. Las funciones del bloque de realimentación son:

- Tomar la señal de salida y(t) y convertirla en una señal proporcional o función de la misma, denominada señal de realimentación primaria (b(t)), para poder compararla con la señal de entrada r(t).
- Si la señal de salida y(t) y la señal de entrada r(t) son de distinta naturaleza, este bloque debe compatibilizarlas y convertirlas a las mismas unidades (esto se hace por medio de un dispositivo físico denominado transductor) y equipararlas en nivel para que se puedan comparar.

1.7.11- Clasificación de Sistemas de Control Continuo.

Los sistemas de control automático continuo se pueden clasificar de acuerdo a la señal de entrada en:

- **Sistemas Reguladores**: Un sistema regulador, es aquel cuya función principal es mantener esencialmente constante la variable controlada a pesar de las perturbaciones e inconvenientes que pudieran actuar sobre el sistema. En estos sistemas, la señal de referencia, cambia con muy poca frecuencia, generalmente es de un valor constante, el objetivo de control es mantener a la variable de salida en el orden de la variable de entrada ante la presencia de perturbaciones. Se pretende que el sistema no siga a las perturbaciones. Ej un sistema doméstico de calefacción, cuya función es mantener la temperatura deseada, a pesar de los cambios de la temperatura externa.
- **Sistemas seguidores**: Es un sistema de control realimentado, cuya función es mantener la variable controlada en correspondencia muy próxima con la variable de referencia, la cual es cambiada frecuentemente. La variable de entrada cambia de una forma prefijada, y la variable de salida debe seguir siempre a esos cambios (Ej: un sistema de seguimiento tal como un trazador de un torno , fresa, etc)
- **Servomecanismos**: Son sistemas de control de lazo cerrado en los que la entrada es una señal eléctrica y la salida es una posición mecánica, habiendo una amplificación de potencia de por medio (Ej. una servoválvula electrohidráulica, la cual utiliza una señal eléctrica proporcionada usualmente por un amplificador, para controlar el flujo del fluido.)

1.8- Requerimientos generales de un sistema de control

La estabilidad, exactitud y rapidez de respuesta son características que debe tener todo sistema de control.

- **Estabilidad:** Necesariamente, un sistema debe ser **estable,** esto significa que la respuesta a una señal, ya sea el cambio del punto de referencia a una perturbación, debe alcanzar y mantener un valor útil durante un período razonable. Un sistema de control inestable producirá, por ejemplo, oscilaciones persistentes o de gran amplitud en la señal, o bien, puede hacer que la señal tome valores que corresponden a límites extremos. Una respuesta inestable es indeseada desde el punto de vista de control. Es necesario también, conocer la cantidad o grado de estabilidad que tiene un sistema, porque puede suceder que un sistema que sea estable, esté cerca de los límites de pasar de ser estable a inestable por el uso que se le de al sistema en el transcurso del tiempo, o por el recambio de algún componente al realizar cualquier tipo de mantenimiento. La inestabilidad está latente en cada sistema, por eso es importante poder medir la cantidad de estabilidad.
- **Exactitud:** Un sistema de control debe ser exacto dentro de ciertos límites especificados, esto significa que el sistema debe ser capaz de reducir cualquier error a un límite aceptable. Es conveniente hacer notar que no hay sistemas de control alguno que pueda mantener un error cero en todo tiempo, porque siempre es necesario que exista un error para que el sistema inicie la acción correctora. Aún cuando haya sistemas que matemáticamente pueden reducir a cero el error en el sistema, esto no sucede en la realidad a causa de las pequeñas imperfecciones inherentes a los componentes que forman el sistema. En muchas aplicaciones de control, no se requiere una exactitud extrema. La exactitud es muy relativa y sus límites están basados en la aplicación particular que se haga del sistema de control (Por Ej: la exactitud en la posición final de un elevador es menos estricta que la exactitud requerida para apuntar exactamente la posición de un telescopio espacial grande LST). El costo de un sistema de control aumenta al hacerse necesario un aumento de exactitud.
- **Rapidez de respuesta:** Es la cualidad que debe tener un Sistema de control para que funcione a tiempo. Un sistema de control debe completar su respuesta a una señal de entrada en un tiempo aceptable. Aunque un sistema sea estable y tenga la exactitud requerida no tiene ningún valor si el tiempo de respuesta a una entrada, es mucho mayor que el tiempo entre las señales.

El ingeniero dedicado a los sistemas de control debe diseñar su sistema de manera tal que se cumplan las tres condiciones de estabilidad, exactitud y rapidez de respuesta. Esto no siempre es sencillo ya que las condiciones tienden a ser incompatibles y debe establecerse una situación de compromiso entre ellas.

El sistema de control ideal es estable, de una exactitud absoluta (mantiene un error nulo a pesar de las perturbaciones) y responderá instantáneamente a cualquier cambio en las variables de referencia. Naturalmente, tal sistema no puede obtenerse.

1.9- Análisis.

Se entiende por análisis de un sistema de control, la investigación o estudio bajo condiciones especificadas, del funcionamiento del sistema cuyo modelo matemático se conoce, en otras palabras es analizar si el sistema, cuyo modelo matemático se tiene, cumple con las especificaciones requeridas. Análisis, es el estudio de las partes componentes de un todo, como cualquier sistema, consta de componentes, el análisis debe comenzar por un estudio y descripción matemática de cada componente. Una vez deducido el modelo matemático del sistema completo, el modo en que se realiza el análisis es independiente de si el sistema es neumático, eléctrico, mecánico, etc (Ej: análisis temporal, frecuencial, etc.)

1.10. Proyecto.

Proyectar un sistema significa hallar un sistema que cumpla la tarea pedida. En general el procedimiento de diseño o proyecto no es directo, si no que requiere algunos tanteos.

1.11- Síntesis.

Por síntesis se entiende encontrar por un procedimiento directo un sistema que funcione de un modo especificado. Es llegar a la conclusión de un todo. Generalmente ese procedimiento es totalmente matemático desde el principio al final del proceso de diseño. Se utiliza el proyecto por síntesis cuando tenemos que diseñar tanto la planta como el controlador. Una vez que se llega a un resultado por síntesis, casi siempre se debe aplicar análisis, para evaluar si el sistema cumple con las especificaciones pedidas.

1.11- Proyecto de sistemas de control.

En la Fig.18 se presenta un diagrama de bloques de un sistema de control. El controlador produce señales de control basadas en las variables de referencia de entrada y las de salida. En la práctica hay también perturbaciones actuando sobre la planta o proceso. El controlador debe tener en cuenta cualquier perturbación que afecte las variables de salida.

El enfoque básico del proyecto de cualquier sistema de control práctico necesariamente involucra procedimientos de tanteo. Teóricamente es posible la síntesis de sistemas lineales de control y el ingeniero de control puede determinar sistemáticamente los componentes necesarios para lograr el objetivo propuesto. En la práctica, sin embargo, el sistema puede quedar sujeto a muchas restricciones o no ser lineal, por lo tanto se hacen necesarios los procedimientos de tanteo.

Frecuentemente se encuentra en la práctica situaciones en que la planta está dada y el ingeniero de control ha de proyectar el resto del sistema de modo que el conjunto cumpla con las especificaciones dadas. Las especificaciones han de ser interpretadas en términos matemáticos.

En general un problema de control puede dividirse en los pasos siguientes:

1- Debe establecerse un juego de especificaciones para el comportamiento del sistema.
2- Como resultado de las especificaciones anteriores aparece un problema de control.
3- Debe plantearse un juego de ecuaciones diferenciales que describan al sistema.
4- Se determina el comportamiento del sistema original mediante la aplicación de uno de los métodos de análisis conocidos.
5- Si el comportamiento del sistema original no satisface a las especificaciones requeridas debe modificarse el sistema para mejorara su comportamiento.

6- Puede pedirse que el sistema alcance un comportamiento óptimo para las especificaciones dadas. Este paso suele conocerse como el de optimización.

El problema de control es el de mantener el comportamiento real de un sistema lo más aproximado posible a un comportamiento fijado previamente.
De manera general, la mayoría de los sistemas no son lineales. En muchos casos la no linealidad es tan pequeña que puede despreciarse, en otros casos, los límites de operación son lo suficientemente pequeños, como para hacer un análisis lineal. En el estudio que se realizará se consideran sistemas lineales o no lineales, que pueden tomarse como lineales en una primera aproximación.
Un sistema básico es el que tiene un número mínimo de componentes necesarios en su equipo para realizar la función de control. Se plantean las ecuaciones diferenciales que describen el sistema básico y se hace un análisis de dicho sistema básico. Si el análisis indica que no se logra el comportamiento deseado con este sistema básico, deben añadirse más equipos adicionales en el sistema. Generalmente este análisis indica también las características del sistema adicional necesario para lograr el comportamiento previsto. Una vez que se ha sintetizado el equipo para que se logre el comportamiento que se desea, basado en que sea lineal, pueden hacerse ajustes finales en el propio sistema para corregir el efecto de las no-linealidades que no fueron tomadas en cuenta en el análisis.
El paso siguiente, es buscar una respuesta satisfactoria, para lograr esta respuesta en los sistemas de control, se aplican técnicas especiales de optimización.

2- MODELO MATEMÁTICO: FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

2.1- Introducción.

El primer paso en el proceso de análisis de un sistema físico consiste en deducir un modelo matemático a partir del cual pueden estudiarse las características del sistema. En un sentido muy amplio, se puede considerar el modelo como un medio para representar las relaciones entre los componentes del sistema y la teoría. Para un mismo sistema físico existen varios modelos apropiados. Los modelos más útiles y comunes pueden clasificarse en las siguientes categorías:

- **Analogía directa:** reproducciones a escala o no, y modelos analógicos. Una analogía directa es una réplica, a escala o no, de un sistema físico. Esta representación es necesaria, porque existen muchos casos en que el estudio de los sistemas reales es imposible, y la forma de analizar los diversos comportamientos de un sistema es a través de una réplica.
- **Representación gráfica**: diagramas de bloques y diagramas de flujo señal. Los gráficos nos permiten visualizar mejor la interrelación que existe entre la entrada y salida de los elementos componentes del sistema que estamos estudiando.
- **Representación matemática:** Ej. ecuaciones diferenciales, ecuaciones de estado, relaciones por funciones de transferencias, representaciones matriciales, etc. Por Ej: si el sistema se modela por ecuaciones integro-diferenciales, las ecuaciones involucran derivadas e integrales de variables dependientes con respecto a la variable independiente tiempo.

La representación de un sistema físico por medio de expresiones matemáticas y procedimientos gráficos permite al ingeniero emplear instrumentos matemáticos y topológicos adecuados, tales como ecuaciones diferenciales y diagramas en bloques y flujo señal. En la práctica por lo general no se puede hacer la representación matemática exacta de un sistema complejo, pero haciendo las suposiciones correctas y empleando restricciones permitidas sobre las propiedades del sistema puede obtenerse información muy valiosa por medio del estudio matemático apropiado. Es importante recordar que todos los sistemas físicos, son en algún aspecto no lineales, y que el tratamiento matemático de los sistemas no lineales es bastante complejo, por eso, es necesario suponer que el sistema estudiado se comporta como lineal dentro de un dominio de funcionamiento. El equivalente lineal de un sistema físico solo se realiza, siempre y cuando esté permitido, para facilitar el análisis matemático.

Una vez que el sistema físico ha sido sustituido por su equivalente modelo lineal, se procede a deducir las ecuaciones del sistema, aplicando las leyes físicas adecuadas. Estas leyes físicas relacionan las variables y parámetros de los componentes, describiendo a través de ecuaciones matemáticas la dinámica de los mismos. Por ejemplo, para los sistemas eléctricos se aplican la ley de Ohm, las leyes de Kirchoff, la ley de Lenz, etc, y para los sistemas mecánicos las leyes de movimiento de Newton.

Las ecuaciones que representan un sistema físico pueden adoptar diferentes formas. La forma convencional para representar un sistema físico es el empleo de ecuaciones integro-diferenciales, las cuales son ecuaciones que poseen operaciones de derivadas e integrales de las variables dependientes en función de la variable independiente t.

Una vez obtenidas las ecuaciones del sistema, se busca obtener la solución de las mismas, las cuales pueden ser resueltas por el método clásico, el método operacional o el computacional. Las etapas generales del estudio y análisis de los sistemas físicos lineales y no lineales pueden representarse gráficamente por el esquema de la Fig. 19, de la siguiente manera.

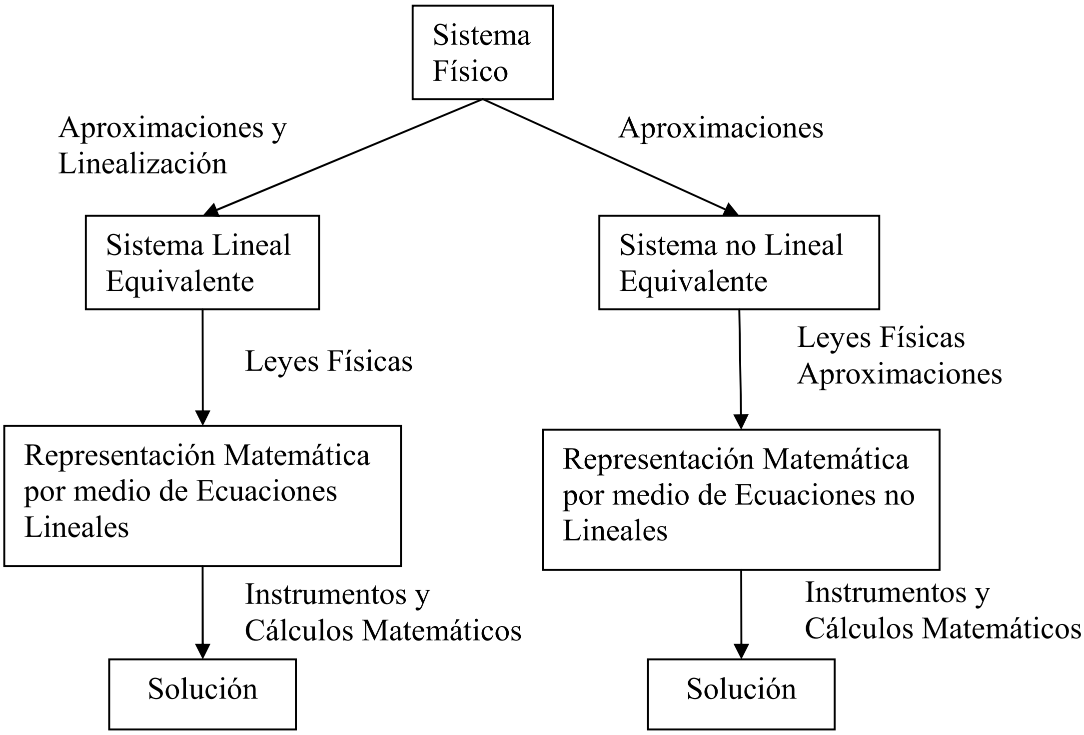


Figura 19. Esquema de Análisis de Sistemas.

En resumen, se puede decir que muchos sistemas dinámicos pueden ser caracterizados por ecuaciones diferenciales. Se puede obtener la respuesta de un sistema dinámico a una entrada, si se resuelven estas ecuaciones diferenciales. Para obtener las ecuaciones se utilizan las leyes físicas que gobiernas un sistema particular.

La descripción matemática de las características dinámicas de un sistema se denomina modelo matemático. El primer paso y el más importante en el análisis de un sistema dinámico es elaborar su modelo matemático.

Los modelos matemáticos pueden tomar muchas formas diferentes, según sea el sistema particular que se está estudiando y las circunstancias, una representación matemática determinada puede ser más adecuada que otras para un mismo sistema.

Una vez obtenido el modelo matemático de un sistema se pueden usar diversas herramientas analíticas y computacionales con el objetivo de lograr un adecuado análisis y síntesis.

2.2- Simplicidad vs Exactitud.

Al obtener un modelo hay que llegar a un compromiso entre la simplicidad del mismo y la exactitud del resultado de su análisis. Los resultados obtenidos del análisis son válidos solamente en la extensión en que el modelo se ajuste a un determinado sistema físico.

La rapidez con que una computadora digital puede realizar operaciones aritméticas, permite formular modelos más complejos que poseen un mayor desarrollo de ecuaciones, obteniendo un modelo matemático más exacto y completo del sistema real. Sin embargo, si la exactitud no es un requerimiento esencial en el diseño es preferible obtener un modelo matemático más simple y más fácil de trabajar matemáticamente. A medida que simplificamos el modelo, perdemos exactitud. No siempre se pude lograr una mayor simplificación, por Ej., hay ciertos sistemas que exhiben una fuerte característica no lineal, que no puede ser despreciada.
En general, al resolver un problema nuevo, se desea primeramente construir un modelo simplificado, para poder tener una idea general de la solución. Luego se puede armar un modelo matemático más complejo, y usarla para un análisis más completo.

2.3- Representación Matemática de Componentes y Sistemas.

El primer paso importante en el análisis y diseño de sistemas de control es el modelado matemático de los procesos controlados. En general, dado un proceso controlado, primero se debe definir el conjunto de variables que describen las características dinámicas de dicho proceso. Por ejemplo, considere un motor utilizado para fines de control. Las variables del sistema se pueden identificar como el voltaje aplicado, la corriente en el embobinado de la armadura, el par desarrollado en el eje del rotor, el desplazamiento angular y la velocidad del rotor. Estas variables están interrelacionadas a través de leyes físicas establecidas, que conllevan a ecuaciones matemáticas que describen la dinámica del motor.

Todas las acciones físicas necesitan tiempo para ser realizadas. Si un resorte es activado por una fuerza, tomará un tiempo finito en ser reflectado, si dicho tiempo es muy corto, se puede considerar como un proceso instantáneo. Cada componente de un sistema tiene una relación de tiempo entre cualquier perturbación experimentada por él y su respuesta a dicha perturbación.

La manera en que un componente de un sistema pasa de una condición a otra es tan importante como un cambio estático en la condición final. Por ejemplo, si una fuerza actúa sobre una masa y causa un movimiento desde una posición A a otra B, se estará interesado en el comportamiento de la masa de la posición A hasta la posición B, más que el comportamiento en B. En otras palabras, interesa la respuesta dinámica de componentes y de sistemas.

El objetivo inicial es establecer la ecuación dinámica que relaciona la respuesta del componente o sistema con la entrada aplicada. Estas ecuaciones serán generalmente ecuaciones diferenciales o integrales en el dominio del tiempo, con los operadores $d/dt \ y \int dt$. Estos operadores pueden ser reemplazados por el operador D y 1/D respectivamente.

Es común expresar las ecuaciones dinámicas en la forma de Función de Transferencia más que como ecuaciones diferenciales ordinarias. La forma clásica de modelar sistemas lineales, es utilizar "**Funciones de Transferencia"** para representar la relación entrada-salida entre variables.

2.3.1- Función de Transferencia.

La **Función de Transferencia,** está definida solamente para **sistemas lineales, invariantes en el tiempo, monovariables y de parámetros concentrados.**

La Función de Transferencia, **es un modelo matemático,** porque es un **método operacional** para expresar una ecuación diferencial ordinaria, lineal, con coeficientes constantes, de manera de **relacionar la variable de salida con la variable de entrada de un sistema.**

> La Función de Transferencia de un sistema descripto mediante una ecuación diferencial-lineal, e invariante en el tiempo se define en el dominio de Laplace, como:
> **"El cociente entre la Transformada de Laplace de la salida o respuesta del sistema y la Transformada de Laplace de la entrada o función de exitación, bajo la suposición que todas las condiciones iniciales son cero."**

Considere el sistema lineal e invariante en el tiempo descripto mediante la siguiente ecuación diferencial de n-ésimo orden con coeficientes constantes, que relaciona las variables de entrada- y salida del mismo:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + ... + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)$$

Ec. (20)

Los coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n \; y \; b_0, \, b_1, ..., b_m$, son constantes reales. Una vez que la entrada r(t) para t >= t_0 y las condiciones iniciales de y(t) y las derivadas de y(t) se especifican en el tiempo inicial t = t_0, la respuesta de salida y(t) para t >= t_0, se determina al resolver la Ec. (20). Sin embargo, desde el punto de vista del análisis y diseño de sistemas lineales, el método que emplea ecuaciones diferenciales en forma exclusiva es bastante incómodo. Por lo que las ecuaciones diferenciales de la forma de la Ec. (20) rara vez se emplean en su forma original para el análisis y diseño de sistemas de control.

Para obtener la función de transferencia del sistema lineal en el dominio de Laplace, simplemente se toma la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación y **se suponen condiciones iniciales cero**. El resultado es:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0) R(s) \qquad (21)$$

La Función de transferencia entre r(t) y y(t) está dada por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (22)$$

2.3.2- Condiciones que debe reunir el sistema para poder modelarlo bajo el método operacional de Función de Transferencia.

- **Sistema Lineal**: Físicamente la salida debe reproducir fielmente los cambios ocurridos en la entrada. Matemáticamente el sistema está representado por ecuaciones diferenciales lineales **(ver sección 1.7.1).**
De la linealidad se desprenden dos propiedades importantes:
a) Si las entradas son multiplicadas por una constante, las salidas también son multiplicadas por la misma constante.
b) Se puede aplicar el principio de superposición (ver sección 1.7.1).

- **Sistema invariante en el tiempo o autónomo:** Son aquellos sistemas, en donde los parámetros no varían en el tiempo o se consideran fijos, esto implica que los coeficientes que acompañan las derivadas y variables son constantes **(ver sección 1.7.2)**.

- **Sistema Monovariable**: Sistemas que poseen **una variable de entrada** y **una variable de salida.**

- **Sistemas de Parámetros concentrados**: Son aquellos sistemas, en donde los parámetros se consideran concentrados en un punto, como por ejemplo, la masa concentrada en el centro de gravedad. Esto **matemáticamente** está representado por **ecuaciones diferenciales ordinarias totales**, no aparecen ecuaciones con derivadas parciales que complicarían el análisis.

2.3.3- Propiedades de la Función de Transferencia:

- **La Función de Transferencia**, solamente está definida para s**istemas lineales, invariantes en el tiempo, monovariables y de parámetros concentrados.** No está definida para sistemas no lineales.

- **La Función de Transferencia**, es una propiedad exclusiva de las características de los componentes de un sistema (de los parámetros), **siendo independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada y de las condiciones iniciales.**

- La Función de Transferencia no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. (Las Funciones de Transferencia de muchos sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas)

- Si se conoce la Función de Transferencia de un sistema, la respuesta para varias formas de entrada puede ser estudiada, con la intención de conocer la naturaleza del sistema.

- Si se desconoce la Función de Transferencia puede ser determinada experimentalmente introduciendo entradas o perturbaciones conocidas, estudiando y evaluando la salida del sistema.

- Proporciona una descripción completa de las características dinámicas a diferencia de su descripción física.

2.3.4- Función de Transferencia y de Respuesta-Impulso.

Una forma muy usada en los sistemas de control para determinar la función de transferencia es empleando la respuesta al impulso, que se define a continuación:
Para un Sistema Lineal e invariante en el tiempo, la Función de Transferencia, G(S) es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \qquad (23)$$

En donde: Y(s) y R(s) son las transformadas de Laplace de la salida y(t) y la entrada r(t) respectivamente suponiendo que todas las condiciones iniciales involucradas son nulas.
De aquí se obtiene que la salida Y(S) se obtiene como:

$$Y(S) = G(S).R(S)$$

Considérese la respuesta de un sistema para una entrada impulso unitaria (r(t)= δ(t)), cuando las condiciones iniciales son cero. Debido a que la Transformada de Laplace, de la función impulso unitario es la unidad (L[δ(t)]= R(S)=1), la Transformada de Laplace de la salida del sistema será:

$$Y(S) = G(S) \qquad (24)$$

La Transformada inversa de Laplace de la salida proporciona la respuesta impulso del sistema .

$$y(t) = g(t) = L^{-1}[G(S)] \qquad (25)$$

La Transformada inversa de Laplace de G(S), "g(t)", se denomina **respuesta-impulso.** Esta respuesta g(t) también se denomina **función de ponderación del sistema.**

Es decir: g(t) es la respuesta de un sistema lineal a una entrada de impulso unitario cuando las condiciones iniciales son nulas. **La transformada de Laplace de esta función proporciona la función de transferencia del sistema**.

$$\mathbf{G(S) = L[g(t)]} \qquad (26)$$

"Por lo tanto la Función de Transferencia y la respuesta al impulso de un sistema linel, e invariante en el tiempo, contienen la misma información a cerca de la dinámica del sistema."

La salida de un sistema en el dominio de Laplace, para cualquier tipo de entrada será el producto de la Transformada de Laplace de la respuesta al impulso por la transformada de Laplace de la entrada correspondiente.

$$\mathbf{Y(S) = G(S).R(S)} \qquad (27)$$

Obsérvese que la multiplicación en el dominio complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo, por lo que la transformada inversa de Laplace de la ecuación (27) se obtiene mediante la siguiente integral convolución:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau).g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau).x(t-\tau)d\tau \quad donde: g(\tau) = x(t) = 0 \quad t < 0$$

2.3.5- Función de Transferencia de Sistemas Ingenieriles.

Un sistema ingenieril existe, cuando dos o más componentes son interconectados de tal forma que el funcionamiento de cada elemento afecta el comportamiento de los otros elementos y por lo tanto el desempeño total del grupo.

Por ejemplo, el sistema ingenieril que se muestra en la Fig. 20 está conformado por la masa y el resorte, el efecto de cada uno y de ambos, contribuyen para el comportamiento de la unidad masa-resorte.

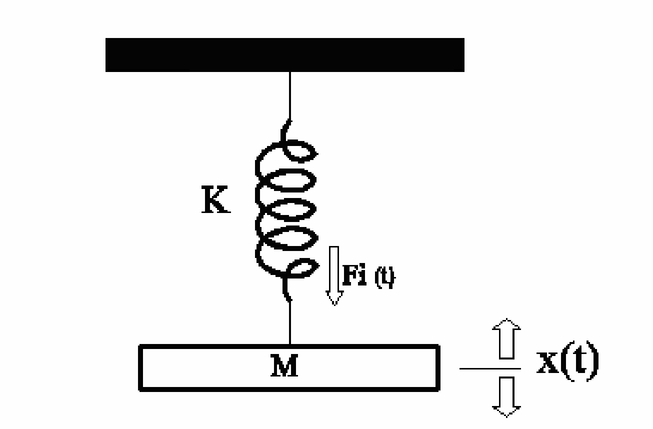


Figura 20. Sistema masa-resorte.

Cada componente de un sistema de control automático (la carga, el controlador, el regulador, el detector, etc.) es de por sí un sistema ingenieril compuesto por un conjunto de elementos básicos (resortes, masas, resistores, capacitores, etc.). Se ve entonces que un sistema de control automático está formado por un conjunto de sistemas (también llamados subsistemas) interconectados, y con su funcionamiento producen el control deseado.

El primer requerimiento para el análisis de un sistema de control y su posterior síntesis es que pueda describirse con precisión cada componente físico de un sistema, por una función matemática. Estos modelos matemáticos de los componentes deben luego ser combinados para producir un modelo matemático del sistema de control completo.

La manera en la cual un componente o sistema se comporta cuando pasa de una condición de equilibrio a otra condición de equilibrio, es tan importante como la magnitud del cambio realizado. Por ende, es conveniente que los modelos matemáticos sean funciones dinámicas del tiempo. En su forma simple, un modelo matemático puede ser una constante; pero en general; el modelo será una ecuación diferencial con el tiempo como variable independiente. Ya se vio que es usual expresar el modelo (sea de un componente o un sistema de control completo) de la forma:

$$\frac{\text{Salida del Sistema (Respuesta)}}{\text{Entrada del Sistema (Perturbación)}} = \frac{y(t)}{r(t)} = F(D) \tag{28}$$

F(D), está en función del operador D donde D=d/dt, y es la Función de Transferencia del Sistema.

Por ejemplo, si se considera el sistema masa-resorte de la Fig.20. La masa está inicialmente en equilibrio sobre una superficie lisa (sin rozamiento); por lo tanto el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre ella. Para revelar la naturaleza del sistema, una fuerza perturbadora ***Fi,*** es aplicada en la masa y el resultado de su desplazamiento ***x(t)*** desde su posición inicial *x=0* es estudiada. En la posición ***x(t)*** la fuerza que ejerce el resorte ***fr(t)*** es opuesta en dirección a ***Fi(t).*** Aplicando la ley de Newton tenemos:

$$\sum F = Fi(t) - fr(t) = m * a = m * D^2 * x(t) \tag{29}$$

$$fr = k * x(t) \tag{30}$$

$$m * D^2 * x(t) + k * x(t) = Fi(t) \tag{31}$$

La Ec. (26) nos relaciona la variable de entrada con la variable de salida, si trabajamos matemáticamente la misma, podemos llegar a obtener la Función de Transferencia del sistema de la siguiente manera:

$$(m * D^2 + k) * x(t) = Fi(t) \tag{32}$$

$$\frac{x(t)}{Fi(t)} = \frac{1}{(m * D^2 + k)} \tag{33}$$

Este ejemplo ilustra el importante hecho de que la función de transferencia de un sistema lineal es completamente independiente de la magnitud y naturaleza de la señal de entrada ***Fi(t),*** la cual puede ser cualquier clase. Para obtener una función de transferencia, es necesario solamente seleccionar una variable apropiada como señal de entrada sin definir el tamaño y naturaleza de la misma. Se demostrará en ejemplos posteriores que la Función de Transferencia es también independiente de cualquier valor inicial de las variables del sistema.

F(D) contiene solamente constantes del sistema más el operador D, el cual representa al tiempo.

Cuando se derive la función de transferencia de un sistema físico se debe:

a)- Seleccionar una variable apropiada del sistema como la variable de respuesta y(t) .

b)- Seleccionar una apropiada variable del sistema como variable de entrada r(t)

Es conveniente, aunque no necesario:

c)- Considerar que el sistema esté en equilibrio (esto significa una condición de aplicación de estado estacionario), en el tiempo t=0, cuando la señal arbitraria de entrada es introducida. En otras palabras, que todas, las variables del sistema estén en equilibrio para t=0, y que todas sus derivadas en el tiempo sean cero.

d)- Elegir arbitrariamente el valor de todas las variables del sistema como cero para t=0, en el instante que la entrada es introducida. En consecuencia, cambios en las variables del sistema (a partir de su condición de equilibrio) serán relacionados durante la formación de la función de transferencia, mas que sus valores absolutos. De esta manera todos los valores iniciales de las variables no se tienen en cuenta. Esta simplificación es válida, como se demostrará en ejemplos posteriores, porque los valores iniciales no afectan la forma de la función de transferencia del sistema.

El uso de las condiciones c) y d) elimina la necesidad de aplicar condiciones iniciales a las ecuaciones usadas para formar la función de transferencia y permitir la manipulación algebraica del operador D (o del operador S si se está en el dominio de la transformación de Laplace). Las manipulaciones necesarias para formar la función de transferencia son así simplificadas, sin alterar la forma final.

Estas condiciones fueron observadas en el ejemplo de la Fig. 20; la masa estaba en equilibrio y las únicas variables del sistema ***x, fr, Fi,*** se consideraron cero cuando la perturbación fue introducida en el tiempo t=0.

Con sistemas ingenieriles simples, las variables que son más convenientes para usar como respuesta y entrada son usualmente obvias. Para sistemas complejos o para sistemas automáticos de control completos, una selección previa es necesaria generalmente en la elección de las variables de salida y de entrada.

En un sistema de control la variable de respuesta es la variable controlada. La señal de entrada usualmente puede ser introducida por uno o varios puntos en un sistema de control.

Los dos puntos de entrada más útiles para los propósitos de análisis son:

El valor deseado de la variable controlada. Esto es considerar un cambio en r(t), (el valor deseado) y relacionar con él, dinámicamente el correspondiente cambio y(t) (el valor actual de la variable controlada), a medida que tiende a buscar su nueva condición de valor deseado. Un típico diagrama en bloques para esta situación podría ser el indicado en la Fig. 21.

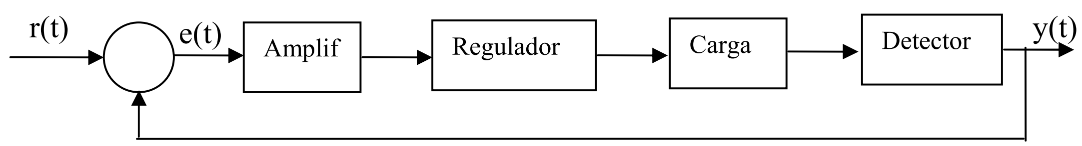


Figura 21. Diagrama en Bloques de un Sistema Típico.

En la planta o procesos que esta siendo controlado. Esto es, considerar una perturbación externa p(t), en la planta que está siendo controlada, y relacionar a ella el correspondiente cambio dinámico (la respuesta) de la variable controlada a medida que el sistema busca de nuevo el equilibrio.

Ambas localizaciones de las señales de entrada pueden ser ilustradas en un diagrama general como el de la Fig. 22.

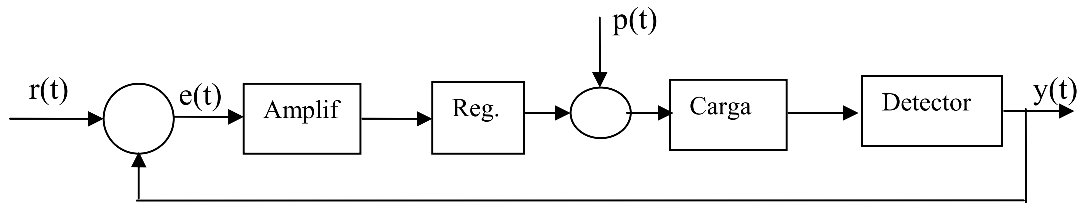


Figura 22. Diagrama en Bloques de un Sistema con la Señal de Entrada de Referencia y la Señal de Entrada Perturbación.

2.3.6- Función de Transferencia Normalizada.

Mientras sea posible, es normal en la práctica presentar una función de transferencia en la forma de factores adimensionales $(1 \pm TD)\ o\ (1 \pm Ts)$, donde T es un parámetro constante, como se muestra en la Ec.34. Es importante destacar que para normalizar los polinomios del numerador y denominador, debe quedar el término independiente de cada factor igual a uno, a lo cual se llega sacando factor común el valor del término independiente que sea distinto de uno.

$$\frac{y(t)}{r(t)} = F(D) = \frac{K}{1+T_1 D},\ \text{o}\ \frac{\mathrm{K(1+T_1D)}}{(1+T_2 D)(1+T_3 D)} \tag{34}$$

Por lo tanto la compatibilidad dimensional debe ser mantenida. El operador D = d/dt tiene dimensión (seg^{-1}) como unidad, y por lo tanto la dimensión de T debe ser (seg) para que el producto TD sea adimensional. Las constantes T de esta forma serán reconocidas como constantes de tiempo y una función de transferencia factoreada así se dice que está en la forma de **constante de tiempo o normalizada**. La **constante del numerador K** asociada con la función de transferencia de esta manera normalizada **se denomina "ganancia estática de lazo cerrado del sistema".**

Este valor de K seria la relación que existe entre la variable de salida y la variable de entrada del sistema, cuando el tiempo tiende a ∞ (en estado estacionario o de equilibrio):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{r(t)} = K \qquad \textbf{Ganancia estática de lazo cerrado} \tag{35}$$

Esto se obtiene debido a que D=0, de esta manera se indica simplemente una relación de equilibrio, pues las derivadas en el tiempo de y(t) y r(t) serán cero en equilibrio.

2.4- Métodos Para Determinar la Función de Transferencia.

A los efectos de determinar la función de transferencia se estudiarán tres métodos a continuación:

- Combinación Directa de Ecuaciones simultáneas asociadas con un fenómeno determinado.
- El uso de diagramas de bloques representativo de un fenómeno determinado y su posterior reducción.
- El uso del diagrama de flujo señal representativo de un fenómeno determinado y su posterior reducción o aplicación de formulas empíricas para su resolución.

Mientras que el primer método es puramente matemático, los dos métodos restantes son métodos gráficos matemáticos, los cuales son más utilizados en la representación de sistemas. A continuación se detallan cada uno de los métodos.

2.4.1- Determinación de la Función de Transferencia por el método de las Ecuaciones simultáneas.

Las simples relaciones establecidas para un componente o sistema pueden ser escritos una a continuación de otra como ecuaciones simultáneas y combinadas para dar la relación requerida. Al combinar las ecuaciones básicas se debe buscar de eliminar todas las variables y seleccionar nada más que dos, la entrada y la salida o respuesta del sistema, y relacionarlas en una función del tiempo (D) o en el dominio de Laplace (s) y constantes de la ecuación.

En otras palabras el método es sencillo cuando el número de ecuaciones simultáneas no es elevado, en primer lugar hay que convertir a cada ecuación integro diferencial en una ecuación algebraica mediante el uso del operador D o la transformada de Laplace, y posteriormente elegidas ya la variable de entrada y la variable de salida, reemplazar adecuadamente una ecuación en otra hasta llegar a una última ecuación, función únicamente de las variables de entrada y salida seleccionadas. Esta ecuación es el modelo matemático buscado, y puede ser puesto en la forma de Función de Transferencia.

Debe tenerse en cuenta si se trabaja con ecuaciones transformadas en Laplace que deben considerarse todas las condiciones iniciales de las variables nulas, y si se utiliza el operador D es conveniente considerar las condiciones iniciales igualmente nulas, esto posibilitará el reemplazo directo del operador D por el operador s en el dominio de Laplace en una Función de Transferencia dada.

A continuación se presenta un ejemplo:

Encontrar la relación dinámica entre el caudal de entrada qi y el caudal de salida qo, para el tanque mostrado en la Fig. 23:

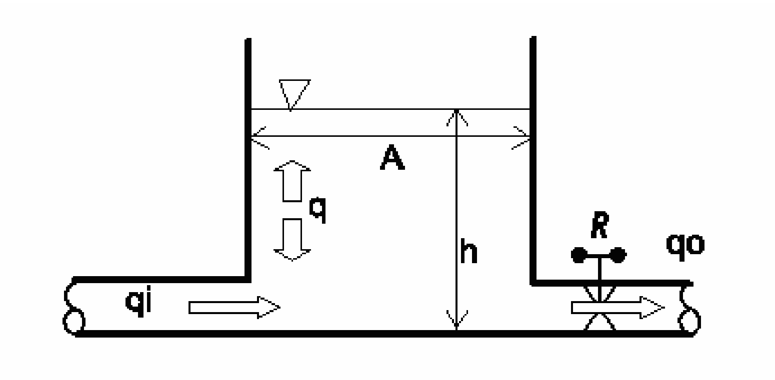


Figura 23. Tanque de caudales.

qi= caudal de entrada.
qo= caudal de salida.
q= caudal neto dentro del tanque.
ho= altura del líquido dentro del tanque.
R= resistencia de la válvula.

En este ejemplo se consideraran las condiciones iniciales de las variables, asumiendo que el sistema se encuentra en equilibrio, con lo que:

qii= caudal inicial de entrada.
qoi= caudal inicial de salida.
hoi= altura inicial del líquido dentro del tanque.

Como se ha considerando que el sistema está en equilibrio tenemos que:

qoi= qii
qi= caudal inicial dentro del tanque es =0.
Hoi= altura inicial dentro del tanque es constante.
Se va a considerar el efecto que se produce en qo cuando se produce un cambio en el caudal de entrada qi.
Las ecuaciones simultáneas que describen la dinámica del sistema son:

$q = qi - qo = \left(\cancel{q}ii + qi\right) - \left(\cancel{q}oi + qo\right)$ porque qoi=qii (36)

$q = AD(hoi + ho) = ADho$ porque hoi es constante. (37)

$$qo = \frac{ho}{R} \qquad (38)$$

Despejando de la Ec. (36) la variable qo nos queda:

$$qo = qi - q \qquad (39)$$

Reemplazando la Ec (37) en la Ec (39), obtenemos:

$$qo = qi - ADho \qquad (40)$$

Ahora reemplazamos la Ec (38) en la Ec (40) y nos queda:

$$qo = qi - ADRqo \qquad (41)$$

Agrupando los términos de la Ec. (41) que tienen qo obtenemos:

$$(1 + ADR)qo = qi \qquad (42)$$

De esta manera la Ec. (42) es el modelo matemático que se está buscando, por último se reacomodan las variables para así obtener la relación entre la variable de entrada y la variable de salida de la siguiente manera:

$$FT = \frac{qo}{qi} = \frac{1}{\left(1 + \underbrace{AR}_{T} D\right)} = \frac{1}{1 + TD} \qquad (43)$$

En donde T es la constante de tiempo, y FT es la Función de Transferencia pedida.

Nótese que el hecho de considerar las condiciones iniciales no alteró la Función de Trasferencia obtenida, es decir se hubiera llegado a los mismos resultados sin considerar las condiciones iniciales de las variables, con lo que se demuestra que es totalmente válido considerarlas nulas en el tiempo t=0 para obtener la FT. Se concluye que: "**La Función de Transferencia, es independiente de las condiciones iniciales del sistema".** Si el sistema tiene condiciones iniciales distintas de cero, se desprecian y se las supone cero, solo deberán tenerse en cuenta posteriormente, cuando se estudie y se grafique la respuesta en función del tiempo para una entrada determinada.

2.4.2- Determinación de la Función de Transferencia por el Método de los Diagramas en Bloques.

Los diagramas de bloque proporcionan un medio conveniente para visualizar y analizar los sistemas de control. Estos diagramas se obtienen estableciendo las ecuaciones que describen el comportamiento de cada uno de los componentes del sistema. Luego la información contenida en cada una de las ecuaciones se coloca en la forma de una relación de cierta cantidad de salida a cierta cantidad de entrada. La relación así obtenida es la función de transferencia y es la representación matemática del elemento particular que se coloca en el bloque. Cuando todos los elementos del sistema están representados en bloques convenientemente relacionados, puede obtenerse la ecuación de todo el sistema por una manipulación del diagrama de bloques, en lugar de la solución simultánea de las ecuaciones del sistema.

En resumen se puede decir que un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente y del flujo de señales. Un diagrama así indica las interrelaciones que existen entre los diferentes componentes. A diferencia de una representación matemática abstracta, un diagrama de bloques tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de señales del sistema real.

En un diagrama en bloques, todas las variables del sistema son enlazadas entre sí a través de bloques funcionales. El *bloque funcional* es un símbolo de la operación matemática que el bloque produce a la salida, sobre la señal que tiene a la entrada. Las funciones de transferencia de los componentes, generalmente se colocan en los bloques correspondientes, que están conectados por flechas para indicar la dirección del flujo de señales. Nótese que la señal puede pasar solamente en el sentido de las flechas. Así un diagrama en bloques de un sistema de control muestra explícitamente una propiedad o característica unilateral. La flecha que apunta hacia el bloque indica la entrada y la que se aleja del bloque indica la salida.

Las ventajas de la representación del diagrama en bloques de un sistema, es que es fácil formar el diagrama de bloques global de todo el sistema, colocando simplemente los bloques de sus componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente en el funcionamiento global de todo el sistema.

En general, se puede ver más fácilmente el funcionamiento de un sistema, examinando el diagrama de bloques que examinando el sistema físico en sí. Un diagrama de bloques contiene información con respecto al comportamiento dinámico pero no contiene ninguna información respecto a la constitución física del sistema.

Debe notarse que un diagrama de bloques de un sistema no es único. Se puede dibujar cierto número de distintos diagramas de bloques para un sistema dado, según sea el punto de vista del análisis.

Un diagrama en bloques es una representación visual simplificada de la relación de causa efecto que existe entre una entrada y la salida de un sistema físico. Los componentes del sistema se conocen con el nombre de elementos de sistema. La forma más sencilla del diagrama de bloques es el bloque simple que lleva una entrada y una salida, como puede observarse en la Fig.24.

Figura 24. Bloque Simple.

El interior del rectángulo que representa al bloque generalmente contiene la descripción o el nombre del elemento, o el símbolo de la operación matemática que se ejecuta sobre la entrada con el fin de obtener la salida. En la Fig.25 se visualiza un bloque el cual posee el símbolo de la operación matemática que relaciona la entrada con la salida.

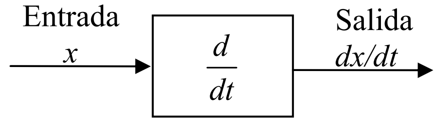


Figura 25. Bloque con operación matemática.

Las operaciones de adición y sustracción tienen una representación especial. El bloque se cambia por un círculo, llamado punto de suma con el signo apropiado más o menos, acompañando las flechas que llegan al círculo. La salida es la suma algebraica de las entradas. En la Fig.26 se muestra los diferentes puntos de suma que se pueden encontrar.

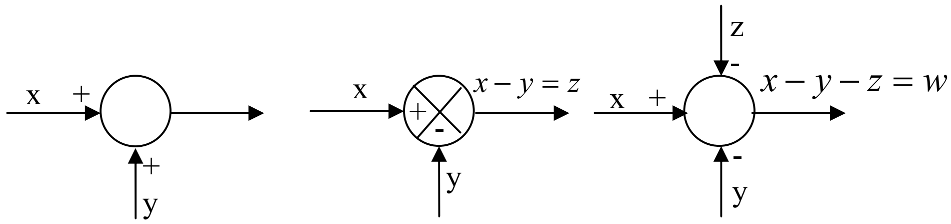


Figura 26. Diferentes Formas de Puntos de Suma.

Con el fin de emplear la misma entrada o señal a más de un bloque o punto de suma se usa el punto de reparto. Esto permite que la señal siga sin alteración a lo largo de diferentes trayectorias hacia varios destinos, en la Fig. 27 se visualiza diferentes maneras de un punto de reparto.

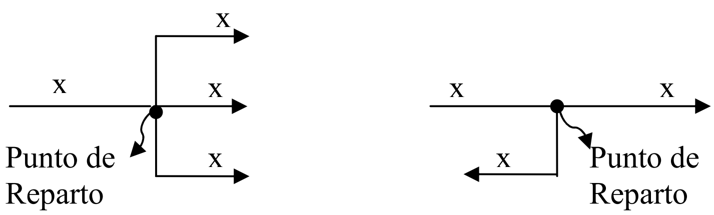


Figura 27. Diferentes formas de puntos de reparto.

2.4.2.1-Diagrama en Bloques de un Sistema de Control Realimentado.

Cualquier sistema de control lineal puede ser representado por un diagrama de bloques. En la Fig. 28 se muestra un diagrama en bloques de un sistema de control realimentado.

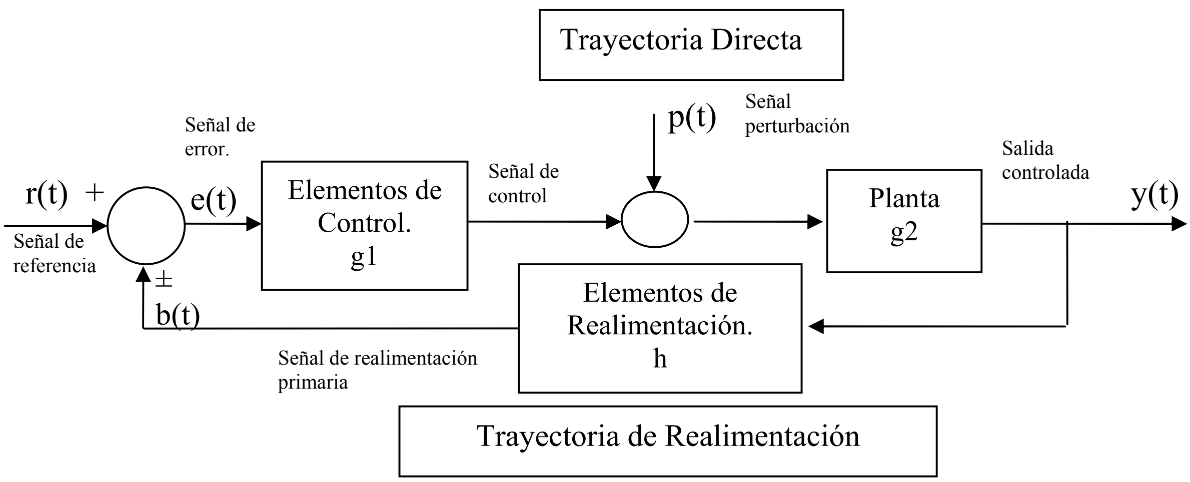


Figura 28. Diagrama en Bloques de Sistema de Control Realimentado.

2.4.2.2- Terminología del diagrama en bloques para sistemas de lazo cerrado.

Para representar las variables de entrad y de salida de cada elemento se usa letras minúsculas tal como para los símbolos de los bloques como se ve en la Fig 27 g1, g2 y h. Estas cantidades representan funciones de tiempo, a no ser que se especifique lo contrario.

Las letras mayúsculas representan transformadas de Laplace de cantidades que son funciones de la variable compleja s.

Definición 1: La planta g2 también llamada sistema controlado, es el cuerpo, proceso o máquina de la cual se va a controlar una cantidad o condición particular.
Definición 2: Los elementos de control g1, los cuales se denominan controlador, son los componentes requeridos para generar la señal de control apropiada que se aplica a la planta.
Definición 3: Los elementos de realimentación h son los componentes que se requieren para establecer la relación funcional entre la señal de realimentación primaria b y la salida controlada y.
Definición 4: La entrada de referencia r es una señal externa aplicada a un sistema de control por realimentación con el fin de ordenar a la planta o proceso una acción especificada. A menudo representa un comportamiento ideal de la salida de la planta o proceso.
Definición 5: La salida controlada y es la cantidad o condición de la planta o proceso que se controla.
Definición 6: La señal realimentación primaria b es una señal que es función de la salida controlada y y que se suma algebraicamente a la entrada de referencia r para obtener la señal impulsora o señal de error.
Definición 7: La señal de error también de nominada señal impulsora o acción de control es la suma algebraica de la entrada de referencia r más o menos (usualmente menos) la realimentación primaria b.
Definición 8: la señal de control es la cantidad o condición que los elementos de control g1 aplican a la planta g2.
Definición 9: la perturbación p es, una señal de entrada indeseable que afecta, al valor de la salida controlada y. Puede entrar a la planta o proceso sumándose con la señal de control o a través de un punto intermedio.
Definición 10: La trayectoria directa es la vía, de transmisión desde la señal de error e hasta la salida controlada y.
Definición 11: La trayectoria de realimentación es la vía de transmisión desde la salida controlada y hasta la señal de realimentación primaria b.

Terminología Suplementaria.

Algunos otros términos se deben definir e ilustrar ahora.

Definición 12: Un transductor es un dispositivo que convierte una forma de energía en otra.
Por ejemplo uno de los transductores más comunes en las aplicaciones de los sistemas de control es el potenciómetro, que convierte una posición mecánica en tensión.
Definición 13: La señal v es una señal de entrada, generalmente igual ala entrada de referencia r. Pero cuando la forma de energía de la señal v no es la misma que para lo realimentación primaria b, su requiere un transductor entre la señal v y la de referencia r como se muestra en la Fig. 29.

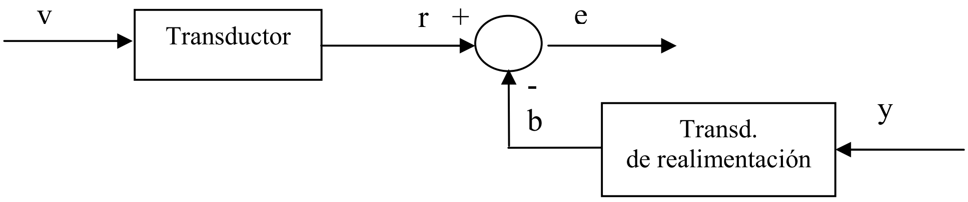


Figura 29. Transductor en la señal de entrada.

Definición 14: El conjunto de elementos ilustrados en la Fig. 28 forman lo que se denomina en los sistemas de control el detector de error, el cual está formado por un transductor de la señal de entrada v para obtener la señal de referencia r, un sumador y un transductor de la señal de salida para obtener la señal de realimentación primaria b. El detector de error produce la señal de error que es la diferencia entre la señal de referencia y la señal b. En la etapa de diseño la elección del detector debe ser cuidadosa ya que si se produce una falla o un error en su funcionamiento afecta la dinámica de todo el sistema.
Definición 15: En la realimentación negativa el punto de suma es un sustractor, luego: $e = r - b$.
Definición 16: En la realimentación positiva el punto de suma es un sumador, luego: $e = r + b$.
Definición l7: La respuesta temporal de un elemento o sistema es la salida del mismo en función de tiempo, siguiendo la aplicación de una entrada con condiciones de funcionamiento especificados.

2.4.2.3- Función del Bloque de Realimentación.

En un sistema de control de lazo cerrado o realimentado, al inyectar la salida al punto de suma para comparación con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida a la forma de la señal de entrada. Por ejemplo: en un sistema de control de temperatura, la señal de salida generalmente es una temperatura controlada. La señal de salida, que la dimensión de una temperatura debe ser convertida a una fuerza o posición antes de compararla con la señal de entrada. Esta conversión es cumplida por el elemento de realimentación cuya función de transferencia es H(s) como se observa en la Fig. 30.
Matemáticamente la señal de realimentación primaria es:

$$B(s) = H(s) * Y(s) \tag{44}$$

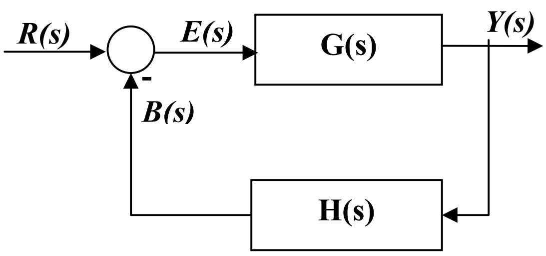


Figura 30. Sistema de control realimentado.

2.4.2.4- Obtención de las Diferentes Relaciones o Funciones de Transferencia.

1- Función de Transferencia de Lazo Abierto.

Esta Función de Transferencia se obtiene cuando se relaciona la señal de realimentación primaria B(s) con la señal de error E(s).

$$FT_{LA} = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s) * H(s) \tag{45}$$

2- Función de Transferencia Directa o de Trayecto Directo.

Esta Función de Transferencia se obtiene cuando se relaciona la señal de salida Y(s) con la señal de error E(s).

$$FT_{trayecto\ directo} = \frac{Y(s)}{E(s)} = G(s) \tag{46}$$

Nota: Si la Función de transferencia de realimentación es la unidad o lo que es lo mismo decir el sistema posee realimentación unitaria (H(s)=1), la función de transferencia de lazo abierto y la función de transferencia de trayecto directo son las mismas.

3- Función de Transferencia de Realimentación.

Esta Función de Transferencia se obtiene cuando se relaciona la señal de realimentación primaria B(s) con la señal de salida Y(s).

$$FT_{\text{realimentación}} = \frac{B(s)}{Y(s)} = H(s) \tag{47}$$

4- Función de Transferencia de Lazo Cerrado.

Esta Función de Transferencia se obtiene cuando se relaciona la señal de salida Y(s) con la entrada R(s).

$$FT_{\text{LC}} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s) * H(s)} \tag{48}$$

La deducción matemática para llegar a esta expresión final se realizó en la sección 2.1.3. Esta función de transferencia relaciona la dinámica del sistema de lazo cerrado a la dinámica de los elementos de alimentación directa y a los elementos de realimentación. La salida del sistema de lazo cerrado es:

$$Salida = Y(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s) * H(s)} * R(s) \tag{49}$$

Se puede observar que la salida del sistema depende de la función de trasferencia de lazo cerrado como de la naturaleza de la entrada.

5- Razón de error.
Esta Función de Transferencia se obtiene cuando se relaciona la señal de error E(s) con la entrada R(s).

$$Razón\ de\ error = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 \pm G(s) * H(s)} \qquad (50)$$

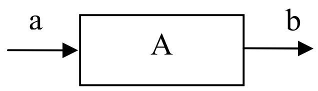
6- Razón de Realimentación Primaria.
Esta Función de Transferencia se obtiene cuando se relaciona la señal de realimentación primaria con la entrada R(s).

$$Razón\ de\ realiemntación = \frac{B(s)}{R(s)} = \frac{G(s) * H(s)}{1 \pm G(s) * H(s)} \qquad (51)$$

La configuración mostrada en la Fig. 30 se le denomina ***Forma Canónica*** de un sistema de control realimentado.

2.4.2.5- Operaciones Básicas con Diagramas en Bloques.

1- Multiplicación.

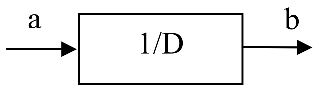


$$a * A = b \qquad o \qquad A = \frac{b}{a}$$

2- Diferenciación.

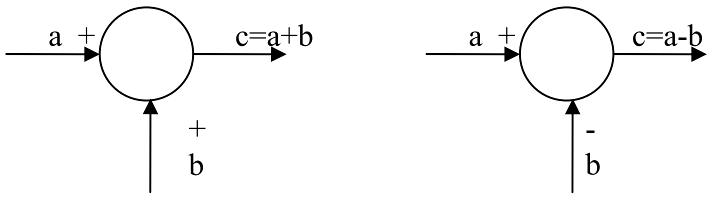
$$Da = b \qquad o \qquad \frac{b}{a} = D \qquad o \qquad b = \frac{da}{dt}$$

3- Integración.



$$\frac{a}{D} = b \quad o \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{D} \quad o \quad b = \int a dt$$

4- Adición y sustracción.



2.4.2.6- Bloques en Cascada.

Cualquier número finito de bloques en serie se puede combinar algebraicamente por medio de multiplicación. Es decir, n componentes o bloques con las funciones de transferencia G_1, G_2,…., G_n, conectados en cascada son equivalentes a un solo elemento G con una función de transferencia dada por:

$$G = G_1 * G_2 * ...... * G_n = \prod_{i=1}^{n} G_i \qquad (52)$$

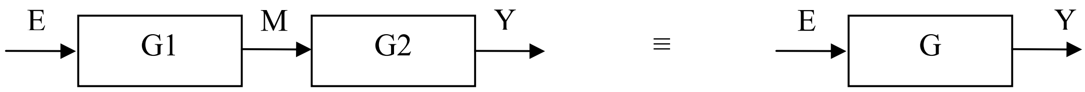


Figura 31. Resolución de Bloques en Cascada.

2.4.2.7-Teorema de Transformación de los Diagramas en Bloques.

Es importante notar que se pueden conectar los bloques en serie solamente si la salida de un bloque no es afectada por el bloque inmediato siguiente. Si hay cualquier efecto de carga entre los compones, es necesario combinar esos componentes en un solo bloque.

Se puede representar con un único bloque cualquier cantidad de bloques en cascada que representen componentes que no cargan, cuya función de transferencia es simplemente el producto de las funciones de transferencias individuales, como se vio en la sección anterior..

Es posible simplificar un diagrama en bloque muy complejo con muchos lazos de realimentación por una modificación paso a puso, utilizando reglas del álgebra de diagramas de bloques.

Al simplificar un diagrama de bloques, debe recordarse lo siguiente:

1- El producto de las funciones de transferencia en la dirección de alimentación directa debe mantenerse constante.

2- El producto de las funciones de transferencia alrededor del lazo debe mantenerse constante.

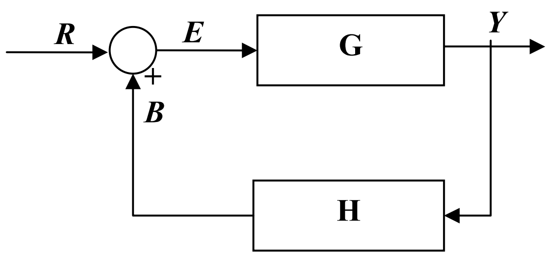
Una regla general para simplificar un diagrama de bloques es desplazar los puntos de bifurcación y puntos de suma, intercambiar los puntos de suma y finalmente reducir los lazos internos de realimentación.
En resumen se puede decir que los diagramas de bloques de sistemas de control complicados se pueden simplificar usando transformaciones que se pueden derivar fácilmente.

Se demostrarán algunas de esas transformaciones.

1- Lazo con realimentación negativa:

Esta demostración matemática se realizó en el apartado 1.6.3.

2- Lazo con realimentación positiva:



Mediante manipulación algebraica simple, es fácil mostrar la relación entrada-salida del sistema, la misma es:

$$E = R + B \qquad (53)$$

$$B = Y * H \qquad (54)$$

$$Y = E * G \qquad (55)$$

Despejando de la Ec. (55) la señal de error y reemplazando la ecuación resultante en la Ec (53), luego si reemplazamos la Ec. (54) y (55) en la Ec. (53) obtenemos:

$$\frac{Y}{G} = R + Y * H \qquad (56)$$

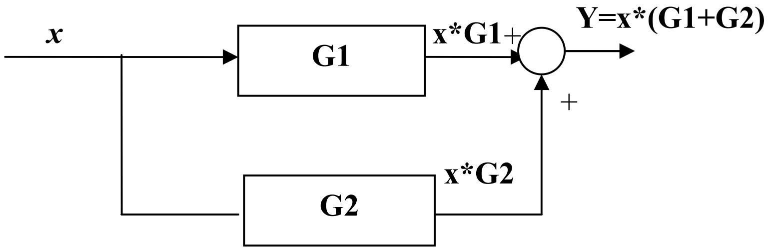
Agrupando en un solo término la variable Y y sacando factor común obtenemos:

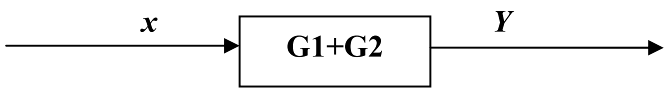
$$Y\left(\frac{1-GH}{G}\right)=R \quad (57)$$

De esta manera se obtiene la relación entrada – salida:

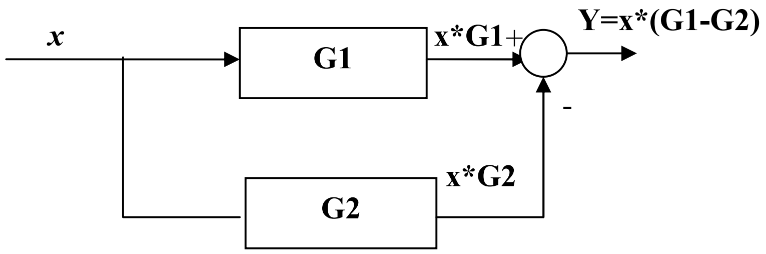
$$F.T=\frac{Y}{R}=\frac{G}{1-GH} \quad (58)$$

3- Lazo de alimentación hacia delante positivo:





4- Lazo de alimentación hacia delante negativo:



2.4.2.8- Sistemas de Realimentación de Unidad.

Un sistema de realimentación de unidad es un sistema de realimentación en el cual la realimentación primaria b es igual a la salida controlada y, H=1 para un sistema de realimentación lineal y de unidad y su representación gráfica se observa en la figura 32.

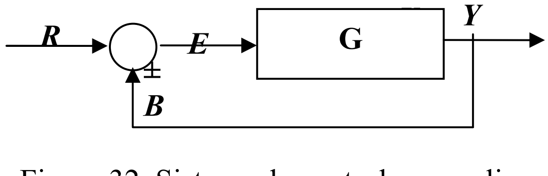


Figura 32. Sistema de control con realimentación unitaria.

Cualquier sistema de realimentación, con elementos lineales solamente en le lazo de realimentación se puede poner en la forma de un sistema de realimentación de unidad, usando la siguiente transformación.

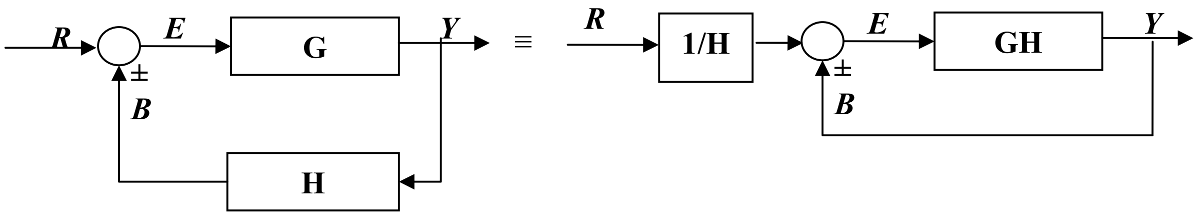


Figura 33. Sistemas de control equivalentes.

2.4.2.9- Entradas Múltiples.

A veces es necesario evaluar el trabajo ejercitado por un sistema cuando se aplican simultáneamente varias entradas en diferentes puntos del sistema.

Cuando están presentes entradas múltiples en un sistema lineal cada una se trata independientemente de las otras. La salida ocasionada por todas las entradas actuando conjuntamente se encuentra de de la siguiente manera:

Paso 1: Igualar todas las entradas a cero excepto una.
Paso 2: Resolver el Diagrama en bloques para esa entrada.
Paso 3: Calcular la respuesta debida a la entrado escogida actuando sola
Paso 4: Repetir los pasos 1 a 3 para cada una de las entradas restantes.
Paso 5: Sumar algebraicamente todas las respuestas (salidas) determinadas en los pasos 1 a 4. Esta suma es la salida total del sistema con todas las entradas actuando simultáneamente.

Como se mencionó en la sección 1.7.1 el *Principio de Superposición* solo se puede aplicar si el sistema es Lineal.

A continuación se realiza un ejemplo para resolver diagrama en bloques en dónde se presenta más de una entrada.

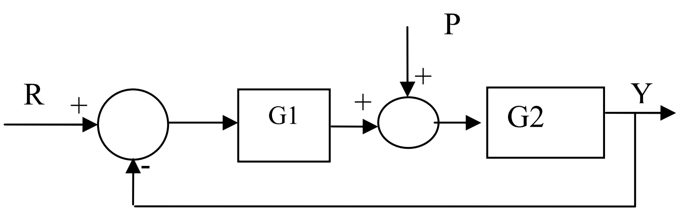
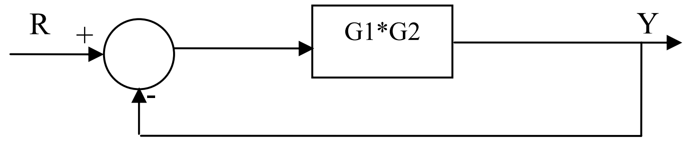


Figura 34- Sistema de control con dos entradas.

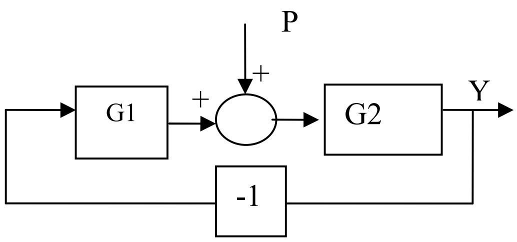
Paso 1: Se toma la entrada P=0.
Paso 2: el sistema se reduce a:



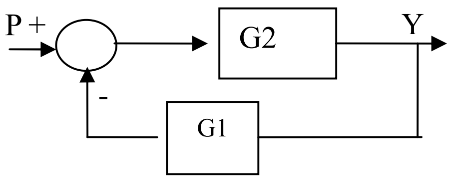
Paso 3:   La salida parcial obtenida es $Y_1 = FT_1\big|_{P=0} * R = \dfrac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} * R$

Paso 1-a): Se toma la entrada R=0.

El Diagrama de bloques queda:



Se coloca en el bloque de realimentación el -1 para representar la realimentación negativa.
Paso 2: Reducir el diagrama en bloques.



Paso 3: La salida parcial Y2 se obtiene: $Y_2 = FT_2\big|_{R=0} * P = \dfrac{G_2}{1 + G_1 G_2} * P$

Paso 5: La Salida Total del Sistema es:

$$Y = FT_1\big|_{P=0} * R + FT_2\big|_{R=0} * P = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} * R + \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} * P$$

A continuación se mostrará el mismo ejemplo que se resolvió con sustitución de ecuaciones simultáneas solo que ahora se resolverá con Diagrama en Bloques.

Encontrar la relación dinámica entre el caudal de entrada qi y el caudal de salida qo, para el tanque mostrado en la Fig. 35:

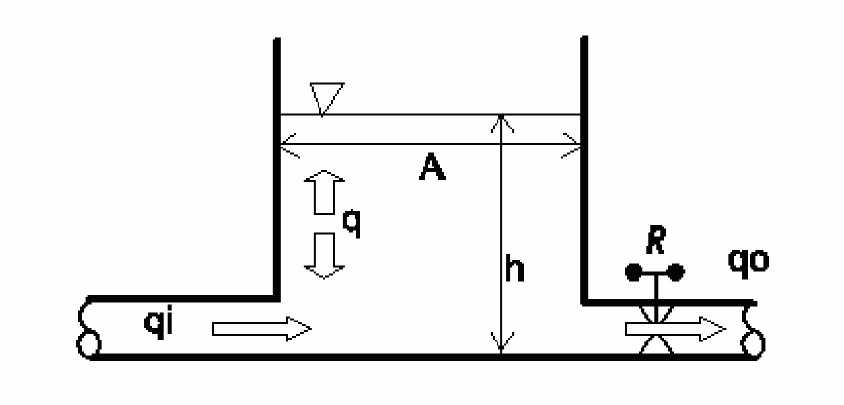


Figura 35. Tanque de caudales.

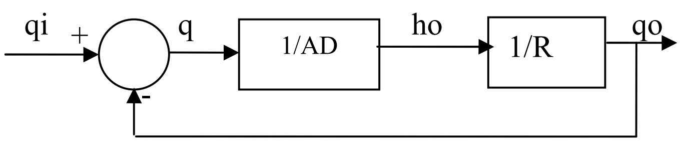
qi= caudal de entrada.
qo= caudal de salida.
q= caudal neto dentro del tanque.
ho= altura del líquido dentro del tanque.
R= resistencia de la válvula.

Las ecuaciones de este tanque son:

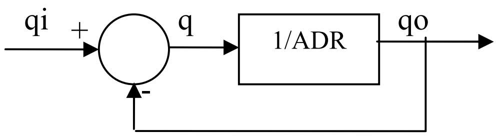
$q = qi - qo$ (1)

$q = ADho$ (2)

$qo = \dfrac{ho}{R}$ (3)



Reduciendo el Diagrama en Bloques nos queda:



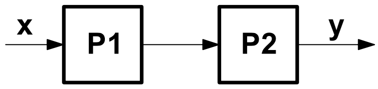
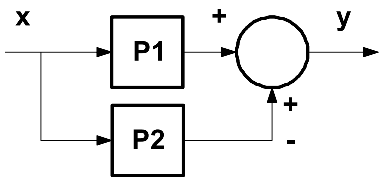
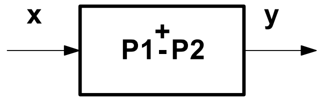
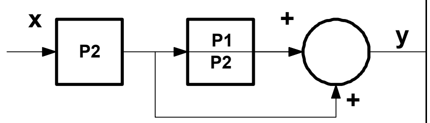
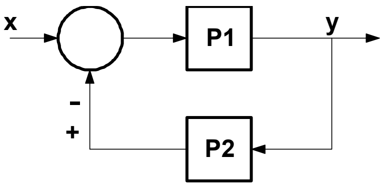
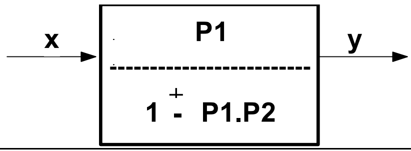
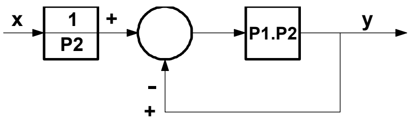
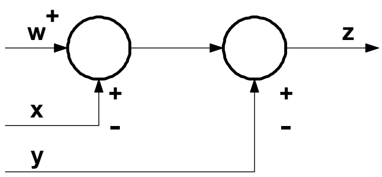
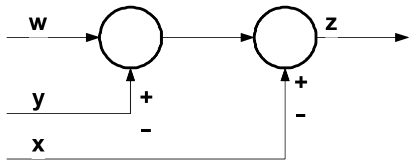
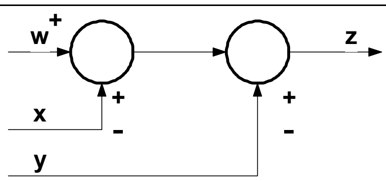
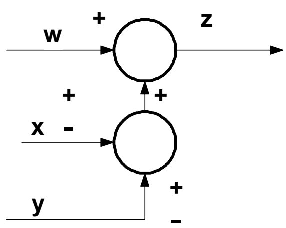
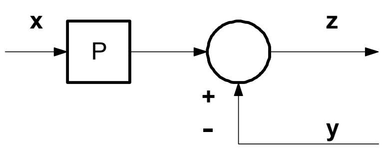
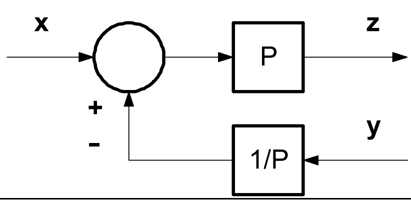
Aplicando la fórmula para obtener la Función de Transferencia se obtiene:

$$FT_{LC} = \frac{qo}{qi} = \frac{1/R\,AD}{1+1/R\,AD} = \frac{1}{\underbrace{RA}_{T}D+1} = \frac{1}{1+TD}$$

Como se puede observar, se llega a la misma función de transferencia que se obtuvo con el método de sustitución de ecuaciones simultáneas.

2.4.2.10- Tabla resumen de los principales tipos de transformaciones presentes en los diagramas de bloque.

A continuación en la hoja siguiente, se anexa una tabla, que contiene algunas de las principales reducciones, que se pueden encontrar en los diagramas de bloque, y que ayudan a resolver diagramas más complicados.

<table>
<tr><th colspan="2">Transformación</th><th>Ecuación</th><th>Diagrama de Bloque</th><th>Diagrama Equivalente</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Combinación de bloques en cascada</td><td>y = (P1.P2).x</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Combinación de bloques en paralelo o eliminación de un lazo directo</td><td>y = P1.x ± P2.x</td><td rowspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Eliminación de un bloque en la trayectoria directa</td><td>y = P1.x ± P2.x</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Eliminación de un lazo de realimentación</td><td>y = P1(x ±P2.y)</td><td rowspan="2">
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Eliminación de un bloque de un lazo de realimentación</td><td>y = P1(x ±P2.y)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Redistribución de los puntos de Suma</td><td>z = w ± x ± y</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Redistribución de los puntos de Suma</td><td>z = w ± x ± y</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Desplazamiento de un punto de suma hacia delante de un bloque</td><td>z = P.x ± y</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

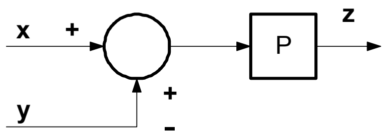
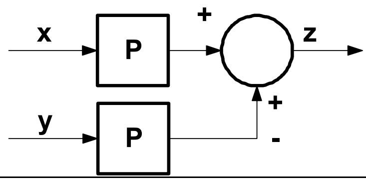
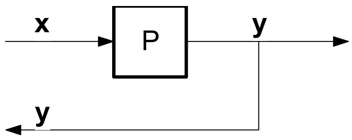
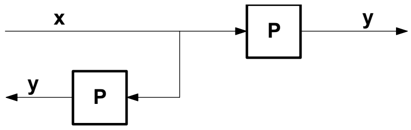
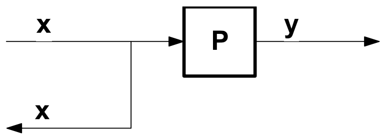
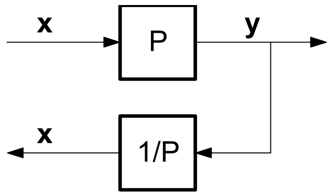
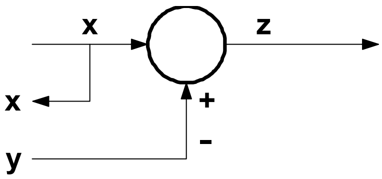
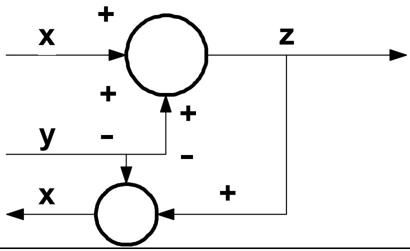
Transformación		Ecuación	Diagrama de Bloque	Diagrama Equivalente
8	Desplazamiento de un punto de suma más allá de un bloque	**z = P. [x ± y]**		
9	Desplazamiento de un punto de bifurcación hacia delante de un bloque	**y = P.x**		
10	Desplazamiento de un punto de bifurcación más allá de un bloque	**y = P.x**		
11	Desplazamiento de un punto de toma hacia delante de una suma.	**z = x ± y**		

Tabla 1: Transformaciones específicas presentes en los diagramas de bloque

2.4.2.11- Reducción de Diagramas de bloques complicados.

A menudo el diagrama en bloques de un sistema de control, puede incluir varios lazos de realimentación, alimentación directa y entradas múltiples. Cada sistema de realimentación de lazo múltiple puede reducirse a una forma canónica.
Los siguientes pasos generales, se pueden usar como una ayuda en la reducción de diagramas más complicados. Cada paso se refiere a transformaciones específicas en la representación de la tabla 1

Paso 1: Combinar todos los bloques en cascada, usando la transformación 1.
Paso 2: Combinar todos los bloques en paralelo, usando la transformación 2.

Paso 3: Eliminar todos los pasos menores de realimentación usando la transformación 4.
Paso 4: Desplazar los puntos de suma hacia la izquierda, y los puntos de toma hacia la derecha del lazo principal, usando la transformaciones 7, 10, 12.
Paso 5: Repetir los pasos de 1 a 4 hasta que se logre la forma canónica para una entrada particular.
Paso 6: Repetir los pasos de 1 a 5 para cada entrada según sea necesaria.

Ejemplo: Reducir el siguiente diagrama en bloque a una forma canónica.

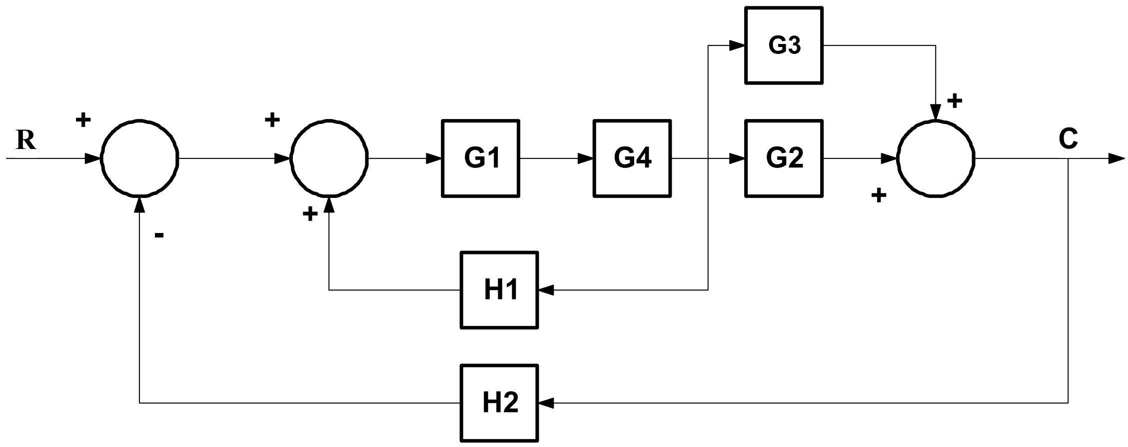
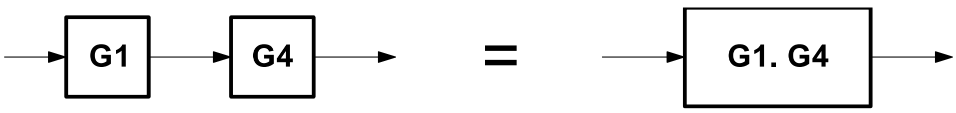
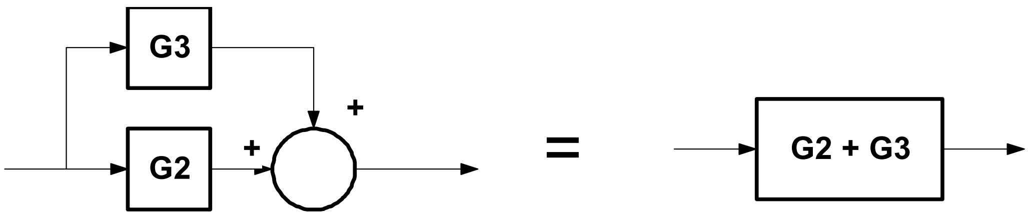


Figura 36

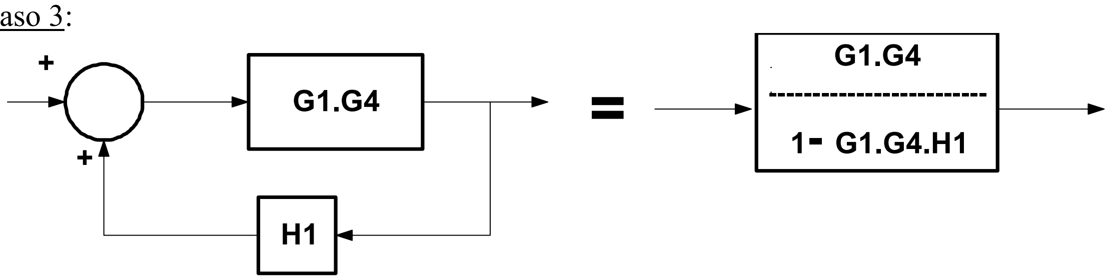
Paso 1:



Paso 2:

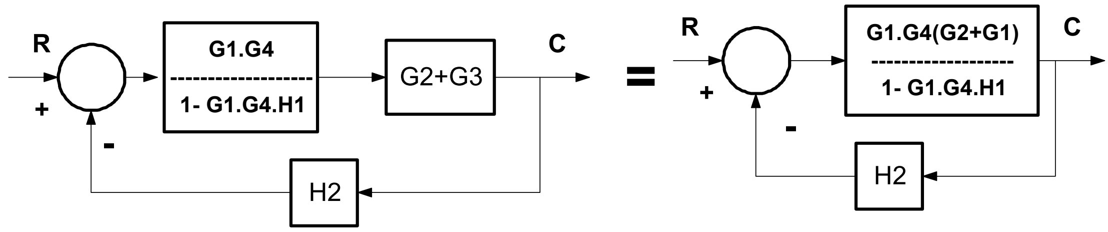


Paso 3:



Paso 4: No se aplica

Paso 5:



Paso 6: No se aplica

2.4.3- Determinación de la Función de Transferencia por el Método de Gráficas de Flujo de Señal.

Un diagrama de flujo, es un método gráfico-analítico, que **permite representar un conjunto de ecuaciones simultáneas, lineales y algebraicas.**
El diagrama de flujo, consiste en una red, formada por nodos y ramas. Cada nodo representa una variable, y cada rama entre nodos, que tiene una dirección y sentido asociado, es un multiplicador de señal, es decir: representa la relación que vincula la variable causa con la variable efecto. La señal fluye en un solo sentido, el de la flecha, y el factor de multiplicación se coloca sobre la rama. Por lo tanto, un gráfico de flujo-señal, muestra el flujo de señales de un punto de un sistema a otro y da la relaciones entre señales.
Una gráfica de flujo de señal (SFG [Signal-Flow Graph]) se puede ver como una versión simplificada de un diagrama de bloques. La SFG fue introducida por S. J. Mason para la representación de causa y efecto de sistemas lineales que son modelados por ecuaciones algebraicas.
El diagrama de flujo-señal, contiene la misma información que un diagrama de bloques, la ventaja de usar el diagrama de flujo frente al uso del diagrama de bloque, viene dada por la posibilidad de usar la fórmula de de Mason, que permitirá obtener la ganancia total del sistema, sin necesidad de realizar una reducción del diagrama de flujo, como ocurría con las reducciones del diagrama de bloque.

Considere que un sistema lineal está descrito por un conjunto de N ecuaciones algebraicas:

$$y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{kj} y_k \qquad j = 1, 2, \ldots.., N \tag{59}$$

Debe señalarse que estas N ecuaciones están escritas en la forma de relaciones de causa y efecto:

$$j - \acute{e}simo\ efecto = \sum_{k=1}^{N} (ganancia\ desde\ K\ a\ j) * (k - \acute{e}sima\ causa)$$

$$\text{o simplemente:}\quad salida = \sum ganancia * entrada \tag{60}$$

Este es el axioma más importante en la formación del conjunto de ecuaciones algebraicas para las SFG. En el caso de que el sistema esté representado por un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales, primero se deben transformar en ecuaciones de la transformada de Laplace o con el operador D y después se rearreglan estas últimas en la forma de la siguiente ecuación:

$$Y_j(s) = \sum_{k=1}^{N} G_{kj}(s) Y_k(s) \qquad j = 1, 2, ..., N \tag{61}$$

2.4.3.1-Elementos Básicos de una gráfica de flujo señal.

Cuando se construye una SFG, los puntos de unión, o nodos, se utilizan para representar variables. Los nodos están conectados por segmentos lineales llamados ramas, de-acuerdo de con las ecuaciones de causa y efecto. Las ramas tienen ganancias y direcciones asociadas. la Una señal se puede transmitir a través de una rama solamente en la dirección de la flecha.
En general, dado un conjunto de ecuaciones tales como las Ec. (59)o (61), la construcción de una SFG consiste en seguir las relaciones de causa y efecto relacionando cada variable en términos de sí misma y de las otras. Por ejemplo, considere que un sistema lineal está representado por la ecuación algebraica sencilla:

$$y_2 = a_{12} y_1 \tag{62}$$

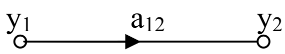


Figura 37. Gráfica de Flujo Señal.

en donde y_1 es la entrada, y_2 la salida, y a_{12} la ganancia o transmitancia entre las dos variables. a12 es un operador matemático que proyecta a y1 sobre y2. La representación en SFG de la Ec. (62) se muestra en la Fig. 37. Observe que la rama que se dirige del nodo y_1 (entrada), al nodo y_2 (salida) expresa la dependencia de y_2 sobre y_1 pero no el contrario. La rama entre el nodo de entrada y el de salida se debe interpretar como un amplificador unilateral con ganancia a_{12}, por lo que cuando una señal de magnitud uno se aplica en la entrada y_1 una señal de magnitud $a_{12}y_1$ se entrega en el nodo y_2.

Aunque en forma algebraica la Ec. (62) se puede escribir como:

$$y_1 = \frac{1}{a_{12}} y_2 \tag{63}$$

la SFG de la Fig. 37 no implica esta relación. Si la Ec. (63) es válida como una ecuación de causa y efecto, se debe dibujar una SFG nueva con y_2 como la entrada y y_1 como la salida.

Ejemplo de construcción de diagrama de Flujo, considere el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas. En la Fig. 38 se muestra la construcción del diagrama paso a paso.
:

$$y_2 = a_{12} y_1 + a_{32} y_3$$
$$y_3 = a_{23} y_2 + a_{43} y_4$$
$$y_4 = a_{24} y_2 + a_{34} y_3 + a_{44} y_4$$
$$y_5 = a_{25} y_2 + a_{45} y_4$$

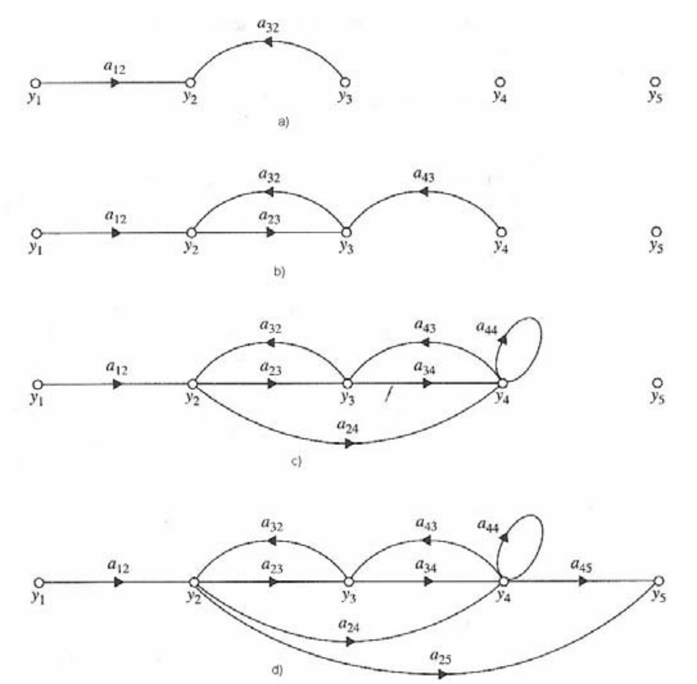


Figura 38. a) $y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3$; b) $y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3$ y $y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y$; c) $y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3$, $y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y$ y $y_4 = a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4$;d) Diagrama de flujo completo.

2.4.3.2-Resumen de las propiedades básicas de una gráfica de flujo de señal.

Las propiedades importantes de la SFG que han sido cubiertas hasta el momento se resume como siguen:

1- La SFG se aplica solamente a sistemas lineales.
2- Las ecuaciones a partir de las cuales se dibuja una SFG deben ser algebraicas en la forma causa y efecto.
3- Los nodos se utilizan para expresar variables. Normalmente, los nodos se arreglan de izquierda a derecha, desde la entrada a la salida, siguiendo una sucesión de relaciones de causa y efecto a través del sistema.
4- La señal viaja a través de las ramas solamente en la dirección descrita por las flechas.
5- La dirección de la rama de la rama desde el nodo y_k a y_j, representa la dependencia de y_j sobre y_k, pero no al contrario.
6- Una señal y_k que viaja a través de una rama entre y_k y y_j se multiplica por la ganancia de la rama, a_{kj}, por lo que la señal $a_{kj}y_k$ es entregada en y_j.

2.4.3.3-Definiciones de los términos de una gráfica de flujo de señal.

Además de las ramas y los nodos definidos anteriormente para una SFG, los siguientes términos son útiles para el propósito de identificar y realizar las operaciones del álgebra de un SFG.

Nodo de entrada (fuente). Un nodo de entrada es un nodo que tiene solamente ramas de salida, o ramas que salen de él (Ejemplo: nodo y_1 en la Fig. 37). Corresponden a una variable independiente.

Nodo de salida (pozo o sumidero). Un nodo de salida es un nodo que tiene solamente ramas de entrada o ramas que solo llegan a él (Ejemplo: nodo y_2 en la Fig. 37). Corresponde a una variable dependiente. Sin embargo, esta condición no siempre se alcanza mediante un nodo de salida. Por ejemplo, la SFG de la Fig. 39(a) no tiene ningún nodo que satisface la condición de nodo de salida. Puede ser necesario visualizar a y_2 y/o y_3 como nodo de salida, para el propósito de encontrar los efectos en estos nodos debido a la entrada. Para hacer que y_2 sea un nodo de salida, simplemente se conecta una rama con ganancia unitaria desde el nodo existente y_2 a un nuevo nodo también designado como y_2 como se muestra la Fig. 39(b).

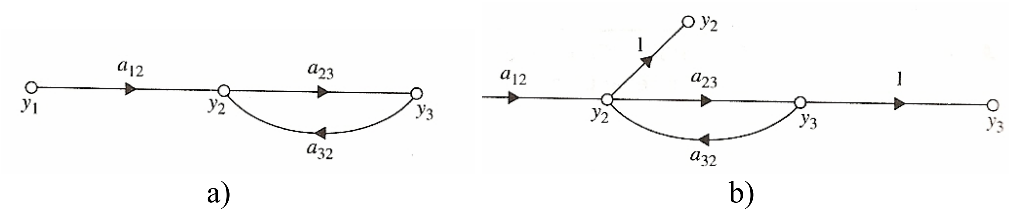


Figura 39. a) Gráfica de flujo señal original; b) Grafica de flujo señal modificada.

Trayectoria: Una trayectoria es cualquier camino de una sucesión continua de ramas que se dirigen en la misma dirección. La definición de una trayectoria es enteramente general, ya que no previene que cualquier nodo la atraviese más de una vez. Por tanto, la simple SFG de la Fig. 39(a), puede tener numerosas trayectorias que atraviesan las ramas a_{23} y a_{32} en forma continua.

Trayectoria directa: Una trayectoria directa es una trayectoria que empieza en un nodo de entrada y termina en un nodo de salida, a lo largo de la cual ningún nodo se atraviesa más de una vez. Por ejemplo, en la SFG de la Fig. 38(d), y_1 (es el nodo de entrada, y el resto de los nodos son todos nodos posibles de salida. La trayectoria entre y_1 y y_2 es simplemente la rama conectada entre los dos nodos. Existen dos trayectorias entre y_1 y y_3; una contiene las ramas desde y_1 a y_2 a y_3 y la otra contiene las ramas desde y_1 a y_2 a y_4 (a través de la rama con ganancia a_{24}) y entonces de regreso a y_3 (a través de la rama con ganancia a_{43}).

Malla o lazo: Una malla o lazo es una trayectoria que se origina y termina en el mismo nodo y en donde ningún otro nodo se encuentra más de una vez. Por ejemplo, existen cuatro mallas en la SFG de la Fig. 38(d). Éstas se muestran en la Fig. 40.

Ganancia de la trayectoria: El producto de las ganancias de las ramas que conforman una trayectoria se llama ganancia de la trayectoria. Por ejemplo, la ganancia de la trayectoria para la trayectoria y_1- y_2- y_3- y_4 de la Fig. 38 (d) es a_{12}* a_{23}* a_{34}.

Ganancia de la trayectoria directa: es el producto de todas las ganancias de las ramas que componen un trayecto.

Ganancia de Lazo o malla: Es el producto de todas las ganancias de las ramas que forman un lazo.

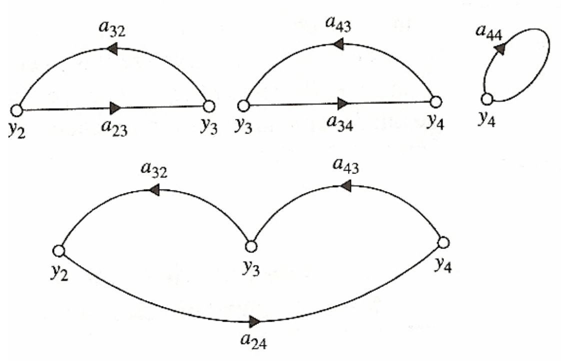


Figura 40. Lazos o mallas.

Lazo simple o Autolazo: Se lo denomina también automalla. Es un lazo de realimentación que consiste en una sola rama, por ejemplo el lazo formado por la variable y_4- y_4 en la Fig.40.

Lazos Disjuntos: Son todos los lazos que no poseen ningún nodo en común, por ejemplo los lazos formados por: y_2- y_3- y_2 y y_4- y_4 de la Figura 40.

Lazos Adjuntos: Son lazos que tienen algún nodo o rama en común, por ejemplo los lazos formados por: y_2- y_3- y_2 y y_3- y_4- y_3 de la Figura 40.

2.4.3.4- Algebra de las Gráficas de Flujo Señal.

Con base a las propiedades de la SFG, se pueden señalar las siguientes reglas de manipulación y álgebra de la SFG.

1- El valor de la variable representada por un nodo es igual a la suma de todas las señales entrantes al nodo. En la Fig.41 se observa que el valor de y_1 es igual a la suma de las señales transmitidas a través de todas las ramas entrantes, esto es:

$$y_1 = a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 + a_{51}y_5$$

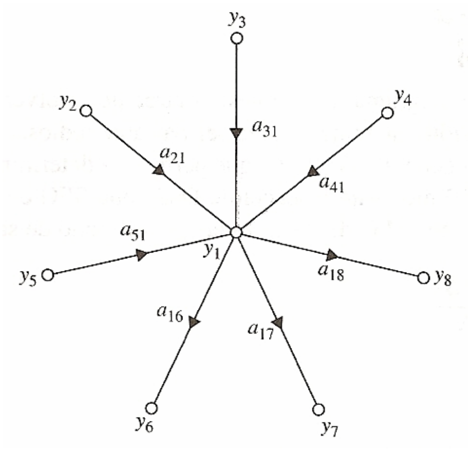


Figura 41. Nodo como un punto de suma y un punto de transmisión.

2- El valor de la variable representada por un nodo se transmite a través de todas las ramas que dejan el nodo. En la SFG de la Fig. 41 se tiene:

$$y_6 = a_{16} y_1$$
$$y_7 = a_{17} y_1$$
$$y_8 = a_{18} y_1$$

3- Las ramas paralelas con la misma dirección que conecta dos nodos se pueden reemplazar por una sola rama con ganancia igual a la suma de las ganancias de las ramas paralelas. Un ejemplo se ilustra en la Fig. 42.

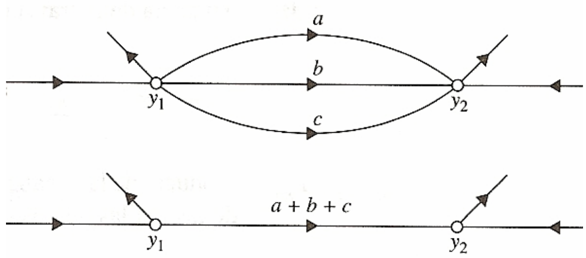


Figura 42. Grafica de Flujo señal con trayectorias paralelas, reemplazadas por una rama sencilla.

4- Una conexión en serie de ramas unidireccionales, como se muestra en la Fig. 43, se puede reemplazar por una sola rama con ganancia igual al producto de las ganancias de las ramas.

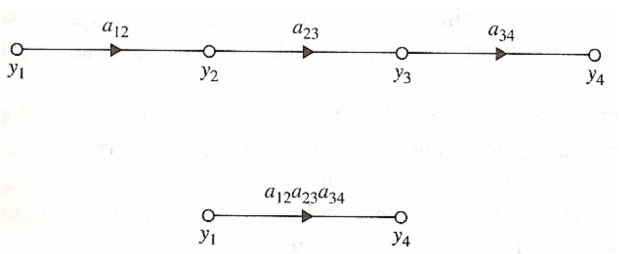


Figura 43. SFG con ramas unidireccionales en cascada reemplazadas por un rama sencilla.

2.4.3.5- Formulas de Ganancia para Gráficas de Flujo Señal.

Dada una SFG o un diagrama de bloques, la tarea de resolver las relaciones entrada- salida mediante manipulación algebraica puede ser bastante tediosa. Afortunadamente, Samuel J. Mason desarrolló un método por el cual es posible encontrar por inspección la relación entre dos variables de un SFG. El método de Mason corresponde la solución de ecuaciones lineales usando determinantes y cofactores.

La transmisión entre un nodo fuente x_i y uno no fuente x_o, esta dado por:

$$P = \frac{x_o}{x_i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \Delta_k}{\Delta} \qquad (64)$$

Donde:

P es la ganancia entre las variables x_i y x_o. Si x_i es la variable de entrada al sistema, y x_o la variable de salida, P es la ganancia total del sistema, que es la Función de Transferencia de Lazo Cerrado.
n es el número de trayectorias diferentes que existen entre xi y xo.
P_k es la ganancia de la k-ésima trayectoria.
Δ es el determinante general del gráfico de flujo señal. Es el polinomio característico del sistema **($\Delta = 0$ es la ecuación característica del sistema).**
Δ es independiente de las entradas o salidas escogidas, solo depende de los lazos presentes en el diagrama, es decir solo es función de los parámetros del sistema, de ahí su nombre de ecuación característica.
Δ_k es el determinante particular o cofactor del k-ésimo trayecto directo.
Conocidas las definiciones de trayecto directo, ganancia de trayecto directo, lazo, ganancia de lazo y lazos disjuntos, se procederá ahora a definir el término determinante de la Fórmula de Mason.

Δ es el determinante del gráfico de flujo señal, el cual es igual a:

Δ = 1 - (suma de las ganancias de todos los lazos distintos) + (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de lazos tomados de dos que sean disjuntos) - (suma de los productos de las ganancias de todas las combinaciones posibles de lazos que sean disjuntos tomados de a tres) + . . . (se sigue sucesivamente alternado el signo y elevando la cantidad de lazos no adjuntos tomados).
Δ_k es igual a la definición de Δ, solo que se toma la parte de SFG que no toca la k-ésima trayectoria directa.

2.4.3.6-Las Gráficas de Flujo Señal y los Sistemas de Control.

Para el caso en que los sistemas de control a estudiar son sistemas lineales e invariantes en el tiempo, los modelos matemáticos obtenidos consisten de ecuaciones integro-diferenciales ordinarias lineales, con coeficientes constantes, se hace muy sencillo representar a estos por diagramas de flujo señal.

En primer lugar, al igual que el método de diagramas en bloques, hay que disponer de todas las ecuaciones que modelan los diferentes elementos de nuestro sistema. Luego las ecuaciones diferenciales se transforman en algebraicas, utilizando el operador D (D = d/dt), o aplicando transforma de Laplace (Suponiendo C.I=0, se reemplaza directamente el operador D por la variable compleja S), y el conjunto de ecuaciones algebraicas así obtenidas, se lo representa fácilmente en un Diagrama de Flujo Señal.

Para ejemplificar esto se usará el tanque, el cual se empleó en las secciones anteriores para llegar a obtener la relación entre el caudal de entrada y el caudal de salida.

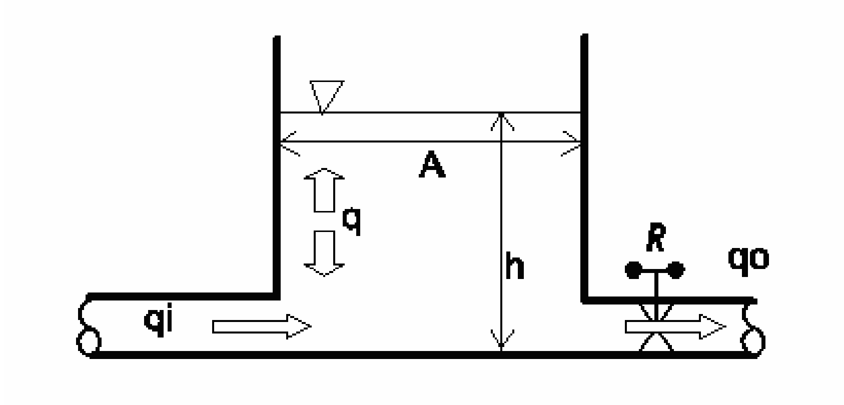


Figura 44. Tanque.

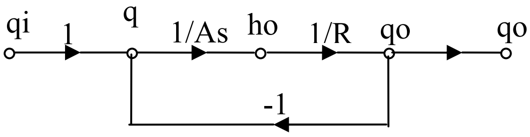
Las ecuaciones algebraicas que modelan este sistema son:

$q = qi - qo$ (1)

$q = Asho$ (2)

$qo = \dfrac{ho}{R}$ (3)

El diagrama de Flujo de este sistema es el siguiente:



Como puede observarse el conjunto de ecuaciones simultáneas quedó representado por un gráfico de Flujo señal siguiendo las regalas estudiadas anteriormente.

Como el sistema en estudio, es un sistema de control, cuyo modelo matemático a obtener es una función de transferencia, cuando se determina la ganancia total entre el nodo de entrada y un nodo de salida en el gráfico de flujo señal, se habrá determinado la función de transferencia que vincula a las variables de entrada y salida representados por los nodos de entrada y salida considerados.
Por consiguiente esta función de transferencia se podría obtener aplicando la fórmula de Mason, la cual es un método sencillo y rápido para determinar la Función de Transferencia, que normalmente por resolución de ecuaciones del sistema o por reducción de diagramas en bloque se hace a veces mucho más complicado, cuando los sistemas son complejos o bastante laborioso.
La ventaja de los diagramas de bloque, es que es posible evaluar la contribución de cada componente en el funcionamiento global de todo el sistema. En muchas ocasiones brinda una mejor visualización de la forma en cómo están conectados entre sí, los distintos componentes de un sistema. Indica en una forma más realista el flujo de señales del sistema real, aunque su reducción paso a paso es lenta y complicada, por lo que frente a la sencillez de aplicar la Fórmula de Mason a un Diagrama de Flujo señal se la suele descartar. Sin embargo, es procedimiento usual dibujar primero un diagrama de bloques del sistema cuya función se quiere determinar y

posteriormente a partir de esto, dibujar el diagrama de flujo señal, a los efectos de aplicar la fórmula de Mason y obtener la función de transferencia.
A continuación se encuentra la Función de Transferencia usando la Formula de Mason de la siguiente manera:

$$n = 1$$

$$P_1 = \frac{1}{As} * \frac{1}{R}$$

$$Lazos = 1 = L_1 = -1 * \frac{1}{As} * \frac{1}{R} \qquad \Rightarrow \quad FT = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{1/AsR}{1 + 1/AsR} = \frac{1}{1 + \underbrace{AR}_{T} s}$$

$$\Delta = 1 - (L_1) = 1 + \frac{1}{As}\frac{1}{R}$$

$$\Delta_1 = 1$$

BIBLIOGRAFÍA:

- Apuntes “Introducción a los Sistemas de Control”, 1982 Autor: Ing. Mario Pérez López
- Apuntes “Modelo Matemático”, 1982 Autor: Ing. Mario Pérez López
- “Sistemas de Control Automático”. Autor: Benjamín C. Kuo, Séptima Edición. Editorial: “Prentice Hall Hispanoamericana S.A” ,1996.
- "Ingeniería de Control Moderna". Autor: K. Ogata, Tercera Edición. Editorial: “Prentice Hall”, 1998 .
- “Engineering Systems and Automatic Control”, Autor: Dransfiel, Peter.
- “Controles Automáticos”, Autores: Howard L. Harrison y John G. Bollinger.
- “Servo Sistemas. Teoría y Cálculo”. Autores: Guille, Decaulne y Pelegrin.