

RELACIONES DIFUSAS

1.- Definición

2.- Algunas ideas generales

3.- Operaciones con relaciones difusas

DEFINICIÓN

Una relación difusa entre elementos de universos X, Y, \dots es un subconjunto difuso del producto cartesiano de dichos universos.

Mientras en la teoría clásica los los elementos de una tupla del producto cartesiano estan o no en relación, en una relación difusa cada tupla esta afectada de un valor en $[0,1]$ que mide en qué grado dichos elementos estan relacionados.

Las relaciones mas interesantes son las binarias y dentro de estas aquellas en que X es igual a Y .

Por ejemplo, la relación difusa $R = "x \text{ es aproximadamente igual que } y"$, podría tener la siguiente tabla de pertenencia

X/Y	1	2	3	4
1	1	0.5	0.1	0
2	0.5	1	0.5	0.1
3	0.1	0.5	1	0.5
4	0	0.1	0.5	1

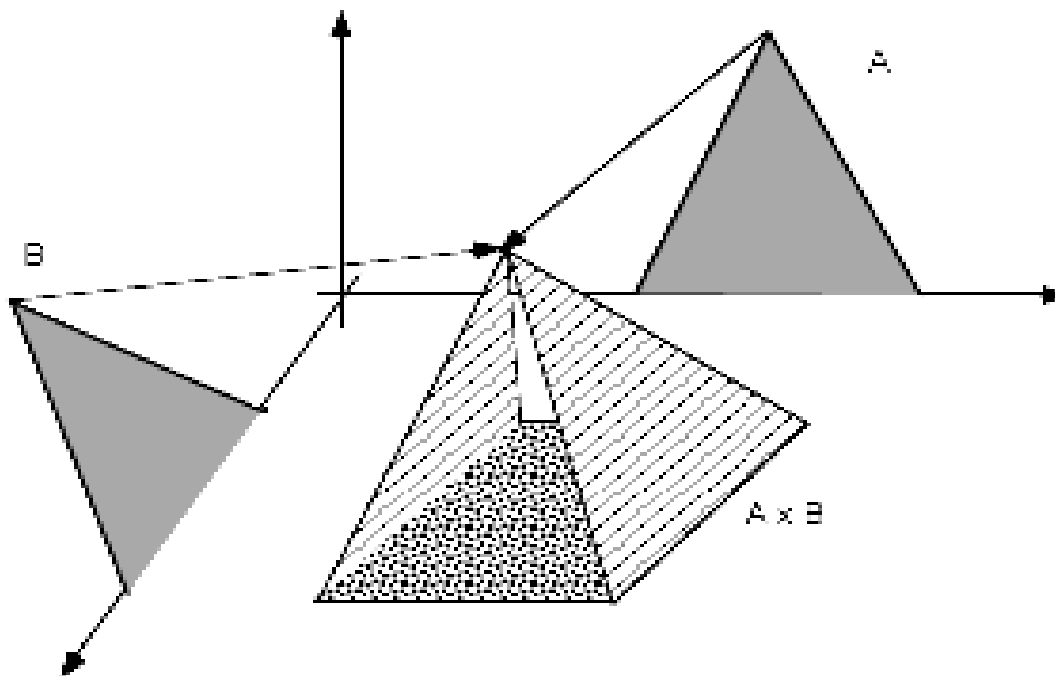
donde expresamos el grado en que los elementos de ambos conjuntos están relacionados entre si.

ALGUNAS IDEAS GENERALES

- 1) El producto cartesiano de dos s.d. A y B sobre los universos X e Y respectivamente definido como:

$$A \times B(u, v) = \min\{A(u), B(v)\}$$

genera una relación binaria difusa en $X \times Y$.



2.- En las relaciones difusas binarias con $X=Y$ se pueden encontrar propiedades que extienden las que se dan en las relaciones clásicas:

Reflexividad $R(x,x) = 1$ para todo x

Simetria $R(x,y) = R(y,x)$ para todo x e y

Antisimetria $R(x,y) \neq R(y,x)$ para todo x e y

Transitividad (max-min)

$$R(x,y) \geq \sup[\{ \min(R(x,u), R(u,y)) \} | u]$$

3.- Por medio de estas propiedades se pueden diversos tipos de relaciones difusas:

Semejanza: Reflexiva y simetrica

Similitud: Reflexiva, simetrica y transitiva (max-min)

Orden: Reflexiva, Antisimétrica y tansitiva (max-min)

Todo α -corte de una similitud es una relación de equivalencia clásica.

Todo α -corte de relación de orden difusa es una relación de orden clásica.

OPERACIONES CON RELACIONES

1 PROYECCION

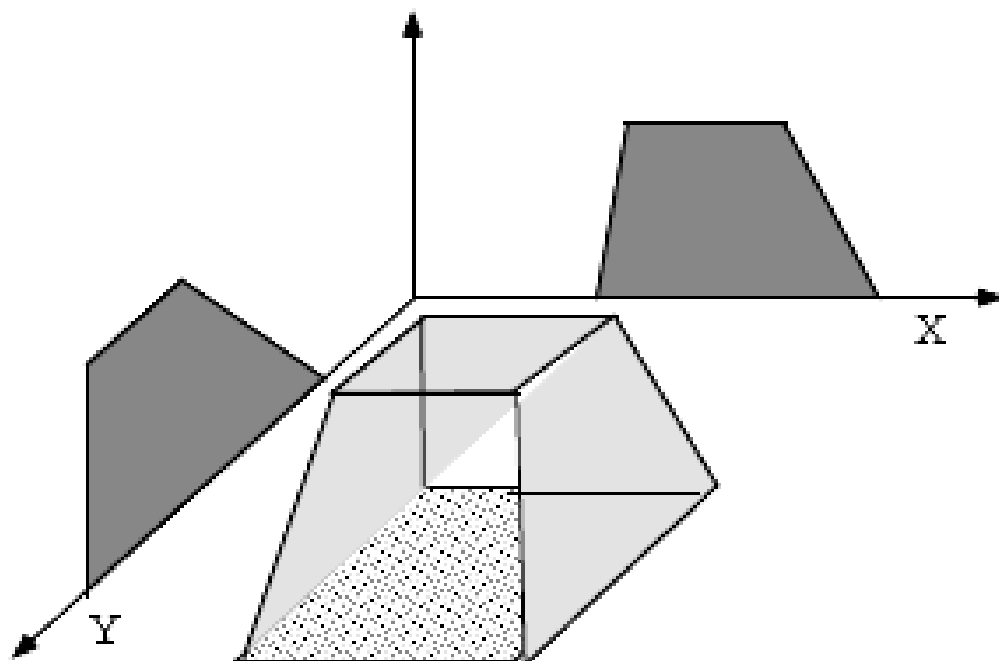
El proceso de proyección consigue reducir una relación (dos dimensiones) a un conjunto difuso (una sola dimensión).

La proyección de la relación R sobre Y se define como el subconjunto difuso de Y con función de pertenencia

$$\text{PRY (R,Y)}(y) = \sup(R(x,y)|x)$$

para cada valor de y, buscar la máxima R(x,y) respecto de las x.

Gráficamente:



2.- EXTENSION CILINDRICA (CE)

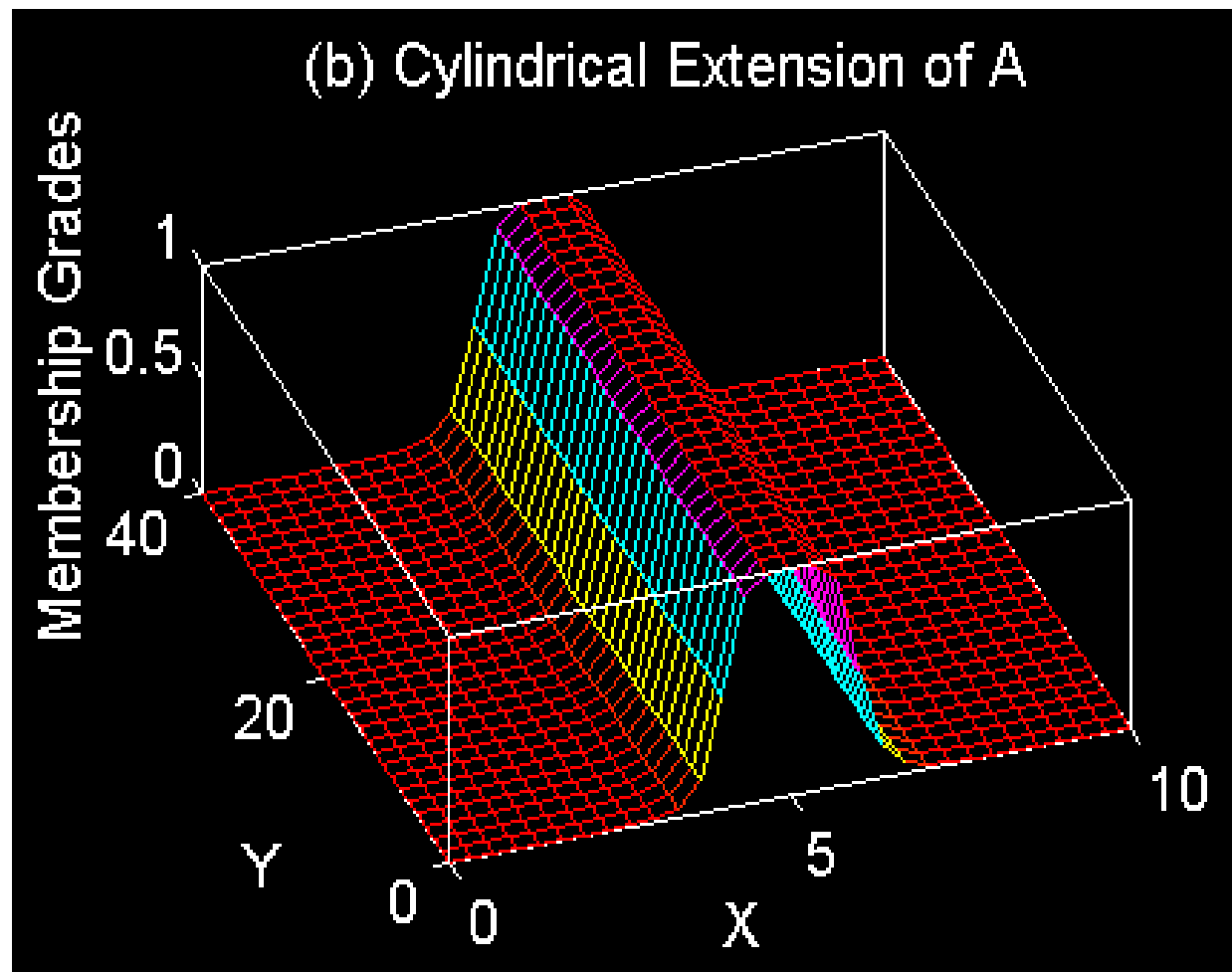
La extensión constituye el paso inverso a la proyección: a partir de un conjunto difuso obtenemos una relación.

La extensión consiste en asignar el valor de la función de pertenencia de cada x en X a todos sus tuplas en Y .

Si A es un subconjunto difuso de un universo X e Y es otro universo cualquiera, la extensión cilíndrica de A a $X \times Y$ es la relación difusa sobre el producto cartesiano de función de pertenencia:

$$EC(A)(x,y) = A(x) \text{ para cualquier } y \text{ de } Y$$

Gráficamente:



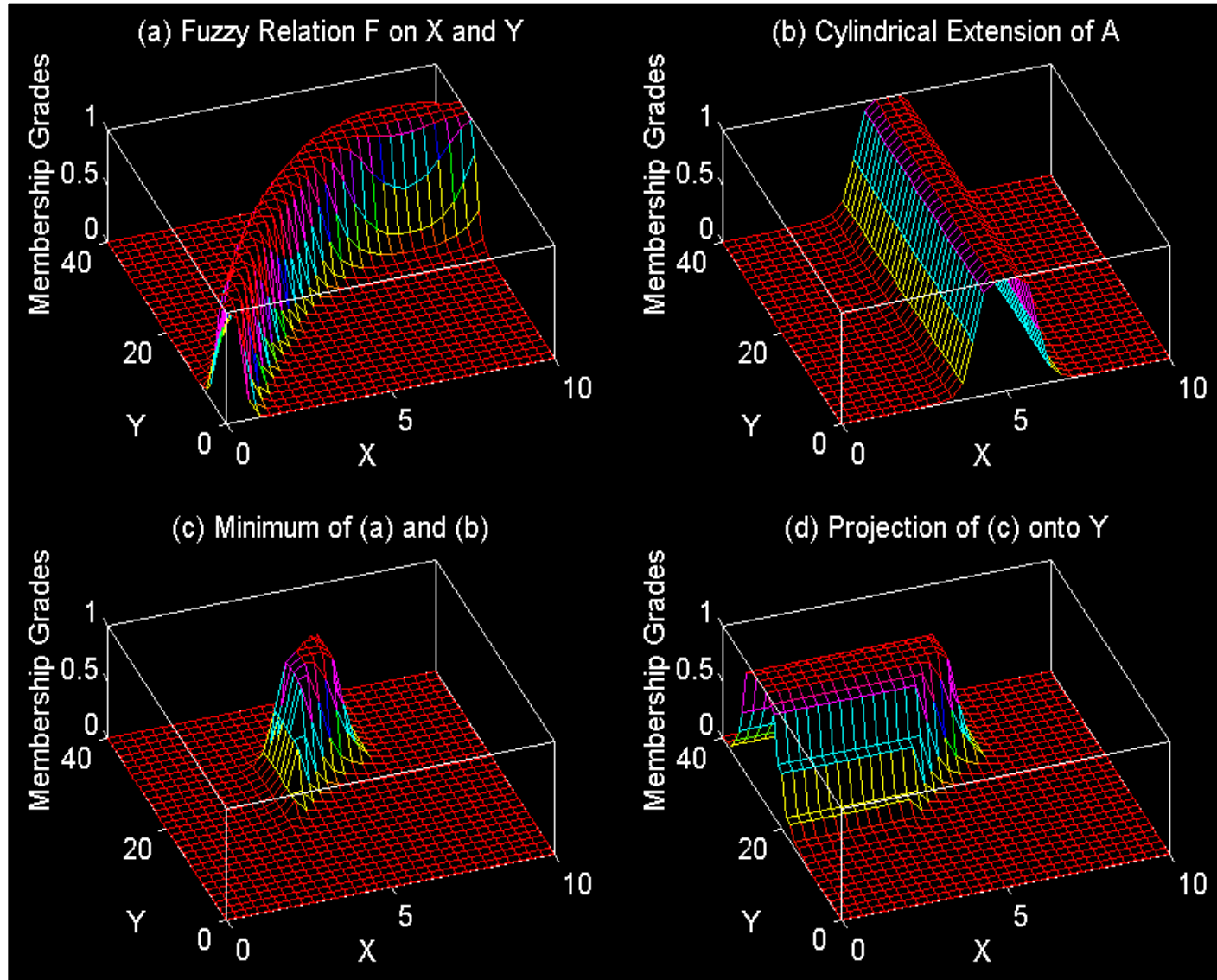
Como puede verse, para extender el conjunto difuso X hacia el universo Y , basta con hacer el producto cartesiano de ambos universos y asignar, para cada tupla, un valor de Y igual al valor de su X correspondiente en la tupla.

3.- COMPOSICION

Esta operación se efectúa entre un conjunto difuso y una relación, dando como resultado un conjunto difuso nuevo. Por ejemplo, dados el conjunto difuso A y la relación R

$$\mathbf{B=A \bullet R = PRY(EC(A) \cap R)}$$

Gráficamente:



**La composición es una herramienta clave para el
“Razonamiento Aproximado”**

'Agnes es algo mas alta que Olga' (una relación difusa)

'Agnes es muy alta' (una proposición)

¿Cómo es Olga? (proposición conclusión)

Supongamos que 'algo mayor que' se describa por 'aproximadamente 5 cm más alto que' (cuando la altura de Agnes supera la de Olga por 5 cm, hallamos un 1 en la función de pertenencia).

Agnes/Olga	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
1.700	0.4	0.1	0	0	0	0
1.725	0.7	0.4	0.1	0	0	0
1.750	1	0.7	0.4	0.1	0	0
1.775	0.7	1	0.7	0.4	0.1	0
1.800	0.4	0.7	1	0.7	0.4	0.1
1.825	0.1	0.4	0.7	1	0.7	0.4

Seguidamente definamos el conjunto difuso 'Agnes es muy alta'

Altura de A	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
M(altura)	0	0.1	0.4	0.7	0.9	1

Para efectuar la composición de A con R, el primer paso es extender cilíndricamente A. (la operación extensión cilíndrica no es conmutativa; cuidado con el universo que extendemos, debe ser el del conjunto difuso.)

CE(A) =

Agnes/Olga	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
1.700	0	0	0	0	0	0
1.725	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.750	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
1.775	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
1.800	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
1.825	1	1	1	1	1	1

Seguidamente debemos hacer el mínimo de las dos relaciones obtenidas (la que relaciona un universo con otro (R) y la extensión cilíndrica que acabamos de efectuar). Intersectando A con R por la T-norm del mínimo (efectuamos el mínimo de ambas tuplas),

Agnes/Olga	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
1.700	0	0	0	0	0	0
1.725	0.1	0.1	0.1	0	0	0
1.750	0.4	0.4	0.4	0.1	0	0
1.775	0.7	0.7	0.7	0.4	0.1	0
1.800	0.4	0.7	0.9	0.7	0.4	0.1
1.825	0.1	0.4	0.7	1	0.7	0.4

Proyectando ahora sobre el universo de Olga, es decir, cogiendo el máximo de cada columna según la definición de proyección, tenemos:

Altura de O	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
M(altura)	0.7	0.7	0.9	1	0.7	0.4

Observamos que Olga es más baja que Agnes, dado que el conjunto de la altura de Olga está centrado en un valor más pequeño que el conjunto de la altura de Agnes.

Dado que la relación especificaba que Agnes era más alta que Olga, la conclusión es lógica, ya que entrando un conjunto difuso con la altura de Agnes, hemos obtenido otro menor para la altura de Olga. Acabamos de describir un mecanismo para efectuar deducciones a partir de una información contenida en conjuntos difusos.

Agnes/Olga	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
1.700	0.4	0.1	0	0	0	0
1.725	0.7	0.4	0.1	0	0	0
1.750	1	0.7	0.4	0.1	0	0
1.775	0.7	1	0.7	0.4	0.1	0
1.800	0.4	0.7	1	0.7	0.4	0.1
1.825	0.1	0.4	0.7	1	0.7	0.4

Altura de A	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
M(altura)	0	0.1	0.4	0.7	0.9	1

Agnes/Olga	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
1.700	0	0	0	0	0	0
1.725	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
1.750	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
1.775	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
1.800	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
1.825	1	1	1	1	1	1

Agnes/Olga	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
1.700	0	0	0	0	0	0
1.725	0.1	0.1	0.1	0	0	0
1.750	0.4	0.4	0.4	0.1	0	0
1.775	0.7	0.7	0.7	0.4	0.1	0
1.800	0.4	0.7	0.9	0.7	0.4	0.1
1.825	0.1	0.4	0.7	1	0.7	0.4

Altura de O	1.700	1.725	1.750	1.775	1.800	1.825
M(altura)	0.7	0.7	0.9	1	0.7	0.4