Ejercicio:
Sea $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}_5^4 \ tq \ 2x+3y+2z+t=0, \ x+4y+z+3t=0\}$ calcular una base de U

Sabemos que la dimensión de U es igual a la dimensión de $\mathbb{Z}_5^4$ menos el numero de ecuaciones cartesianas linealmente independientes que definen a U.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda ecuación es combinación lineal de la primera y por consiguiente $dim\, U=3$

2x=2y+3z+4t
a una incógnita le doy el valor 1 y al resto 0

y=1, z=0, t=0 → x= 1

cambio la incógnita a la que le doy valor 1

z=1 ,y=0,t=0 → x= 4

vuelvo a cambiar la incógnita a la que le doy valor 1

t=1, y=0, z=0 → x=2

$$B_U=\{(1,1,0,0),(4,0,1,0),(2,0,0,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si hacemos una matriz don las ecuaciones vemos tenemos un determinante 3x3 cuyo valos es 1, por lo tanto es de rango 3 y son linealmente independientes

Ejercicio: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Q}^4$ generado por $\{(1,1,1,1),(1,2,3,3)\}$ y $W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Q}^4 \ tq \ x+y-z-t=0\}$

Calcular una base de U+W

$$B_W=\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$$

Sabemos que U+W está generado por $\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(1,1,1,1),(1,2,3,3)\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{U+W}=\{(-1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,-1,1),(0,0,0,3)\}$

¿Es $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ una base de U+W?

Es una base de U+W ya que U+W es igual a $\mathbb{Q}^4$. Un subespacio coincide con el espacio cuando tienen la misma dimensión.

Ejercicio: Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3$ definida por $f(x,y,z,t)=(x+y+z+t, x+y+z+2t, x+y+z)$

Calcular una base del núcleo

$N(f)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}_5^4 \ tq \ x+y+z+t=0, \ x+y+z+2t=0, \ x+y+z=0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N(f)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{Z}_5^4 \ tq \ x+y+z+t=0, \ t=0\}$

dim N(f) = 4-2=2

x+t=4y+4z
t=0

y=1, z=0 → x+t=4, t=0 → t=0, x= 4

y=0 z=1 → x+t=4, t=0 → t=0, x=4

$B_{n(f)}=\{(4,1,0,0),(4,0,1,0)\}$

Ejercicio: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_7^3$ generado por $\{(2,3,2),(1,3,3)\}$ ¿Es $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ una base de U?

Como $rang\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=2$ son linealmente independientes, $B_U=\{(2,3,2),(1,3,3)\}$ entonces $dim\, U=2$

$\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ será una base de U si el conjunto es linealmente independiente y además está contenido en U

Son linealmente independientes ya que $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}=2$

Vamos a calcular las ecuaciones cartesianas de U respecto a la base canónica para ver si $\{(1,1,5),(2,0,5)\}$ está contenido en U. Sabemos que U viene dado por una sola ecuación que se obtiene al exigir que

$$rang\begin{pmatrix}2 & 1 & x\\ 3 & 3 & y\\ 2 & 3 & z\end{pmatrix}=2 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix}2 & 1 & x\\ 3 & 3 & y\\ 2 & 3 & z\end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \text{6z+2y+2x-6x-6y-3z=0} \rightarrow \text{3x+3y+3z=0} \rightarrow \text{x+y+z=0}$$

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_7^3 \; tq \; x+y+z=0\}$$

Es una base de U

Ejercicio: Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_5^3$ generado por $\{(1,1,1)\}$ y $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{Z}_5^3 \; tq \; x+y+z=0\}$ ¿Es $\mathbb{Z}_5^3=U\oplus W$?

Sabemos que $\mathbb{Z}_5^3=U\oplus W$ si y solo si:

1. $\mathbb{Z}_5^3=U+W$
2. $U\cap W=\{(0,0,0)\}$

$$B_U=\{(1,1,1)\}, B_W=\{(1,4,0),(1,0,4)\} \quad \rightarrow \quad U+W=\langle\{(1,1,1),(1,4,0),(1,0,4)\}\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow \text{dim U+W= 3} \rightarrow \quad \mathbb{Z}_5^3=U+W$$

$$\underset{1}{dim\,U}+\underset{2}{dim\,W}=\underset{3}{dim\,U+W}+dim\,U\cap W \rightarrow dim\,U\cap W=0 \rightarrow dim\,U\cap W=\{(0,0,0)\}$$