

Funciones elementales

3

3.1 Definiciones 29 3.2 Funciones elementales 36 3.3 Ejercicios 46

La idea de función aparece por todas partes: cada persona tiene una edad o un número de hijos o una cantidad de dinero en el bolsillo. No necesariamente tenemos que referirnos a números, podemos decir que cada persona tiene, o tuvo, un color de pelo, una marca de coche, etc. El formalismo de las funciones nos permite tratar todas estas situaciones de la misma forma.

3.1 Definiciones

3.1.1 Dominio, rango e imagen

Definición 3.1. Una función $f : A \rightarrow B$ es una regla que a cada elemento a de A le asocia un único elemento de B . Al conjunto A se la llama *dominio* de la función y a B se le suele llamar *codominio*. No hay que confundir el codominio con la *imagen* de la función que es conjunto

$$f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

La *preimagen* de un elemento b de B son aquellos elementos de A cuya imagen es B . Utilizaremos la siguiente notación

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}.$$

Por extensión, también se puede hablar de la preimagen de un conjunto. Si $B_0 \subset B$, la preimagen de B_0 es

$$f^{-1}(B_0) = \{a \in A : f(a) \in B_0\}.$$

La *gráfica* de la función es el conjunto $\text{Gr}(f) = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}$.

Observación 3.2. La definición de función incluye tres cosas obligatoriamente: el dominio, el codominio y la regla que a cada elemento del dominio le asocia uno del codominio. En ocasiones abusaremos del lenguaje y hablaremos, por ejemplo, de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. ¿Qué queremos decir? Sólo tenemos la regla que define la función. ¿Cuáles son su dominio y su codominio? Su *dominio natural* es el mayor conjunto donde la definición tiene sentido. En nuestro caso sería $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ y el codominio es simplemente la imagen de la función. En general y salvo que se diga lo contrario, en ausencia de un dominio explícito nos referiremos al conjunto donde tiene sentido la definición de la función.

Ejemplo 3.3. Consideremos la función $f : [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cos(x)$.

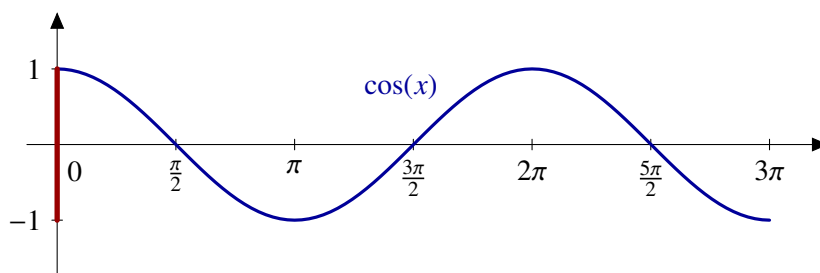


Figura 3.1 Gráfica e imagen de la función coseno

- a) Su dominio es el intervalo $[0, 3\pi]$
- b) Su codominio es todo el conjunto de los números reales aunque podríamos haber puesto cualquier conjunto más grande que el intervalo $[-1, 1]$ (su imagen).
- c) En la Figura 3.1 hemos representado en azul la gráfica de la función, esto es, el siguiente subconjunto del plano

$$\{(x, \cos(x)) : x \in [0, 3\pi]\}.$$

- d) La imagen de la función son los valores que toma. En este caso, la función coseno toma todos los valores entre -1 y 1 (en rojo en la figura anterior).
- e) La preimagen de un valor puede ser única, pueden ser varios elementos o vacía. En nuestro caso, al ser la función periódica, la preimagen nunca es única. Por ejemplo,

$$f^{-1}(1) = \{x \in [0, 3\pi] : \cos(x) = 1\} = \{0, 2\pi\},$$

en cambio, $f^{-1}(2) = \emptyset$, ya que la función coseno nunca vale 2.

- f) ¿Cuándo es la función positiva? Por definición, cuando el valor de la función es mayor estrictamente que cero:

$$f^{-1}([0, +\infty]) = \{x \in [0, 3\pi] : \cos(x) > 0\} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[.$$

Observa que en este caso $f^{-1}([0, +\infty]) = f^{-1}([0, 1])$.

Ejemplo 3.4. Uno de los ejemplos más frecuentes de funciones con los que nos encontramos son las *sucesiones*. En el Capítulo 13 hablaremos de ellas con más detalle. Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Si el codominio es el conjunto de los números reales, tenemos una sucesión de números reales; si el codominio es el conjunto de los alumnos de la clase, tendremos una sucesión de estudiantes, etc. Es importante resaltar que el hecho de que el dominio sea \mathbb{N} lo que nos da es una *lista ordenada* de elementos. Por ejemplo, la función

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = 2n$$

$$1 \mapsto 2$$

$$2 \mapsto 4$$

...

nos enumera el conjunto de los pares: el primer número par es el 2, el segundo el 4, etc.

Ejemplo 3.5. Todos los ejemplos hasta ahora han tenido subconjuntos de \mathbb{R} como dominio y codominio. Es por eso que todas las representaciones las hemos hecho en el plano \mathbb{R}^2 . La representación de funciones con más variables en salida o en llegada requiere más dimensiones para la representación de su gráfica. En la Figura 3.2 tienes la representación de la función definida en el plano como

$$f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2}.$$

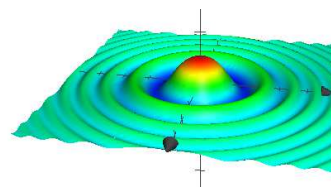


Figura 3.2 Gráfica de una función de dos variables

No es sencillo visualizar en el papel funciones de más variables ya que habría que representar espacios con cuatro dimensiones o más en el plano.

3.1.2 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 3.6.

- a) Una función $f : A \rightarrow B$ es *inyectiva* si se cumple que no hay dos elementos distintos con la misma imagen, esto es, si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.
- b) Una función $f : A \rightarrow B$ es *sobreyectiva* si todo elemento tiene una preimagen, esto es, dado $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- c) Una función $f : A \rightarrow B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo 3.7.

- a) La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Su imagen es \mathbb{R}_0^+ . Por tanto, la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ es sobreyectiva. Ninguna de las dos versiones es inyectiva: $f(x) = f(-x)$. Si restringimos a los positivos o a los negativos, sí. Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es inyectiva.
- b) Las funciones periódicas no son inyectivas: el valor de la función se repite cuando avanzamos el periodo, más concretamente, si la función es T -periódica, entonces $f(x) = f(x + T)$.
- c) La función exponencial y el logaritmo son inyectivas.
- d) La función $\text{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ es biyectiva.

Función inversa

Si $f : A \rightarrow B$ es una función inyectiva, la función inversa de f , a la que denotaremos f^{-1} , es la función $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ definida por $f^{-1}(f(a)) = a$. En otras palabras, si la función f envía a en $f(a)$, su inversa deshace el camino y envía a $f(a)$ de nuevo a a .

Conocemos muchas funciones inyectivas y, para algunas de ellas, también conocemos su inversa. Por ejemplo, sabemos que la función exponencial y el logaritmo neperiano son inversas una de la otra. ¿Qué quiere decir esto? Simplemente que se cumplen las dos siguientes igualdades:

$$\log(e^a) = a \text{ y } e^{\log(b)} = b.$$

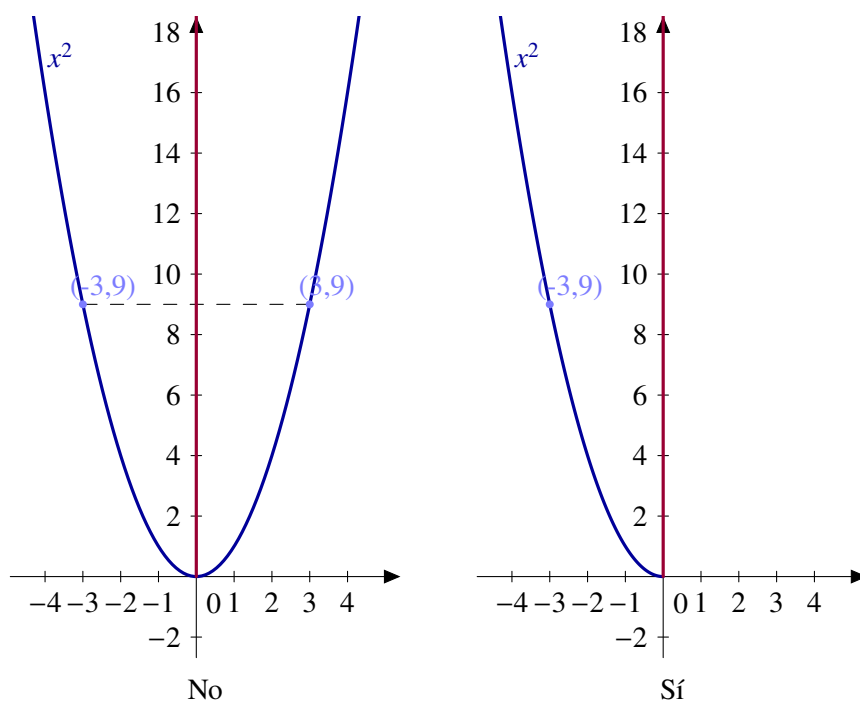


Figura 3.3 ¿La función x^2 es inyectiva?

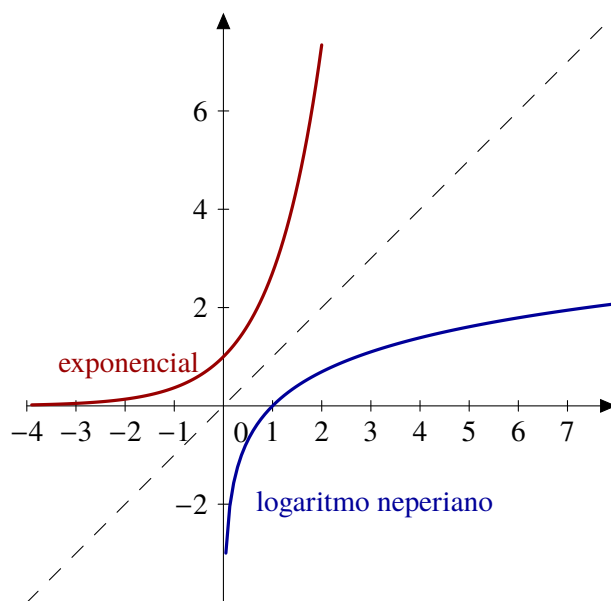


Figura 3.4 La función exponencial y el logaritmo son inversas

Esto tiene una consecuencia en las gráficas de las funciones. Mira la Figura 3.4. Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

¿Cómo calculamos la inversa de una función? En teoría es sencillo: si $y = f(x)$ es la función, sólo tenemos que cambiar los papeles de x e y . Tenemos que despejar x como función de y . Esto es la teoría. Dependiendo de la función podemos estar ante un problema fácil o uno imposible. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.8. Consideremos la función $f(x) = x^2 + x + 1$, ¿cuál es su inversa? Como hemos dicho, tenemos que resolver la ecuación

$$y = x^2 + x + 1$$

considerando como incógnita x . Las soluciones del polinomio $x^2 + x + 1 - y = 0$ son

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 - y)}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{4y - 3}}{2}. \end{aligned}$$

Las dos soluciones provienen del hecho de que la función $y = x^2 + x + 1$ no es inyectiva. Sí es inyectiva en cualquiera de los intervalos $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ y $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. En la Figura 3.5 tienes las gráficas de la función y su inversa en cada uno de dicho es intervalos.

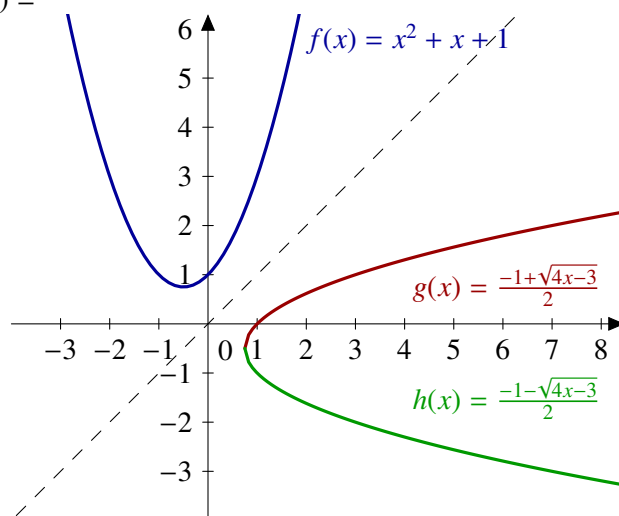


Figura 3.5 La función $x^2 + x + 1$ y sus inversas

3.1.3 Funciones pares e impares

Definición 3.9.

- a) Una función $f : A \rightarrow B$ es *par* si $f(a) = f(-a)$ para cualquier a en A .
- b) Una función $f : A \rightarrow B$ es *impar* si $f(a) = -f(-a)$ para cualquier a en A .

Las funciones pares son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto del eje OY. En otras palabras, si doblamos la hoja por el eje vertical, ambas mitades coinciden. Para conseguir el mismo efecto con una función impar tienes que doblar primero respecto por eje vertical y, en segundo lugar, por el eje horizontal.

Ejemplo 3.10.

- a) Las funciones $f(x) = x^2$ o $\cos(x)$ son pares.
- b) La función $f(x) = x^3$ o $\sin(x)$ son impares.

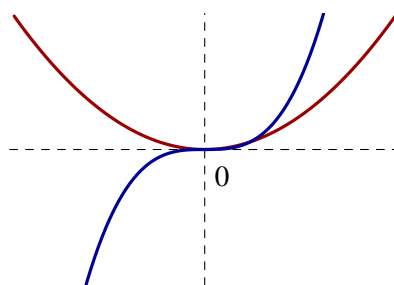


Figura 3.6 Funciones pares e impares

3.1.4 Funciones periódicas

Definición 3.11. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *periódica* si existe algún número real T tal que $f(x) = f(x + T)$ para cualquier x real. A cualquiera de esos valores se le llama un *periodo* de la función. El *periodo fundamental*, ω , es el menor de todos ellos, o sea,

$$\omega = \inf \{T : f(x) = f(x + T), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

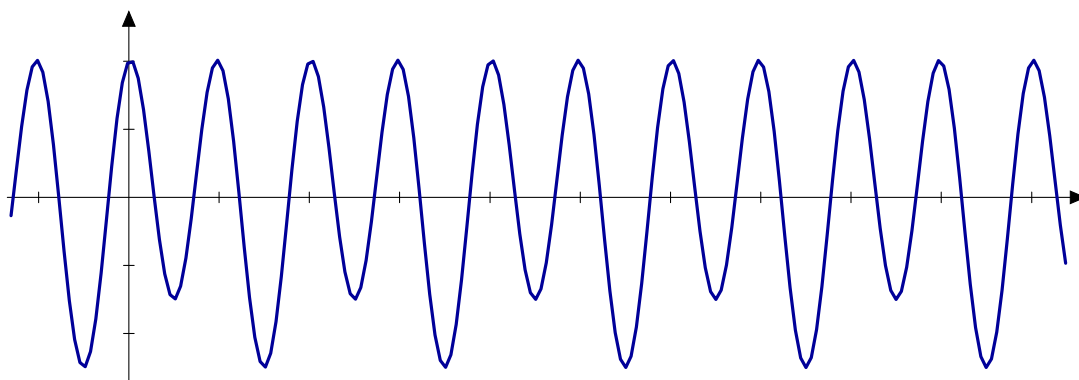
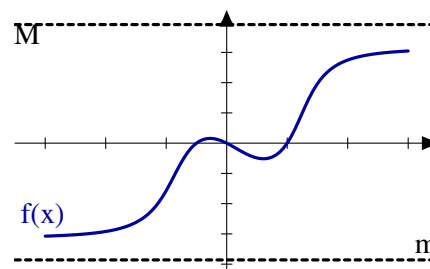


Figura 3.7 Función periódica

Ejemplo 3.12. Las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π (o cualquier múltiplo entero de 2π). El periodo fundamental de la tangente es π . El caso trivial son las funciones constantes: son periódicas con cualquier periodo. Por tanto, su periodo fundamental es cero.

3.1.5 Acotación

Dada una función con valores reales, podemos hablar de cuándo los valores que toma dicha función se encuentran en un rango determinado, son mayores o son menores que una cierta cantidad. En otras palabras, podemos aplicar las nociones de acotación de conjuntos a la imagen de la función. Así surgen las nociones de función acotada y funciones acotadas superior o inferiormente.



Definición 3.13. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

Figura 3.8 Función acotada

- Diremos que la función f está *acotada superiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada superiormente si existe un número M tal que $f(a) \leq M$ para cualquier elemento a de A .
- Diremos que la función f está *acotada inferiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada inferiormente si existe un número m tal que $f(a) \geq m$ para cualquier elemento a de A .
- Diremos que la función está acotada si lo está superior e inferiormente.

Ejemplo 3.14. Las funciones seno o coseno están acotadas. En cambio ningún polinomio, salvo los constantes, es una función acotada en \mathbb{R} .

Una vez que tenemos un conjunto acotado, podemos hablar de máximo y supremo.

Definición 3.15. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

- Diremos que la función f tiene máximo si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su máximo en $a_0 \in A$ si $f(a) \leq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.
- Diremos que la función f tiene mínimo si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su mínimo en $a_0 \in A$ si $f(a) \geq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.

Observación 3.16. Ya sabemos que un conjunto acotado superiormente tiene supremo. No podemos decir lo mismo con respecto al máximo. Hay conjuntos que tienen supremo pero este no se alcanza. Piensa, por ejemplo, en los intervalos abiertos. La misma situación se puede dar con funciones. Por ejemplo, la función $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$, $f(x) = x$ está acotada, pero no tiene máximo ni mínimo.

3.1.6 Funciones monótonas

Definición 3.17.

a) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \text{ (resp. } f(x) \geq f(y)\text{)}.$$

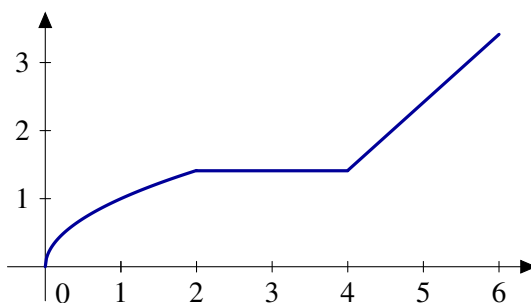
b) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si

$$x < y \implies f(x) < f(y) \text{ (resp. } f(x) > f(y)\text{)}$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Observación 3.18.

Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y este es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica “no baja”.



Monotonía e inyectividad

Se deduce directamente de la definición de función estrictamente monótona que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas*. ¿Es cierto el recíproco? Es fácil encontrar ejemplos de que no es cierto en general. Por ejemplo, la función $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

no es creciente ni decreciente. La función f no es continua y podría pensarse que este fenómeno no se presentaría en funciones continuas, pero no es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas. ¿Dónde presenta problemas de continuidad la función f ? Pues eliminemos esos puntos. Considera la función $g : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

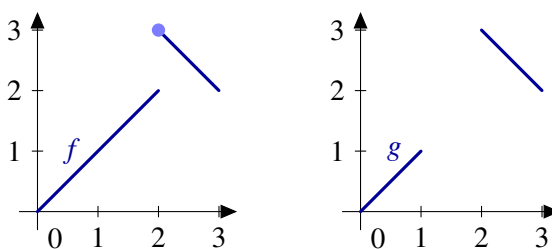


Figura 3.9 Monotonía e inyectividad

Como puedes ver, para la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. En otro caso, el resultado es cierto.

3.2 Funciones elementales

3.2.1 Funciones potenciales

La función potencial $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^b$ tiene sentido para cualquier exponente b real. En el caso particular de potencias naturales, se puede extender la definición a toda la recta real.

- a) f es biyectiva de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R}^+ , continua y derivable con $f'(x) = bx^{b-1}$.
- b) $(xy)^b = x^b y^b$.
- c) Si $b > 0$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim_{x \rightarrow 0} x^b = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$.
- d) Si $b < 0$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim_{x \rightarrow 0} x^b = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = 0$.

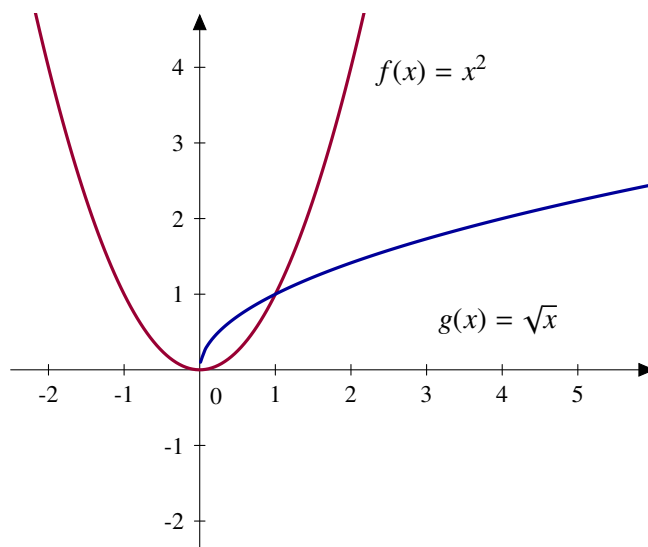


Figura 3.10 Función potencial

Como consecuencia se obtiene que los polinomios, suma de funciones potenciales con exponente natural, son derivables en todo \mathbb{R} . Más concretamente, si $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, entonces $p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.2.2 Función exponencial

La función exponencial de base e , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como $f(x) = e^x$. A veces usaremos la notación $\exp(x)$ para indicar e^x .

- a) f es continua y derivable en \mathbb{R} con $f'(x) = e^x$.
- b) f es biyectiva de \mathbb{R} en \mathbb{R}^+ y estrictamente creciente.
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
- d) $e^{x+y} = e^x e^y$.

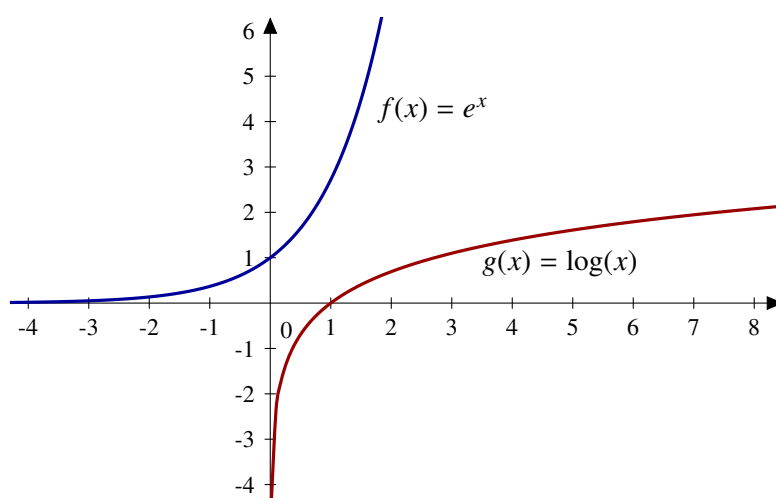


Figura 3.11 Funciones exponencial y logaritmo neperiano

3.2.3 Función logaritmo neperiano

La función logaritmo neperiano², $g(x) = \log(x)$ para x positivo, es la inversa de la función exponencial.

- a) g es derivable y $g'(x) = \frac{1}{x}$.
- b) g es biyectiva de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R} y estrictamente creciente.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$.
- d) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
- e) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
- f) $\log(x^y) = y \log(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$.
- g) $\log(1) = 0, \log(e) = 1$.

² Usaremos indistintamente la notación $\ln(x)$ y $\log(x)$ para indicar el logaritmo neperiano

Haciendo uso de la siguiente fórmula se deducen las demás funciones elementales, excepto las trigonométricas

$$a^b = e^{\log(a^b)} = e^{b \log(a)}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}.$$

3.2.4 Función exponencial de base $a \neq 1$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- a) f es biyectiva de \mathbb{R} en \mathbb{R}^+ , continua y verifica $a^{x+y} = a^x a^y$.
- b) Si $a > 1$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
- c) Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.
- d) f es derivable y $f'(x) = a^x \log(a)$.

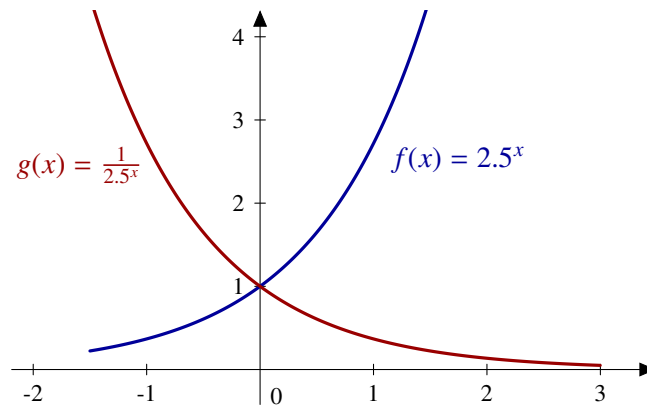


Figura 3.12 Función exponencial

3.2.5 Funciones logarítmicas de base $a \neq 1$

La inversa de la función exponencial es la función logaritmo. Su comportamiento depende de la base de la exponencial que hayamos considerado. Es por esto que en algunos casos tengamos que distinguir entre base mayor o menor que uno.

$$g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

- a) g es biyectiva de \mathbb{R}^+ en \mathbb{R} y continua. Además g es la inversa de la función exponencial de base a . Verifica también que

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^z) = z \log_a(x)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$.

- b) Si $a > 1$, g es estrictamente creciente y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty, \quad y \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

c) Si $a < 1$, g es estrictamente decreciente y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty, \quad y \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

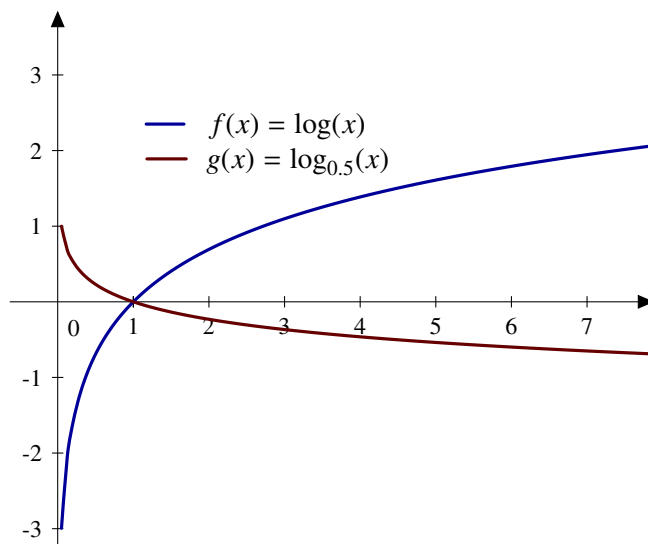


Figura 3.13 Función logaritmo

Funciones trigonométricas

3.2.6 Las funciones seno y coseno

a) Son derivables en todo \mathbb{R} y $\text{sen}'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\text{sen}(x)$.

b) Son funciones periódicas de periodo 2π

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

c) $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

e) $\text{sen} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ es una biyección estrictamente creciente con $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\text{sen}(0) = 0$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

f) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1, 1]$.

g) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

h) La función seno es impar: $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

j) Las funciones seno y coseno no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

Fórmula fundamental de trigonometría

Algunos valores destacados de seno y coseno

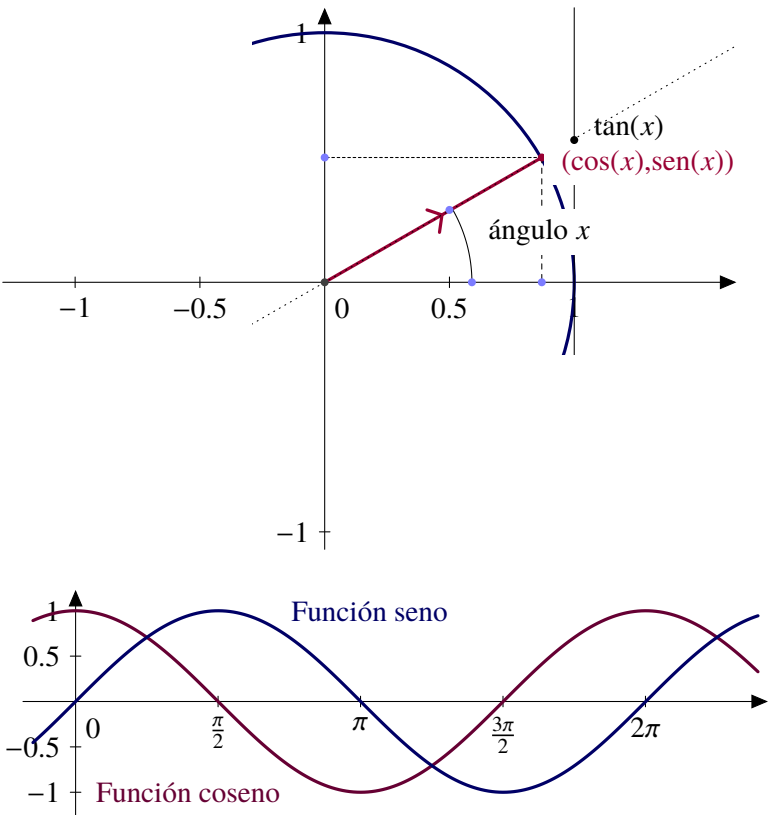


Figura 3.14 Las funciones seno y coseno

Radianes	Coseno	Seno	Tangente
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	–
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-1/\sqrt{3}$
π	-1	0	0

Tabla 3.1 Valores de seno, coseno y tangente en los dos primeros cuadrantes

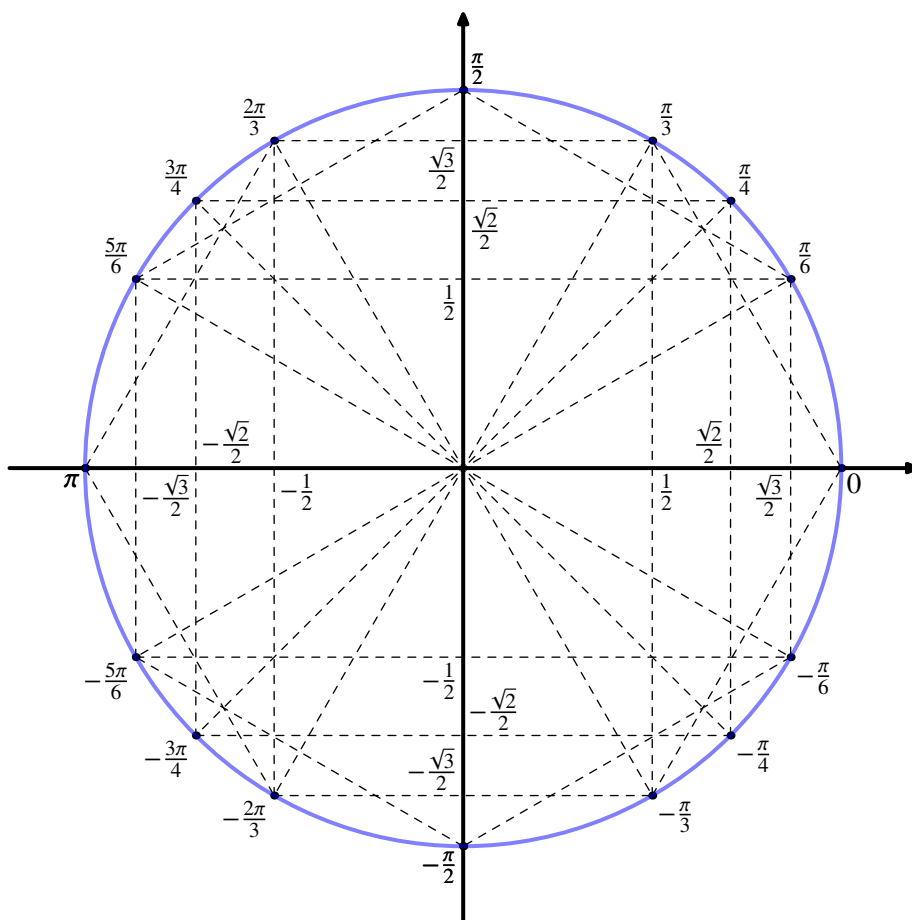


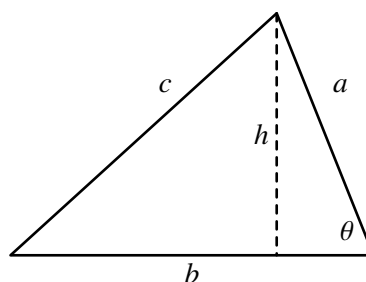
Figura 3.15 Círculo trigonométrico

Teorema del coseno

$$h = a \sin(\theta)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

$$\text{Teorema del coseno: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$



3.2.7 La función tangente

Como se verifica que $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, podemos definir la función tangente como

$$\tan : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

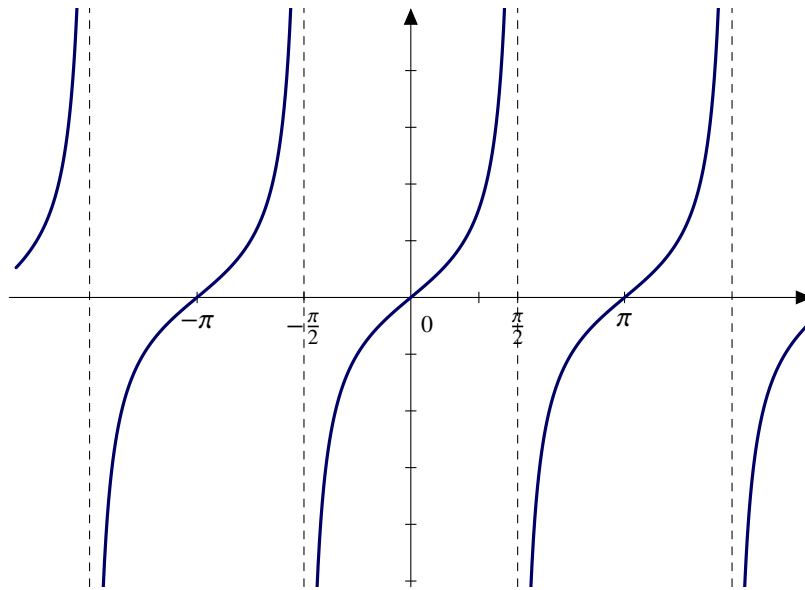


Figura 3.16 Función tangente

- a) $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, $\forall x \in A$.
- b) $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente y además verifica que $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.
- c) La función tangente es derivable y

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

3.2.8 Secante, cosecante, cotangente

Siempre que los respectivos denominadores no se anulen, se pueden definir las siguientes funciones

$$\operatorname{cosec} : B \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \forall x \in B$$

$$\sec : A \rightarrow \mathbb{R}, \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \forall x \in A$$

$$\cotan : B \rightarrow \mathbb{R}, \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \forall x \in B,$$

donde $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Dichas funciones son continuas y derivables en su correspondiente dominio y

$$\sec'(x) = \tan(x) \sec(x),$$

$$\operatorname{cosec}'(x) = -\cotan(x) \operatorname{cosec}(x),$$

$$\cotan'(x) = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cosec}^2(x) = -(1 + \cotan^2(x)).$$

3.2.9 Inversas de funciones trigonométricas

Función arcoseno

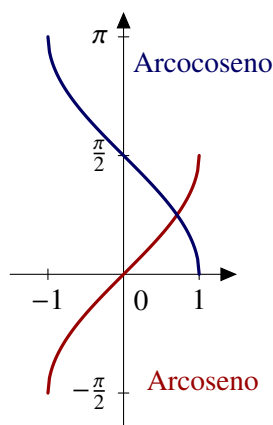


Figura 3.17 Arcoseno y arco-coseno

Esta función es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y por tanto $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verifica que $\sen(\arcsen(x)) = x, \forall x \in [-1, 1]$.

Además, es una función biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\arcsen(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsen(0) = 0, \quad \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Por último, es derivable en el intervalo abierto $] -1, 1[$ con derivada

$$\arcsen'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcocoseno

Es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$, y por tanto $\cos(\arccos(x)) = x, \forall x \in [-1, 1]$.

Esta función es biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos(1) = 0$$

Es derivable en el intervalo abierto $] -1, 1[$ con derivada

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcotangente

Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ y, por tanto,

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

verifica que $\tan(\arctan(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Esta función es biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arctan(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Es derivable en \mathbb{R} y $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

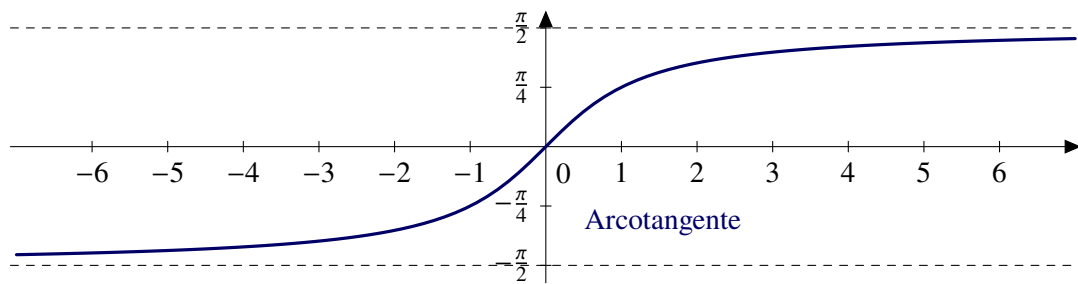


Figura 3.18 Función arcotangente

3.2.10 Identidades trigonométricas

a) Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$\cotan^2(x) + 1 = \operatorname{cosec}^2(x)$$

b) Suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$

c) Angulo doble

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x),$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(x)$$

d) Angulo mitad

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)}$$

e) Producto

$$\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y))$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

$$\operatorname{sen}(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y))$$

3.2.11 Funciones hiperbólicas

De forma análoga a como están definidas las funciones seno y coseno, podemos interpretar geoméricamente las funciones hiperbólicas. El papel que juega la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ lo pasa a representar la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. En este caso, relacionamos el punto (x, y) con el área α que aparece sombreada en la figura 3.19.

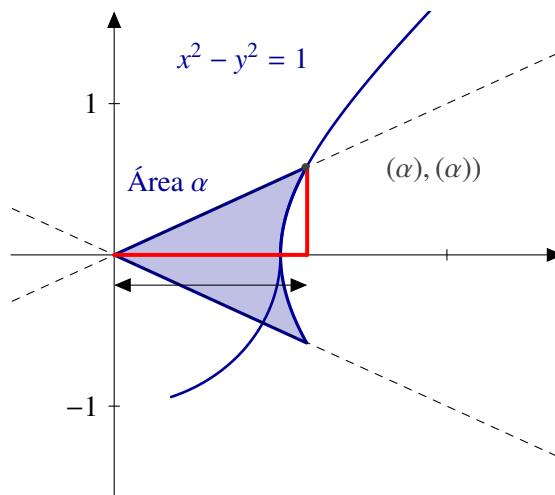


Figura 3.19 Seno y coseno hiperbólicos

Las funciones hiperbólicas están definidas como:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos también de tangente, secante y cosecante hiperbólica.

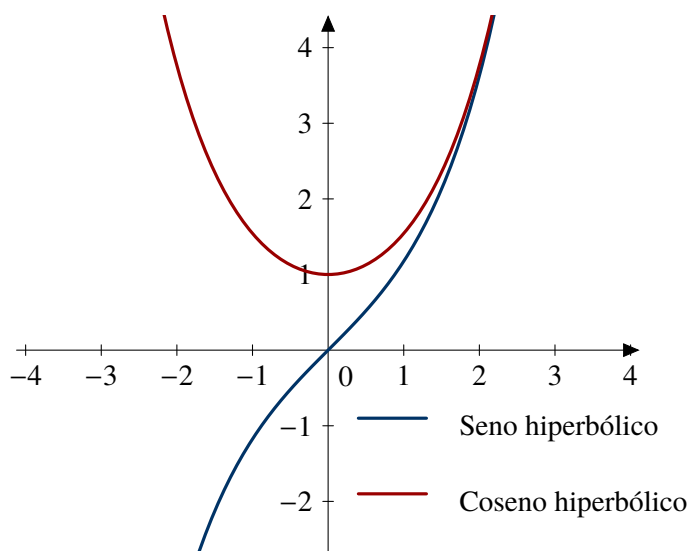


Figura 3.20 Funciones hiperbólicas

3.2.12 Identidades hiperbólicas

a) Identidades “pitagóricas”

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1, \\ \tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) &= 1 \\ \operatorname{cotanh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) &= 1\end{aligned}$$

b) Sumas y diferencias de ángulos.

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y), \\ \sinh(x-y) &= \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y), \\ \cosh(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

c) Ángulo doble

$$\sinh^2(x) = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2}, \quad \cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}.$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\ \operatorname{arccosh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \\ \operatorname{arctanh}(x) &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\end{aligned}$$

3.3 Ejercicios

Ejercicio 3.1. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

$$\begin{array}{ll}\text{a) } y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} & \text{d) } y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{b) } y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right) & \text{e) } y = \log(\operatorname{sen}(x)) \\ \text{c) } y = \sqrt{\frac{x}{1-|x|}} & \text{f) } y = \sqrt{\log(\operatorname{sen}(x))}\end{array}$$

Ejercicio 3.2. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f , g , $f+g$, $f \cdot g$ y de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$?

Ejercicio 3.3. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}\text{a) } f(x) = |x+1| - |x-1| & \text{d) } f(x) = e^x - e^{-x} \\ \text{b) } f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & \text{e) } f(x) = \operatorname{sen}(|x|) \\ \text{c) } f(x) = e^x + e^{-x} & \text{f) } f(x) = \cos(x^3)\end{array}$$