4. Conceptos básicos de Variables Aleatorias

1. Los resultados del experimento son: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$. Sea X: "máximo del resultado obtenido al lanzar dos dados". X es una v.a. discreta, con valores $R: \{1,2,3,4,5,6\}$.

   a) Función masa de probabilidad.

x_i	p_i
1	1/36
2	1/12
3	5/36
4	7/36
5	1/4
6	11/36

   b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/36 & 1 \leq x < 2 \\ 1/9 & 2 \leq x < 3 \\ 1/4 & 3 \leq x < 4 \\ 4/9 & 4 \leq x < 5 \\ 25/36 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

   c) $F(2{,}5) = \frac{1}{9} = 0{,}1111$

   d) $P[2 \leq x \leq 4] = F(4) - F(1) = \frac{5}{12} = 0{,}4167$

   e) $E[X] = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = \frac{161}{36} = 4{,}4722$ y $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2555}{1296} = 1{,}9715$

2. Los resultados del experimento son: $\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),\ldots,(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$. Sea X: "suma de los resultados obtenidos al lanzar dos dados". X es una v.a. discreta, con valores R : $\{2,3,4,5,6,\ldots,12\}$

   a) Función masa de probabilidad.

x_i	p_i
2	1/36
3	1/18
4	1/12
5	1/9
6	5/36
7	1/6
8	5/36
9	1/9
10	1/12
11	1/18
12	1/36

   b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1/36 & 2 \leq x < 3 \\ 1/12 & 3 \leq x < 4 \\ 1/6 & 4 \leq x < 5 \\ 5/18 & 5 \leq x < 6 \\ 5/12 & 6 \leq x < 7 \\ 7/12 & 7 \leq x < 8 \\ 13/18 & 8 \leq x < 9 \\ 5/6 & 9 \leq x < 10 \\ 11/12 & 10 \leq x < 11 \\ 35/36 & 11 \leq x < 12 \\ 1 & x \geq 12 \end{cases}$$

   c) $P[3 \leq x \leq 7] = F(7) - F(2) = \frac{5}{9} = 0{,}5556$

   d) $E[X] = 7$

3. Sea X: tiempo en minutos que transcurre entre dos llegadas consecutivas a una tienda. X es una v.a. continua.

   a) $k = 1/2$. El valor de k lo obtenemos de imponer las condiciones que tienen que verificar la función de densidad, que sea una función positiva y que integre 1.

   b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2} & x > 0 \end{cases}$$

   c) $P[2 \leq X \leq 6] = F(6) - F(2) = 0{,}3181$

   d) $P[X \leq 8] = F(8) = 0{,}9817$

   e) $P[X > 8] = 1 - F(8) = 0{,}0183$

4. Sea X: proporción de accidentes automovilísticos fatales en Estados Unidos. X es una v.a. continua.

   a) Para demostrar que f es una función de densidad:

      1. $f(x) \geq 0 \; \forall x$. En este caso se cumple.
      2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. También se verifica.

   b) $f(1/4) = 2{,}4917$

   c) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - 7x(1-x)^6 - (1-x)^7 & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

   d) $P[X \leq 0{,}25] = 0{,}5551$

5. Sea X una v.a. continua.

   a) Función de densidad:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{3}{8}(x-2)^2 & 2 < x < 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   b) $P[X \leq 3] = 1 - F(3) = \frac{7}{8} = 0{,}875$
      $P[1 < X < 3] = F(3) - F(1) = \frac{1}{8} = 0{,}125$
      $P[X < 3] = \frac{1}{8} = 0{,}125$
      $P[X > 4] = 1 - F(4) = 0$

6. Sea X: duración en segundos de un tipo de circuitos. X es una v.a. continua.

   a) $a = \frac{1000}{9}$. El valor de a se obtiene imponiendo las condiciones que verifican una función de densidad.

   b) $P[X = 200] = 0$

   c) $P[200 < X < 300] = 0{,}1852$

7. Sea X una v.a. continua.

   a) $k = 49$

   b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -7 \\ \frac{x^2}{98} + \frac{x}{7} + \frac{1}{2} & -7 < x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{98} + \frac{x}{7} + \frac{1}{2} & 0 < x \leq 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

   c) $P[X > 0] = \frac{1}{2}$

8. X es una v.a. discreta, con valores entre 1 y 20. Antes de calcular las probabilidades pedidas, obtenemos el valor de k imponiendo que la suma de todas las probabilidades debe ser 1. Entonces, $k = \frac{1}{210}$.

    a) $P[X = 4] = \frac{2}{105} = 0{,}019$
    b) $P[3 \leq X \leq 10] = \frac{26}{105} = 0{,}2476$
    c) $E[X] = \frac{2870}{210} = 13{,}6667$

9. Sea X una v.a. continua. Antes de calcular los apartados obtenidos, calculamos el valor de la constante. $a = 3$.

    a) Función de distribución:

    $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-3x} & x \geq 0 \end{cases}$$

    b) $P[1 < X < 2] = 0{,}0473$
    c) $P[X \geq 2] = 0{,}0025$
    d) $P[0{,}5 < X < 1] = 0{,}1733$
    e) $P[X < 3] = 0{,}9999$

10. La variable X es una v.a. continua, ya que la función de distribución depende de los valores de x en cada uno de los intervalos.

    a) Función de densidad:

    $$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 3(2x-1) & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    b) $P[X > 0{,}75] = 0{,}5625$
    c) $P[0{,}25 < X < 0{,}75] = 0{,}375$
    d) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Además es creciente y continua. En cada punto de corte hay que ver que la función de distribución toma el mismo valor por la izquierda y por la derecha, también se puede comprobar gráficamente.

11. Sea X: "nº de caras que se obtiene al lanzar 3 monedas". X es una v.a. discreta.

    a) Función masa de probabilidad.

x_i	p_i
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

    b) Función de distribución:

    $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 3/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

c) $E[X] = 1{,}5$, $Var(X) = 0{,}75$, $\sigma_X = 0{,}866$

d) $P[X \leq 2] = 0{,}875$

e) $P[X \geq 2] = 0{,}5$

12. Sea X: nº de hijos por familia de una cierta ciudad.

a) $E[X] = 1$. El nº medio de hijos por familia es 1.

b) $Var(X) = 1{,}74$, $\sigma_X = 1{,}3191$

c) $Y = 12X$, representa lo que el ayuntamiento paga por los hijos. Función de probabilidad:

x_i	p_i
0	0.47
12	0.3
24	0.1
36	0.06
48	0.04
60	0.02
72	0.01

d) $E[Y] = 12 * E[X] = 12$, $Var(Y) = 12^2 * Var(X) = 250{,}56$, $\sigma_Y = 15{,}829$

13. *a*) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1/10 & 2 \leq x < 3 \\ 1/5 & 3 \leq x < 4 \\ 3/10 & 4 \leq x < 5 \\ 2/5 & 5 \leq x < 6 \\ 1/2 & 6 \leq x < 7 \\ 3/5 & 7 \leq x < 8 \\ 7/10 & 8 \leq x < 9 \\ 4/5 & 9 \leq x < 10 \\ 9/10 & 10 \leq x < 11 \\ 1 & x \geq 11 \end{cases}$$

b) $P[X > 7] = 2/5$

c) $P[X \leq 5] = 2/5$

d) $P[3 < X \leq 8] = 1/2$

14. *a*) $k = 2$

b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

c) $E[X] = 1$

15. *a*) Se comprueba que la integral en todo el recorrido es igual a 1 y que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

    b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -6 \\ \frac{1}{50}\left(\frac{x^2}{2} + 6x + 18\right) & -6 \leq x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

16. *a*) $c = \frac{1}{9}$

    b) $P[X > 3] = 0{,}5$, y $P[1{,}5 \leq X \leq 4{,}5] = 0{,}75$

    c) $E[X] = 2$, $Me = 3$

17. *a*) $k = \frac{8}{7}$

    b) Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{8}{7}\left(\frac{x-1}{x}\right) & 1 \leq x \leq 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

    c) $E[X] = 2{,}377$, $P_{90} = 4{,}706$

    d) $P[X = 7] = 0$, $P[3 \leq X \leq 5] = 0{,}152$