
El conjunto de los números reales

1

1.1 El conjunto de los números reales	7	1.2 Naturales, enteros, racionales e irracionales	9
1.3 Valor absoluto	11	1.4 El principio de inducción	12
1.5 Conjuntos destacados	14	1.6 Ejercicios	17

Existen diferentes formas de formalizar el conjunto de los números reales aunque se pueden agrupar en dos variantes: constructivos y axiomáticos. Los primeros son demasiado laboriosos para un curso de Cálculo y, por este motivo, hemos preferido dejarlos de lado. En su lugar, hemos asumido que el conjunto de los números reales es conocido por el lector y elegimos la definición axiomática de este conjunto.

1.1 El conjunto de los números reales

Vamos a definir el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , en términos de qué sabemos hacer con sus elementos, qué propiedades tienen. Estas propiedades que vamos a presentar aquí se llaman axiomas y, por supuesto, no son todas las propiedades de los números reales sino las mínimas, y es que a partir de ellas se obtienen el resto de propiedades.

Es difícil que, si alguien nos pregunta, seamos capaces de dar una respuesta clara de qué es un número pero sí somos capaces de decir qué cosas podemos hacer con ellos.

En el conjunto de los números reales tenemos definidas varias operaciones. La primera que todos aprendemos es la *suma*.

Suma de números reales

La suma verifica, entre otras, las siguientes propiedades. Sean a , b y c números reales cualesquiera.

- a) Propiedad *asociativa*: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- b) Propiedad *conmutativa*: $a + b = b + a$.
- c) Existencia de *elemento neutro*: $a + 0 = a$.
- d) Existencia de *elemento opuesto*: $a + (-a) = 0$.

Estas cuatro propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}, +)$ es un *grupo abeliano* o *conmutativo*.

Producto de números reales

Además de la suma también sabemos multiplicar números reales. Por el mismo motivo, se supone que sabemos dividir. Mucho cuidado con esta afirmación. No estamos hablando de cómo se dividen números sino de que, supuesto conocido el producto de números, la división es la operación inversa. Ocurre lo mismo con la suma: no hemos dicho como se restan números reales pero,

en teoría, restar un número es simplemente sumar el número cambiado de signo, es decir, sumar el opuesto. Con el producto, dividir por un número a es multiplicar por el inverso, al que llamaremos $1/a$.

Sean a , b y c números reales. Entonces se verifican las siguientes propiedades.

5) Propiedad *asociativa*: $a(bc) = (ab)c$.

6) Propiedad *conmutativa*: $ab = ba$.

7) Existencia de *elemento neutro*: $a1 = 1a$.

8) Existencia de *elemento inverso*: Si a es distinto de 0 entonces $a \frac{1}{a} = 1$.

Observación 1.1. El elemento opuesto en el caso de la suma y el elemento inverso para el producto son únicos. En el caso de la suma la notación es siempre la misma: el opuesto de a es $-a$ y en vez de escribir $b + (-a)$ escribiremos $b - a$. Para el inverso del producto usaremos indistintamente la notación $\frac{1}{a}$ o a^{-1} y también es más usual escribir $\frac{b}{a}$ que $b \frac{1}{a}$.

Una vez que tenemos la suma y el producto, hay otra propiedad que hace que se relacionen de forma buena:

9) propiedad *distributiva*: $a(b + c) = ab + ac$.

Orden

El orden en el conjunto de los números reales también es algo conocido por el lector. Lo podemos ver de varias formas: sabemos cuándo un número es positivo o somos capaces de decidir cuál de dos números es el mayor. Hagamos un breve resumen de las propiedades relacionadas con el orden. Evidentemente las propiedades podemos exponerlas sobre “ser menor que”, “ser mayor que” o también sobre “ser mayor o igual que” o “ser menor o igual que”. Como hay que elegir una de las posibilidades elegimos esta última aunque el resto nos darían propiedades análogas.

10) Propiedad *reflexiva*: $a \leq a$.

11) Propiedad *antisimétrica*: si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

12) Propiedad *transitiva*: si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

13) El orden es *total*: dado $a \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \geq 0$ o que $a \leq 0$ o, lo que es lo mismo, dados $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $a \leq b$ o que $b \leq a$.

Las siguientes propiedades relacionan la suma y el producto con el orden que acabamos de presentar.

14) Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

15) Si $a \leq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \leq bc$.

El último axioma

Las propiedades que hemos comentado hasta ahora no determinan de manera única el conjunto de los números reales. El conjunto de los números racionales también las verifica como se puede comprobar fácilmente. ¿Cuál es la diferencia entre ambos conjuntos? ¿Qué sabemos hacer en \mathbb{R} que no podemos hacer en \mathbb{Q} ? Siempre que se hace esta pregunta en clase las respuestas suelen ser del tipo: raíces cuadradas, logaritmos, senos o cosenos, etc. Aunque se podría intentar seguir por ahí, ese camino puede tener más dificultades a posteriori que el que vamos a elegir.

Necesitamos, por tanto, alguna propiedad más para diferenciarlos. En la Figura 1.1, podemos ver la propiedad que vamos a utilizar: si cada uno de los elementos de un conjunto A son más pequeños que los de un conjunto B , entonces se puede encontrar un número entre ambos. Esta propiedad parece, en principio, sencilla y si nos fijamos en la figura no da la impresión de que nos permita distinguir entre reales y racionales. Parece evidente que existen racionales x que podemos “colocar” entre A y B . ¿Y si los pegamos un poco más? ¿Qué ocurre si tomamos $A =] - \infty, x[$ y como $B =]x, +\infty[$? La única posibilidad que nos queda, el único número entre A y B es x . Si dicho número es racional, perfecto. No hay problema, pero ¿y si es irracional? Por ejemplo, en la Figura 1.2, el número π es el único punto entre los dos conjuntos.

Esta propiedad es el axioma que nos falta para terminar de definir el conjunto de los números reales:

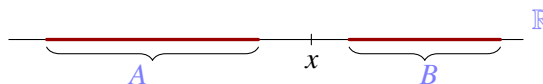


Figura 1.1

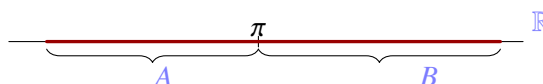


Figura 1.2

- 16) Dados dos conjuntos A y B verificando que $a \leq b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, existe x tal que $a \leq x \leq b$, $\forall a \in A, \forall b \in B$.

Resumiendo, el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , es el único conjunto que verifica los dieciséis axiomas anteriores.

1.2 Naturales, enteros, racionales e irracionales

Números naturales

El conjunto de los números naturales, al que denotaremos \mathbb{N} , es

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

La inclusión del cero como número natural es una convención. En algunos textos aparece como natural y en otros no. Nosotros no lo vamos a incluir para simplificar algunas notaciones. Por ejemplo, para poder hablar de $\log(n)$ o de $\frac{1}{n}$ sin necesidad de estar recordando constantemente que n no puede ser cero.

Números enteros

El conjunto de los números enteros, \mathbb{Z} , es

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

La operación suma en \mathbb{Z} es una operación interna: la suma (y la resta) de enteros es un entero. No ocurre lo mismo con el producto. El inverso de un número entero no nulo es un número racional.

Números racionales e irracionales

Los números racionales son aquellos que se pueden expresar como cociente de un entero y un natural:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Los números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, son aquellos que no son racionales. Probablemente estás más acostumbrado a tratar con la representación decimal de los números reales. Los racionales tienen una cantidad finita de decimales o infinita periódica. Los irracionales, por tanto, tienen una cantidad infinita de decimales no periódicos.

Observación 1.2. El conjunto de los números irracionales *no* es, ni siquiera, un espacio vectorial como lo es el conjunto de los números racionales. El elemento neutro para la suma o el producto, 0 y 1, no son irracionales. Es muy fácil encontrar ejemplos de que la suma y el producto de números irracionales no es necesariamente un número irracional: $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

Número algebraico Dentro de los números reales podemos distinguir entre números algebraicos y números trascendentes. Un número es *algebraico* si es solución de un polinomio con coeficientes enteros. Por ejemplo, cualquier racional o $\sqrt{2}$ son números algebraicos. Si no se puede expresar como raíz de un polinomio con coeficientes enteros diremos que es un número *trascendente*.

Número trascendente No es fácil buscar las raíces irracionales de un polinomio, pero sí podemos buscar las posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Observación 1.3. Dada la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, donde a_0, a_1, \dots, a_n son números enteros y $a_0 a_n \neq 0$, si la ecuación tiene una raíz racional p/q (con p y q primos entre sí), entonces p divide a a_0 y q divide a a_n .

El conocimiento de las raíces racionales nos puede servir para comprobar que un número no es racional.

Ejemplo 1.4. Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $x^2 - 2 = 0$ son $\pm 1, \pm 2$. Como ninguna de ellas es solución del polinomio, $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

La otra demostración usual de que $\sqrt{2}$ no es un número racional utiliza la descomposición en primos de un número y la reducción al absurdo: supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Eso quiere decir que podría escribirse de la forma $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible. Si elevamos al cuadrado obtenemos que $2q^2 = p^2$ y, en consecuencia, p^2 es un número par. Pero para que el cuadrado de un número sea par, necesariamente dicho número debe ser par. Luego $p = 2a$ para conveniente a . Sustituyendo, $q^2 = 2a^2$ y, por tanto, q también es par. Hemos obtenido una contradicción: la fracción p/q no puede ser irreducible y, a la vez, que numerador y denominador sean pares. Por tanto, $\sqrt{2}$ no puede ser racional.

Comprueba tú mismo que con las mismas ideas puedes comprobar que la raíz cuadrada de un natural es otro natural o un número irracional.

1.3 Valor absoluto

La distancia entre dos números reales se mide calculando la diferencia entre el mayor y el menor de ellos. La función que mide la distancia al cero es la función valor absoluto.

Definición 1.5. Se define el *valor absoluto* de un número real x como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Valor Absoluto

Proposición 1.6. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se verifican las siguientes afirmaciones.

- a) $|x| \geq 0$, $y |x| = 0 \iff x = 0$,
- b) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$,
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*desigualdad triangular*),
- d) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
- e) $|xy| = |x||y|$.

Para demostrar cualquiera de estas desigualdades o, en general, para trabajar con expresiones en las que intervienen valores absolutos tenemos varias posibilidades. La primera de ellas es discutir los distintos casos que se pueden presentar. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.7. ¿Cuándo es cierta la desigualdad $|x - 3| < |x - 1|$?

Lo que vamos a hacer es eliminar el valor absoluto (una función definida a trozos) discutiendo todas las posibilidades:

- a) si $x \leq 1$, $|x - 3| < |x - 1| \iff -(x - 3) < -(x - 1) \iff -3 > -1$ lo que, claramente, no es cierto,
- b) si $1 \leq x \leq 3$, $|x - 3| < |x - 1| \iff -(x - 3) < (x - 1) \iff 2 < x$, y por último
- c) si $x \geq 3$, $|x - 3| < |x - 1| \iff (x - 3) < (x - 1) \iff -3 < -1$.

Resumiendo, la desigualdad es cierta si, y sólo si, $x > 2$.

También podemos aprovechar el hecho de que elevar al cuadrado conserva el orden en los reales positivos: $0 < a < b \iff a^2 < b^2$. Vamos a utilizar esto para demostrar la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |x + y| \leq |x| + |y| &\iff |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|xy| \\ &\iff xy \leq |xy|, \end{aligned}$$

lo cual, evidentemente, es cierto. Observa que, de regalo, hemos probado que la igualdad en la desigualdad triangular es cierta si, y sólo si, $xy = |xy|$ o, lo que es lo mismo, si x e y tienen el mismo signo. Prueba tú a demostrar el resto de afirmaciones de la proposición anterior.

1.4 El principio de inducción

La definición del conjunto de los números naturales puede hacerse como la definición que hemos dado del conjunto de los números reales mediante una serie de propiedades que lo caractericen en lugar de especificar cuáles son sus elementos. Si el axioma del supremo es la propiedad clave que nos ha permitido definir los números reales, en el caso de los naturales dicha propiedad es la de ser inductivo.

Conjunto
inductivo

Definición 1.8. Un subconjunto A de los números reales diremos que es *inductivo* si verifica las siguientes dos propiedades:

- a) $1 \in A$,
- b) si $a \in A$, entonces $a + 1 \in A$.

Ejemplo 1.9.

- a) $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}^+$ son conjuntos inductivos.
- b) Ningún conjunto acotado puede ser un conjunto inductivo.

Definición 1.10. El conjunto de los números naturales es el menor conjunto inductivo o, lo que es lo mismo, la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Proposición 1.11 (Principio de inducción). Sea A un subconjunto de los números reales verificando que

- a) A es inductivo,
- b) $A \subset \mathbb{N}$.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

En otras palabras, para demostrar que un subconjunto del conjunto de los números naturales, $A \subset \mathbb{N}$, es, en realidad, el conjunto de los naturales es suficiente con comprobar que

- a) $1 \in A$, y que
- b) si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$.

La principal utilidad de este principio es demostrar que una propiedad indicada en el conjunto de los naturales es cierta. Por ejemplo, la propiedad “todos los números de la forma $n^3 + 5n$ son divisibles por 6” son en realidad muchas (tantas como naturales) afirmaciones. No es difícil fijar un natural y comprobar que para ese concreto la propiedad es cierta. Pero, ¿cómo podemos hacerlo para todos a la vez? En este tipo de demostraciones, el principio de inducción nos proporciona una ventaja. Para demostrar que se cumple para un natural puede suponerse que la propiedad es cierta para el natural anterior (hipótesis de inducción). Esto puede ser muy útil en algunas ocasiones.

Ejemplo 1.12. Demostrar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Lo demostramos usando el método de inducción. Tenemos que comprobar que el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N}; 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2\}$$

coincide con \mathbb{N} . Para ello es suficiente con demostrar que A es un conjunto inductivo, o sea, tenemos que comprobar que

- a) la propiedad es cierta para $n = 1$, y que
- b) si la propiedad es cierta para un número natural, también es cierta para el siguiente número natural.

Vamos allá.

- a) Es inmediato comprobar que la propiedad se cumple la propiedad para $n = 1$.
- b) Supongamos que se cumple para un natural fijo m y comprobemos que se cumple para $m + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1) + (2m + 1) = m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2.$$

Por tanto, $A = \mathbb{N}$ y la propiedad se cumple para todos los naturales.

1.4.1 Una aplicación del principio de inducción: el binomio de Newton

¿Cuántas posibilidades tienes de que aciertes la lotería primitiva? Tienes que escoger 6 números de entre 47 sin importar el orden. El número de combinaciones posibles es $\binom{47}{6}$.

Las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de p en p se definen como las distintas agrupaciones formadas con p elementos distintos, eligiéndolos de entre los n elementos de que disponemos, considerando una variación distinta a otra sólo si difieren en algún elemento, y sin tener en cuenta el orden de colocación de sus elementos. El número de combinaciones que se pueden construir de esta forma es

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

A los números de la forma $\binom{n}{p}$, “ n sobre p ” se les suele llamar números *combinatorios*. Recordemos que el factorial de un número natural n es

Números combinatorios

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

y que $0! = 1$.

Las siguientes propiedades de los números combinatorios son fáciles de comprobar y nos serán muy útiles.

- a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
- b) $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$, para cualesquiera $i \leq n$ naturales.

Proposición 1.13 (Binomio de Newton). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Demostración. Vamos a probarlo usando el método de inducción. Es claro que la propiedad es cierta para $n = 1$. Supongamos que es cierta para un natural fijo n y comprobemos que se cumple para $n + 1$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i+1} b^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a^{n+1-i} b^i + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^{n+1-i} b^i. \square
\end{aligned}$$

La utilidad del binomio de Newton estriba en que no es necesario calcular el desarrollo completo de $(x+3)^{15}$ si sólo nos interesa el coeficiente de x^4 que, por cierto, es $\binom{15}{4} 3^{11}$.

Triángulo de Pascal o de Tartaglia

Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$ también se pueden encontrar usando el llamado triángulo de Pascal (o de Tartaglia). Este consiste en lo siguiente: comenzamos con un 1, en cada línea nueva añadimos unos en los extremos y bajo cada par de números colocamos su suma. El resultado que se obtiene nos da los coeficientes del binomio de Newton.

n	triángulo de Pascal	nº combinatorio	$(a+b)^n$
0	1	$\binom{0}{0}$	
1	1 1	$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$	$a+b$
2	1 2 1	$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$	$a^2 + 2ab + b^2$
3	1 3 3 1	$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Tabla 1.1 Triángulo de Pascal o Tartaglia

1.5 Conjuntos destacados

Definición 1.14.

- a) Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que $M \in \mathbb{R}$ es una *cota superior* o *mayorante* (resp. *inferior* o *minorante*) de A si $a \leq M$ para cualquier $a \in A$ (resp. $a \geq M$).

El conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está *acotado superiormente* o *mayorado* (resp. *acotado inferiormente* o *minorado*) si tiene una cota superior (resp. inferior). Por último el conjunto está *acotado* si está mayorado y minorado.

- b) Sea A un subconjunto de \mathbb{R} . Diremos que $a_0 \in A$ es el *máximo absoluto* (resp. *mínimo absoluto*) de A si verifica que $a \leq a_0$ (resp. $a \geq a_0$) para cualquier $a \in A$ y lo llamaremos $\max(A)$ (resp. $\min(A)$).

Veamos algunos ejemplos de estos conceptos.

Ejemplo 1.15.

- a) El conjunto de los números naturales no es un conjunto acotado. Concretamente, no es un conjunto acotado superiormente pero sí está acotado inferiormente. Como no está acotado superiormente no tiene máximo. Sí tiene mínimo: $1 \leq n$ para cualquier natural n .
- b) El conjunto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ está acotado superior e inferiormente: $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ para cualquier natural n . Tiene máximo: el 1, pero no tiene mínimo. El mínimo podría ser el cero pero no pertenece al conjunto.

A la vista de los ejemplos, la existencia de máximo implica que el conjunto está acotado pero el recíproco no es cierto. Hay conjuntos acotados y que no tienen ni máximo ni mínimo: piensa en el intervalo $]0, 1[$. Sin embargo, aunque ni el 0 ni el 1 sean ni máximo ni mínimo, sí parece claro que tienen un papel destacado. De alguna forma son los extremos del conjunto, pertenezcan o no a dicho conjunto. El supremo y el ínfimo van a ser una forma de reconocer este tipo de puntos.

Definición 1.16. Sea A un subconjunto acotado superiormente de \mathbb{R} . El *supremo* del conjunto A , $\sup(A)$, es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de A . Análogamente se define el *ínfimo* de un conjunto acotado inferiormente como el máximo de sus cotas inferiores y lo notaremos $\inf(A)$.

Si llamamos, para A un conjunto mayorado, $M(A)$ al conjunto de sus mayorantes, entonces

$$\sup(A) = \min(M(A)).$$

Cabe preguntarse si un conjunto mayorado tiene supremo. La situación es la siguiente: si A es un conjunto mayorado el conjunto de sus mayorantes, $M(A)$, está minorado. Sabemos que un conjunto minorado no tiene por qué tener mínimo pero ¿y si el conjunto minorado del que estamos hablando es un conjunto de mayorantes?

Pues bien, se puede comprobar que la última propiedad de los números reales se puede reformular de la siguiente forma:

Axioma del supremo: *todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.*

Este axioma es equivalente al “axioma del ínfimo”. Sólo hay que darse cuenta de que si cambiamos el signo las desigualdades también cambian.

Ejemplo 1.17. Los extremos de un intervalo acotado son el supremo e ínfimo de dicho intervalo independientemente de si pertenecen o no al intervalo. En el caso particular de que alguno de ellos esté en dicho intervalo serán, además máximo o mínimo (lo que corresponda).

Proposición 1.18. Sea A un conjunto acotado superiormente y sea x el supremo de A .

a) Si $x \notin A$, entonces A no tiene máximo.

b) Si $x \in A$, entonces A tiene máximo y, de hecho, $x = \max(A)$.

La siguiente proposición será útil en la demostración de algunos resultados posteriores.

Proposición 1.19. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto acotado superiormente y sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x = \sup(A) \iff \begin{cases} i) a \leq x, \text{ para todo } a \in A \\ ii) \text{ dado } \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tal que } x - \varepsilon < a. \end{cases}$$

1.5.1 Intervalos

Los conjuntos que van a jugar un papel más destacado son los intervalos.

Definición 1.20. Un subconjunto I de \mathbb{R} es un *intervalo* si para cualesquiera $x, y \in I$ se cumple que $[x, y] = \{t \in \mathbb{R} : x \leq t \leq y\} \subset I$.

Ya conoces cuales son los distintos intervalos: abiertos, semiabiertos, cerrados, acotados o no:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

Definición 1.21. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} .

a) Diremos que $a \in A$ es un *punto interior* si existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$.

b) El *interior* de A es el conjunto, $\mathring{A} = \{a \in A : a \text{ es un punto interior}\}$. Diremos que el conjunto A es *abierto* si coincide con su interior.

c) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto adherente* si para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset.$$

d) El *cierre* o *adherencia* del conjunto A es $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es un punto adherente de } A\}$. Diremos que el conjunto A es *cerrado* si coincide con su adherencia.

e) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* de A si para cualquier r positivo se cumple que

$$]a - r, a + r[\cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Notaremos A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A .

f) Diremos que $x \in \mathbb{R}$ es un *punto aislado* del conjunto A si existe $r > 0$ tal que

$$]a - r, a + r[\cap A = \{a\}.$$

g) La *frontera* de A es $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Ejemplo 1.22.

- a) Los intervalos abiertos, ya sean acotados o no, son conjuntos abiertos. De la misma forma los intervalos cerrados son conjuntos cerrados.
- b) El conjunto de los naturales \mathbb{N} es cerrado y tiene interior vacío al igual que \mathbb{Z} . Además todos sus puntos son aislados.
- c) El conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ tiene interior vacío, todos sus puntos son aislados y su cierre es $A \cup \{0\}$. Más concretamente, 0 es un punto de acumulación de A .

Proposición 1.23. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} . Se verifican las siguientes afirmaciones.

- a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$,
- b) A es abierto si, y sólo si, $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado.

1.6 Ejercicios

Ejercicio 1.1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Ejercicio 1.2. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:

- a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$,
- b) $x^2 - 5x + 9 > x$,
- c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$,
- d) $x^2 \leq x$,
- e) $x^3 \leq x$,
- f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$.

Ejercicio 1.3. Discute para qué valores de x se verifica que:

- a) $|x-1| |x+2| = 3$,
- b) $|x^2 - x| > 1$,
- c) $|x-1| + |x+1| < 1$,
- d) $|x+1| < |x+3|$.

Ejercicio 1.4. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - (a+b)x + ab < 0$?