Capítulo 8

Práctica 8. Diagonalización.

Dada una matriz cuadrada $A \in M_n(K)$, decimos que es diagonalizable (por semejanza) si existe una matriz regular P de forma que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 29 & -18 \\ 45 & -28 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ es diagonalizable.

```
(%ixx) A:matrix([29,-18],[45,-28])$ P:matrix([2,3],[3,5])$ D:P^^(-1).A.P;
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Y podemos ver que la matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable. Pues si $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es una matriz regular cualquiera

```
(%ixx) N:matrix([0,1],[0,0])$ Q:matrix([a,b],[c,d])$ Q^^(-1).N.Q;
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} \frac{cd}{ad-bc} & \frac{d^2}{ad-bc} \\ -\frac{c^2}{ad-bc} & -\frac{cd}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Y para que esa matriz fuera diagonal tendría que ocurrir que tanto d^2 como c^2 valieran cero, lo cual no es posible, pues en ese caso, la matriz Q no sería regular.

Caso de que una matriz sea diagonalizable, a la matriz P se le llama *matriz de paso*, y a los elementos que aparecen en la diagonal principal de la matriz D son los *valores propios de la matriz*. Estos valores propios se obtienen como las raíces del polinomio característico. El polinomio característico de una matriz cuadrada A es el determinante de la matriz $A - x \cdot Id$.

```
(%ixx) rat(determinant(A-x*ident(2)));
```

(%oxx)/R/ x^2-x-2

```
(%ixx) factor(%);
(%oxx) (x-2)(x+1)
```

Vemos entonces como las raíces del polinomio característico son $x = 2$ y $x = -1$, justamente los mismos elementos que nos aparecían en la matriz diagonal D.

Maxima dispone del comando `eigenvalues` para calcular los valores propios de una matriz.

```
(%ixx) eigenvalues(A);
(%oxx) [[2,-1],[1,1]]
```

Y el resultado es una lista constituida por dos sublistas. La primera está formada por los dos valores propios de la matriz A (es decir, 2 y -1). La segunda está formada por las multiplicidades algebraicas de estos valores propios, que en este caso son ambas 1. La multiplicidad algebraica de un valor propio a es el exponente al que está elevado el factor $(x - a)$ en la factorización del polinomio característico.

Por ejemplo, si $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces

```
(%ixx) C:matrix([2,0,0],[-1,2,1],[-1,0,3])$ pC:rat(determinant(C-x*ident(3)));
```

(%oxx) $-x^3+7x^2-16x+12$

```
(%ixx) factor(pC);
```

(%oxx) $-(x-3)(x-2)^2$

Lo que nos dice que tenemos dos valores propios $x = 3$ y $x = 2$ con multiplicidades algebraicas iguales a 1 y a 2 respectivamente.

```
(%ixx) eigenvalues(C);
(%oxx) [[2,3],[2,1]]
```

Y nos dice algo que ya sabíamos.

Si x es un valor propio de una matriz A, y v es un vector columna, se dice que v es un vector propio de valor propio x si $A \cdot v = x \cdot v$. Por ejemplo, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A de valor propio $x = 2$.

```
(%ixx) v1:transpose(matrix([2,3]))$ A.v2;
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

Que como vemos es $2 \cdot v_1$.

Y $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector propio de valor propio -1.

```
(%ixx) v2:transpose(matrix([3,5]))$ A.v2;
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

Que es igual a $-v_2$.

Los vectores propios de valor propio x pueden calcularse como los vectores v tales que $(A - x \cdot Id) \cdot v = 0$, es decir, los vectores de $N(A - x \cdot Id)$. Maxima dispone para esto del comando `nullspace`. El conjunto de todos los vectores propios de valor propio x se le conoce como *subespacio propio* de valor propio x.

```
(%oxx) nullspace(A-2*ident(2)); nullspace(A+ident(2));
```

(%oxx) $\mathtt{span}\left(\begin{bmatrix} 18 \\ 27 \end{bmatrix}\right)$

(%oxx) $\mathtt{span}\left(\begin{bmatrix} 18 \\ 30 \end{bmatrix}\right)$

Lo que nos dice que ambos subespacios son los subespacios generador por los vectores $\begin{pmatrix} 18 \\ 27 \end{pmatrix}$ (eso es lo que significa *span*) y $\begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Pero también podemos hallar estos vectores con el comando `eigenvectors`

```
(%ixx) eigenvectors(A);
```

(%oxx) `[[[2,-1],[1,1]],[[[1,`$\frac{3}{2}$`]],[[1,`$\frac{5}{3}$`]]]]`

Que como vemos nos devuelve una lista formada por dos sublistas. La primera sublista nos dice cuales son los valores propios y su multiplicidad algebraica (tal y como lo obteníamos con el comando `eigenvalors`), y la segunda sublista está formada por tantas listas como valores propios. Y cada una de ellas nos da una base del correspondiente subespacio propio.

Entonces, la información que nos da la respuesta a `eigenvectors(A);` es:

> La matriz A tiene dos valores propios, que son $x = 2$ y $x = -1$.
>
> La multiplicidad algebraica del valor propio $x = 2$ vale 1, y la multiplicidad algebraica del valor propio $x = -1$ vale también 1.
>
> Una base del subespacio propio de valor propio 2 es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\}$ (podríamos multiplicar ese vector por 2, para tener sus coordenadas enteras).
>
> Una base del subespacio propio de valor propio -1 es $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}\right\}$.

Con los vectores que nos han salido, podemos formar una matriz regular P, poniendo esos vectores como columnas. Entonces, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, o, si preferimos, la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ que resulta de multiplicar los dos vectores propios por 2 y por 3 respectivamente, se tiene que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal, como ya vimos al comienzo de la sesión.

Vamos a tomar ahora la matriz C.

```
(%ixx) vp:eigenvectors(C);
```

```
(%oxx) [[[2,3],[2,1]],[[[1,0,1],[0,1,0]],[[0,1,1]]]]
```

Y ahora tenemos:

La matriz C tiene dos valores propios, que son $x = 2$ y $x = 3$.

El valor propio 2 tiene multiplicidad algebraica 2, mientras que el valor propio 3 tiene multiplicidad algebraica 1.

El subespacio propio de valor propio 2 tiene dimensión 2, y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

El subespacio propio de valor propio 3 tiene dimensión 1, y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La matriz $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es regular, y $Q^{-1} \cdot C \cdot Q$ es una matriz diagonal.

```
(%ixx) Q:matrix([1,0,0],[0,1,1],[1,0,1])$ Q^^(-1).C.Q;
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Y vemos que la diagonal está formada justamente por los valores propios.
También podríamos haber obtenido la matriz Q como sigue:

```
(%ixx) Q:transpose(matrix(vp[2][1][1],vp[2][1][2],vp[2][2][1]));
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Si cambiáramos el orden de las columnas, nos cambia el orden de los elementos de la diagonal.

```
(%ixx) Q:matrix([1,0,0],[0,1,1],[1,1,0])$ Q^^(-1).C.Q;
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Para que una matriz sea diagonalizable hace falta que la suma de las dimensiones de los subespacios propios sea igual al tamaño de la matriz.

Por ejemplo, sea $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces:

```
(%ixx) E:matrix([0,0,1],[-2,-1,2],[-1,0,2])$ eigenvectors(E);
(%oxx) [[[-1,1],[1,2]],[[[0,1,0]],[[1,0,1]]]]
```

Y vemos que

La matriz E tiene dos valores propios, $x = -1$ y $x = 1$.

La multiplicidad algebraica de $x = -1$ vale 1, mientras que la multiplicidad algebraica de $x = 1$ vale 2.

El subespacio propio de valor propio $x = -1$ tiene dimensión 1, y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

El subespacio propio de valor propio $x = 1$ tiene dimensión 1, y una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

La suma de las dimensiones de los subespacios propios vale 2. La matriz por tanto no es diagonalizable.

El hecho de que una matriz sea diagonalizable permite calcular de forma rápida potencias suyas, pues si $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ entonces $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, luego $A^n = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$, y las potencias de una matriz diagonal se pueden calcular sin más que calcular las potencias de los elementos de la diagonal.

```
(%ixx) A^^(15); D1:D^^(15); P.D1.P^^(-1);
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 327689 & -196614 \\ 491535 & -294922 \end{bmatrix}$

(%oxx) $\begin{bmatrix} 32768 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(%oxx) $\begin{bmatrix} 327689 & -196614 \\ 491535 & -294922 \end{bmatrix}$

Por supuesto, que todo esto podemos hacerlo módulo un número primo. Por ejemplo, vamos a trabajar módulo 7 con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%ixx) modulus:7$
(%ixx) A:matrix([4,0,0,2,6,1,2],[2,5,4,6,5,6,5],[4,6,2,0,0,4,0],[3,2,5,1,3,3,3],
       [6,2,3,4,5,1,0],[6,1,1,0,0,5,6],[2,1,5,0,4,1,1])$
(%ixx) vp:eigenvectors(A);
(%oxx) [[[1,3,2,-2],[1,1,2,3]],[[[1,2,-3,-3,-3,2,-1]],[[1,-1,1,-1,-1,-1,-3]],[[1,0,3,1,1,-1,-1],
(%oxx) [0,1,2,0,-1,2,2]],[[1,0,0,-3,-3,-1,-1],[0,1,0,-1,2,2,1],[0,0,1,3,0,-1,1]]]]
```

Luego A tiene cuatro valores propios, que son $x = 1$, $x = 3$, $x = 2$ y $x = -2$, cuyas multiplicidades algebraicas son respectivamente 1, 1, 2 y 3.

Tenemos las siguientes bases para los subespacios propios:

$$B_{V_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\};\ B_{V_3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\};\ B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\};\ B_{V_{-2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como la suma de las dimensiones de los subespacios propios vale 7, la matriz es diagonalizable. Y se tiene:

```
(%ixx) P:transpose(matrix(vp[2][1][1],vp[2][2][1],vp[2][3][1],vp[2][3][2],vp[2][4][1],
       vp[2][4][2],vp[2][4][3]))$
(%ixx) rat(P^^(-1).A.P);
```

(%oxx) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Vamos a tomar ahora la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 2 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Y vamos a ver si es o no diagonalizable.

```
(%ixx) C:matrix([-3,-3,-1,1,-2,2,-1],[-1,3,2,-2,-2,-3,2],[2,2,3,-1,0,2,0],[-3,2,2,0,3,1,-3],
       [-3,0,-2,2,-1,-1,-1],[-2,-2,2,-2,-1,1,0],[-2,-3,-3,-3,-3,1,-1])$
(%ixx) eigevectors(C);
(%oxx) [[[1,3,2,-2],[1,1,2,3]],[[[1,-2,1,2,0,1,-2]],[[1,-2,-3,-1,-3,-3,2]],[[1,0,0,-3,3,1,2],
       [0,1,-1,-1,-1,-1,-3]],[[1,0,-2,3,1,2,-1],[0,1,0,-1,-1,2,2]]]]
```

Observamos que tiene los mismos valores propios que A, y con las mismas multiplicidades algebraicas. Pero la dimensión del subespacio propio de valor propio -2 tiene dimensión 2. La suma de las dimensiones de los subespacios propios es ahora igual a 6, luego la matriz C no es diagonalizable.