CÁLCULO

1. Estudia los extremos relativos de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como (2 ptos.)

$$f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2\left(1-t^2\right)}{e^{t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Solución. Para estudiar los extremos relativos de una función derivable, calculamos en primer lugar los puntos críticos.

$$f'(x) = \frac{x^2\left(1-x^2\right)}{e^{x^2}} + \frac{(-x)^2\left(1-(-x)^2\right)}{e^{(-x)^2}} = \frac{2x^2\left(1-x^2\right)}{e^{x^2}} = 0 \iff x = 0, \pm 1.$$

Comprobamos el signo en puntos intermedios para estudiar la monotonía de la función:

- como $f'(-2) < 0$, la función f es estrictamente decreciente en $]-\infty, -1]$;
- como $f'(0{,}5) = f'(-0{,}5) > 0$, la función es estrictamente creciente en $[-1, 1]$; y,
- como $f'(2) < 0$, la función es estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$.

A la vista de los intervalos de monotonía, la función tiene un mínimo relativo en -1 y un máximo relativo en 1.

2. Calcula $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$. (2 ptos.)

Solución. Completamos cuadrados: $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$. Entonces

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}$$

hacemos el cambio de variable $y = (x+1)/2$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\int \frac{2\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{2}\arctan(y) \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. Calcula $\displaystyle\int x \arctan(x)\, \mathrm{d}x$. (1.5 ptos.)

   Solución. Usamos el método de integración por partes con $u = \arctan(x)$ y $\mathrm{d}v = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int x \arctan(x)\, \mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\arctan(x)}{2}.\end{aligned}$$

4. Estudia la convergencia de las series

   a) $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n!}$, (1.5 ptos.)

   Solución. Usamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0.$$

   Como el límite es menor que uno, el criterio del cociente nos dice que la serie es convergente.

   b) $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+\log(n)}$. (1.5 ptos.)

   Solución. Aplicamos el criterio de comparación por paso al límite y comparamos con la serie $\sum 1/n^2$ que sabemos que es convergente. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+\log(n)}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

   (sólo hace falta dividir por n^2 numerador y denominador y aplicar la escala de infinitos), las dos series tienen el mismo comportamiento y, en particular, la serie del ejercicio es convergente.

5. Calcula $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 4^{n+3}}{5^n}$. (1.5 ptos.)

Solución.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 4^{n+3}}{5^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n+3}}{5^n} \\
&= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n - 4^3 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \\
&= 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{5}} - 1 - \frac{2}{5} \right) - 64 \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{5}} - 1 - \frac{4}{5} \right) \\
&= \frac{8}{15} - \frac{1024}{5} = -\frac{3064}{15} \, .
\end{aligned}
$$

Granada a 20 de enero de 2016.