TEMA 2

Lógica proposicional

Ejercicio 1. Para las fórmulas:

1. $p \to (q \to r)$
2. $(\neg p \land \neg q) \to (\neg r \land s)$
3. $p \leftrightarrow q$
4. $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$
5. $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow r)$
6. $p \land q \land r$

Encuentra fórmulas equivalentes a ellas en las que se usen solamente las conectivas

a) $\{\neg, \land\}$

b) $\{\neg, \lor\}$

c) $\{\neg, \to\}$

d) $\{\lor, \land\}$

Ejercicio 2. Estudia si las siguientes equivalencias son ciertas o no. Justifica la respuesta.

1. $a \to b \equiv \neg a \to \neg b$
2. $a \leftrightarrow b \equiv \neg a \leftrightarrow \neg b$.
3. $(a \lor b) \to c \equiv (a \to c) \lor (b \to c)$.
4. $(a \lor b) \to c \equiv (a \to c) \land (b \to c)$.
5. $a \to (b \lor c) \equiv (a \to b) \lor (a \to c)$.
6. $a \to (b \to c) \equiv (a \land b) \to c$

Demuestra que:

1. $\models (\alpha \land (\alpha \to \beta)) \to \beta$ Modus ponens
2. $\models ((\alpha \to \beta) \land \neg\beta) \to \neg\alpha$ Modus tollens
3. $\models (\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$
4. $\models ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ Ley de Peirce
5. $\models (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ Ley de Clavius

6. $\models (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$
   $\models (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ Leyes de silogismo

7. $\models (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ Ley de conmutación de premisas

8. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

9. $\models \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
   $\models \alpha \to (\neg\alpha \to \neg\beta)$ Leyes de Duns Suite

Ejercicio 3. Justifica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

1. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \vee \beta$ es contingente.
2. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingente.
3. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \to \beta$ es contingente.
4. Si α y β son contingentes, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es contingente.
5. Si α y β son contradicciones, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautología.
6. Si α es tautología, entonces $\beta \vee \alpha$ es tautología.
7. Si α es insatisfacible, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.
8. $\alpha \vee \beta$ es una tautología si, y sólo si, α y β son tautologías.
9. Si $\alpha \vee \beta$ es contradicción, entonces α y β son contradicciones.
10. Si $\alpha \vee \beta$ es una tautología, entonces α o β son tautologías.
11. Si $\alpha \vee \beta$ es contingente, entonces α y β lo es.
12. Si $\alpha \to \beta$ es una tautología, entonces α es una contradicción o β es una tautología.
13. Si $\alpha \to \beta$ es una fórmula contingente, entonces α y β son contingentes.

Ejercicio 4. Dado el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\{\neg a \vee b \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d,\ a \vee b \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b \vee \neg d\}$$

Razona cuáles de las siguientes afirmaciones es cierta y cuáles no.

1. $c \vee \neg a \vee b$ es una resolvente de la primera y segunda cláusulas.
2. $\neg a \vee d \vee a \vee b$ es una resolvente de la primera y tercera cláusulas.
3. $\neg a$ es una resolvente de la primera y cuarta cláusulas.
4. $\neg c \vee b$ es una resolvente de la segunda y tercera cláusulas.
5. No hay resolventes de la tercera y cuarta cláusulas.

Ejercicio 5. En cada una de las situaciones siguientes indica en cada caso que tipo de fórmula es β (o que tipo de fórmula no es β). Justifica la respuesta.

1. α es una tautología y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
2. α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es cotingente.

3. α es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.
4. α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es contingente.
5. α es una tautología y $\alpha \to \beta$ es una contradicción.
6. α es una contradicción y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.
7. α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es una contradicción.
8. α es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es contingente.
9. α es una contradicción y $\beta \to \alpha$ es una tautología.
10. α es contingente y $\alpha \vee \beta$ es una tautología.
11. α es contingente y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.
12. α es contingente y $\alpha \to \beta$ es una tautología.
13. α es contingente y $\alpha \to \beta$ es contingente.

Ejercicio 6. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Si una fórmula no es satisfacible, su negación sí lo es.
2. Si una fórmula no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación sí lo es.
3. Si una fórmula no es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, su negación tampoco.
4. Si $\Gamma \vDash \alpha$ es posible que exista $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \nvDash \alpha$.
5. Si $\Gamma \nvDash \alpha$ es posible que exista $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \vDash \alpha$.

Ejercicio 7. Estudia si el siguiente conjunto de proposiciones es satisfacible o insatisfacible:

$$\Gamma = \{\gamma \to (\alpha \vee \beta), \beta \to (\gamma \to \alpha), \delta \wedge \neg(\gamma \to \alpha)\}$$

Ejercicio 8. Estudia cuál (o cuáles) de las siguientes implicaciones son ciertas:

1. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash \neg a \wedge \neg c$
2. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash \neg a \to \neg c$
3. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash a \leftrightarrow \neg b$
4. $\{\neg(a \wedge b), \neg c \vee a, b\} \vDash b \to c$

Ejercicio 9. Usa los distintos tipos de técnicas estudiadas (cálculo de interpretaciones en $\mathbb{Z}_2$, resolución, algoritmo de Davis-Putnam) para determinar si son o no tautologías las siguientes fórmulas:

1. $(q \to p \vee r) \to \big((p \to q) \to (p \to [(r \to q) \to r])\big)$
2. $(\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$
3. $(\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$
4. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$
5. $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$
6. $\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$

7. $(\neg a \to \neg b) \to \neg(a \to b)$

8. $(p \to q) \to [(\neg p \to q) \to q]$

Ejercicio 10. Estudia si las siguientes afirmaciones son ciertas o no. Caso de no serlo, encuentra una asignación que lo muestre.

1. $\{a \to b,\ a \to \neg b\} \vDash \neg a$
2. $\{a \to b,\ a \vee b\} \vDash b.$
3. $\{a \to \neg b,\ a \wedge b\} \vDash c.$
4. $\{a \vee b,\ \neg a \vee \neg b\} \vDash a \leftrightarrow \neg b.$
5. $\{a \leftrightarrow \neg b,\ a \to c\} \vDash b \vee c.$
6. $\{(a \wedge b) \leftrightarrow c,\ \neg c\} \vDash \neg a \wedge \neg b.$
7. $\{\neg(a \wedge b \wedge c),\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\} \vDash a \to \neg b.$
8. $\{b \to (c \vee a),\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)\} \vDash b \leftrightarrow (c \vee d).$
9. $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \vDash b \to (\neg a \to c).$
10. $\{(a \vee c) \to \neg a,\ c \to \neg a,\ b \to \neg a\} \vDash \neg a.$
11. $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to d,\ b \wedge \neg d\} \vDash \neg a.$
12. $\{(a \to b) \vee (c \to d),\ \neg a \to a,\ \neg c \to c\} \vDash b \vee d.$
13. $\{a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg b \vee d\} \vDash \neg(a \wedge \neg d).$
14. $\{(b \to a) \wedge b,\ c \to d,\ b \to c\} \vDash a \vee d.$
15. $\{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b\} \vDash c \vee d.$
16. $\{a \to (b \vee c),\ d \vee \neg c,\ b \vee d\} \vDash a \to d.$
17. $\{(\neg b \wedge \neg c) \to \neg a,\ a \to b,\ a \leftrightarrow c\} \vDash b \vee c.$
18. $\{a \to (a \to b),\ (b \vee c) \to a,\ c \to (a \vee b)\} \vDash b.$
19. $\{(a \wedge \neg b) \to \neg c,\ (\neg a \wedge b) \to d,\ \neg a \vee \neg b,\ e \to (a \wedge \neg d)\} \vDash \neg e.$
20. $\{c \to d,\ a \vee b,\ \neg(\neg a \to d),\ \neg a \to b\} \vDash b \wedge \neg c.$

Ejercicio 11. Sea Γ un conjunto de fórmulas, y sean α, β y γ tres fórmulas. Demuestra que:

1. Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \neg\beta$ entonces $\Gamma \vDash \alpha$ (Reducción al absurdo).
2. Si $\Gamma \vDash \alpha$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha$ entaonces $\Gamma \vDash \beta$ (Principìo de inconsistencia).
3. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ entonces $\Gamma \vDash \beta$ (Prueba por casos).
4. Si $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vDash \neg\alpha \to \beta$ entonces $\Gamma \vDash \beta$.
5. Si $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vDash \alpha$ entonces $\Gamma \vDash \alpha$ (Regla de retorsión).
6. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \gamma$ y $\Gamma \cup \{\beta\} \vDash \gamma$ entonces $\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vDash \gamma$.

Ejercicio 12. Para cada una de las equivalencias siguientes, encuentra fórmulas α y β que las hagan ciertas.

1. $\alpha \equiv \alpha \to \beta$
2. $\neg\alpha \equiv \alpha \to \beta$.
3. $\alpha \equiv \neg\alpha \wedge \beta$.
4. $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \to \beta$.
5. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \beta \to \neg\alpha$.
6. $\alpha \vee \beta \equiv \alpha \wedge \beta$.

Ejercicio 13. ¿Es cierto que

$$\{(a \to \neg b \vee d) \wedge (b \wedge \neg d \to a \vee c),\ \ (d \to (a \leftrightarrow \neg b)) \vee (b \wedge \neg c)\} \vDash (\neg b \to (d \wedge (c \vee \neg d))) \to c \wedge d?$$

En caso de respuesta afirmativa, demuéstralo, y en caso de respuesta negativa, da una interpretación que lo muestre.

Ejercicio 14. En cada uno de los apartados siguientes encuentra una fórmula α que lo haga verdadero.

1. $\{\alpha,\ a \to b\} \vDash a \to c$, pero $\alpha \nvDash a \to c$.
2. $\{\alpha,\ a \vee \neg b\} \vDash \neg a$ y $\{\alpha, b \to c\} \vDash c$.
3. $\{\alpha,\ a \to b\} \vDash \neg a$ y $\alpha \vDash b \to c$.
4. $\{\alpha,\ a \to b\} \vDash \neg\alpha$ y $\alpha \nvDash b$.
5. $\{\alpha,\ a\} \vDash b$ y $\alpha \vDash a \wedge \neg b$.
6. $\{\alpha,\ a \to c,\ b \to c\} \vDash c$, pero $\alpha \nvDash a$ y $\alpha \nvDash b$.

Ejercicio 15. Sean α, β, γ y δ cuatro fórmulas de un lenguaje proposicional, y supongamos que $\{\alpha,\beta,\gamma\} \vDash \delta$. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1. $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ es satisfacible
2. $\alpha \vee \beta \vee \gamma \vee \neg\delta$ es una contradicción.
3. $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma \vee \delta$ es una tautología.
4. $((\alpha \vee \beta) \to \gamma) \to \delta$ es una tautología.
5. $\{\alpha,\gamma\} \vDash \neg\delta \to \neg\beta$.
6. $\{\alpha,\beta,\gamma,\neg\delta\}$ es insatisfacible.
7. $\{\alpha \wedge \gamma, \neg\delta \wedge \beta\}$ es insatisfacible.
8. $\{\alpha,\beta,\delta\} \vDash \gamma$.
9. $\{\alpha,\beta,\neg\delta\} \vDash \neg\gamma$.
10. $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \to \delta$ es una tautología.

11. $\{\neg\alpha, \neg\beta, \neg\gamma, \delta\}$ es satisfacible.

12. $\neg\delta \vDash \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma$.

13. $\{\alpha, \beta, \gamma\} \vDash \delta \wedge \beta$.

Ejercicio 16. Demuestra que para cualesquiera proposiciones α y β, se da lo siguiente:

$$\vDash (\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$$

Ejercicio 17. Estudia si el siguiente conjunto de proposiciones es satisfacible o insatisfacible:

$$\Gamma = \{\gamma \to (\alpha \vee \beta), \beta \to (\gamma \to \alpha), \delta \wedge \neg(\gamma \to \alpha)\}$$

Ejercicio 18. En el Cálculo de Proposiciones, si

$$\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta \to (\delta \to \gamma) \text{ y } \Gamma \cup \{\beta\} \vDash \alpha \to \delta$$

Prueba que $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$

Ejercicio 19. Prueba los siguientes enunciados:

1. $\vDash (\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$

2. $\vDash \alpha \to (\beta \to (\gamma \to \gamma))$

3. $\vDash ((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$

4. $\vDash (((\psi \to \theta) \to \theta) \to (\chi \to \theta)) \to (\psi \to (\chi \to \theta))$

Ejercicio 20. Prueba que $\{q \to (\neg p \to r)\} \vDash r \to \neg q$

Ejercicio 21. ¿Para cuál de las siguientes interpretaciones:

a) $I(a) = I(c) = 0$, $I(b) = I(d) = 1$.

b) $I(a) = I(b) = I(c) = 1$, $I(d) = 0$.

c) $I(a) = 1$, $I(b) = I(c) = I(d) = 0$.

d) $I(a) = I(b) = 1$, $I(c) = I(d) = 1$.

la fórmula $((a \to \neg b) \to (b \vee c)) \to (c \to \neg a \wedge b)$ es cierta?

Ejercicio 22. Indica cuáles de las siguientes implicaciones son ciertas:

a) $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash a \leftrightarrow \neg c$.

b) $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash \neg a \wedge \neg b \wedge c$.

c) $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash (b \to \neg c) \wedge (c \to a)$.

d) $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash c \to a \vee b$.

e) $\{\neg c \to a,\ (\neg a \to b) \to \neg a,\ c \to \neg b\} \vDash b \to \neg c) \wedge (\neg c \to a)$.

Ejercicio 23. ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas tienen como interpretación $I(a) + I(b) + I(b) \cdot I(c)$?

a) $(b \to c) \to \neg a$.

b) $a \to (b \leftrightarrow c)$.

c) $a \leftrightarrow (b \to c)$.

d) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \wedge c)$.

e) $a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c)$.

Ejercicio 24. Sea $\alpha = (a \to \neg b \wedge c) \wedge ((\neg a \vee b) \wedge c)$. Indica cuál o cuáles de los siguientes conjuntos podrían ser las cláusulas de una forma clausular de α.

a) $\{\neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee c,\ \neg a \vee b,\ c\}$.

b) $\neg(a \wedge b),\ \neg a \vee c,\ \neg a \vee b,\ c\}$.

c) $\{\neg a \vee b,\ \neg a \wedge c,\ \neg a \vee b\}$.

d) $\{\neg a \vee b,\ c,\ \neg a \vee \neg b\}$.

e) $\{c,\ \neg a\}$.

Ejercicio 25. ¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías?

a) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to c)$.

b) $((a \to (b \vee c)) \wedge \neg c \wedge \neg b) \to \neg a$.

c) $((a \to b) \to c) \to (a \to (b \to c))$.

d) $(a \to b) \vee (b \to a)$.

e) $(\neg a \to \neg b) \to (a \vee b \to a)$.

Ejercicio 26. Dada la siguiente fórmula:

$$\alpha = (a \vee b \to \neg c \wedge d) \to (\neg a \wedge c \to \neg d \vee \neg(\neg c \to b))$$

indica cuál o cuáles de las siguientes fórmulas son subfórmulas de α:

a) $(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge d)$.

b) $\neg c \to b$.

c) $\neg a \wedge c \to \neg d$.

d) $b \to \neg c$.

e) $\neg c \wedge d$.

Ejercicio 27. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $\{a,\ \neg b\} \models b \to \neg a$.

b) $\{a,\ \neg b\} \models \neg b \to a$.

c) $\{a,\ \neg b\} \models \neg a \vee b$.

d) $\{a,\ \neg b\} \models b \vee a$.

Ejercicio 28. Señala en que casos la tercera cláusula es resolvente de las dos anteriores:

a) $a \vee b,\ a \vee \neg b,\ a$.

b) $\neg a \vee b,\ \neg a \vee \neg c,\ b \vee \neg c.$

c) $\neg a \vee b,\ a \vee \neg b,\ \square.$

d) $\neg a \vee b \vee c,\ \neg a \vee \neg b \vee c,\ \neg a \vee c.$

Ejercicio 29. El problema

$$\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta),\ \neg\beta\} \vDash \neg\alpha$$

no es equivalente a:

a) $\Gamma \vDash \neg(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha).$

b) $\Gamma \vDash \neg\beta(\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\alpha).$

c) $\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta)\} \vDash \neg\beta \to \neg\alpha.$

d) $\Gamma \cup \{\neg(\alpha \to \beta)\} \vDash \neg\alpha \to \neg\beta.$

Ejercicio 30. La siguiente implicación

$$\{b \to c \vee a,\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d),\ d \to a \wedge b\} \vDash b \leftrightarrow c \vee d$$

es falsa. Señala cuál o cuáles de las siguientes interpretaciones nos sirven para mostrar esto.

a) $I(a) = I(b) = 1,\ I(c) = I(d) = 0.$

b) $I(a) = I(c) = 1,\ I(b) = I(d) = 0.$

c) $I(a) = I(b) = I(c) = 1,\ I(d) = 0.$

d) $I(a) = I(b) = I(c) = I(d) = 1.$

e) $I(a) = I(d) = 0,\ I(b) = I(c) = 1.$

Ejercicio 31. Indica en que casos se ha aplicado correctamente alguna regla del algoritmo de Davis-Putnam:

a) $\{\neg a \vee \neg b \vee \neg c,\ \neg a \vee c \vee d,\ a \vee \neg b \vee \neg d,\ \neg a \vee b \vee c \vee d,\ b \vee \neg d\}$ es satisfacible si, y sólo si, lo son $\{\neg b \vee \neg c,\ b \vee \neg d\}$ y $\{\neg b \vee \neg c,\ c \vee d,\ b \vee c \vee d,\ b \vee \neg d\}$.

b) $\{a \vee \neg c,\ \neg b,\ a \vee b \vee d,\ \neg b \vee \neg c \vee d,\ d\}$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\{a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg d,\ \neg c \vee d,\ a \vee d\}$.

c) $\{a \vee b \vee \neg c,\ a \vee c \vee \neg d,\ \neg b \vee \neg d,\ d\}$ es instatisfacible si, y sólo si, lo es $\{\neg b \vee \neg d,\ d\}$.

d) $\{\neg b \vee c \vee \neg d,\ a \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg b \vee d,\ a \vee \neg b,\ \neg a \vee \neg d\}$ es satisfacible si, y sólo si, lo es $\{a \vee c \vee d,\ \neg a \vee \neg d\}$.

e) $\{a \vee \neg b \vee c,\ \neg b,\ \neg a \vee b \vee c,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d\}$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\{a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg d\}$.

Ejercicio 32. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología, entonces también lo es $\neg(\alpha \wedge \beta)$.

b) Si α es una contradicción entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.

c) Si α y β son contingentes, entonces también lo es $\alpha \to \beta$.

d) Si α es contingente y $\alpha \vee \beta$ es tautología entonces β es tautología.

e) Si $\alpha \to \beta$ es contingente, entonces α y β lo son.

Ejercicio 33. Sean α, β y γ tales que para cualquier interpretación se tiene que $1 + I(\alpha) \cdot I(\beta) = I(\gamma)$. Entonces:

a) $\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$ es una tautología.

b) $\alpha \wedge \beta$ y $\neg\gamma$ son equivalentes.

c) $\gamma \leftrightarrow \alpha \wedge \beta$ es una contradicción.

d) $\alpha \vee \beta \to \gamma$ es una contradicción.

e) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es insatisfacible.

Ejercicio 34. El problema

$$\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta, \neg\beta\} \vDash \alpha$$

es equivalente a:

a) $\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha\} \vDash \beta$.

b) $\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha\} \vDash \neg\beta$.

c) $\Gamma \vDash \{(\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\beta \to \alpha)$.

d) $\Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta\} \vDash \beta \vee \alpha$.

e) $\Gamma \vDash \{\neg\alpha \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \beta$.

Ejercicio 35. Indica para cuáles de los siguientes conjuntos es b consecuencia lógica.

a) $\{a \to b, \neg a\}$.

b) $\{\neg b \to \neg a, \neg a\}$.

c) $\{a \to c, a \wedge \neg b, \neg c\}$.

d) $\{a \vee b, \neg ac, \neg c\}$.

e) $a \to b, \neg a \to c, c\}$.

Ejercicio 36. Sean α, β y γ tres fórmulas tales que $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \gamma$ es una contradicción. Entonces:

a) $\{\alpha, \beta\} \vDash \gamma$.

b) $\{\alpha, \gamma\} \vDash \beta$.

c) $\{\beta, \gamma\} \vDash \alpha$.

d) $\{\alpha, \neg\beta\} \vDash \gamma$.

e) $\{\alpha, \neg\beta\} \vDash \neg\gamma$.

Ejercicio 37. Si Juan viene en tren, llegará antes de las 6. Si Juan viene en coche, llegará antes de las 6. Por tanto, tanto si viene en tren como si viene en coche, llegará antes de las 6.

Formaliza el anterior razonamiento en un lenguaje proposicional y comprueba que es correcto.

Ejercicio 38 (Junio 2011)**.** Sean α, β, γ fórmulas de un lenguaje proposicional, y Γ un conjunto de fórmulas. Demuestra que la fórmula

$$(\alpha \to \gamma) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma))$$

es una tautología.

Supongamos ahora que $\Gamma \vDash \alpha \to \gamma$. Demuestra que

$$\Gamma \vDash (\neg\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \gamma)$$

Ejercicio 39 (Septiembre 2011)**.** Nos encontramos en la isla donde sus habitantes se dividen en dos grupos. Los que dicen siempre la verdad (veraces) y los que siempre mienten (mentirosos). Estamos con dos habitantes de dicha isla, Andrés y Begoña.

Andrés dice: Yo soy mentiroso si Begoña no lo es.
Begoña replica: Andrés es mentiroso si yo lo soy.

¿Qué conclusión sobre Andrés y Begoña podemos extraer de aquí?

Ejercicio 40 (Septiembre 2011)**.** Sobre determinadas proposiciones lógicas α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6 se sabe lo siguiente:

- α_2 es condición necesaria para α_1.
- $\alpha_2 \vee \alpha_3$ es condición suficiente para $\neg(\alpha_4 \vee \alpha_5 \vee \alpha_6)$.
- α_5 es condición suficiente para $\neg\alpha_1$.

Representa esta información mediante tres proposiciones lógicas β_1, β_2 y β_3 respectivamente, y a continuación demuestra que β_3 es consecuencia lógica de $\{\beta_1, \beta_2\}$.

Ejercicio 41 (Julio 2012)**.** Sea $\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$ y $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$. Encuentra una fórmula γ tal que para cualquier interpretación I se verifique que $I(\gamma) = I(\alpha) + I(\alpha) \cdot I(\beta)$. Calcula una forma clausular de γ.

Ejercicio 42 (Septiembre 2012)**.** Sea $\Gamma = \{(p \to q) \to p,\ p \to \neg r,\ \neg(q \wedge \neg r)\}$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es consecuencia lógica de Γ?

a) $(q \to p) \to r$.
b) $p \wedge (\neg q \vee r)$.
c) $p \to q \vee r$.
d) q.

Ejercicio 43 (Septiembre 2012)**.** Nos encontramos en una sala de la isla a la que hemos hecho referencia cuatro ejercicios más arriba, donde se encuentran reunidos un grupo de personas.

En un momento de la reunión, una de las personas, Carlos, dice:

1. Aquí no hay más de tres personas.
2. Todos los que estamos en esta reunión somos mentirosos.

A continuación, otra persona, Dolores, dice:

1. Aquí no hay más de cuatro personas.
2. No todos los aquí presentes somos mentirosos.

Y posteriormente, Esteban, que también estaba allí presente, afirmó:

1. Aquí hay cinco personas.
2. En esta sala hay tres mentirosos.

¿Cuántas personas había en la isla y cuáles eran mentirosas o veraces?

a) Había 3 personas, y las 3 mentirosas.
b) Había cuatro personas, y sólo Dolores es veraz.
c) Había cinco personas. Carlos, Dolores y una tercera persona son mentirosas mientras que Esteban y otra persona son veraces.
d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Ejercicio 44 (Julio 2013)**.** Utiliza el teorema de la deducción para probar que la siguiente fórmula es una tautología.

$$(a \to c) \to ((b \to c) \to (a \vee b \to c)).$$