Sucesiones y series de números reales

1 Sucesiones

Ejercicio 1. Prueba que si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1}{1-x}$.

Solución 1. Sabemos que $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (es la suma de una progresión geométrica) y, usando que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, se obtiene lo pedido.

Ejercicio 2. Demuestra que la sucesión $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, $\forall n \geq 1$ es convergente y calcular su límite.

Solución 2.

a) Veamos por inducción que la sucesión es creciente. Es inmediato comprobar que $x_1 < x_2$. Si $x_n < x_{n+1}$ tenemos que comprobar que $x_{n+1} < x_{n+2}$:

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{3x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

b) Además es una sucesión acotada, ya que por inducción otra vez tenemos que $x_n \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es inmediato, y si $x_n \leq 3$, comprobémoslo para x_{n+1}. En efecto,

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3.$$

Por tanto, la sucesión es creciente y mayorada, luego existe su límite x, que estará comprendido entre $1 \leq x \leq 3$. Para calcular su valor vamos a tomar límites en la fórmula de recurrencia, esto es $x_{n+1}^2 = 3\, x_n \implies x^2 = 3x \implies x(x-3) = 0$ de lo que se deduce que $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 3$.

E **Ejercicio 3.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ para $n \in \mathbb{N}$. Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

Solución 3. Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $a_2 = \sqrt{5} > a_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

a) Para $n = 1$, acabamos de ver que $a_1 \leq a_2$.

b) Hipótesis de inducción: suponemos que $a_n \leq a_{n+1}$.

c) Comprobamos que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow 2a_n \leq 2a_{n+1} \Rightarrow 2a_n + 3 \leq 2a_{n+1} + 3 \Rightarrow \sqrt{2a_n + 3} \leq \sqrt{2a_{n+1} + 3} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.
Al ser creciente, ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por $a_1 = 1$. Veamos que está acotada superiormente por 3. Esto es, que $a_n \leq 3 \forall\, n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

a) Para $n = 1$, es evidente que $a_1 1 \leq 3$.

b) Hipótesis de inducción: Suponemos que $a_n \leq 3$.

c) Comprobamos que $a_{n+1} \leq 3$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \leq 3 \;\Rightarrow\; 2a_n \leq 6 \;\Rightarrow\; 2a_n + 3 \leq 9 \;\Rightarrow\; \sqrt{2a_n+3} \leq \sqrt{9} = 3 \Rightarrow\; a_{n+1} \leq 3$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.
Para calcular el límite de $\{a_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{a_n\} = x$ y nos queda que $x = \sqrt{2x+3}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2x+3} \Rightarrow\; x^2 = 2x+3 \;\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \text{ ó } x = 3$$

Pero como el límite ha de ser mayor que 1, tenemos que $\lim a_n = 3$.

E **Ejercicio 4.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$.

a) Demuestra que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ para cualquier natural n.

b) Demuestra que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

c) Calcula su límite.

Solución 4.

a) Lo demostramos por inducción. Es claro que $\frac{1}{5} < x_1 = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$. Supongamos que $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$, entonces

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} > \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}, \qquad \text{y}$$
$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{4}{5}.$$

b) De nuevo comprobamos que la sucesión es decreciente por inducción. En primer lugar, es evidente que $x_1 = \frac{1}{2} \geq \frac{41}{100} = x_2$. Supongamos ahora que $x_n \geq x_{n+1}$, entonces

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} \geq x_{n+1}^2 + \frac{4}{25} = x_{n+2},$$

ya que la función "elevar al cuadrado" conserva el orden en los positivos.

c) De los dos apartados anteriores se deduce que la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente. Si L es su límite, debe verificar que

$$L = L^2 + \frac{4}{25} \iff L = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{2} = \frac{1}{5}, \text{ o } \frac{4}{5}.$$

Puesto que la sucesión es decreciente, el límite no puede ser $\frac{4}{5}$ y, se tiene que $L = \frac{1}{5}$.

Ejercicio 5. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Estudiar el comportamiento de la sucesión $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2+a}{2}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución 5. En primer lugar, probamos que la sucesión es decreciente. Se tiene que $x_2 = \sqrt{\frac{a^2+a}{2}} < a = x_1$ ($\iff a > 1$). Si suponemos que $x_{n+1} < x_n$ veamos que también $x_{n+2} < x_{n+1}$. En efecto, como $x_{n+1}^2 < x_n^2$, entonces

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + a}{2}} < x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}\,.$$

Además la sucesión está acotada, ya que $1 < x_n \leq a\,,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (¡pruébese por inducción!), por tanto la sucesión tiene límite x que verifica la ecuación siguiente:

$$x^2 = \frac{x^2 + a}{2} \implies x^2 = a \implies x = \sqrt{a}.$$

2 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 6. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

b) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

Solución 6.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$. Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}\,.$$

En consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 7. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) $\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

d) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

Solución 7.

a) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)(4n+1)}}{\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce la convergencia de la serie.

Ejercicio 8. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{\log(n)}{n}$

b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c) $\sum \frac{1}{2n-1}$

d) $\sum \frac{1}{2^n-n}$

e) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$

f) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

Solución 8.

a) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n}$ que no es convergente. Como $\frac{\log(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, la serie no es convergente.

b) Comparamos con la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ no es convergente.

c) No es convergente. La serie se comporta igual que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$.

d) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{2^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n}{2^n} = 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

e) Comparamos con la serie convergente $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n-1)2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = 4.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie es convergente.

f) No es convergente porque $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$.

Ejercicio 9. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{2^n}{n}$

b) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$

c) $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$

d) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

Solución 9.

a) No es convergente porque $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$.

b) No es convergente porque el término general no tiende a cero: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

c) Como $\log(n) \geq 1$ para $n \geq 3$, se tiene que $\frac{1}{n^2 \log(n)} \leq \frac{1}{n^2}$, para cualquier $n \geq 3$. La serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente y, el criterio de comparación nos dice que $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$ también lo es.

d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 10. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n!}$

b) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

d) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

Solución 10.

a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

b) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-2)(3n+1)}{n^2} = 9$$

y, por tanto la serie es convergente.

c) Comparamos con la serie $\sum \frac{1}{n^3}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = 2.$$

En consecuencia, las dos series tienen el mismo carácter de convergencia. Puesto que la serie $\sum \frac{1}{n^3}$ es convergente, ambas lo son.

d) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^{(n-1)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 11. Estudiar la convergencia de las series

a) $\sum \frac{n^3}{e^n}$

b) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

c) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$

d) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$

Solución 11.

a) Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$ y, en consecuencia, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

E **Ejercicio 12.** Estudia el carácter de las siguientes series:

a) $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$.

b) $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$.

Solución 12.

a) Aplicamos el criterio de la raíz, considerando como $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$. Tendremos entonces que estudiar el límite de $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ y compararlo con 1; esto es

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2/n} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^n$$

sucesión que presenta una indeterminación del tipo "1^∞" por lo que aplicamos la regla del número e:

$$\lim n\left(\frac{2n+1}{2n+5} - 1\right) = \lim \frac{-4n}{2n+5} = -2 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$$

Por tanto la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente, considerando como $a_n = \frac{1+\log(n)}{n^n}$; de esta forma, habrá que estudiar el límite de la siguiente sucesión y compararlo con el valor1:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1+\log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{1+\log(n)} = \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \frac{n^n}{(n+1)^n\,(n+1)} \\ &= \frac{1+\log(n+1)}{1+\log(n)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Finalmente, si calculamos el límite de cada uno de los tres factores que tenemos, el primer factor es claro que converge a 1 (no hay más que dividir el numerador y denominador por $\log(n+1)$), el segundo factor converge a e^{-1} (basta aplicar la regla del número e) y el tercero converge a cero. Por tanto:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ es convergente.}$$

E **Ejercicio 13.** Estudiar, según los valores de $a > 0$ la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum \frac{a^n}{n^a}$

b) $\sum a^n n^a$

Solución 13.

a) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que en para $a = 1$ es la serie armónica que no converge, y para $a > 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

b) Sólo tenemos en cuenta $0 < a < 1$ puesto que para $a \geq 1$ el término general no converge a cero. Entonces, para $0 < a < 1$ aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

3 Suma de series

Ejercicio 14. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$

Solución 14.

a) La suma es $\frac{1}{2}$ puesto que la serie es la mitad de la del Ejemplo ??.

b) Calculamos las sumas parciales usando la descomposición en fracciones simples del término general:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 15. Suma, si es posible, las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$

Solución 15.

a) Usando la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n} = 15 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{150}{9}.$$

b) De nuevo utilizamos la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

c) Aprovechamos que estamos sumando una progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \frac{1}{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

d) Dividimos en dos progresiones geométricas y sumamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{13}{6}.$$