4. Conceptos básicos de Variables Aleatorias

1. Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados equilibrados y observar el número máximo de los dos números obtenidos en ellos. Si X es la variable aleatoria asociada a ese experimento, hallar:

   a) La función masa de probabilidad de la variable aleatoria X.

   b) La función de distribución de la variable aleatoria X.

   c) $F(2.5)$.

   d) $P[2 \leq X \leq 4]$.

   e) La esperanza y la varianza.

2. Al lanzar dos dados, se considera la suma de sus resultados. Sea X la variable aleatoria asociada a este experimento aleatorio. Hallar:

   a) La función de probabilidad.

   b) La función de distribución. Representarla gráficamente.

   c) $P[3 \leq X \leq 7]$.

   d) Esperanza de la variable aleatoria.

3. La variable aleatoria X representa el tiempo en minutos que transcurre entre dos llegadas consecutivas a una tienda y su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k\, e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determinar:

   a) El valor de k.

   b) La función de distribución.

   c) La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas se encuentre entre 2 y 6 minutos.

   d) La probabilidad de que transcurran menos de 8 minutos entre 2 llegadas consecutivas.

   e) La probabilidad de que el tiempo entre 2 llegadas consecutivas exceda los 8 minutos.

4. La variable aleatoria que representa la proporción de accidentes automovilísticos fatales en Estados Unidos tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 42x(1-x)^5 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Demostrar que f es una función de densidad.
   b) Calcular la función de distribución.
   c) Calcular $P[X \leq 0.25]$.

5. Se considera la variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \dfrac{(x-2)^3}{8} & 2 < x < 4 \\ 1 & 4 \leq x \end{cases}$$

   a) Calcular la función de densidad.
   b) Calcular $P[3 \leq X]$, $P[1 < X < 3]$, $P[X < 3]$, $P[X > 4]$.

6. Sea X la duración en segundos de un tipo de circuitos. X puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y $+\infty$. Sea la función de densidad de X:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2} & 100 < x < 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcular el valor de a para que f sea una función de densidad..
   b) Calcular la probabilidad de que un circuito dure exactamente 200 segundos.
   c) Calcular $P[200 < X < 300]$.

7. Una variable tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(7+x)}{k} & -7 < x \leq 0 \\ \dfrac{(7-x)}{k} & 0 < x \leq 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Determinar:

   a) El valor de k.
   b) La función de distribución.
   c) $P[X > 0]$.

8. Dada la función de probabilidad: $P[X = i] = ki \quad i = 1, 2, ..., 20$

   Calcular:

   a) $P[X = 4]$
   b) $P[3 \leq X \leq 10]$
   c) Esperanza de X.

9. Una variable tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} a\, e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar:

a) $F(x)$

b) $P[1 < X < 2]$

c) $P[0.5 \leq X \leq 1]$

d) $P[3 > X]$

10. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 0.5 \\ 1 - 3(x - x^2) & 0.5 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la función de densidad de la variable aleatoria asociada.

b) $P[X > 0.75]$.

c) $P[0.25 < X < 0.75]$.

d) Comprobar que F es una función de distribución.

11. Se lanzan tres monedas al aire. Sea la variable aleatoria X = nº de caras que se obtienen. Se pide:

a) Obtener la función masa de probabilidad de la variable X.

b) Obtener la función de distribución de la variable X.

c) Calcular la media, varianza y desviación típica de X.

d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras.

e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras.

12. La variable X = número de hijos por familia de una cierta ciudad, tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x_i	$P[X = x_i]$
0	0.47
1	0.3
2	0.1
3	0.06
4	0.04
5	0.02
6	0.01

Calcular:

a) Media o esperanza matemática. ¿Qué significado tiene este número?

b) Varianza y desviación típica.

c) Suponiendo que el ayuntamiento de la ciudad paga 12 euros por hijo y que $Y = 12X$, ¿qué representa Y?, ¿cuál es su distribución de probabilidad?

d) Media, varianza y desviación típica de Y.

13. Sea X una variable aleatoria discreta que tiene como distribución de probabilidad

$$P[X = x] = \frac{1}{10} \quad x = 2, 3, \ldots, 11$$

Se pide:

a) Función de distribución

b) $P[X > 7]$

c) $P[X \leq 5]$

d) $P[3 < X \leq 8]$

14. Sea X una variable aleatoria, que tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ k - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de la constante k.

b) Determinar la función de distribución de la variable aleatoria X.

c) Calcular la media de la distribución.

15. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+6}{50} & -6 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Comprobar que $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria X.

b) Calcular la función de distribución de X y representarla gráficamente.

16. Sea una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq 3 \\ c\,(6 - x) & 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar c para que $f(x)$ sea una función de densidad.

b) Hallar $P[X > 3]$ y $P[1.5 \leq X \leq 4.5]$

c) Calcular la esperanza y la mediana.

17. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^2} & 1 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtener k para que $f(x)$ sea una función de densidad.

b) Calcular la función de distribución

c) Calcular la esperanza y el percentil 90.

d) Hallar $P[X = 7]$ y $P[3 \leq X \leq 5]$