

Integración

8

8.1 Funciones integrables 113 8.2 Teorema fundamental del Cálculo 119 8.3 Ejercicios 122

El área de un recinto, la longitud de un cable que cuelga entre dos postes, el volumen o la superficie de una esfera...Estos son el tipo de problemas que vamos a resolver en este capítulo. Para ello presentamos el concepto de integral de una función.

8.1 Funciones integrables

Definición 8.1. Una *partición* P de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito del tipo $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ donde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ejemplo 8.2. Los conjuntos $\{0, 1\}$, $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ o $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ son particiones del intervalo $[0, 1]$. No lo son, en cambio, conjuntos como $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\}$, $\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$.

Definición 8.3. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición del intervalo. La *suma superior* $S(f, P)$ de la función f relativa a la partición P es

$$S(f, P) = \sup f([x_0, x_1])(x_1 - x_0) + \sup f([x_1, x_2])(x_2 - x_1) + \dots + \sup f([x_{n-1}, x_n])(x_n - x_{n-1}).$$

Análogamente se define la *suma inferior* $I(f, P)$ como

$$I(f, P) = \inf f([x_0, x_1])(x_1 - x_0) + \inf f([x_1, x_2])(x_2 - x_1) + \dots + \inf f([x_{n-1}, x_n])(x_n - x_{n-1}).$$

Las sumas inferiores y superiores que vemos en la siguiente figura son una aproximación del área que queremos calcular. Ahora bien, el valor de la suma inferior siempre será menor que el de la integral y a la suma superior le ocurre lo contrario.

Definición 8.4. La *integral superior* de f se define como

$$\overline{\int}_{[a,b]} f = \inf \{S(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}.$$

La *integral inferior* de f se define como

$$\underline{\int}_{[a,b]} f = \sup \{I(f, P) : P \text{ partición de } [a, b]\}.$$

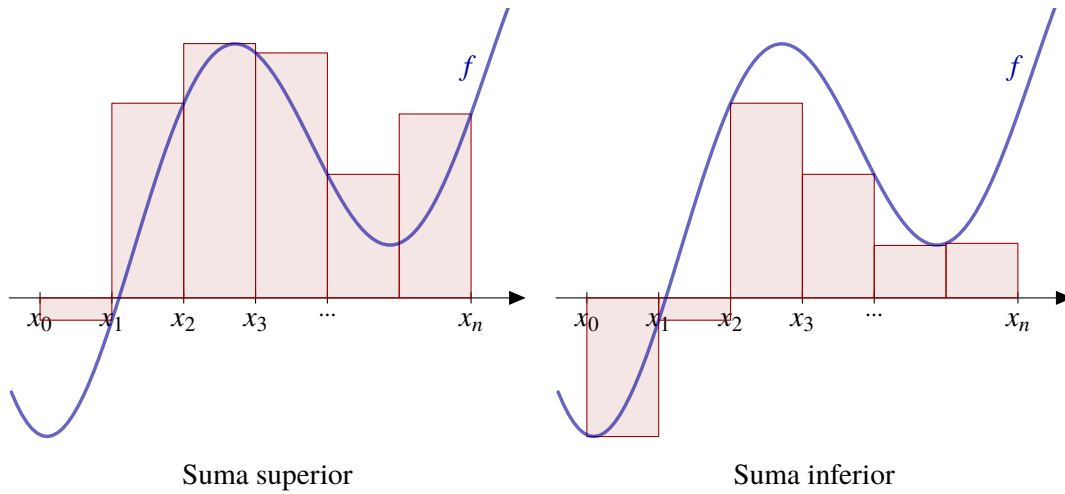


Figura 8.1 Sumas superiores e inferiores

Las integrales superior e inferior son aproximaciones a la integral de la función. En un caso por exceso y en otro por defecto. Cuando ambas aproximaciones coinciden, tenemos una función integrable.

Definición 8.5. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Diremos que f es *integrable* si coinciden la integral superior e inferior. En ese caso, denotaremos $\int_{[a,b]} f$ a dicha integral.

También usaremos con frecuencia las notaciones $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x) dx$ si queremos hacer hincapié en la variable de integración.

Ejemplo 8.6. Calcular la integral de $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 1]$ Consideremos la partición P_n del intervalo $[0, 1]$ que consiste en dividirlo en n trozos iguales:

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Como la función f es creciente, su valor máximo se alcanzará en el extremo de la derecha y el mínimo en el extremos de la izquierda. Con esto es fácil calcular el valor de las sumas superiores e inferiores.

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2n^2}, \text{ y}$$

$$I(f, P_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{(n-1)n}{2n^2}.$$

Si hacemos tender n a infinito, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f, P_n) = \frac{1}{2}$. Por tanto $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

No es fácil calcular la integral de una función con la definición. En el ejemplo anterior hemos tenido que usar la suma de una progresión aritmética y usar particiones de una forma particular. En el resto del tema veremos qué funciones son integrables, qué propiedades tienen y, por último, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow nos permitirán calcular integrales de una forma más cómoda.

8.1.1 Propiedades

Comenzamos recogiendo información sobre la integrabilidad de funciones relacionada con las operaciones usuales.

Linealidad de la integral

Con respecto a la suma, el conjunto de las funciones integrables es un espacio vectorial y la integral es una aplicación lineal.

Proposición 8.7. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Entonces

a) La suma $f + g$ es integrable y $\int (f + g) = \int f + \int g$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int (\lambda f) = \lambda \int f$.

Producto de funciones

La integral que acabamos de introducir también se comporta bien con respecto al producto aunque en este caso *no* hay una identidad que relacione la integral de un producto de funciones con el producto de las integrales.

Proposición 8.8. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables.

a) El producto de ambas funciones, fg , es una función integrable.

b) (Desigualdad de Schwarz) $\left(\int (fg) \right)^2 \leq \int f^2 \int g^2$.

c) (Desigualdad de Minkowski) $\left(\int (f + g)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int f^2 \right)^{1/2} + \left(\int g^2 \right)^{1/2}$.

Orden

En cuanto al orden, el siguiente resultado nos dice que la integral lo conserva.

Proposición 8.9. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrables. Si $f(x) \leq g(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particular, si $f(x) \geq 0$ para cualquier x se tiene que $0 \leq \int_a^b f(x) dx$.

No es evidente de la definición, pero se puede comprobar que si una función es integrable, su valor absoluto también lo es.

Proposición 8.10. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Entonces la función $|f|(x) = |f(x)|$ es integrable y

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| \leq \int_{[a,b]} |f|(x) dx.$$

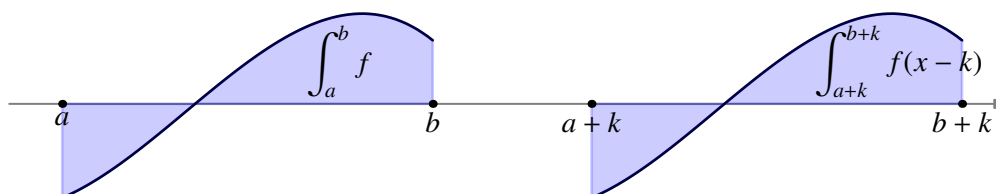
Dominio

Se puede demostrar que si una función es integrable en un intervalo, también lo es en cualquier intervalo contenido en él. Teniendo en cuenta esto, podemos calcular la integral de una función en un intervalo dividiendo este en varios trozos y sumar los resultados. Esto se conoce como aditividad de la integral respecto de su dominio.

Proposición 8.11 (Aditividad respecto del dominio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in]a, b[$. Entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$. En ese caso,

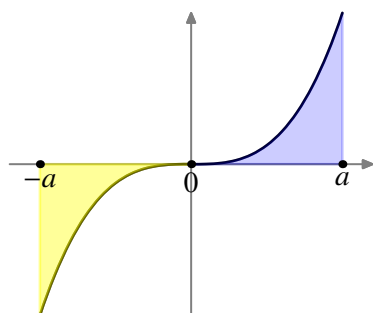
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Observación 8.12. La integral de una función f en un intervalo $[a, b]$ no cambia si “trasladamos” dicha función.



Podemos utilizar esto para simplificar el cálculo de algunas integrales. Por ejemplo, si f es una función impar, entonces

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



¿Por qué? Sólo tenemos que mirar la gráfica de la función. El área entre 0 y a es igual que el área entre $-a$ y 0 pero con signos opuestos y ambas se cancelan. Por ejemplo

$$\int_{-a}^a x^3 dx = 0.$$

Si por el contrario f es una función par entonces $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.

8.1.2 Condiciones suficientes de integrabilidad

Ya hemos visto que las funciones integrables tienen muchas propiedades interesantes. La siguiente cuestión es ¿hay muchas? ¿Qué funciones son integrables? ¿Tenemos suficientes ejemplos de funciones integrables?

El primer resultado que presentamos nos dice que el conjunto de las funciones integrables incluye a la mayoría de las funciones con las que hemos estado trabajando hasta ahora.

Proposición 8.13 (Condiciones suficientes de integrabilidad). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

a) Si f es continua, entonces es integrable.

b) Si f es monótona, entonces es integrable.

Observa que no hemos mencionado que la función tenga que ser acotada. En ninguno de los casos es necesario: para funciones monótonas es inmediato y para funciones continuas es consecuencia de la propiedad de compacidad.

Podemos ir un poco más lejos, si “estropeamos” una función integrable en unos pocos puntos, ni la integrabilidad ni el valor de la integral se alteran.

Proposición 8.14. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verificando que el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ es finito. Entonces g es integrable y

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Este resultado afirma que si se cambia el valor de una función en una cantidad finita de puntos se obtiene una función que sigue siendo integrable y, de hecho, el valor de la integral no cambia.

Observación 8.15. Existen funciones integrables que no son continuas. Este hecho debería estar claro después de haber afirmado que las funciones monótonas son integrables y recordando que ya conocemos funciones monótonas que no son continuas (como por ejemplo la parte entera). De todas formas la última proposición nos da una manera muy fácil de fabricar funciones integrables que no son continuas: tómese una función continua y cámbiesele el valor en un punto. De este modo se obtiene una función que deja de ser continua en dicho punto pero que tiene la misma integral.

Cambiando el valor de una función en un punto sólo obtenemos discontinuidades evitables. Aunque las discontinuidades no sean evitables, si no son demasiadas, la función es integrable.

Proposición 8.16. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Si f tiene una cantidad finita de discontinuidades, entonces es integrable.

Existe una caracterización completa de las funciones integrables. Para darla, se necesita hablar de conjuntos “pequeños”: los llamados conjuntos de medida nula. Si la medida, la longitud en este caso de un intervalo acotado es $\ell(I) = \sup(I) - \inf(I)$. Un conjunto de medida nula es un conjunto que tiene longitud cero. Veamos la definición con más detalle.

Definición 8.17. Sea A un subconjunto de \mathbb{R} . Diremos que A es un *conjunto de medida nula* si dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos acotados $\{I_n\}$ verificando que

a) $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$, y

b) $\ell(I_1) + \ell(I_2) + \cdots + \ell(I_n) \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 8.18. Cualquier conjunto finito es de medida nula.

Teorema 8.19 (de Lebesgue). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:

a) f es integrable.

b) El conjunto de puntos de discontinuidad de f es un conjunto de medida nula.

8.1.3 Sumas de Riemann

Una de las dificultades de la definición de integral que hemos dado radica en el hecho de que involucra *todas* las posibles particiones del intervalo $[a, b]$. La segunda dificultad es averiguar cuál es el supremo o el ínfimo de la función en cada uno de los intervalos asociados a una partición. Vamos a dar respuesta a ambas cuestiones:

- En cuanto a las particiones, veremos que es necesario considerar todas sino sólo algunas elegidas adecuadamente. Así nos encontraremos el concepto de norma de una partición.
- En cuanto al segundo punto, el teorema de Darboux nos dirá que no hace falta calcular el supremo ni el ínfimo y que cualquier punto del intervalo puede jugar el mismo papel.

Comencemos con las particiones. El ejemplo típico de partición que hemos usado consiste en dividir el intervalo $[a, b]$ en trozos iguales. Aumentando el número de trozos, nos aproximamos al valor de la integral. En este caso, la longitud de cada uno de los trozos es $\frac{b-a}{n}$, la longitud del intervalo dividido por el número de trozos, n . La norma de una partición nos mide el tamaño de los trozos o, más concretamente, el tamaño del trozo más grande.

Definición 8.20. Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. La *norma* de la partición P es

$$\|P\| = \max \{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Si en las sumas inferiores y superiores aproximábamos por rectángulos cuya altura era el supremo o el ínfimo de la función, ahora vamos a elegir como altura el valor de la función en un punto arbitrario en cada uno de los intervalos relativos la partición. Para cada partición, tenemos muchas posibles elecciones de puntos. A cualquiera de éstas, las vamos a llamar sumas integrales o sumas de Riemann.

Definición 8.21. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Una *suma integral* o *suma de Riemann* es una suma de la forma

$$f(y_1)(x_1 - x_0) + f(y_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(y_n)(x_n - x_{n-1})$$

donde $y_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ya podemos dar la respuesta a la pregunta que planteamos al principio de la sección: para aproximarnos al valor de la integral de la función sólo tenemos que asegurarnos de que la norma de las particiones tiendan a cero independientemente de cuáles sean los puntos elegidos en el intervalo. Una de las formas más fáciles de conseguirlo es dividiendo el intervalo en n trozos iguales y hacer n tender a infinito.

Esta es una versión “light” del teorema de Darboux que, de hecho, permite caracterizar las funciones integrables utilizando sumas integrales en lugar de sumas superiores e inferiores.

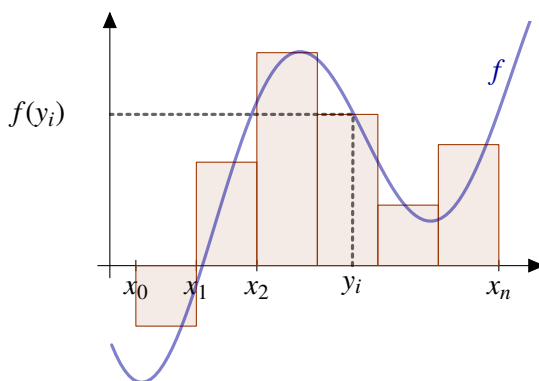


Figura 8.2 Suma integral o de Riemann

Teorema 8.22 (de Darboux). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $\{P_n\}$ una sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$. Entonces, si S_n son sumas de Riemann asociadas a P_n se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f$.

8.2 Teorema fundamental del Cálculo

Si f es una función definida y a es un elemento de su dominio, diremos que f es integrable en $[a, a]$ y que $\int_a^a f(x) dx = 0$. También convendremos que $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Definición 8.23. Sea I un intervalo. Diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es *localmente integrable* si es integrable en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I .

Ejemplo 8.24.

- a) Las funciones continuas y las funciones monótonas son localmente integrables.
- b) Si f es integrable en $[a, b]$, es localmente integrable en dicho intervalo.

Lema 8.25. Sea f una función localmente integrable en un intervalo I y sean $a, b, c \in I$. Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Obsérvese que la comodidad del lema anterior radica en que no sabemos como están ordenados a, b y c .

Definición 8.26. Si f es una función localmente integrable en I y $a \in I$ podemos definir una nueva función que mide como cambia la integral de la función de la forma

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

A las funciones F definidas de esta forma las llamaremos *integrales indefinidas* de f .

La integral indefinida es la función que nos da el área sombreada de la Figura 8.3.

Definición 8.27. Sea I un intervalo de \mathbb{R} . Una *primitiva* de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en el interior del intervalo que cumple que $G'(x) = f(x)$ para cualquier x en el interior de I .

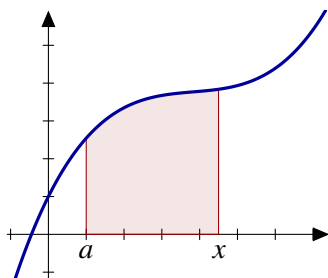


Figura 8.3 Integral indefinida

Observación 8.28. Dos integrales indefinidas se diferencian en una constante. Ocurre lo mismo para dos primitivas de una misma función. En efecto, la diferencia entre dos funciones con la misma derivada tiene derivada cero y por tanto es constante (en un intervalo). En cuanto a integrales indefinidas, si

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{y} \quad G(x) = \int_b^x f(t) dt$$

son integrales indefinidas, entonces

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \int_a^x f(t) dt - \int_b^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Existe una gran tendencia a confundir integral y primitiva. Es usual que hablemos de “vamos a calcular la integral” cuando nos estamos refiriendo a “encontremos una función cuya derivada sea...”. Los conceptos de integral definida y primitiva son, en principio, independientes. El objetivo de los dos siguientes resultados es poner de manifiesto que existe una clara relación entre ellos y, de paso, obtener una forma práctica de calcular integrales.

Teorema 8.29 (fundamental del Cálculo). Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable y F una integral indefinida de f . Entonces

a) F es una función continua.

b) Si f es continua en $a \in I$, entonces F es derivable en a con $F'(a) = f(a)$.

En particular, si f es una función continua, F es una función derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .

Ejemplo 8.30.

a) La función parte entera, $E(x)$, es monótona y por tanto integrable en cualquier intervalo. Dicho de otra manera, la función parte entera es localmente integrable en \mathbb{R} . Cualquier integral indefinida será una función continua en todo \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Sin embargo, la función parte entera no tiene primitiva. El teorema del valor intermedio para las derivadas (Teorema 5.21) nos dice que la función parte entera no es la derivada de nadie porque su imagen no es un intervalo.

b) La función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = \pm 1, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 < x < 1, \end{cases}$$

no es integrable por no ser acotada. En cambio, sí admite una primitiva: la función arcoseno.

Una de las primeras utilidades del Teorema fundamental del Cálculo es poder definir funciones de una manera rigurosa usando la integral. Por ejemplo, se puede definir la función logaritmo como

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

La función $G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$ es continua si lo son f y g . Si, además, g y h son derivables, y f es continua, entonces G es derivable con

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Ejemplo 8.31. La función $f(x) = \int_1^{x^2+1} \frac{\sin(t)}{t} dt$ es derivable y su derivada es

$$f'(x) = \frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1} 2x.$$

8.2.1 Regla de Barrow

El siguiente resultado, la regla de Barrow, nos permite resolver de modo práctico el cálculo de integrales y sustituirlo por el cálculo de primitivas.

Teorema 8.32 (Regla de Barrow). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y G una primitiva de f . Entonces

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Ejemplo 8.33. La primera integral que calculamos fue la de la identidad en el intervalo $[0, 1]$ (ver Ejemplo 8.6). Ahora podemos calcularla mucho más fácilmente.

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 8.34. Las propiedades de la integral nos pueden servir para darnos cuenta de que estamos haciendo algo mal. Por ejemplo:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^4} dx = \int_{-1}^1 x \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{2}{3} \frac{1}{2} (1 + x^2)^{3/2} \right]_{-1}^1 = 0.$$

A primera vista puede parecer correcto, pero la integral de una función continua y positiva no puede valer cero, tiene que ser positiva también. ¿Qué hemos hecho mal? La respuesta es que $\sqrt{x^2}$ es $|x|$ y no x como hemos dicho. Hagámosla correctamente:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^4} dx = \int_{-1}^1 |x| \sqrt{1 + x^2} dx$$

usemos que el integrando es una función par,

$$= 2 \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{2}{3} (1 + x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}.$$

Corolario 8.35 (Teorema de cambio de variable). Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada ϕ' integrable. Sea I un intervalo tal que $\phi([a, b]) \subset I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con primitiva G . Entonces

$$\int_a^b (f \circ \phi) \phi' = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = G(\phi(b)) - G(\phi(a)).$$

8.3 Ejercicios

Ejercicio 8.1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \sin^3(t) dt,$

b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2(t)} dt,$

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\sin^2(t)} dt.$

Ejercicio 8.2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(\log(1+t)) dt,$

b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \sin^3(t) dt,$

c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t) dt.$

Ejercicio 8.3. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

Ejercicio 8.4. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\sin(x)} e^{-t^2} dt}{\sin^2(x)}.$$

Ejercicio 8.5. Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t}) dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcula el mínimo absoluto de f .

Ejercicio 8.6. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \sin(\sin(t)) dt}{x^2}.$$

E **Ejercicio 8.7.** Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en \mathbb{R} .
- b) Calcula los extremos relativos de f .
- c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x^3 - x^2)}$.

Cálculo de primitivas

9

9.1 Cálculo de primitivas

Utilizaremos la notación $\int f(x) dx$ para denotar una primitiva de la función f . Además, abusando del lenguaje, a menudo hablaremos de “integral de la función” cuando deberíamos decir “primitiva de la función”.

Los métodos que vamos a comentar son sólo unos pocos y cubren la mayoría de los casos usuales, pero no debes olvidar que hay muchos más. En cualquier caso, lo primero y más importante es manejar con soltura las derivadas de las funciones elementales. En el Apéndice B puedes encontrar un par de tablas con algunas de las derivadas y primitivas.

Inmediatas	Versión general
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$	$\int g(x)^m g'(x) dx = \frac{g(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \frac{dx}{x} = \log x + C$	$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log g(x) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{g(x)} g'(x) dx = e^{g(x)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^{g(x)} g'(x) dx = \frac{a^{g(x)}}{\log(a)} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
$\int \operatorname{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$	$\int \operatorname{sen}(g(x)) g'(x) dx = -\cos(g(x)) + C$
$\int \cos(x) dx = \operatorname{sen}(x) + C$	$\int \cos(g(x)) g'(x) dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \tan x dx = -\log \cos(x) + C$	$\int \tan(g(x)) g'(x) dx = -\log \cos(g(x)) + C$
$\int \cotan(x) dx = \log \operatorname{sen}(x) + C$	$\int \cotan(g(x)) g'(x) dx = \log \operatorname{sen}(g(x)) + C$
$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$	$\int \sec^2(g(x)) g'(x) dx = \tan(g(x)) + C$
$\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cotan(x) + C$	$\int \operatorname{cosec}^2(g(x)) g'(x) dx = -\cotan(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}(x) + C$	$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \operatorname{arcsen}(g(x)) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan}(x) + C$	$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = \operatorname{arctan}(g(x)) + C$

Inmediatas	Versión general
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$	$\int g(x)^m g'(x) dx = \frac{g(x)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$	$\int \sinh(g(x)) g'(x) dx = \cosh(g(x)) + C$
$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$	$\int \cosh(g(x)) g'(x) dx = \sinh(g(x)) + C$

9.1.1 Cambio de variable

Mediante un cambio de variable es posible transformar la integral en otra más sencilla. Si hacemos $y = \phi(x)$, $dy = \phi'(x) dx$, se tiene

$$\int f(\phi(x)) \phi'(x) dx = \int f(y) dy.$$

Para terminar sólo tenemos que deshacer el cambio.

Ejemplo 9.1. Calcular $\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2 + e^x} dx &= \left[\begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x dx \end{array} \right] = \int \frac{y + 3y^2}{2 + y} \cdot \frac{1}{y} dy = \int \frac{1 + 3y}{2 + y} dy \\ &= \int \left(3 - \frac{5}{2 + y} \right) dy \\ &= 3y - 5 \log |y + 2| = 3e^x - 5 \log(e^x + 2). \end{aligned}$$

9.1.2 Integración por partes

Si u y v son dos funciones, teniendo en cuenta que $(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u'$, obtenemos que

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Esta fórmula aparece escrita en muchas ocasiones de la forma

$$\int u dv = uv - \int v du$$

El teorema especifica con un poco más de rigurosidad las condiciones necesarias.

Teorema 9.2 (Integración por partes). Sean $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables con derivada continua. Entonces uv' y vu' son integrables en $[a, b]$ y

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

Ejemplo 9.3. Calcular $\int x e^x dx$.

$$\int x e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x(x - 1).$$

Ejemplo 9.4. Calcular $\int \sin(x) e^x dx$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(x)e^x dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen}(x), & du = \cos(x)dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{array} \right] = \operatorname{sen}(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx \\
&= \left[\begin{array}{ll} u = \cos(x), & du = -\operatorname{sen}(x)dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{array} \right] \\
&= \operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \operatorname{sen}(x)e^x dx,
\end{aligned}$$

con lo que despejando tenemos $\int \operatorname{sen}(x)e^x dx = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x)e^x - \cos(x)e^x)$.

9.1.3 Integración de funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q , podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q . Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q .

Integrales del tipo $\int \frac{P(x)}{(ax+b)^n}$

El cambio de variable $y = ax + b$ la transforma en una integral inmediata de la forma $\int \frac{P(y)}{y^n} dy$.

Ejemplo 9.5.

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2 + 5x + 2}{(x-1)^3} dx &= [y = x-1, dy = dx] = \int \frac{3(y+1)^2 + 5(y+1) + 2}{y^3} dy \\
&= \int \frac{3y^2 + 11y + 10}{y^3} dy \\
&= 3 \int \frac{dy}{y} + 11 \int \frac{dy}{y^2} + 10 \int \frac{dy}{y^3} \\
&= 3 \log|y| - \frac{11}{y} - 10 \frac{1}{2y^2} \\
&= 3 \log|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}.
\end{aligned}$$

Integrales del tipo $\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el denominador no tiene raíces reales

Siempre se puede escribir $x^2 + bx + c = (x-d)^2 + k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2} dx = \int \frac{M(x-d) + N + Md}{(x-d)^2+k^2} dx \\
&= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2} dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2} dx \\
&= \frac{M}{2} \log|(x-d)^2+k^2| + (N+Md) \int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}
\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $y = \frac{x-d}{k}$.

Ejemplo 9.6. Calcular $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$.

Como $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$, hacemos el cambio $y = x + 1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1} dy = \int \frac{2y}{y^2+1} dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ &= \log(y^2+1) + \arctan(y) = \log(x^2+2x+2) + \arctan(x+1).\end{aligned}$$

Raíces reales y/o complejas simples


En este caso

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)(x^2 + b_1x + c_1)(x^2 + b_2x + c_2) \dots (x^2 + b_mx + c_m).$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n} \\ &\quad + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{B_mx + C_m}{x^2 + b_mx + c_m},\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

 **Observación 9.7.** Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes A_1, \dots, A_n dando a la variable x los valores a_1, \dots, a_n .

Ejemplo 9.8. Cálculo de $\int \frac{1}{x^4-1} dx$:

Como $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1}$$

$$\begin{aligned}1 &= (A + B + C)x^3 + (A - B + D)x^2 + (A + B - C)x + (A - B - D) \\ \left. \begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ A - B + D &= 0 \\ A + B - C &= 0 \\ A - B - D &= 1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= 1/4 \\ B &= -1/4 \\ C &= 0 \\ D &= -1/2 \end{aligned} \right.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4} \log|x - 1| - \frac{1}{4} \log|x + 1| - \frac{1}{2} \arctan(x).\end{aligned}$$

Raíces reales múltiples

En este caso el denominador tiene la forma $Q(x) = (x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2} \dots (x - a_n)^{r_n}$, y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^{r_n}}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

Ejemplo 9.9. Calcular $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} dx$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^2 + C(x-1)(x+1) + D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3} \\ &= \frac{(A+B)x^3 + (3A+B+C)x^2 + (3A-B+D)x + A-B-C-D}{(x-1)(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} \end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ 3A+B+C &= 0 \\ 3A-B+D &= 0 \\ A-B-C-D &= 1 \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{8} \\ C = -\frac{1}{4} \\ D = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La integral nos queda

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{8} \log|x-1| - \frac{1}{8} \log|x+1| + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Raíces reales y complejas múltiples. Método de Hermite

El método que vamos a estudiar, conocido como Método de Hermite, consiste en descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones más simples de una forma muy particular. Pasos a seguir:

Paso 1

Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

Paso 2

Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{x^2+b_mx+c_m} + \\ &+ \frac{d}{dx} \left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n-1} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}} \right) \end{aligned}$$

donde $A_1, \dots, A_n, M_1, \dots, M_m, N_1, \dots, N_m$ son coeficientes que tenemos que determinar, y en la fracción que aparece con una derivada $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que

su denominador. En resumen, se trata de escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$.

¿Cómo determinamos todos los coeficientes? Basta efectuar la derivada, reducir todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), e igualar $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes.

Paso 3

Una vez escrita la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A_1}{x - a_1} dx + \dots + \int \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + b_1 x + c_1} dx + \dots + \frac{F(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (x - a_n)^{\alpha_n - 1} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1 - 1} \dots (x^2 + b_m x + c_m)^{\beta_m - 1}}$$

Ejemplo 9.10. Cálculo de $\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2+9)^2} &= \frac{Mx+N}{x^2+9} + \frac{d}{dx} \left(\frac{ax+b}{x^2+9} \right) \\ &= \frac{(Mx+N)(x^2+9)}{(x^2+9)^2} + \frac{a(x^2+9) - 2x(ax+b)}{(x^2+9)^2} \\ &= \frac{Mx^3 + (N-a)x^2 + (9M-2b)x + (9a+9N)}{(x^2+9)^2} \end{aligned}$$

Igualando los numeradores coeficiente a coeficiente, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} M = 0 \\ -a + N = 1 \\ -2b + 9M = 0 \\ 9a + 9N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} M = 0 & b = 0 \\ N = 1/2 & a = -1/2 \end{array} \right.$$

De esta forma se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+9} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+9},$$

y la última integral vale

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

En resumen,

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx = \frac{-x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

Ejemplo 9.11. Calcular $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} dx$.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)} \right).$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es $a = 0$, $b = 5/2$, $c = 0$, $d = 1$, $A = 5$, $M = -5$ y $N = 0$; por lo tanto

$$\int \frac{x^2 - 2}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{(5/2)x^2 + 1}{x^2(x^2 + 1)} + 5 \log(x) - \frac{5}{2} \log(x^2 + 1).$$

9.1.4 Integración de funciones trigonométricas

Integrales de la forma $\int \sin(ax) \cos(bx)$, $\int \sin(ax) \sin(bx)$, $\int \cos(ax) \cos(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)],$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)],$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)].$$

Ejemplo 9.12.

$$\int \sin(3x) \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin(5x) dx + \frac{1}{2} \int \sin(x) dx = -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{2} \cos(x).$$

Integrales de la forma $\int \tan^n(x)$, $\int \cotan^n(x)$

Se reducen a una con grado inferior separando $\tan^2(x)$ o $\cotan^2(x)$ y sustituyéndolo por $\sec^2(x) - 1$ y $\operatorname{cosec}^2(x) - 1$.

Ejemplo 9.13. Calcular $\int \tan^5(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \tan^5(x) dx &= \int \tan^3(x) \tan^2(x) dx = \int \tan^3(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \int \tan^3(x) \sec^2(x) dx - \int \tan^3(x) dx. \end{aligned}$$

Acabamos por separado cada integral:

$$\begin{aligned} \int \tan^3(x) \sec^2(x) dx &= \frac{1}{4} \tan^4(x) dx \quad (\text{utilizando el cambio } y = \tan(x)) \\ \int \tan^3(x) dx &= \int \tan(x) \tan^2(x) dx = \int \tan(x) (\sec^2(x) - 1) dx \\ &= \int \tan(x) \sec^2(x) dx - \int \tan(x) dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) + \log |\cos(x)|. \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \sin^m(x) \cos^n(x)$, con n o m enteros impares

Se transforman en una integral racional con el cambio $y = \cos(x)$ (si m es impar) o $y = \sin(x)$ (si n es impar).

Ejemplo 9.14. Calcular $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx}{\sin^2(x)} = \left[\begin{array}{l} y = \sin(x) \\ dy = \cos(x) dx \end{array} \right] = \int \frac{1 - y^2}{y^2} dy \\ &= -\frac{1}{y} - y = \frac{-1}{\sin(x)} - \sin(x). \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \sin^m(x) \cos^n(x)$, con n y m enteros pares

Se resuelven usando las identidades $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, y $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.

Ejemplo 9.15. Calcular $\int \cos^2(x) dx$.

$$\int \cos^2(x) dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}.$$

Integrales de la forma $\int R(\sin(x), \cos(x))$, R una función racional par.

Diremos que R es una función racional par si $R(\sin(x), \cos(x)) = R(-\sin(x), -\cos(x))$. Se resuelven utilizando el cambio $y = \tan(x)$

Ejemplo 9.16. Calcular $\int \frac{dx}{\sin^3(x) \cos^5(x)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3(x) \cos^5(x)} &= \left[\begin{array}{l} y = \tan(x) \\ dy = \sec^2 x dx \end{array} \right] = \int \frac{(1+y^2)^3}{y^3} dy \\ &= -\frac{1}{2} \cotan^2(x) + 3 \log |\tan(x)| + \frac{3}{2} \tan^2(x) + \frac{1}{4} \tan^4(x). \end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int R(\sin(x), \cos(x))$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\sin(x)$ y $\cos(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\sin(x)$ y $\cos(x)$. En general, se hace el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Con este cambio convertimos la integral en la integral de una función racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 9.17. Calcular $\int \frac{dx}{\sin(x) - \tan(x)}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin(x) - \tan(x)} &= \int \frac{\cos(x) dx}{\sin(x) \cos(x) - \sin(x)} = \left[\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \right] = \dots = \int \frac{t^2 - 1}{2t^3} dt \\ &= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log |t|}{2} = \frac{1}{4 \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{2} \log \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right|. \end{aligned}$$

9.1.5 Integración de funciones hiperbólicas

Integrales de la forma $\int R(\sinh(x), \cosh(x))$, R una función racional

Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$. En general, se hace el cambio de variable $e^x = t$, con lo que la integral en una racional, que ya hemos estudiado.

Ejemplo 9.18. Calcular $\int \frac{dx}{1+2\sinh(x)+3\cosh(x)}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1 + 2 \sinh(x) + 3 \cosh(x)} &= \int \frac{dx}{1 + \frac{5}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}} = \left[\begin{array}{l} e^x = t \\ dx = dt/t \end{array} \right] \\
&= 2 \int \frac{dt}{5t^2 + 2t + 1} \\
&= \arctan\left(\frac{5t + 1}{2}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{5e^x + 1}{2}\right).
\end{aligned}$$

En algunos casos, utilizar un método similar al que usamos para calcular primitivas de funciones trigonométricas puede simplificar los cálculos. El siguiente método es un ejemplo de ello.

Integrales de la forma $\int \sinh(ax) \cosh(bx)$, $\int \sinh(ax) \sinh(bx)$ o $\int \cosh(ax) \cosh(bx)$

Se resuelven usando las identidades

$$\begin{aligned}
\sinh(x) \sinh(y) &= \frac{1}{2} (\cosh(x+y) - \cosh(x-y)) \\
\cosh(x) \cosh(y) &= \frac{1}{2} (\cosh(x+y) + \cosh(x-y)) \\
\sinh(x) \cosh(y) &= \frac{1}{2} (\sinh(x+y) + \sinh(x-y)).
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.19.

$$\int \sinh(3x) \cosh(x) dx = \frac{1}{2} \int \sinh(4x) dx + \frac{1}{2} \int \sinh(2x) dx = -\frac{1}{8} \cosh(4x) - \frac{1}{4} \cosh(2x).$$

9.1.6 Integración de funciones irracionales

Integrales de la forma $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)$

Se resuelven utilizando el cambio de variable $y^q = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde q es el mínimo común múltiplo de q_1, q_2, \dots, q_n .

Ejemplo 9.20. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Haciendo el cambio $x = y^6$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6y^5}{y^3 + y^2} dy = 6 \int \frac{y^3}{y+1} dy \\
&= 2y^3 - 3y^2 + 6y - 6 \log|y+1| = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \log|\sqrt[6]{x} + 1|.
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$

Se transforman en una integral trigonométrica con el cambio $x = a \sin(t)$ o $x = a \cos(t)$. También se puede realizar el cambio $x = a \tanh(t)$ y se transforma en una integral hiperbólica.

Ejemplo 9.21. Cálculo de $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$:

Hacemos el cambio $x = 2 \operatorname{sen}(t)$, con lo que $dx = 2 \cos(t) dt$ y $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2(t)} = 2 \cos(t)$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{(2 \cos(t))(2 \cos(t))}{4 \operatorname{sen}^2(t)} dt = \int \cotan^2(t) dt \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2(t) - 1) dt = -\cotan(t) - t \end{aligned}$$

usando que $\cotan(t) = \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$, se tiene que

$$= -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$

Se transforman en una integral trigonométrica usando el cambio $x = a \tan(t)$. También se pueden resolver utilizando el cambio $x = a \sinh(t)$.

Ejemplo 9.22. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Hacemos el cambio $x = \tan(t)$, $dx = \sec^2(t) dt$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2(t)}{\tan(t) \sec(t)} dt = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}(t)} = -\log \left| \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right| + \log \left| \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right|.$$

Ejemplo 9.23. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Hacemos el cambio $x = \sinh(t)$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \sinh^2(t) dt = \frac{1}{2} \int (\cosh(2t) - 1) dt = \frac{1}{4} \sinh(2t) - \frac{t}{2}.$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$

Se resuelven utilizando los cambios $x = a \sec(t)$ o $x = a \cosh(t)$.

Ejemplo 9.24. Calcular $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$.

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \tan(t) \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)} dt = \int \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{\cos^3(t)} dt,$$

que se resuelve aplicando los métodos ya vistos. También podríamos haber utilizado el cambio $x = \cosh(t)$ y, en ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 1} dx &= \int \sinh^2(t) dt = \int \frac{\cosh(2t) - 1}{2} dt \\ &= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sinh(2t) \end{aligned}$$

usando que $\sinh(2t) = 2 \sinh(t) \cosh(t) = 2\sqrt{\cosh^2(t) - 1} \cosh(t)$,

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{\operatorname{arccosh}(x)}{2}.$$

Integrales de la forma $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

Se reducen a uno de los casos anteriores completando cuadrados, esto es, escribiendo $ax^2 + bx + c$ de la forma $a(x + \alpha)^2 + \beta$.

Ejemplo 9.25. Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}$.

Transformamos el integrando:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x + 16) + 16 = -(x - 4)^2 + 16 = 16 \left(1 - \left(\frac{x - 4}{4} \right)^2 \right)$$

y hacemos el cambio de variable $y = (x - 4)/4$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{16 \left(1 - \left(\frac{x-4}{4} \right)^2 \right)}} = \left[\begin{array}{l} y = (x - 4)/4 \\ dy = dx/4 \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{4dy}{4\sqrt{1 - y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \operatorname{arcsen}(y) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x - 4}{4}\right). \end{aligned}$$

9.2 Ejercicios

9.2.1 Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 9.1. Calcula las siguientes primitivas

- | | | |
|---------------------------|--|--------------------------------|
| a) $\int 5x^6 dx$ | d) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ | f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$ |
| b) $\int x(x+1)(x-2)dx$ | e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$ | |
| c) $\int (2 + 3x^3)^2 dx$ | | |

Ejercicio 9.2. Calcula las siguientes primitivas

- | | | |
|--|----------------------------|---------------------------|
| a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx$ | b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$ | c) $\int x(2x+5)^{10} dx$ |
|--|----------------------------|---------------------------|

9.2.2 Integración por partes

Ejercicio 9.3. Calcula las siguientes primitivas

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--|
| a) $\int \log(x) dx$ | d) $\int x \operatorname{sen}(x) dx$ | g) $\int x \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$ |
| b) $\int \arctan(x) dx$ | e) $\int x e^{-x} dx$ | |
| c) $\int \operatorname{arcsen}(x) dx$ | f) $\int x^2 e^{3x} dx$ | |

9.2.3 Integración de funciones racionales

Ejercicio 9.4. Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx & \text{d) } \int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} \\ \text{b) } \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx & \text{e) } \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} \\ \text{c) } \int \frac{dx}{x(x+1)^2} & \end{array}$$

Ejercicio 9.5. Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{dx}{x^3+1} & \text{c) } \int \frac{dx}{(x^4-1)^2} \\ \text{b) } \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} & \end{array}$$

9.2.4 Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 9.6. Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \cos^3(x) dx & \text{e) } \int \cos^6(3x) dx \\ \text{b) } \int \sin^5(x) dx & \text{f) } \int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)} dx \\ \text{c) } \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx & \\ \text{d) } \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx & \end{array}$$

Ejercicio 9.7. Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx & \text{d) } \int \frac{dx}{3 \sin^2(x)+5 \cos^2(x)} \\ \text{b) } \int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} dx & \text{e) } \int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)} dx \\ \text{c) } \int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)} & \end{array}$$

Integrales impropias

10

10.1 Integrales impropias en intervalos acotados

Hasta ahora hemos visto cómo calcular integrales de funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados. En esta sección vamos a extender la noción de integral a intervalos de cualquier tipo y a funciones no acotadas. Pensemos por un momento en un caso concreto: la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $] -1, 1[$. Sabemos calcular su integral en cualquier intervalo de la forma $[a, b] \subset] -1, 1[$:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(b) - \arcsen(a).$$

Si queremos definir la integral en $] -1, 1[$, la idea más natural parece tomar límites. Movamos b hacia 1 y a hacia -1 . La forma más cómoda de formalizar estos límites es utilizar sucesiones.

Definición 10.1. Sea $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *impropiamente integrable* si para cualesquiera sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de elementos de $]a, b[$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ se cumple que existe el límite¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx.$$

En ese caso, usaremos la notación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

La integral impropia satisface propiedades similares a la de la integral ya vista. Sirvan los siguientes resultados como muestra.

Proposición 10.2 (Aditividad respecto del dominio). Sea f una función localmente integrable en el intervalo $]a, b[$ y sea $c \in]a, b[$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- f es impropriamente integrable en $]a, b[$.
- f es impropriamente integrable en $]a, c[$ y en $]c, b[$.

Además, caso de ser ciertas, se cumple que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Proposición 10.3. Sean f y g funciones impropriamente integrables en $]a, b[$ y sean λ, μ números reales.

- La función $\lambda f + \mu g$ es impropriamente integrable y

¹ En esta definición no hemos asumido que el límite es único. Esto se obtiene como consecuencia de que el límite exista para cualesquier pareja de sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $]a, b[$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Sí hay una diferencia en cuanto a la integrabilidad impropia de la función $|f|$. Hay funciones impropriamente integrables cuyo valor absoluto no lo es. El recíproco sí es cierto.

Teorema 10.4 (Test de comparación). Sea f una función localmente integrable en $]a, b[$ y supongamos que g es una función impropriamente integrable en $]a, b[$ con $|f(x)| \leq g(x)$, para todo $x \in]a, b[$. Entonces f es impropriamente integrable y se cumple que

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

En particular si f es localmente integrable y $|f|$ es impropriamente integrable, f también es impropriamente integrable.

Ejemplo 10.5. La función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x > 0$ y $f(0) = 1$ es impropriamente integrable en $]0, +\infty[$ pero $|f|$ no lo es.

En el caso de funciones continuas la situación es un poco más sencilla. El teorema fundamental del Cálculo nos garantiza que la integral indefinida es una primitiva. Vamos a ver tres casos posibles.

10.2 Integración en intervalos no acotados

Supongamos que tenemos una función definida en un intervalo no acotado, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, que es continua en todo $[a, +\infty[$. Podemos buscar una primitiva de f , llamémosla F , y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a, +\infty[$, y dicha integral valdrá:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right) - F(a),$$

es decir, la integral vale “ $F(+\infty) - F(a)$ ”, considerando $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$.

Una vez que hemos definido una integral para este tipo de funciones, podemos generalizar el área bajo una curva, la longitud de un arco de curva, la superficie y el volumen de un sólido de revolución, etc. siendo todas fórmulas perfectamente válidas.

El caso de una función definida en un intervalo de la forma $] -\infty, b]$ es completamente análogo. Además, si tenemos una función definida en todo \mathbb{R} , podemos dividir la integral como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Si la suma vale “ $\infty - \infty$ ”, no podemos calcular la integral.

Ejemplo 10.6. Calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1, +\infty[$. Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \right) - (-1) = 1.$$

10.3 Algunos casos particulares

10.3.1 Integración de funciones continuas en intervalos abiertos

Se trata de calcular integrales de funciones definidas en un intervalo abierto en uno de sus extremos, y que tienen una asíntota vertical en dicho extremo. Supongamos que el intervalo es de la forma $]a, b]$; el caso de un intervalo $[a, b[$ es completamente análogo.

Sea pues $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea F una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en a , y si existe podemos calcular la integral de f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - \left(\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \right)$$

Nota: Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, su integral valdrá

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \right)$$

Otra vez, si la suma vale “ $\infty - \infty$ ”, *no podemos calcular la integral*.

Al igual que antes, podemos aplicar estos resultados al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

Ejemplo 10.7. Calcular el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en $]0, 1]$.

Aplicamos la fórmula dada, y tenemos

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2 - \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \right) = 2.$$

10.3.2 Integración de funciones continuas en un intervalo salvo un punto interior

Supongamos que tenemos una función $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $[a, b] \setminus \{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b , tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a, c[$ y la integral en $]c, b]$. Como estos dos casos quedan contemplados en los supuestos anteriores, podemos calcular la integral de f entre a y b como

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga “ $\infty - \infty$ ”, en cuyo caso *no podemos calcular la integral*.

Ejemplo 10.8. Calcular $\int_{-1}^1 \log(x^2) dx$.

La función que nos dan es $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1, 0[$ y $]0, 1]$. Cada una de las dos integrales vale:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \log(x^2) dx &= \left[x \log(x^2) - 2x \right]_{-1}^0 = -2 \\ \int_0^1 \log(x^2) dx &= \left[x \log(x^2) - 2x \right]_0^1 = -2, \end{aligned}$$

con lo que se tiene que $\int_{-1}^1 \log(x^2) dx = -2 - 2 = -4$.

Ejemplo 10.9. Calcular $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Si hacemos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - (+1) = -2!!!!$$

Pero la función que estamos integrando es positiva, ¿no tiene sentido que tenga integral negativa!
¿Qué ha pasado? Como la función $1/x^2$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, tenemos que descomponer la integral como

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx,$$

pero

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1/x) - (+1) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_0^1 = -1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1/x) = +\infty,$$

y por tanto $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = +\infty$.

10.4 Ejercicios

Ejercicio 10.1. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

- a) $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right)$
- b) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \arcsen\left(\frac{2}{3}\right) - \arcsen\left(\frac{7}{12}\right)$
- c) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}$
- d) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{\pi}{6}$
- e) $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10}$
- f) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$
- g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 10.2. Prueba que existen las siguientes integrales y que tienen el valor que se indica en cada caso:

- a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
- b) $\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx = 3\pi$
- c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sen(x)|^3 dx = \frac{4}{3}$
- d) $\int_0^{\pi/2} \sen^2(y) \cos^2(y) dy = \frac{\pi}{16}$

Aplicaciones de la integral

11

11.1 Cálculo de áreas

El área entre dos funciones $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

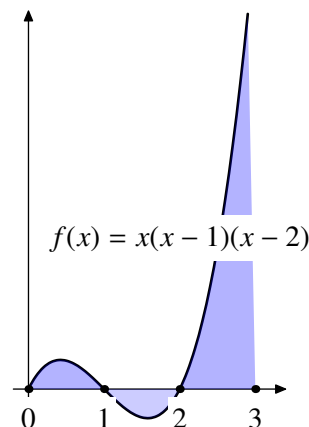
$$\text{Área} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Hasta ahora no hemos visto ningún método que nos permita calcular primitivas en las que aparecen valores absolutos. Por eso, antes de comenzar a integrar, es necesario estudiar cuánto vale $|f - g|$ o, dicho de otra forma, averiguar cuál de las dos funciones es la mayor.

Ejemplo 11.1. Calcular el área entre la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX en el intervalo $[0, 3]$.

Dividimos en intervalos donde sepamos el signo de la función e integramos:

$$\begin{aligned} \int_0^3 |f(x)| dx &= \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx + \int_2^3 |f(x)| dx \\ &= \int_0^1 x(x-1)(x-2) dx - \int_1^2 x(x-1)(x-2) dx \\ &\quad + \int_2^3 x(x-1)(x-2) dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{15} + \frac{19}{30} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$



11.2 Longitudes de curvas

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{longitud} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ejemplo 11.2. Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.

La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ con $x \in [-1, 1]$. Así, la longitud de *media* circunferencia será:

$$l = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \dots = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \left[\arcsen(x) \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

11.3 Área de sólidos de revolución

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a, b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$\text{Superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Ejemplo 11.3. Calcular la superficie de una esfera de radio 1.

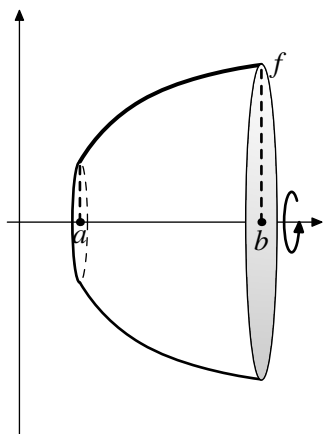
Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \dots = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi. \blacktriangleleft$$

11.4 Volúmenes de sólidos de revolución



Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX es

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

En este segundo caso, la función f tiene que ser positiva.

Ejemplo 11.4. Calcular el volumen de una esfera de radio 1.

Podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$ Con ello, el volumen será

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right) = \frac{4\pi}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Figura 11.1 Volumen al girar respecto al eje OX

11.5 Algunas funciones definidas mediante integrales

11.5.1 La función gamma

La función gamma $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$