Capítulo 3

Lenguajes de Primer Orden

3.1. Sintaxis del lenguaje

3.1.1. Introducción

En el capítulo anterior introdujimos el lenguaje proposicional y estudiamos en este lenguaje lo que significa hacer un razonamiento correcto mediante el concepto de implicación semántica. Esto permitía trasladar ciertos razonamientos elementales al lenguaje de la lógica. Ahora bien, tomemos el siguiente ejemplo de deducción.

Supongamos que establecemos que *todos los hombres son mortales* y que *Sócrates es un hombre.* En tal caso, podemos obtener como conclusión que *Sócrates es mortal.*

Este razonamiento es lo que se conoce como *silogismo*, y fue formulado por primera vez por Aristóteles.

Esta deducción no tiene cabida dentro de la lógica proposicional. Los enunciados *Sócrates es un hombre* y *Sócrates es mortal* son enunciados simples, que en la lógica proposicional vendrían representados como dos fórmulas atómicas, y por tanto sin ninguna relación entre ellas. Pero en nuestro caso, una parte de ambos enunciados (el sujeto) es común, lo cual juega un papel decisivo en la deducción que acabamos de hacer.

Lo que nos haría falta es poder separar de un enunciado simple (como *Sócrates es un hombre* las partes que lo constituyen, es decir, el sujeto (*Sócrates*) y el predicado (*ser hombre*). Y estas partes poder combinarlas para formar nuevos enunciados.

Necesitamos entonces ampliar la lógica proposicional de forma que se puedan extraer las partes que intervienen en una proposición básica y combinarlas entre ellas.

Por tanto, en nuestro nuevo lenguaje las proposiciones atómicas ya no serán objetos indivisibles, sino que estarán constituidas por un sujeto y un predicado. Los objetos que puedan ser sujeto de alguna fórmula atómica se denominarán *términos.*

Y tendremos entonces un lenguaje constituido por una serie de objetos (términos) sobre los que podremos hacer afirmaciones (predicados)

Como ejemplo, vamos a fijar un predicado, digamos *ser mortal*, y supongamos que tenemos un conjunto con posibles sujetos (podría ser el conjunto de todas las personas). En tal caso, podemos construir oraciones como:

Sócrates es mortal.

Aurora es mortal.

Todos los hombres son mortales.

Algunos hombres son mortales.

El padre de Sócrates es mortal.

El padre de la madre de Aurora es mortal.

Los sujetos de estas oraciones los podemos clasificar en tres tipos:

- En los dos primeros ejemplos, el sujeto es un objeto totalmente determinado por un identificador propio (en este caso su nombre) del conjunto inicial de posibles sujetos.
- En los dos ejemplos siguientes, el sujeto sería un objeto genérico que no está determinado (todos los hombres, algunos hombres)
- En los dos últimos ejemplos, el sujeto también es un objeto totalmente determinado, pero no propiamente, sino haciendo referencia a otro objeto que sí se ha identificado propiamente.

Podríamos hacer otro enunciado de la forma *todos los padres son mortales* que no entraría en los tipos anteriores, pero puede ser considerado una combinación de los tipos segundo y tercero.

En un lenguaje de primer orden distinguiremos estos tipos de sujetos y emplearemos distintos tipos de símbolos para intentar representarlos.

Para el primer tipo usaremos lo que denominaremos *símbolos de constante*, para el segundo nos harán falta otros símbolos que llamaremos *símbolos de variable* y para los últimos emplearemos *símbolos de función.*

Una vez vistos los distintos tipos de sujetos, vamos a cambiar el predicado. Podríamos decir, por ejemplo, en lugar de *Sócrates es mortal* cualquiera de los siguientes enunciados. Todos ellos tienen en común el sujeto.

Sócrates es alto.

Sócrates es inteligente.

Sócrates es trabajador.

Sócrates es jugador de fútbol.

Y todos estos predicados podemos combinarlos con los sujetos que hemos utilizado antes (podríamos formular enunciados como *Aurora es inteligente*, *Todos los hombres son trabajadores*, *algunos hombres son jugadores de fútbol*, *el padre de Aurora es inteligente*, etc.).

También se pueden formar enunciados como *Aurora es más alta que Sócrates* o *el padre de Aurora es amigo de Sócrates.*

Para representar en nuestro lenguaje los predicados usaremos otros símbolos diferentes que llamaremos *símbolos de predicado* o *símbolos de relación.*

3.1.2. Descripción de un lenguaje de primer orden.

Con estas ideas pasamos a describir qué es un lenguaje de primer orden. Comenzamos definiendo los símbolos que aparecen en el lenguaje.

Definición 20. *Un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ es una 4-upla de conjuntos* $(\mathcal{C},\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{R})$.

A los elementos de $\mathcal{C}$ se les llama símbolos de constante.

A los elementos de $\mathcal{V}$ se les llama símbolos de variable.

A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama símbolos de función.

A los elementos de $\mathcal{R}$ se les llama símbolos de relación *o* símbolos de predicado. *Este conjunto no puede ser el conjunto vacío.*

Cada elemento de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ tiene asociado un número natural, que se denomina aridad *o* ariedad *(es decir, tenemos dos aplicaciones $\mathcal{F} \to \mathbb{N}$ y $\mathcal{R} \to \mathbb{N}$).*

Además, un lenguaje de primer orden incluye dos conjuntos más de símbolos, que son:

El conjunto $\{\vee,\ \wedge,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \neg\}$, cuyos elementos se denominan conectivas.

El conjunto $\{\forall,\ \exists\}$, cuyos elementos se denominan cuantificadores. *El cuantificador $\forall$ es el cuantificador universal mientras que $\exists$ es el cuantificador existencial.*

Observación:

1. Algunos autores incluyen como símbolos del lenguaje los paréntesis, pues son símbolos que se emplean al escribir las fórmulas del lenguaje. Nosotros hemos optado por no considerarlos símbolos propios del lenguaje, sino símbolos auxiliares para facilitar la lectura.
2. Normalmente, no especificaremos el conjunto de símbolos de variable. Entenderemos que dicho conjunto es un conjunto con la cantidad suficiente de elementos para expresar y manipular las fórmulas con las que estemos trabajando. Emplearemos normalmente las últimas letras (minúsculas) del abecedario.
3. De acuerdo con la observación precedente, para dar un lenguaje tendremos que especificar cuáles son los símbolos de constante, de función y de relación. Cuando demos estos dos últimos, si fuera necesario llevarán un superíndice que indica la aridad.
4. Para los símbolos de constante emplearemos habitualmente las primeras letras minúsculas del alfabeto, con subíndices si fuera necesario. Las letras f, g, etc. para los símbolos de función.
5. Para los símbolos de predicado normalmente usaremos letras mayúsculas.
6. No obstante, si queremos dar un lenguaje de primer orden para hablar en un determinado contexto, podemos cambiar estas notaciones y emplear símbolos que nos sugieran lo que van a representar (por ejemplo, si estamos hablando de personas, un símbolo de constante puede ser *socrates*, un símbolo de función *padre* y un símbolo de predicado *Ser_ mortal*.
7. Un símbolo de función o de predicado cuya aridad sea 1 diremos que es unario o monario. Si tiene aridad 2 diremos que es binario. Si tiene aridad 3, diremos que es ternario. Cuando su aridad sea n diremos que es n-ario.
8. Los símbolos de constante pueden ser considerados como símbolos de función 0-arios (también llamados nularios).

A partir de estas observaciones, para describir un lenguaje de primer orden diremos algo así como:

> Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden cuyos símbolos de constante son a, b, c, cuyos símbolos de función son f^1, g^2, h^1 y cuyos símbolos de predicado son P^2, Q^3, R^1, S^2.
>
> En tal caso, estamos diciendo que
>
> $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$;
>
> $\mathcal{F} = \{f, g, h\}$, f y h son unarios y g es binario;
>
> $\mathcal{R} = \{P, Q, R, S\}$. R es monario, P y S son binarios y Q es ternario.

Hasta ahora, únicamente tenemos los símbolos que vamos a usar para escribir en nuestro lenguaje. Una fórmula en nuestro lenguaje será una sucesión de estos símbolos junto con las conectivas y cuantificadores (y paréntesis). Pero no toda sucesión de tales símbolos será una fórmula, sino que seguirán una serie de reglas.

Vamos a dar ahora las reglas para, a partir de estos símbolos, formar los distintos elementos del lenguaje. Comenzamos definiendo los términos, que tal y como dijimos en la introducción van a ser los objetos de nuestro lenguaje sobre los cuales haremos afirmaciones.

Definición 21. *Sea $\mathcal{L} = (\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un lenguaje de primer orden. Definimos el conjunto $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ o simplemente $\mathcal{T}$ como sigue:*

- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$. *Es decir, todos los símbolos de constante son elementos de $\mathcal{T}$.*
- $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$.
- *Si f es un símbolo de función n-ario, y $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T}$ entonces $f(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathcal{T}$.*

- *Todo objeto que no se haya construido siguiendo las reglas anteriores no pertenece a* $\mathcal{T}$.

A los elementos de $\mathcal{T}$ *se les llama* términos *del lenguaje* $\mathcal{L}$.

Las reglas primera y segunda nos dicen que los símbolos de constante y de variable son términos. La regla tercera nos dice cómo construir nuevos términos a partir de términos ya construidos. Por último, la regla cuarta nos dice que esta es la única forma de obtener nuevos términos.

Ejemplo 3.1.1. *Sea* $\mathcal{L}$ *el lenguaje de primer orden cuyos símbolos de constante son* a, b, c*; sus símbolos de función son* f^1, g^2 *y* h^1*; sus símbolos de predicado son* P^2, Q^3, R^1, S^2*. Entonces son términos:*

$a,\ b,\ x,\ f(b),\ g(a,x),\ h(f(a)),\ g(g(x,y),h(c)),\ f(g(g(x,y),h(c))),\ h(h(h(h(h(h(a)))))),\ g(a,a).$

No son términos:

$f(a,a),\ f(g),\ g(x),\ h(d),\ h(g(a,b),x).$

Explicamos a continuación el porqué no son términos:

- $f(a,a)$ *no es término pues la aridad de* f *es 1, luego solo puede aplicarse a un término (y no a dos, como en este caso).*
- $f(g)$ *no es término pues no lo es* g*, ya que* g *es símbolo de función.*
- $g(x)$ *no es término pues* g *es un símbolo de función binario, y no 1-ario.*
- $h(d)$ *no es término pues* d *no es un elemento del lenguaje.*
- $h(g(a,b),x)$ *no es término pues* h *no es un símbolo de función binario.*

Notemos cómo los símbolos de predicado no intervienen a la hora de formar los términos.

Una vez definidos los términos podemos dar lo que son las fórmulas atómicas.

Definición 22. *Sea* $\mathcal{L} = (\mathcal{C},\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{R})$ *un lenguaje de primer orden cuyo conjunto de términos es* $\mathcal{T}$*. Definimos el conjunto de fórmulas atómicas del lenguaje* $\mathcal{L}$ *como el conjunto*

$$\left\{ P(t_1, t_2, \cdots, t_n) : \begin{array}{l} P \text{ es un símbolo de predicado } n-\text{ario}, \\ t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathcal{T} \end{array} \right\}$$

Ejemplo 3.1.2.

Sea $\mathcal{L}$ *el lenguaje del ejemplo 3.1.1. Son fórmulas atómicas de este lenguaje:*

$P(a,x);\ R(h(b));\ Q(h(f(a)),g(a,x),h(c));\ S(g(g(a,a),x),f(c));$
$P(f(h(f(h(c)))),g(f(x),h(f(a))));\ P(g(x,y),g(a,a)).$

No son fórmulas atómicas:

$P(g(a,x));\ R(f(g));\ Q(a,g(x),h(d));\ Q(R(a),g(a,b),f(x)).$

La razón de que no sean fórmulas atómicas es:

- *En el caso de* $P(g(a,x))$ *porque* P *es un símbolo de predicado binario, y en este caso está aplicado a solo un término.*
- *En el caso de* $R(f(g))$ *porque* $f(g)$ *no es un término, como vimos en el ejemplo anterior.*
- *En el caso de* $Q(a,g(x),h(d))$ *porque* $h(d)$ *no es un término.*
- *En el caso de* $Q(R(a),g(a,b),f(x))$ *porque* $R(a)$ *no es un término, sino una fórmula atómica.*

Con este último ejemplo vemos que en el argumento de un símbolo de predicado **nunca** *puede haber otro símbolo de predicado.*

Ahora nos encontramos en el mismo punto que estábamos en un lenguaje proposicional cuando fijábamos el conjunto de fórmulas atómicas. A partir de ahí definimos las fórmulas del lenguaje.

Definición 23. *Sea* $\mathcal{L}$ *un lenguaje de primer orden. Definimos las fórmulas del lenguaje* $\mathcal{L}$ *como sigue:*

- *Toda fórmula atómica es una fórmula.*
- *Si α y β son fórmulas, también lo son $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\neg\alpha$.*
- *Si α es una fórmula y x es un símbolo de variable, entonces son fórmulas $\forall x\alpha$ y $\exists x\alpha$.*
- *Todo lo que no se haya construido siguiendo las reglas anteriores no es una fórmula.*

Ejemplo 3.1.3.
Consideramos el lenguaje del ejemplo 3.1.1. Son fórmulas de este lenguaje:

$P(f(a), g(a, x)) \wedge \neg Q(a, b, h(b))$.

$S(g(g(a, a), x), f(x)) \to \forall x P(a, x)$.

$\exists y(R(g(a, y)) \to (P(g(a, b), x) \wedge \neg\forall x Q(x, x, x)))$.

Y no son fórmulas de este lenguaje:

$R(f(c))\neg \wedge Q(a, b, h(d))$.

$\forall a Q(a, g(x, b), h(d)) \to \forall x P(x, f(y))$.

$\forall x Q(R(x), g(x, a), h(f(c))) \wedge \exists y S(f(a), g(a, x))$.

$R(\forall x P(x, a))$.

$R(x) \to f(x)$.

1. A la hora de escribir las fórmulas vamos a seguir las mismas reglas de prioridad que teníamos en el lenguaje proposicional. La conectiva $\neg$ tiene prioridad sobre las restantes. Las conectivas $\vee$ y $\wedge$ tienen prioridad sobre $\to$ y $\leftrightarrow$.
2. Los cuantificadores tienen prioridad sobre todas las conectivas. Así una expresión de la forma $\forall x\alpha \vee \beta$ significa lo mismo que $(\forall x\alpha) \vee \beta$, y diferente de $\forall x(\alpha \vee \beta)$. Esto vale lo mismo para el resto de conectivas binarias ($\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$) y para el otro cuantificador ($\exists$). Con la conectiva $\neg$ no hay lugar a la confusión, pues la fórmula $\forall x\neg\alpha$ tiene una única lectura, al igual que $\neg\forall x\alpha$, $\exists x\neg\alpha$ y $\neg\exists x\alpha$.
3. En el lenguaje proposicional las fórmulas se obtenían a partir de la fórmulas atómicas y las conectivas siguiendo unas reglas que nos permitían obtener nuevas fórmulas. El conjunto de las fórmulas atómicas era un conjunto prefijado. En un lenguaje de primer orden, como hemos podido ver, la situación es algo más compleja. Las fórmulas atómicas ya no son un conjunto prefijado, sino que se obtienen a partir del conjunto de símbolos de predicado y los términos, y éstos a su vez se obtienen mediante una combinación adecuada de símbolos de constante, de variable y de función.
   Las mismas reglas que teníamos en el lenguaje proposicional para formar las fórmulas a partir de las fórmulas atómicas y las conectivas nos valen ahora. Y añadimos dos más por la existencia de los cuantificadores.
   Esta situación podemos esquematizarla como sigue:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Simb. constante}\\ \bullet\ \text{Simb. variable}\\ \bullet\ \text{Simb función}\end{array}\right\}\ \text{Términos}\\ \qquad\qquad\qquad\quad \bullet\ \text{Simb. predicado}\end{array}\right\}\ \text{Fórmulas atómicas}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bullet\ \text{Conectivas}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \bullet\ \text{Cuantificadores}\end{array}\right\}\ \text{Fórmulas}$$

   mientras que en el lenguaje proposicional el esquema sería:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \text{Fórmulas atómicas}\\ \bullet\ \text{Conectivas}\end{array}\right\}\ \text{Fórmulas}$$

4. Vemos entonces que una fórmula en un lenguaje proposicional es una sucesión de símbolos. Estos símbolos están divididos en 6 grupos (símbolos de constante, de variable, de función, de relación, conectivas y cuantificadores) más unos símbolos auxiliares (los paréntesis). Pero no toda sucesión de estos símbolos constituye una fórmula, sino que están sujetos a determinadas reglas sintácticas que hemos dado en las definiciones 21, 22 y 23.

   Sin embargo, cuando tenemos una sucesión de símbolos no siempre es fácil saber si se ha construido siguiendo las reglas adecuadas. Para ayudar a ver esto, es conveniente desmenuzar la posible fórmula en sus componentes más simples (lo que podríamos llamar hacer un análisis sintáctico de la fórmula).

Definición 24. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y sea α una fórmula del lenguaje. Definimos el conjunto de las subfórmulas de α como sigue:*

- $Sub(\alpha) = \{\alpha\}$ *si α es una fórmula atómica.*
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1) \cup Sub(\alpha_2)$ *si* $\alpha = \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \neg\alpha_1$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \forall x\alpha_1$.
- $Sub(\alpha) = \{\alpha\} \cup Sub(\alpha_1)$ *si* $\alpha = \exists x\alpha_1$.

Compara esta definición con la definición 10.

Al igual que con la lógica proposicional, para ayudarnos a ver las subfórmulas de una fórmula α podemos construir el árbol de formación o el árbol de desglose de la fórmula α. Este árbol, recordemos, tenía en la raíz la fórmula α y las hojas eran las fórmulas atómicas que aparecían en la construcción de α. Los distintos nodos del árbol constituían las subfórmulas de α.

Ejemplo 3.1.4.

Sea $\alpha = \exists y(R(g(a,y)) \rightarrow (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x)))$ una fórmula construida en el lenguaje de primer orden del ejemplo 3.1.1. Vamos a hacer su desglose en subfórmulas.

$$\exists y(R(g(a,y)) \rightarrow (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x)))$$

$$R(g(a,y)) \rightarrow (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x))$$

$$R(g(a,y)) \qquad\qquad P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall xQ(x,x,x)$$

$$P(g(a,b),x) \qquad \neg\forall xQ(x,x,x)$$

$$\forall xQ(x,x,x)$$

$$Q(x,x,x)$$

Si recorremos el árbol de abajo hacia arriba vemos el proceso de construcción de la fórmula α a partir de las subfórmulas atómicas.

Supongamos que tenemos la fórmula $\forall x P(x,y)$. En ella intervienen dos símbolos de variable, x e y. Las apariciones de estos símbolos son diferentes. Mientras la variable x está afectada por un cuantificador ($\forall x$), la variable y no aparece influenciada por ningún cuantificador. Esta distinción en las ocurrencias de las variables juega un papel muy importante en lo que sigue. Por tal motivo, vamos a formalizar esta idea.

Definición 25. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden. Supongamos que tenemos una subfórmula de la forma $Cx\beta$ donde C es un cuantificador (universal o existencial). Se define el* radio de acción *de este cuantificador como la subfórmula β.*

Aunque hemos definido el radio de acción de un cuantificador C, nos referiremos a él como el radio de acción de Cx.

Ejemplo 3.1.5.

1. *En la fórmula $\alpha = \exists y(R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall x Q(x,x,x)))$ aparecen dos cuantificadores. El radio de acción de $\exists y$ es $R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall x Q(x,x,x))$, mientras que el radio de acción de $\forall x$ es $Q(x,x,x)$.*
2. *Sea ahora $\beta = \forall z(\forall x P(x,g(z,b)) \to \exists y(Q(f(x),g(f(y),y),z) \wedge R(g(y,z))))$*

   El radio de acción de $\forall z$ es $\forall x P(x,g(z,b)) \to \exists y(Q(f(x),g(f(y),y),z) \wedge R(g(y,z)))$.

   El radio de acción de $\forall x$ es $P(x,g(z,b))$.

   El radio de acción de $\exists y$ es $Q(f(x),g(f(y),y),z) \wedge R(g(y,z))$

Definición 26. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, y supongamos que tenemos una aparición de una variable x en dicha fórmula. Diremos que dicha aparición es* ligada *si está en el radio de acción de un cuantificador $\forall x$ o $\exists x$. En caso contrario diremos que dicha aparición es* libre.

Nota:

1. Una variable puede tener varias apariciones en una fórmula, y en unas ser libre y en otras ligadas. Por tanto, al hablar de libre o ligada tenemos que referirnos a una ocurrencia concreta de una variable, no a la variable en sí.
2. La ocurrencia $\forall x$ o $\exists x$ de la variable x se considera ligada.

Ejemplo 3.1.6.

1. *Consideramos nuevamente la fórmula $\exists y(R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall x Q(x,x,x)))$.*

   Esta fórmula tiene dos ocurrencias de la variable y, que señalamos en negrita:

   $$\exists \mathbf{y}(R(g(a,\mathbf{y})) \to (P(g(a,b),x) \wedge \neg\forall x Q(x,x,x))).$$

   Ambas apariciones son ligadas. La primera por estar pegada al cuantificador $\exists$ y la segunda porque está en el radio de acción de $\exists y$.

   Tiene también cinco apariciones de la variable x: $\exists y(R(g(a,y)) \to (P(g(a,b),\mathbf{x}) \wedge \neg\forall \mathbf{x} Q(\mathbf{x},\mathbf{x},\mathbf{x})))$. De estas cinco apariciones la primera es libre (aunque esté dentro del radio de acción de $\exists y$), mientras que las 4 restantes son ligadas.
2. *Sea ahora $\forall z(\forall x P(x,g(z,b)) \to \exists y(Q(f(x),g(f(y),y),z) \wedge R(g(y,z))))$. Señalamos todas las ocurrencias ligadas:*

   $$\forall \mathbf{z}(\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x},g(\mathbf{z},b)) \to \exists \mathbf{y}(Q(f(x),g(f(\mathbf{y}),\mathbf{y}),\mathbf{z}) \wedge R(g(\mathbf{y},\mathbf{z}))))$$

   y todas las ocurrencias libres:

   $$\forall z(\forall x P(x,g(z,b)) \to \exists y(Q(f(\mathbf{x}),g(f(y),y),z) \wedge R(g(y,z))))$$

   Vemos como la variable x tiene algunas apariciones ligadas (la primera y la segunda), y una aparición libre (la tercera).

Definición 27. *Sea α una fórmula de un lenguaje proposicional. Decimos que α es una* sentencia *si en α no hay ninguna ocurrencia libre de ninguna variable (o lo que es lo mismo, todas las apariciones de variables en α son ligadas).*

Ejemplo 3.1.7.

1. *La fórmula $\forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$ no es una sentencia. Hemos visto que tiene una aparición libre de la variable x.*

2. *La fórmula $\forall z \forall x(P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$ sí es una sentencia. En este caso, el radio de acción de $\forall x$ es $P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$, luego todas las ocurrencias de x son ligadas. Las de las otras variables son también ligadas.*

3. *La fórmula $\forall z \forall x(P(x, g(z, b)) \to \exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$ no es una sentencia. En este ejemplo, la última ocurrencia de la variable y es libre (el radio de acción de $\exists y$ es $Q(f(x), g(f(y), y), z)$.*

4. *Una fórmula en la que no aparezcan variables es una sentencia.*

En este ejemplo vemos la importancia que tienen los paréntesis en una fórmula y la dificultad que puede suponer analizar la estructura de una fórmula. Vamos a hacer el árbol de formación de las tres fórmulas que hemos visto en este ejemplo.

$$\forall z(\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$$

$$\forall x P(x, g(z, b)) \to \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$\forall x P(x, g(z, b)) \qquad \exists y(Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$P(x, g(z, b)) \qquad Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))$$

$$Q(f(x), g(f(y), y), z) \qquad R(g(y, z))$$

Vemos que el radio de acción de $\forall x$ es $P(x, g(z, b))$ (tenemos que fijarnos en los dos nodos de la izquierda).

$$\forall z \forall x (P(x, g(z, b)) \rightarrow \exists y (Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$$

$$\forall x (P(x, g(z, b)) \rightarrow \exists y (Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))))$$

$$P(x, g(z, b)) \rightarrow \exists y (Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$P(x, g(z, b)) \qquad \exists y (Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))$$

$$Q(f(x), g(f(y), y), z) \qquad R(g(y, z))$$

Aquí podemos ver como todas las apariciones de las variables son ligadas.

$$\forall z \forall x (P(x, g(z, b)) \rightarrow \exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$\forall x (P(x, g(z, b)) \rightarrow \exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z)))$$

$$P(x, g(z, b)) \rightarrow \exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))$$

$$P(x, g(z, b)) \qquad \exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \wedge R(g(y, z))$$

$$\exists y Q(f(x), g(f(y), y), z) \qquad R(g(y, z))$$

$$Q(f(x), g(f(y), y), z)$$

Y aquí vemos que el radio de acción de $\exists y$ es $Q(f(x), g(f(y), y), z)$, y por tanto $R(g(y, z))$ queda fuera.

3.2. Semántica de un lenguaje de primer orden.

Hasta ahora hemos visto cómo construir las fórmulas de un lenguaje de primer orden a partir de una serie de símbolos. Una vez construida una fórmula hemos analizado dicha fórmula en función de su estructura. Así hemos definido las subfórmulas de la fórmula, y hemos clasificado la aparición de las variables dependiendo de su posición en la fórmula.

Ahora vamos a tratar de darle significado a cada una de las fórmulas que forman parte de un lenguaje de primer orden. Para eso, tendremos que asignarle un significado a cada una de las componentes de la fórmula. Para esto vamos a valernos de los conceptos de *estructura* y *valoración*.

3.2.1. Estructuras.

Definición 28. *Sea $\mathcal{L} = (\mathcal{C},\ \mathcal{V},\ \mathcal{F},\ \mathcal{R})$ un lenguaje de primer orden. Una estructura (o una $\mathcal{L}$ estructura) $\mathcal{E}$ consiste en:*

- *Un conjunto D distinto del vacío, denominado* dominio *o* universo.
- *Para cada símbolo de constante $a \in \mathcal{C}$, un elemento $a^{\mathcal{E}} \in D$ (es decir, lo que tenemos es una aplicación $\mathcal{C} \to D$).*
- *Para cada símbolo de función n-ario f, una aplicación $f^{\mathcal{E}} : D^n \to D$.*
- *Para cada símbolo de predicado n-ario P, una aplicación $P^{\mathcal{E}} : D^n \to \mathbb{Z}_2$.*

Observación:

1. Dar una estructura es entonces elegir los elementos sobre los que queremos que las fórmulas digan algo (números, matrices, polinomios, personas, etc.), y una vez hecho esto, asignar un significado a los símbolos de constante, de función y de relación. Hablaremos entonces de asignación de constantes, de funciones y de predicados. Las variables en principio no juegan ningún papel en una estructura.
2. Si tenemos una estructura $\mathcal{E}$, y a es un símbolo de constante, para no complicar mucho la notación escribiremos, si no hay lugar a la confusión, a en lugar de $a^{\mathcal{E}}$. Así, por ejemplo, en una estructura en la que el dominio es $\mathbb{N}$ (números naturales), y al símbolo de constante a le asignamos el valor 1, escribiremos $a = 1$ en lugar de $a^{\mathcal{E}} = 1$.
3. La misma observación anterior vale para los símbolos de función y los símbolos de predicado.
4. Si f es un símbolo de función 0-ario, asignarle un significado a f sería dar una aplicación $f : D^0 \to D$. Puesto que D^0 tiene un único elemento, entonces para dar la aplicación únicamente hay que elegir un elemento de D. Por tanto, asignarle un significado a un símbolo de función 0-ario es similar a asignarle un significado a un símbolo de constante.
5. Si P es un símbolo de predicado 0-ario, entonces asignarle un significado a P significa elegir un valor de verdad (0 ó 1) para el predicado P. Esto es lo mismo que hacíamos cuando asignábamos un valor de verdad a una fórmula atómica en un lenguaje proposicional.
6. Si en nuestro lenguaje todos los símbolos de predicado son 0-arios, entonces en las fórmulas del lenguaje únicamente habrá símbolos de predicado y conectivas (no tienen cabida aquí los símbolos de constante, de variable y de función). En tal caso, lo que tenemos es un lenguaje proposicional.

   Dicho de otra forma, la lógica de predicados incluye como caso particular a la lógica proposicional. Concretamente como aquella en la que todos los símbolos de predicado son 0-arios.

Ejemplo 3.2.1.

1. *Consideramos un lenguaje de primer orden cuyos símbolos de constante son s y a; los símbolos de función son p^1 y m^1 y los símbolos de predicado son M^1, In^1, T^1 y A^2.*

   Sea $\mathcal{E}$ la estructura siguiente:

   - *El dominio es el conjunto de todas las personas.*
   - *s = Sócrates y a = Aurora (notemos que habría que haber escrito $s^{\mathcal{E}}$ = Sócrates e igual para a. Pero como acabamos de comentar, lo escribiremos tal y como hemos dicho para simplificar la escritura).*
   - *$p(x)$ = el padre de x y $m(x)$ = la madre de x.*

$$M(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es mortal.} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \qquad In(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es inteligente.} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es trabajador.} \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases} \qquad A(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es más alto que } y. \\ 0 & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aunque aún faltan por precisar algunos conceptos, con esta estructura tendríamos:

La fórmula $M(s)$ *significaría* Sócrates es mortal.

La fórmula $M(a)$ *significaría* Aurora es mortal.

La fórmula $\forall x M(x)$ *significaría* todos los hombres son mortales. *(En realidad sería todos los elementos de* D *son mortales).*

La fórmula $M(p(s))$ *significaría* el padre de Sócrates es mortal.

La fórmula $M(p(m(a)))$ *significaría* el padre de la madre de Aurora es mortal.

La fórmula $\forall x M(p(x))$ *significaría* todos los padres son mortales.

La fórmula $\exists x T(x)$ *significaría* hay personas trabajadoras.

La fórmula $A(a,s)$ *significaría* Aurora es más alta que Sócrates.

La fórmula $In(p(a))$ *significaría* el padre de Aurora es inteligente.

2. *Sea ahora el lenguaje* $\mathcal{L}$ *en el que* $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$ *y* $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$. *Sea* $\mathcal{E}_1$ *la estructura siguiente:*

   - *Dominio:* $D = \mathbb{N}$.
   - *Asignación de constantes:* $a = 0$, $b = 1$.
   - *Asignación de funciones:* $s(x) = x + 1$, $m(x,y) = x \cdot y$.
   - *Asignación de predicados:*

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es par.} \\ 0 & \textit{si } x \textit{ es impar.} \end{cases} \qquad Pr(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es primo.} \\ 0 & \textit{si } x \textit{ no es primo.} \end{cases}$$

$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x > y. \\ 0 & \textit{si } x \leq y. \end{cases} \qquad Eq(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = y. \\ 0 & \textit{si } x \neq y. \end{cases}$$

3. *Con el mismo lenguaje de este último ejemplo, consideramos la estructura* $\mathcal{E}_2$ *siguiente:*

   - *Dominio:* $D = \mathbb{Z}_4$.
   - *Asignación de constantes:* $a = 0$, $b = 3$.
   - *Asignación de funciones:* $s(x) = 2x + 1$, $m(x,y) = x \cdot y$.
   - *Asignación de predicados:*

$$P(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x^2 = 0. \\ 0 & \textit{si } x^2 \neq 0. \end{cases} \qquad Pr(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x^2 = x. \\ 0 & \textit{si } x^2 \neq x. \end{cases}$$

$$M(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x^2 + y = 1. \\ 0 & \textit{si } x^2 + y \neq 1. \end{cases} \qquad Eq(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x = y. \\ 0 & \textit{si } x \neq y. \end{cases}$$

Observación:

La forma en que hemos asignado los predicados en estos dos últimos ejemplos puede resultar un poco engorrosa. Por tal motivo, emplearemos frecuentemente otras notaciones.

1. Una sería escribir $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv$ [Condición], donde en lugar de [Condición] escribiremos la condición que deben cumplir $x_1, x_2, \cdots, x_n$ para que $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ valga 1.

   Así, en la estructura $\mathcal{E}_1$ podríamos haber definido los predicados:

$$P(x) \equiv x \text{ es par.} \quad Pr(x) \equiv x \text{ es primo.} \quad M(x,y) \equiv x > y. \quad Eq(x,y) \equiv x = y$$

Y en la estructura $\mathcal{E}_2$:

$$P(x) \equiv x^2 = 0. \quad Pr(x) \equiv x^2 = x. \quad M(x,y) \equiv x^2 + y = 1. \quad Eq(x,y) \equiv x = y$$

2. Otra sería escribir $P =$ [Conjunto], donde en lugar de [Conjunto] iría el conjunto

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D^n : P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 1\}.$$

Esto, cuando podamos enumerar los elementos.
Por ejemplo, en el caso de la estructura $\mathcal{E}_2$ podríamos haber definido los predicados como:

$$\begin{array}{ll} P = \{0,2\}; & M = \{(0,1),\ (1,0),\ (2,1),\ (3,0)\}; \\ Pr = \{0,1\}; & Eq = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}. \end{array}$$

Para el caso de la estructura $\mathcal{E}_1$ esto sería un poco más complicado, ya que los conjuntos de los que estamos hablando son infinitos. Aún así se podría decir:

$P = \{0, 2, 4, 6, \cdots\}$ si con eso entendemos que nos referimos a todos los números pares.

$Pr = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots\}$ si con eso entendemos que nos referimos al conjunto de los números primos.

$Eq = \{(0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3), \cdots\}$ si con eso entendemos que nos referimos a todas las parejas de la forma (x, y) con $x = y$.

Un poco más complicado es describir así el predicado M.

3. En cualquier caso, lo que hace falta es que quede claro cuando el predicado vale 1 y cuando el predicado vale 0. Por ejemplo, la asignación del predicado P en la estructura $\mathcal{E}_1$ podríamos haberla hecho también así: $P(x) = x + 1 \text{ mód } 2$.

Definición 29. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y $\mathcal{E}$ una estructura. Una* valoración *es una aplicación $v : \mathcal{V} \to D$.*

Una vez asignado un valor del dominio a cada una de las variables, podemos extenderlo a todos los términos del lenguaje.

Definición 30. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, sea $\mathcal{E}$ una estructura y v una valoración. Entonces v se extiende a una aplicación (que seguiremos llamando v)*

$$v : \mathcal{T} \to D$$

como sigue:

- *Si $a \in \mathcal{C}$ entonces $v(a) = a$ (para ser más precisos, habría que decir $v(a) = a^{\mathcal{E}}$).*
- *Si $x \in \mathcal{V}$ entonces $v(x)$ ya está definido.*
- *Si f es un símbolo de función n-ario y $t_1, t_2, \cdots, t_n$ son términos para los que tenemos definido v entonces $v(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$ (o más precisamente, $v(f(t_1, t_2, \cdots, t_n)) = f^{\mathcal{E}}(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$).*

El elemento $v(t)$ diremos que es el valor del término *t.*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 3.2.2.

1. *Consideramos el lenguaje de primer orden dado por $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$ y $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$. Supongamos que $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.*

   Sea la estructura $\mathcal{E}_1$ que vimos en el ejemplo 3.2.1, y la valoración $v : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$ dada por $v(x) = 2$, $v(y) = 5$, $v(z) = 1$. Vamos a tomar algunos términos y calcular su imagen por la aplicación v.

- $t = s(a)$. $v(t) = s(v(a)) = s(0) = 1$. *Para abreviar podemos escribir* $s(a) = s(0) = 1$.
- $t = m(s(a), x)$. $v(t) = m(v(s(a)), v(x)) = m(1, 2) = 2$. *Para abreviar podemos escribir* $m(s(a), x) = m(1, 2) = 2$.
- $t = s(y)$. $v(t) = s(v(y)) = s(5) = 6$. *Para abreviar podemos escribir* $s(y) = s(5) = 6$.
- $t = m(m(s(a), x), s(y))$. $v(t) = m(v(m(s(a), x)), v(s(y))) = m(2, 6) = 12$. *Para abreviar, escribiremos* $m(m(s(a), x), s(y)) = m(2, 6) = 12$.
- *Sea* $t = m(s(s(b)), m(s(x), m(b, m(x, y))))$. *Vamos a calcular* $v(t)$.
$$\begin{aligned} m(s(s(b)), m(s(x), m(b, m(x, y)))) &= m(s(s(1)), m(s(2), m(1, m(2, 5)))) \\ &= m(s(2), m(3, m(1, 10))) \\ &= m(3, m(3, 10)) \\ &= m(3, 30) = 90 \end{aligned}$$
Es decir, $v(t) = 90$.

2. *Con el mismo lenguaje, la estructura* $\mathcal{E}_2$ *y la valoración dada por* $v(x) = 3$, $v(y) = 1$, $v(z) = 2$ *vamos a calcular el valor de los mismos términos.*
   - $s(a) = s(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
   - $m(s(a), x) = m(1, 3) = 1 \cdot 3 = 3$.
   - $s(y) = s(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.
   - $m(m(s(a), x), s(y)) = m(3, 3) = 3 \cdot 3 = 1$.
   - $$\begin{aligned} m(s(s(b)), m(s(x), m(b, m(x, y)))) &= m(s(s(3)), m(s(3), m(3, m(3, 1)))) \\ &= m(s(3), m(3, m(3, 3))) \\ &= m(3, m(3, 1)) \\ &= m(3, 3) = 1. \end{aligned}$$

3. *Dado el lenguaje de primer orden definido por* $\mathcal{C} = \{a, c\}$, $\mathcal{V} = \{x\}$, $\mathcal{F} = \{f^1, g^2\}$, $\mathcal{R} = \{R^1, Q^2\}$, *consideramos la estructura siguiente:*

   Dominio $D = \mathbb{Z}_3$.

   Constantes $a = 0$, $c = 2$.

   Funciones $f(x) = x + 1$, $g(x, y) = x + y$.

   Predicados $R = \{0\}$, $Q = \{(0, 1),\ (1, 2),\ (2, 0)\}$.

   Consideramos la valoración $x \mapsto 0$. *Entonces:*
   - $v(x) = 0$.
   - $v(a) = 0$.
   - $v(c) = 2$.
   - $v(f(x)) = f(v(x)) = f(0) = 1$.
   - $v(f(c)) = f(v(c)) = f(2) = 0$.
   - $v(g(a, f(x))) = g(v(a), v(f(x))) = g(0, 1) = 1$.
   - $v(f(g(a, f(x)))) = f(v(g(a, f(x)))) = f(1) = 2$.
   - $v(g(a, c)) = g(v(a), v(c)) = g(0, 2) = 2$.
   - $v(g(g(a, c), f(g(a, f(x))))) = g(v(g(a, c)), v(f(g(a, f(x))))) = g(2, 2) = 1$.
   - $v(g(f(c), f(x)) = g(v(f(c)), v(f(x)) = g(0, 1) = 1$.
   - $$\begin{aligned} v(g(f(f(x)), g(f(a), g(a, f(c))))) &= f(f(x)) + g(f(a), g(a, f(c))) \\ &= f(f(0)) + g(f(0), g(0, f(2))) \\ &= f(0 + 1) + (f(0) + g(0, f(2))) \\ &= (1 + 1) + (1 + (0 + f(2))) \\ &= 2 + (1 + (0 + 0)) = 0. \end{aligned}$$

Definición 31. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una interpretación I es un par $(\mathcal{E}, v)$, donde $\mathcal{E}$ es una estructura y v es una valoración.*

Vamos a ver cómo una interpretación determina un valor de verdad para cada fórmula del lenguaje. Si $I = (\mathcal{E}, v)$ es una valoración y α es una fórmula, denotaremos por $I^v_{\mathcal{E}}(\alpha)$ al valor de verdad de la fórmula α por la interpretación I. Cuando no sea necesario, suprimiremos el subíndice y/o el superíndice.

Definición 32. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $I = (\mathcal{E}, v)$ una interpretación y $\alpha = P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ una fórmula atómica. Definimos el valor de verdad de α bajo la interpretación I como*

$$I(\alpha) = P(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n))$$

Notemos que la definición es coherente, pues definida una valoración, para cada término t tenemos definido el valor $v(t)$, que es un elemento del dominio. Por eso, $(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n)) \in D^n$, luego $P(v(t_1), v(t_2), \cdots, v(t_n)) \in \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 3.2.3.

1. *Sea $\mathcal{L} = (\{a, b\},\ \{x, y, z\},\ \{s^1, m^2\},\ \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\})$ un lenguaje de primer orden, sea $\mathcal{E}_1$ la estructura definida en el ejemplo 3.2.1 y v la valoración dada por $v(x) = 3$, $v(y) = 5$, $v(z) = 11$.*

   - $I(P(a)) = 1$, *pues* $a = 0$ *y* 0 *es un número par.*
   - $I(Pr(s(b))) = 1$, *pues* $v(s(b)) = 2$ *y* 2 *es un número primo.*
   - $I(M(m(x, s(b)), s(s(y)))) = 0$ *pues* $v(m(x, s(b))) = 6$, $v(s(s(y))) = 7$ *y* 6 *no es mayor que* 7.
   - $I(Eq(s(z), m(x, s(x)))) = 1$, *pues* $v(s(z)) = 12$, $v(m(x, s(x))) = 12$ *y* $12 = 12$.

2. *Consideramos el mismo lenguaje, pero la estructura $\mathcal{E}_2$ y la valoración $v(x) = 2$, $v(y) = 1$, $v(z) = 0$. En tal caso:*

   - $I(P(a)) = 1$, *pues* $a = 0$ *y* $0^2 = 0$.
   - $I(Pr(s(b))) = 0$, *pues* $v(s(b)) = 2 \cdot 3 + 1 = 3$ *y* $3^3 \neq 3$.
   - $I(M(m(x, s(b)), s(s(y)))) = 0$ *pues* $v(m(x, s(b))) = 2 \cdot 3 = 2$, $v(s(s(y))) = 3$ *y* $2^2 + 3 \neq 1$.
   - $I(Eq(s(z), m(x, s(x)))) = 0$, *pues* $v(s(z)) = 1$, $v(m(x, s(x))) = 2 \cdot 1 = 2$ *y* $1 \neq 2$.

Una vez definido el valor de verdad de una fórmula atómica, vamos a extenderlo para cualquier fórmula. Para eso, necesitamos antes ver como modificar el valor de una valoración en una variable.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\mathcal{E}$ una estructura y $v : \mathcal{V} \to D$ una valoración. Para cada variable x y cada elemento $e \in D$ definimos una nueva valoración $v_{x|e} : \mathcal{V} \to D$ como:

$$v_{x|e}(y) = \begin{cases} v(y) & \text{si } y \neq x \\ e & \text{si } y = x \end{cases}$$

Es decir, $v_{x|e}$ actúa igual que v sobre todas las variables salvo eventualmente x.

Ejemplo 3.2.4. *Consideramos un lenguaje de primer orden con 3 símbolos de variable x, y, z, y consideramos una estructura en la que $D = \mathbb{Z}$. Sea v la valoración $x \mapsto -2$, $y \mapsto 1$, $z \mapsto 5$.*

A continuación damos explícitamente las valoraciones $v_{x|2}$, $v_{x|5}$, $v_{y|-1}$, $v_{z|3}$ y $v_{z|5}$.

$v_{x\|2}$	$v_{x\|5}$	$v_{y\|-1}$	$v_{z\|3}$	$v_{z\|5}$
$x \mapsto 2$	$x \mapsto 5$	$x \mapsto -2$	$x \mapsto -2$	$x \mapsto -2$
$y \mapsto 1$	$y \mapsto 1$	$y \mapsto -1$	$y \mapsto 1$	$y \mapsto 1$
$z \mapsto 5$	$z \mapsto 5$	$z \mapsto 5$	$z \mapsto 3$	$z \mapsto 5$

Nótese que $v_{z|5} = v$. En general, se tiene que $v_{x|e} = v$ cuando $v(x) = e$.

Con esto podemos definir el valor de verdad de cualquier fórmula:

Definición 33. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $I = (\mathcal{E}, v)$ una interpretación, con D el dominio. Sean α y β dos fórmulas de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$I^v(\alpha \vee \beta) = I^v(\alpha) + I^v(\beta) + I^v(\alpha) \cdot I^v(\beta)$.

$I^v(\alpha \wedge \beta) = I^v(\alpha) \cdot I^v(\beta)$.

$I^v(\alpha \to \beta) = 1 + I^v(\alpha) + I^v(\alpha) \cdot I^v(\beta)$.

$I^v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 + I^v(\alpha) + I^v(\beta)$.

$I^v(\neg\alpha) = 1 + I^v(\alpha)$.

$$I^v(\forall x\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si para cualquier elemento } e \in D \text{ se tiene que } I^{v_{x|e}}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$I^v(\exists x\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si hay algún elemento } e \in D \text{ para el que } I^{v_{x|e}}(\alpha) = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.2.5.

1. *Consideramos nuevamente el lenguaje $\mathcal{L}$ en el que $\mathcal{C} = \{a, b\}$, $\mathcal{F} = \{s^1, m^2\}$ y $\mathcal{R} = \{P^1, Pr^1, M^2, Eq^2\}$, y la estructura $\mathcal{E}_1$, que recordamos ahora.*

   - *Dominio: $D = \mathbb{N}$.*
   - *Asignación de constantes: $a = 0$, $b = 1$.*
   - *Asignación de funciones: $s(x) = x + 1$, $m(x, y) = x \cdot y$.*
   - *Asignación de predicados:* $P(x) \equiv x$ *es par*; $Pr(x) \equiv x$ *es primo*; $M(x, y) \equiv x > y$; $Eq(x, y) \equiv x = y$.

   Y consideramos la valoración $v(x) = 8$, $v(y) = 5$.

   Tomamos diferentes fórmulas y calculamos su valor de verdad.

   a) $\alpha_1 = \forall x P(m(x, s(x)))$.
   Llamemos α a la fórmula $P(m(x, s(x)))$. De acuerdo con la definición 33 tenemos que calcular

   $$I^{v_{x|0}}(\alpha),\ I^{v_{x|1}}(\alpha),\ I^{v_{x|2}}(\alpha),\ I^{v_{x|3}}(\alpha),\ I^{v_{x|4}}(\alpha), I^{v_{x|5}}(\alpha), \cdots$$

   y comprobar si vale siempre 1 (en cuyo caso $I^v(\forall x\alpha) = 1$), o si hay algún caso para el que valga cero (en cuyo caso $I^v(\forall x\alpha) = 0$).

   $I^{v_{x|0}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(0, s(0))) = P(m(0, 1)) = P(0) = 1$, *ya que* 0 *es par.*
   $I^{v_{x|1}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(1, s(1))) = P(m(1, 2)) = P(2) = 1$, *ya que* 2 *es par.*
   $I^{v_{x|2}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(2, s(2))) = P(m(2, 3)) = P(6) = 1$, *ya que* 6 *es par.*
   $I^{v_{x|3}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(3, s(3))) = P(m(3, 4)) = P(12) = 1$, *ya que* 12 *es par.*

   Y podemos ver que sea cual sea el número natural n se tiene que $I^{v_{x|n}}(P(m(x, s(x))) = 1$, pues $I^{v_{x|n}}(P(m(x, s(x)))) = P(m(n, s(n))) = P(n \cdot (n + 1)) = 1$, ya que $n \cdot (n + 1)$ es siempre un número par.

   Por tanto, se tiene que

   $$I^v(\forall x P(m(x, s(x)))) = 1$$

   También podíamos haber traducido la fórmula $\forall x P(m(x, s(x)))$, que en este caso viene a decir $\forall x\ x(x + 1)$ es par, lo cual es cierto sea quien sea $x \in D = \mathbb{N}$.

   Notemos como a la hora de interpretar esta fórmula, la valoración v no ha jugado ningún papel.

   b) $\alpha_2 = \exists x(P(x) \wedge Pr(x))$.
   Para interpretar esta fórmula, tomamos $\alpha = P(x) \wedge Pr(x)$, y procedemos igual que antes.

$I^{v_{x|0}}(P(x) \wedge Pr(x)) = P(0) \wedge Pr(0) = 0$, *ya que* 0 *no es un número primo.*

$I^{v_{x|1}}(P(x) \wedge Pr(x)) = P(1) \wedge Pr(1) = 0$, *ya que* 1 *es un número impar (y no es un número primo).*

$I^{v_{x|2}}(P(x) \wedge Pr(x)) = P(2) \wedge Pr(2) = 1$, *ya que* 2 *es un número par y un número primo.*

Luego ya no necesitamos continuar. Hay un elemento del dominio (el 2) tal que $I^{v_{x|2}}(\alpha) = 1$. *Por tanto,*

$$I^v(\exists x(P(x) \wedge Pr(x))) = 1$$

En este ejemplo, la fórmula α_2 *se podría haber traducido como que* existe x que es par y primo, *que sabemos que es cierto.*

c) $\alpha_3 = \exists x P(x) \wedge Pr(x)$.

Aquí se tiene que $I^v(Pr(x)) = 0$, *pues* $I^v(Pr(x)) = Pr(v(x)) = Pr(8) = 0$, *pues 8 no es un número primo. Independientemente de lo que valga* $I^v(\exists x P(x))$ *(que vale 1), se tiene que*

$$I^v(\exists x P(x) \wedge Pr(x)) = 0$$

Notemos que en este caso, la valoración v *sí ha jugado un papel decisivo en el valor de verdad de la fórmula. De hecho, con la valoración* $v'(x) = 7$, $v'(y) = 5$, *tendriamos que* $I^{v'}(\alpha_3) = 1$.

d) $\alpha_4 = \forall x(P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow Eq(x, s(b)))$.

Esta fórmula dice que si x *es un número par y primo entonces* $x = 2$, *que sabemos que es cierto. Por tanto, se tiene que* $I^v(\alpha_4) = 1$.

Vamos a comprobarlo fijándonos en la definición 33. Sea $\alpha = P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow Eq(x, s(b))$.

$I^{v_{x|0}}(P(x) \wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|0}}(\alpha) = 1$.

$I^{v_{x|1}}(P(x) \wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|1}}(\alpha) = 1$.

$I^{v_{x|2}}(P(x) \wedge Pr(x)) = 1$ *y* $I^{v_{x|2}}(Eq(x, s(b))) = 1$, *luego* $I^{v_{x|2}}(\alpha) = 1$.

$I^{v_{x|3}}(P(x) \wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|3}}(\alpha) = 1$.

$I^{v_{x|4}}(P(x) \wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|4}}(\alpha) = 1$.

Y vemos que para cualquier $n \geq 3$ *se tiene que* $I^{v_{x|n}}(P(x) \wedge Pr(x)) = 0$, *luego* $I^{v_{x|n}}(\alpha) = 1$. *Concluimos entonces que*

$$I^v(\forall x(P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow Eq(x, s(b)))) = 1$$

Estos cálculos podríamos haberlos desarrollado en la siguiente tabla:

x	$P(x)$	$Pr(x)$	$P(x) \wedge Pr(x)$	$Eq(x, s(b))$	$P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow Eq(x, s(b))$	$\forall x(P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow Eq(x, s(b)))$
0	1	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	
2	1	1	1	1	1	
3	0	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$*$	$*$	0	0	1	

e) $\alpha_5 = \forall x(P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow M(x, s(b)))$.

Si aquí hacemos una tabla similar al ejemplo anterior, tendríamos:

x	$P(x)$	$Pr(x)$	$P(x) \wedge Pr(x)$	$M(x, s(b))$	$P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow M(s, s(b))$	$\forall x(P(x) \wedge Pr(x) \rightarrow M(x, s(b)))$
0	1	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	0
2	1	1	1	0	0	

Al haber obtenido que $I^{v_{x|2}}(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b))) = 0$ *entonces*

$$I^v(\forall x(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b))) = 0$$

No necesitamos seguir calculando $I^{v_{x|3}}(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b)))$, $I^{v_{x|4}}(P(x) \wedge Pr(x) \to M(x, s(b)))$, *etc.*

2. *Sea ahora el lenguaje de primer orden definido por* $\mathcal{C} = \{a, c\}$, $\mathcal{V} = \{x\}$, $\mathcal{F} = \{f^1, g^2\}$, $\mathcal{R} = \{R^1, Q^2\}$, *la estructura siguiente (ver ejemplo 3.2.2):*

Dominio $D = \mathbb{Z}_3$.

Constantes $a = 0$, $c = 2$.

Funciones $f(x) = x + 1$, $g(x, y) = x + y$.

Predicados $R = \{0\}$, $Q = \{(0, 1),\ (1, 2),\ (2, 0)\}$,

y la valoración $x \mapsto 0$. *Vamos a interpretar las siguientes fórmulas:*

a) $\forall x Q(x, f(x))$,
b) $\forall x Q(x, c)$
c) $\exists x Q(x, f(c))$,
d) $\exists x Q(x, f(f(x)))$,
e) $\exists x(R(x) \to \neg R(x))$,
f) $\exists x R(x) \to \neg R(x)$.

a) *Hacemos una tabla con las interpretaciones de* $Q(x, f(x))$ *para las distintas valoraciones de la variable* x. *En este caso, al tener el dominio 3 elementos, podemos calcularlas todas.*

$v(x)$	$f(x)$	$Q(x, f(x))$	$\forall x Q(x, f(x))$
0	1	1	
1	2	1	1
2	0	1	

Así que $I(\forall x Q(x, f(x))) = 1$

Volvemos a notar que puesto que todas las apariciones de las variables son ligadas, la valoración inicial no ha jugado ningún papel en el valor de verdad de la fórmula.

b) *Igual que en el caso anterior escribimos la tabla:*

$v(x)$	$Q(x, c)$	$\forall x Q(x, c)$
0	0	
1	1	0
2	0	

Es decir, $I(\forall x Q(x, c)) = 0$.

c) *También ahora necesitamos todas las valoraciones de la variable* x.

$v(x)$	$Q(x, f(c))$	$\exists x Q(x, f(c))$
0	0	
1	0	1
2	1	

Por tanto $I(\exists x Q(x, f(c))) = 1$

d) *La tabla es:*

$v(x)$	$f(f(x))$	$Q(x,f(f(x)))$	$\exists xQ(x,f(f(x)))$
0	2	0	
1	0	0	0
2	1	0	

Luego $I(\exists xQ(x,f(f(x))) = 0$.

e) *En este caso la tabla es:*

$v(x)$	$R(x)$	$\neg R(x)$	$R(x) \to \neg R(x)$	$\exists x(R(x) \to \neg R(x))$
0	1	0	0	
1	0	1	1	1
2	0	1	1	

Así que $I(\exists x(R(x) \to \neg R(x))) = 1$

f) *Ahora la tabla es*

$v(x)$	$R(x)$	$\exists xR(x)$	$\neg R(x)$	$\exists xR(x) \to \neg R(x)$
0	1			
1	0	1	0	0
2	0			

Y tenemos entonces que $I(\exists xR(x) \to \neg R(x)) = 0$. *En la columna correspondiente a* $\neg R(x)$ *hemos tomado como valor de* x *el cero, pues es la valoración que teníamos inicialmente. Esto lo hacemos así pues esta aparición de la variable* x *es libre. Por tanto, el valor de verdad de la fórmula depende, no solo de la estructura sino también de la valoración. Para otra valoración (por ejemplo,* $v(x) = 1$*), tendríamos que* $I(\exists xR(x) \to \neg R(x)) = 1$.

Observación:

De ahora en adelante, en muchas ocasiones en que queramos dar algún ejemplo y necesitemos un lenguaje de primer orden, no especificaremos los elementos del lenguaje, sino que daremos las fórmulas que necesitemos´y supondremos que en nuestro lenguaje tenemos todos los símbolos que aparecen en las fórmulas. La escritura de las fórmulas debe ser coherente. Así, si aparece varias veces un símbolo de función o de predicado, en todas las ocasiones debe tener la misma aridad.

Por ejemplo, si decimos:

> Sea $\alpha = \forall x(Q(x,f(a)) \to \exists y(P(y) \wedge Q(f(x),y)))$ una fórmula de un lenguaje de primer orden, entenderemos que estamos hablando de un lenguaje de primer orden en el que entre los símbolos de constante está a (puede que algunos más), entre los símbolos de función está f (y que es un símbolo 1-ario) y entre los símbolos de predicado está P (1-ario) y Q (binario).

Hemos visto en estos ejemplos como a la hora de interpretar una fórmula, si tenemos una ocurrencia ligada de una variable, el valor de verdad de la fórmula no depende de la valoración que escojamos, sino solo de la estructura. Por el contrario, para las apariciones libres sí hay que tener en cuenta la valoración. Este hecho queda reflejado en el siguiente lema:

Lema 3.2.1 (Lema de coincidencia). *Sea* α *una fórmula de un lenguaje de primer orden, y sea* $\mathcal{E}$ *una estructura. Supongamos que el conjunto de variables que tienen alguna ocurrencia libre en* α *es* $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. *Sean* v_1, v_2 *dos valoraciones tales que*

$$v_1(x_i) = v_2(x_i) \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, m.$$

Entonces $I^{v_1}(\alpha) = I^{v_2}(\alpha)$.

Es decir, a la hora de interpretar una fórmula, no importa como actúe la valoración sobre las variables ligadas. Sólo tiene relevancia sobre las variables libres.

Como consecuencia, si la fórmula es una sentencia, es decir, no hay ninguna ocurrencia libre de ninguna variable, entonces la interpretación de la fórmula depende únicamente de la estructura. No depende de la valoración que tomemos.

3.2.2. Clasificación semántica de las fórmulas.

Al igual que en el lenguaje proposicional, vamos a dar una clasificación de las fórmulas atendiendo a sus posibles interpretaciones. Comenzamos definiendo lo que se entiende por un *modelo* para una fórmula.

Definición 34. *Dada una fórmula α en un lenguaje de primer orden y una interpretación $I^v = (\mathcal{E}, v)$, se dice que es un* modelo *para α si $I^v(\alpha) = 1$.*

Ejemplo 3.2.6.
Sea $\alpha = \forall x P(m(x, s(x)))$. La estructura $\mathcal{E}_1$, con cualquier valoración, es un modelo para α, como vimos en el ejemplo 3.2.5. Sin embargo, $\mathcal{E}_2$ no es un modelo para α, como vimos también en ese ejemplo.

Definición 35. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden, y sea $\mathcal{E}$ una estructura.*

1. *Se dice que α es* válida *en $\mathcal{E}$ si para cualquier valoración v se tiene que $I^v(\alpha) = 1$.*
2. *Se dice que α es* satisfacible *en $\mathcal{E}$ si hay una valoración v tal que $I^v(\alpha) = 1$.*
3. *Se dice que α es* refutable *en $\mathcal{E}$ si existe una valoración v tal que $I^v(\alpha) = 0$.*
4. *Se dice que α es* no válida *en $\mathcal{E}$ si para cualquier valoración v se tiene que $I^v(\alpha) = 0$.*

Observación:

Si α es una sentencia y $\mathcal{E}$ es una estructura, puesto que el valor de verdad de α no depende de la valoración, si es satisfacible en $\mathcal{E}$ entonces es válida en $\mathcal{E}$ y si es refutable en $\mathcal{E}$ entonces es no válida en $\mathcal{E}$.

Ejemplo 3.2.7.
Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden $(\{b\}, \{x, y\}, \{f, g\}, \{P, Q, R\})$. Sea la estructura siguiente:

Dominio $D = \mathbb{Z}_5$.

Constantes $b = 2$.

Funciones $f(x) = x^2 + 1$, $g(x, y) = x \cdot y$.

Predicados $P(x) \equiv x^4 = 1$, $Q(x, y) \equiv x^2 + y = 0$, $R(x, y) \equiv x = y$.

Vamos a tomar varias fórmulas, y estudiar si son válidas, satisfacibles, refutables o no válidas en $\mathcal{E}$.

1. $\alpha_1 = \forall x(P(x) \to \exists y R(b, g(x, y)))$. *Esta fórmula es una sentencia. Por tanto, o es válida en $\mathcal{E}$ o es no válida en $\mathcal{E}$.*

   Llamamos α a la fórmula $P(x) \to \exists y R(b, g(x, y))$ y la interpretamos para los diferentes valores de x.

   - $x = 0$. *En tal caso $I(\alpha) = 1$, ya que $I(P(x)) = P(0) = 0$.*
   - $x = 1$. *Si tomamos $y = 2$ tenemos que $I(R(b, g(x, y))) = R(2, g(1, 2)) = R(2, 2) = 1$. Por tanto $I(\exists y R(b, g(x, y))) = 1$, luego $I(\alpha) = 1$.*
   - $x = 2$. *Ahora podemos tomar $y = 1$ y razonar igual que antes. También $I(\alpha) = 1$.*
   - $x = 3$. *En este caso, tomamos $y = 4$ y con eso comprobamos que $I(\alpha) = 1$.*
   - $x = 4$. *También aquí $I(\alpha) = 1$, pues para $y = 3$ la fórmula $R(b, g(x, y))$ es verdadera.*

Con esto tenemos que $I(\alpha_1) = 1$. *Por tanto* α_1 *es válida en* $\mathcal{E}$.

2. $\alpha_2 = \exists x \forall y (Q(x,b) \vee P(g(x, f(y))))$. *También esta fórmula es una sentencia.*

   Sea ahora $\beta = \forall y(Q(x,b) \vee P(g(x, f(y))))$. *Vamos a hacer una tabla con las distintas valoraciones, para calcular el valor de verdad de* α_2.

$v(x)$	$Q(x,b)$	$v(y)$	$f(y)$	$g(x,f(y))$	$P(g(x,f(y)))$	$Q(x,b) \vee P(g(x,f(y))) = \alpha$	$\forall y \alpha = \beta$	$\exists x \beta = \alpha_2$
		0	1	0	0	0		
		1	2	0	0	0		
0	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	0	0	0		
		0	1	1	1	1		
		1	2	2	1	1		
1	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	2	1	1		
		0	1	2	1	1		
		1	2	4	1	1		
2	0	2	0	0	0	0	0	0
		3	0	0	0	0		
		4	2	4	1	1		
		0	1	3	1	1		
		1	2	1	1	1		
3	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	1	1	1		
		0	1	4	1	1		
		1	2	3	1	1		
4	0	2	0	0	0	0	0	
		3	0	0	0	0		
		4	2	3	1	1		

   Luego α_2 *es una fórmula no válida en* $\mathcal{E}$.

3. $\alpha_3 = \forall x(Q(x,y) \to \neg R(x,b))$. *Esta fórmula no es una sentencia. La variable* y *aparece libre en la fórmula. Por tanto, debemos ver como se interpreta la fórmula dependiendo de los valores de* y.

   Tomamos una valoración para la que $y = 0$. *La fórmula nos dice que si* $x^2 = 0$ *entonces* $x \neq 2$, *lo cual es cierto. Con esto vemos que la fórmula es satisfacible en* $\mathcal{E}$.

   Tomamos ahora una valoración para la que $y = 1$. *En este caso, la fórmula dice que si* $x^2 + 1 = 0$ *entonces* $x \neq 2$. *Pero eso no es verdad, pues* $2^2 + 1 = 0$. *La fórmula es refutable en* $\mathcal{E}$.

   De hecho, se tiene que para una valoración v:

$$I^{v_{y|0}}(\alpha_3) = I^{v_{y|2}}(\alpha_3) = I^{v_{y|3}}(\alpha_3) = I^{v_{y|4}}(\alpha_3) = 1; \qquad I^{v_{y|1}}(\alpha_3) = 0$$

   Como hay al menos una valoración para la que la fórmula se interpreta como verdadera, y una para la que la fórmula se interpreta como falsa, la fórmula α_3 *es satisfacible y refutable en* $\mathcal{E}$.

4. $\alpha_4 = R(x, f(b)) \vee P(x)$.

   Aquí hay también que ver que ocurre con las distintas valoraciones.

$v(x)$	$R(x,f(b))$	$P(x)$	$R(x,f(b)) \vee P(x)$
0	1	0	1
1	0	1	1
2	0	1	1
3	0	1	1
4	0	1	1

Como para todas las posibles valoraciones se tiene que $I(\alpha_4) = 1$, la fórmula es válida en $\mathcal{E}$.

Definición 36. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden.*

1. *Se dice que α es* universalmente válida *si para cualquier estructura $\mathcal{E}$ α es válida en $\mathcal{E}$ (es decir, para cualquier interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ se tiene que $I(\alpha) = 1$).*

2. *Se dice que α es* satisfacible *si hay alguna estructura en la que sea satisfacible (es decir, existe una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ para la que $I(\alpha) = 1$).*

3. *Se dice que α es* refutable *si hay alguna estructura en la que sea refutable (es decir, existe una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ para la que $I(\alpha) = 0$).*

4. *Se dice que α es* contradicción *si para cualquier estructura $\mathcal{E}$ es no válida (es decir, para cualquier interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ se tiene que $I(\alpha) = 0$).*

Ejemplo 3.2.8.

1. *Vamos a ver que $\exists x(P(x) \to P(a))$ es universalmente válida.*

   En primer lugar, notemos que esta fórmula es una sentencia.

   Supongamos que tenemos una estructura $\mathcal{E}$ cuyo dominio es D y una valoración cualquiera v. En esa estructura, al símbolo de constante a se le habrá asignado un elemento del conjunto D (que llamaremos también a).

   Entonces $I^{v_{x|a}}(P(x) \to P(a)) = I(P(a) \to P(a)) = 1$, independiente de que $P(a)$ se interprete como cierta o como falsa. Luego se tiene que

$$I^v(\exists x(P(x) \to P(a))) = 1$$

   Podríamos intentar construir una tabla para calcular el valor de verdad de la fórmula.

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\exists x(P(x) \to P(a))$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a	$I(P(a))$	$I(P(a))$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

   y observamos que en la fila correspondiente al valor del dominio que toma la constante a obtenemos que ambos miembros de la implicación tienen el mismo valor de verdad (puede que sea 0 o 1), por lo que la implicación es verdadera.

   Esta fila hace que el valor de verdad de $\exists x(P(x) \to P(a))$ sea 1.

2. *$\forall x(P(x) \to P(a))$ es satisfacible y refutable. Para probarlo vamos a dar dos estructuras. En una se interpretará como cierta y en la otra como falsa.*

   a) *En la primera estructura, $D = \mathbb{N}$, $a = 3$ y $P(x) \equiv x$ es par.*

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\forall x(P(x) \to P(a))$
0	1	0	0	
1	0	0	1	0
2	1	0	0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

   La primera fila ya nos dice que la interpretación de la fórmula $\forall x(P(x) \to P(a))$ es cero.

   b) *Ahora la estructura es $D = \mathbb{Z}_3$, $a = 2$, $P(x) \equiv x^2 = 1$.*

x	$P(x)$	$P(a)$	$P(x) \to P(a)$	$\forall x(P(x) \to P(a))$
0	0	1	1	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	

Con estas dos estructuras vemos que la fórmula $\forall x(P(x) \to P(a))$ es satisfacible y refutable.

3. *$\forall x(P(x) \to \neg P(a))$ es también satisfacible y refutable. Y puede probarse usando las mismas interpretaciones que en la fórmula anterior, aunque los resultados están intercambiados.*

4. *$\exists x(P(x) \to \neg P(a))$*

   Si tomamos las dos estructuras anteriores, en ambos casos la fórmula se interpreta como verdadera (compruébalo). Con esto sabemos que la fórmula es satisfacible. Pero, ¿es también refutable? o, por el contrario es universalmente válida.

   Vamos a intentar buscar una estructura donde la fórmula se interprete como falsa. Para eso, necesitamos que sea cual sea el elemento d del dominio, la fórmula $P(d) \to \neg P(a)$ sea falsa, lo que significa que $I(P(d)) = 1$ e $I(\neg P(a)) = 0$. Esto nos dice que hay que elegir un predicado que sea cierto para todos los elementos del dominio.

   Tomamos entonces la siguiente estructura: $D = \mathbb{Z}_2$, $a = 1$, $P(x) = 1$ (o $P(x) \equiv x^2 = x$). En tal caso, tenemos:

x	$P(x)$	$\neg P(a)$	$P(x) \to \neg P(a)$	$\exists x(P(x) \to \neg P(a)$
0	1	0	0	
1	1	0	0	0

5. *$\forall x \neg(P(x) \to P(a))$ es contradicción.*

   Al igual que en el primer caso, si v es una valoración, entonces $I^{v_{x|a}}(P(x) \to P(a)) = 1$, luego $I^{v_{x|a}}(\neg(P(x) \to P(a))) = 0$. De aquí concluimos que

$$I^v(\forall x \neg(P(x) \to P(a))) = 0$$

   Sea cual sea la interpretación I.

6. *$\exists x \neg(P(x) \to P(a))$ es satisfacible y refutable. Puedes tomar las estructuras que han aparecido en este ejemplo para comprobarlo.*

Ejercicio 3.2.1. *Prueba que:*

1. *$\exists x P(x) \to P(a)$ es satisfacible y refutable.*
2. *$\forall x P(x) \to P(a)$ es universalmente válida.*
3. *$\forall x P(x) \to \neg P(a)$ es satisfacible y refutable.*
4. *$\exists x P(x) \to \neg P(a)$ es satisfacible y refutable.*
5. *$\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ es satisfacible y refutable.*
6. *$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ es universalmente válida.*

Definición 37. *Sea $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas. Se dice que Γ es satisfacible si existe una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ tal que $I^v(\gamma_1) = I^v(\gamma_2) = \cdots = I^v(\gamma_n) = 1$ (es decir, existe un modelo para todas las fórmulas de Γ).*

Un conjunto que no es satisfacible se dice insatisfacible.

Ejemplo 3.2.9.

1. *Sea* $\Gamma = \{\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \exists x R(x,x),\ \exists x \neg R(x,x)\}$.
   Vamos a comprobar que Γ *es satisfacible. Para eso, tomamos la siguiente estructura:*

   Dominio $D = \mathbb{N}$.
   Predicados $P(x) \equiv x$ *es impar,* $Q(x) = 1$*,* $R(x,y) \equiv x \cdot y$ *es impar.*

   Y vamos a ver que en esta estructura todas las fórmulas de Γ *se interpretan como verdaderas:*

   - $\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x))$.
     Interpretamos la fórmula $\exists y R(x,y) \to P(x)$ *para los distintos valores de* x.
     - *Si* x *es par. En ese caso,* $I(R(x,y)) = 0$ *para cualquier* y*, ya que* $x \cdot y$ *es un número par (al serlo* x*). Por tanto,* $I(\exists y R(x,y)) = 0$*, luego* $I(\exists y R(x,y) \to P(x)) = 1$.
     - *Si* x *es impar. Ahora* $I(\exists y R(x,y)) = 1$ *(podemos tomar* $y = 1$*). Pero también* $I(P(x)) = 1$*. Luego* $I(\exists y R(x,y) \to P(x)) = 1$.

     Por tanto, se tiene que $I(\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x))) = 1$.
   - $\forall x(P(x) \to Q(x))$.
     Al ser $I(Q(x)) = 1$ *para cualquier valor de* x*, entonces* $I(P(x) \to Q(x)) = 1$ *para cualquier valor de* x*, luego* $I(\forall x(P(x) \to Q(x))) = 1$.
   - $\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$.
     Si tomamos $x = 0$*, entonces, para cualquier* y*,* $I(R(x,y)) = 0$*, luego* $I(\neg R(x,y)) = 1$*. Por tanto,* $I(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)) = 1$*. Es decir, hay un valor de* x *que hace cierta la fórmula* $Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)$*. Eso significa que* $I(\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))) = 1$.
   - $\exists x R(x,x)$.
     Puesto que $1 \cdot 1$ *es impar, entonces* $I(\exists x R(x,x)) = 1$.
   - $\exists x \neg R(x,x)$.
     Ahora tomamos $x = 2$*. Al ser* $2 \cdot 2$ *un número par, tenemos que* $I(\exists x \neg R(x,x)) = 1$.

2. *El conjunto*

   $$\Gamma = \{\neg\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \neg\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \neg\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \neg\exists x R(x,x),\ \neg\exists x \neg R(x,x)\}$$

   es insatisfacible.

   El motivo es que las dos últimas fórmulas no pueden ser verdaderas a la vez. Si la cuarta es verdadera, es decir, no existe x *tal que* $I(R(x,x)) = 1$*, entonces tiene que existir un elemento* x *tal que* $I(\neg(R(x,x))) = 1$*. Por tanto,* $I(\neg\exists x \neg R(x,x)) = 0$*, es decir, la quinta fórmula se interpreta como falsa.*

En este ejemplo hemos tomado un conjunto $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$ que es satisfacible, y el conjunto $\Gamma' = \{\neg\gamma_1, \neg\gamma_2, \neg\gamma_3, \neg\gamma_4, \neg\gamma_5\}$ es insatisfacible. Esto no tiene porqué ser así.

Por ejemplo, el conjunto $\{\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \exists x R(x,x)\}$ es satisfacible (acabamos de ver una estructura donde todas las fórmulas son ciertas).

El conjunto $\{\neg\forall x(\exists y R(x,y) \to P(x)),\ \neg\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \neg\exists x(Q(x) \wedge \forall y \neg R(x,y)),\ \neg\exists x R(x,x)\}$ es también satisfacible. La siguiente es una estructura donde todas las fórmulas son verdaderas.

Dominio $D = \mathbb{N}$.

Predicados $P(x) \equiv x$ es impar, $Q(x) \equiv x$ es primo, $R(x,y) \equiv x < y$.

Se deja como ejercicio comprobar esto último.

Observación:

Con lo que hemos visto hasta ahora no es fácil comprobar que un conjunto de fórmulas es insatisfacible. Más adelante estudiaremos técnicas para comprobar que un conjunto de fórmulas es insatisfacible.

3.3. Implicación semántica.

Al igual que en el tema de lógica proposicional, el concepto de implicación semántica es el que nos va a decir cuando una deducción es correcta dentro de un lenguaje de primer orden.

Definición 38. *Sea Γ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden y sea α una fórmula del mismo lenguaje. Decimos que α es consecuencia lógica de Γ si para cualquier interpretación en la que todas las proposiciones fórmulas de Γ sean verdaderas se tiene que la fórmula α es también cierta.*
En tal caso, escribiremos:

$$\Gamma \vDash \alpha$$

y leeremos

$$\alpha \textit{ es consecuencia lógica de } \Gamma$$

o también

$$\Gamma \textit{ implica semánticamente } \alpha.$$

Observación:

Si $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ y $\Gamma \vDash \alpha$, escribiremos $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \vDash \alpha$.

Pero ahora, para ver si $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \vDash \alpha$ no podremos hacer como en el caso de la lógica proposicional de tomar todas las interpretaciones en las que las premisas sean ciertas y ver que ocurre con la conclusión, ya que el conjunto de tales interpretaciones puede ser infinito.

Lo que sí es cierto es que si encontramos una interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ tal que $I(\gamma_1) = I(\gamma_2) = \cdots = I(\gamma_n) = 1$ e $I(\alpha) = 0$, entonces no es cierto que $\Gamma \vDash \alpha$.

Cuando el conjunto Γ sea vacío, la expresión $\Gamma \vDash \alpha$ significa que α es universalmente válida. En tal caso, escribiremos $\vDash \alpha$.

Ejemplo 3.3.1.

1. *Vamos a ver que $\{\forall x P(x)\} \vDash P(a)$.*

   Esto parece claro, pues si el predicado P es cierto para todos los valores de x, en particular debe ser cierto para $x = a$.

   Si quisiéramos hacer una tabla en la que $\forall x P(x)$ fuera cierto, esta tabla sería

x	$P(x)$	$\forall x P(x)$
$\vdots$	1	
a	1	1
$\vdots$	1	

   Y puesto que todos los elementos de la columna $P(x)$ tienen que valer 1, entonces aquel que esté en la fila del elemento a vale 1, lo que significa que $I(P(a)) = 1$.

2. *Ahora vamos a comprobar que $\exists x P(x) \nvDash P(a)$. Para esto, vamos a dar una estructura en la que $\exists x P(x)$ se interprete como cierta, pero $P(a)$ no. Esta estructura podría ser:*

   Dominio $D = \mathbb{N}$.
   Constantes $a = 1$.
   Predicados $P(x) \equiv x$ *es par.*

   Es claro que $I(\exists x P(x)) = 1$, ya que en el dominio $\mathbb{N}$ podemos encontrar un elemento (por ejemplo, el 2), para el que el predicado P es cierto. Sin embargo, $I(P(a)) = P(1) = 0$.

3. *Al comienzo del capítulo estuvimos viendo un ejemplo de razonamiento. De las afirmaciones* todos los hombres son mortales *y* Sócrates es un hombre *deducíamos que* Sócrates es mortal.

   Vamos a formular este razonamiento en un lenguaje de primer orden, aunque la solución la daremos más adelante.

   Sea el lenguaje de primer orden $\mathcal{L} = (\{s\},\ \{x\},\ \emptyset,\ \{H^1, M^1\})$*, y consideramos la estructura:*

   Dominio *Seres vivos.*

   Constantes $s =$ *Sócrates.*

   Predicados $H(x) \equiv x$ *es hombre.* $M(x) \equiv x$ *es mortal.*

   Entonces podemos traducir a este lenguaje estos enunciados:

   > *Todos los hombres son mortales. Se diría* $\forall x(H(x) \to M(x))$*.*
   > *Sócrates es hombre. Se diría* $H(s)$*.*
   > *Sócrates es mortal. Se diría* $M(s)$*.*

   En tal caso, lo que habría que comprobar es si $\{\forall x(H(x) \to M(x)),\ H(s)\} \vDash M(s)$*.*

   Más adelante comprobaremos que esta implicación semántica es cierta.

   > *También podría haberse tomado como dominio el conjunto de todos los hombres, en cuyo caso, este silogismo se traduciría como* $\forall x M(x) \vDash M(s)$*, que ya hemos visto que es cierto.*

Teorema 3.3.1. *. Sea* Γ *un conjunto de fórmulas y* α *otra fórmula. Son equivalentes:*

1. $\Gamma \vDash \alpha$
2. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *es insatisfacible.*

Compara este teorema con el teorema 2.4.1. La demostración es análoga a la que se hizo en su momento.

El teorema 2.4.2 también tiene su versión a la lógica de predicados.

Teorema 3.3.2 (Teorema de la Deducción)**.**

Sea Γ *un conjunto de fórmulas (que podría ser vacío) de un lenguaje de primer orden, y* α*,* β*, otras dos fórmulas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\Gamma \vDash \alpha \to \beta$
2. $\Gamma \cup \{\alpha\} \vDash \beta$

La demostración es igual a la que se hizo en el caso de la lógica proposicional.

Ejemplo 3.3.2.

Vamos a comprobar que $\forall x P(x) \to P(a)$ *es universalmente válida. Esto es lo mismo que demostrar que*

$$\vDash \forall x P(x) \to P(a)$$

y por el teorema de la deducción, esto se traduce en

$$\forall x P(x) \vDash P(a),$$

algo que hemos hecho en el ejemplo 3.3.1.

Al igual que en el tema anterior, el problema fundamental de la lógica de predicados es estudiar cuando, dado un conjunto de fórmulas Γ y una fórmula α se tiene que $\Gamma \vDash \alpha$. Entonces vimos que podíamos resolverlo mediante tablas de verdad o planteando ecuaciones en $\mathbb{Z}_2$. Estas dos técnicas para resolver este problema no pueden trasladarse a la lógica de predicados, así que tenemos que intentar otros métodos. Conocemos, para la lógica proposicional el algoritmo de Davis-Putnam y el método de resolución. Ambos nos servían para demostrar que un conjunto de fórmulas era insatisfacible, lo que, junto con el teorema 2.4.1 nos permitía responder a la pregunta de si $\Gamma \vDash \alpha$ o $\Gamma \nvDash \alpha$. Ahora, con el teorema 3.3.1, también podemos transformar un problema de implicación semántica en un problema de estudiar si un conjunto de fórmulas es o no insatisfacible. Pero para poder aplicar estos dos métodos necesitábamos, dada una fórmula, transformarla en otra que tuviera una forma determinada (lo que en su momento llamamos la forma clausular). Estas transformaciones se conseguían a partir de unas equivalencias lógicas básicas.

Ahora vamos a necesitar algo parecido. Por tanto, en lo que sigue, vamos a extender las reglas que teníamos de equivalencias lógicas a fórmulas en las que intervienen cuantificadores.

3.4. Equivalencia lógica.

El concepto de equivalencia lógica en lenguajes de primer orden es similar al que se dio en lógica proposicional (ver definición 14).

Definición 39. *Sean α, β dos fórmulas de un lenguaje de primer orden. Se dice que son lógicamente equivalentes si para cualquier interpretación $I = (\mathcal{E}, v)$ se tiene que $I(\alpha) = I(\beta)$.*

Si α y β son lógicamente equivalenes, escribiremos $\alpha \equiv \beta$.

Es fácil comprobar que dadas dos fórmulas α y β, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. α y β son lógicamente equivalentes.
2. $\alpha \leftrightarrow \beta$ es universalmente válida.
3. $\alpha \to \beta$ y $\beta \to \alpha$ son universalmente válidas.
4. $\alpha \vDash \beta$ y $\beta \vDash \alpha$.

Observación:

También en lenguajes de primer orden podemos sustituir fórmulas por otras que sean lógicamente equivalentes en el siguiente sentido. Si β_1 es lógicamente equivalente a β_2, y α es una fórmula para la que β_1 es una subfórmula, entonces la fórmula que resulta de sustituir en α la fórmula β_1 por β_2 es lógicamente equivalente a α. En otras palabras, si en una fórmula sustituimos una subfórmula por otra lógicamente equivalente, el resultado es una fórmula lógicamente equivalente.

A la hora de transformar una fórmula en otra lógicamente equivalente a ella, nos vale el cuadro 2.3 que vimos en el tema anterior y que recordamos ahora. En este cuadro, α, β y γ representan fórmulas cualesquiera de un lenguaje de primer orden.

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha & \equiv & \neg\neg\alpha \\
\alpha \to \beta & \equiv & \neg\alpha \vee \beta \\
\alpha \leftrightarrow \beta & \equiv & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & \equiv & \neg\alpha \vee \neg\beta \\
\neg(\alpha \vee \beta) & \equiv & \neg\alpha \wedge \neg\beta \\
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \\
\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \equiv & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \wedge \gamma) \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \equiv & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)
\end{array}
$$

Cuadro 3.1: Equivalencias

Estas equivalencias son también válidas en la lógica de predicados. Pero necesitamos ampliar la tabla con nuevas equivalencias en las que intervengan los cuantificadores. El objetivo será transformar una fórmula en otra que tenga todos los cuantificadores al principio, y cuyo radio de acción sea toda la fórmula que tiene a la derecha.

3.5. Algunas equivalencias lógicas

Vamos a tratar de estudiar como se comportan los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ con respecto a los conectores lógicos $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$.

Dada una fórmula α, un símbolo de variable x y un término t, denotaremos como $\alpha_{x|t}$ a la fórmula que resulta de sustituir todas las ocurrencias libres de x en α por el término t.

Ejemplo 3.5.1.
Sea $\alpha = \forall x(\exists y R(x, f(y)) \rightarrow P(y, x))$.

1. *Para cualquier término* t *se tiene que* $\alpha_{x|t} = \alpha$*, ya que al no haber ninguna ocurrencia libre de* x *en la fórmula* α*, no se realiza ninguna sustitución.*
2. $\alpha_{y|z} = \forall x(\exists y R(x, f(y)) \rightarrow P(z, x))$. *Sólo se ha sustituido la* y *de* $P(y, x)$*, ya que las otras apariciones de* y *son ligadas.*
3. $\alpha_{y|f(z)} = \forall x(\exists y R(x, f(y)) \rightarrow P(f(z), x))$.
4. $\alpha_{y|x} = \forall x(\exists y R(x, f(y)) \rightarrow P(x, x))$. *Aunque esta sustitución puede realizarse no es habitual realizar este tipo de sustituciones.*

3.5.1. Negación y cuantificadores

Vamos, en primer lugar, a justificar que para cualquier fórmula α, las fórmulas $\neg\forall x\alpha$ y $\exists x\neg\alpha$ son equivalentes.

Consideramos, por ejemplo, el enunciado *Todos los números primos son impares.*

En primer lugar, vamos expresar este enunciado en un lenguaje de primer orden. Para esto, tomamos un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado 1-arios Pr e Im, y consideramos la estructura cuyo dominio son los números naturales y los significados de los símbolos de predicado son $Pr(x) \equiv$ x es primo e $Im(x) \equiv x$ es impar.

En tal caso, el enunciado *todos los números primos son impares* podemos traducirlo como $\forall x(Pr(x) \rightarrow Im(x))$.

Todos sabemos que ese enunciado es falso, lo que nos dice que en esta estructura, la fórmula $\neg\forall x(Pr(x) \rightarrow Im(x))$ se interpreta como cierta.

El motivo por el que sabemos que es falso es porque hay un número que es primo y no es impar (el 2). Esto último lo podemos decir como $\exists x(Pr(x) \wedge \neg Im(x))$.

Lo que hace que sea falsa la fórmula $\forall x(Pr(x) \rightarrow Im(x))$ (es decir, que sea verdadera $\neg\forall x(Pr(x) \rightarrow Im(x))$) es lo mismo que hace verdadera la fórmula $\exists x(Pr(x) \wedge \neg Im(x))$.

Si llamamos α a $Pr(x) \rightarrow Im(x)$, entonces

$$\exists x(Pr(x) \wedge \neg Im(x)) \equiv \exists x\neg(\neg Pr(x) \vee Im(x)) \equiv \exists x\neg(Pr(x) \rightarrow Im(x)) \equiv \exists x\neg\alpha$$

Y llegamos a la conclusión de que las fórmulas $\neg\forall x\alpha$ y $\exists x\neg\alpha$ significan lo mismo.

Otro ejemplo, podría ser el siguiente: la negación de que *todos los cuervos son negros* es que hay al menos un cuervo que no es negro. Este enunciado podemos decirlo en un lenguaje de primer orden con la sentencia $\forall x N(x)$, donde el universo sería el conjunto de todos los cuervos, y el predicado $N(x)$ significa *x es negro*. Entonces, no todos los cuervos son negros se diría $\neg\forall x N(x)$, que es lo mismo que decir que hay un cuervo que no es negro, que en este lenguaje sería $\exists x\neg N(x)$.

Podemos también aproximarnos a esta equivalencia como sigue.

Supongamos que tenemos una fórmula de la forma $\forall x\alpha$, y tomamos una estructura donde el universo es finito. Supongamos que el universo es $\{a_1, a_2, \ldots, \alpha_n\}$. En tal caso, el cuantificador $\forall$ podría ser sustituido por un número finito de conectores $\wedge$, es decir:

$$\forall x\alpha \equiv \alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_n}$$

mientras que el cuantificador $\exists$ podría ser sustituido por un número finito de conectores $\vee$:

$$\exists x\alpha \equiv \alpha_{x|a_1} \vee \alpha_{x|a_2} \vee \cdots \vee \alpha_{x|a_n}$$

Tendríamos entonces que

$$\neg\forall x\alpha \equiv \neg(\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_n}) \equiv \neg\alpha_{x|a_1} \vee \neg\alpha_{x|a_2} \vee \cdots \vee \neg\alpha_{x|a_n} \equiv \exists x\neg\alpha$$

Es decir, podríamos ver la equivalencia $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$ como una generalización de la ley de De Morgan $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.

Ejemplo 3.5.2. *Considermos el lenguaje de primer orden con tres símbolos de constante a, b, c y un símbolo de predicado P^1. Sea α la fórmula $\forall xP(x)$ Tomamos una estructura en la que:*

$$D = \mathbb{Z}_3; \qquad a = 0, \quad b = 1, \quad c = 2$$

En este caso, la fórmula α es cierta si, y sólo si, lo es la fórmula $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$. Por tanto, la fórmula $\neg\alpha$ será cierta si, y sólo si, lo es la fórmula $\neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv \neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$, y esta fórmula será cierta si, y sólo si, lo es $\exists x\neg P(x)$.

Por ejemplo, asignemos el predicado P de la siguiente forma:

$$P(x) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = x \\ 0 & si\ x^2 \neq x \end{cases}$$

x	$P(x)$	$\forall xP(x)$	$\neg\forall xP(x)$
0	1		
1	1	0	1
2	0		

x	$P(x)$	$\neg P(x)$	$\exists x\neg P(x)$
0	1	0	
1	1	0	1
2	0	1	

La aparición de un 0 en la columna $P(x)$ de la primera tabla, hace que el valor de verdad de la fórmula $\forall xP(x)$ sea 0, y por tanto el valor de verdad de $\neg\forall xP(x)$ es 1.

La aparición de este 0 se traduce en un 1 en la columna $\neg P(x)$ de la segunda tabla, lo que da lugar a que el valor de verdad de $\exists x\neg P(x)$ sea 1.

De la misma forma, si toda la columna $P(x)$ fuera 1, entonces $I(\forall xP(x)) = 1$, luego $I(\neg\forall xP(x)) = 0$. En este caso, toda la columna $\neg P(x)$ es cero, luego $I(\exists x\neg P(x)) = 0$.

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$	$\neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$
1	1	0	0	1

$P(a)$	$P(b)$	$P(c)$	$\neg P(a)$	$\neg P(b)$	$\neg P(c)$	$\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$
1	1	0	0	0	1	1

Tenemos por tanto la equivalencia

$$\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha.$$

Si llamamos β a $\neg\alpha$, y puesto que $\neg\neg\beta \equiv \beta$ deducimos que

$$\neg\exists x\alpha \equiv \neg\exists x\neg\neg\alpha \equiv \neg(\exists x\neg\beta) \equiv \neg(\neg\forall x\beta) \equiv \neg\neg\forall x\neg\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$$

En resumen, tenemos las siguientes equivalencias:

1. $\neg\forall x\alpha \equiv \exists x\neg\alpha$.

2. $\neg\exists x\alpha \equiv \forall x\neg\alpha$.

3.5.2. Inclusión de $\vee$ o $\wedge$ en el radio de acción de un cuantificador (I)

Sean α y β dos fórmulas, y consideramos la fórmula $\forall x\alpha \wedge \beta$. En este caso, la fórmula β queda fuera del radio de acción del cuantificador $\forall x$. Nos preguntamos si es posible introducir la fórmula β dentro del radio de acción de $\forall x$.

Vamos a centrarnos en el caso de que no haya ninguna ocurrencia libre de la variable x en la fórmula β. En tal caso, el valor de verdad de β no depende del valor de x.

Tenemos entonces cuatro posibilidades dependiendo de los valores de verdad de $\forall x\alpha$ y β. Estas cuatro posibilidades las analizamos en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>x</th><th>α</th><th>$\forall x\alpha$</th><th>β</th><th>$\forall x\alpha \wedge \beta$</th><th>$\alpha \wedge \beta$</th><th>$\forall x(\alpha \wedge \beta)$</th></tr>
<tr><td>a_1</td><td>$I^{v_{x|a_1}}(\alpha)$</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td><td>0</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>$I^{v_{x|a_2}}(\alpha)$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>$I^{v_{x|a_1}}(\alpha)$</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">0</td><td>$I^{v_{x|a_1}}(\alpha \wedge \beta)$</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>$I^{v_{x|a_2}}(\alpha)$</td><td>$I^{v_{x|a_1}}(\alpha \wedge \beta)$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td><td>0</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td><td>1</td><td rowspan="5">1</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
</table>

El primer caso es cuando $I(\forall x\alpha) = 0$ e $I(\beta) = 0$. Si $I(\forall x\alpha) = 0$ es porque hay un elemento $a_i \in D$ para el que $I^{v_{x|a_i}}(\alpha) = 0$. Para el resto de valores del dominio, es indiferente cual sea el valor de verdad de α (esto lo reflejamos en el primer tramo de la segunda columna). Pero para estos valores del dominio, como $I(\beta) = 0$ se tiene que el valor de verdad de $\alpha \wedge \beta = 0$. Esto es lo que indicamos en el primer tramo de la columna sexta de la tabla.

El segundo caso es cuando $I(\forall x\alpha) = 0$ e $I(\beta) = 1$. En tal caso, no conocemos el valor de verdad de $I^{v_{x|a_j}}(\alpha \wedge \beta)$ salvo para el valor del dominio para el que sabemos que $I^{v_{x|a_i}}(\alpha) = 0$.

Los dos últimos casos es cuando $I^v(\forall x\alpha) = 1$. En tal caso, para todos los valores del dominio se tiene que $I^{v_{x|a_i}}(\alpha) = 1$.

Vemos que en los cuatro casos, $\forall x\alpha \wedge \beta$ y $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ tienen el mismo valor de verdad.

De forma análoga se puede ver que $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$ si la variable x no tiene ninguna ocurrencia libre en la fórmula β.

También podemos aproximarnos a estas equivalencias, al igual que antes, imaginando que el dominio es un conjunto finito. En tal caso, tendríamos:

$$\begin{array}{rcl}
\forall x\alpha \wedge \beta & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_m}) \wedge \beta \\
 & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_m}) \wedge (\beta \wedge \beta \wedge \cdots \wedge \beta) \\
 & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \beta) \wedge (\alpha_{x|a_2} \wedge \beta) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{x|a_m} \wedge \beta) \\
 & = & (\alpha \wedge \beta)_{x|a_1} \wedge (\alpha \wedge \beta)_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge (\alpha \wedge \beta)_{x|a_m} \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta) \\
\forall x\alpha \vee \beta & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_m}) \vee \beta \\
 & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \vee \beta) \wedge (\alpha_{x|a_2} \vee \beta) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{x|a_m} \vee \beta) \\
 & = & (\alpha \vee \beta)_{x|a_1} \wedge (\alpha \vee \beta)_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge (\alpha \vee \beta)_{x|a_m} \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)
\end{array}$$

Donde se ha usado que $\alpha_{x|t} \wedge \beta = (\alpha \wedge \beta)_{x|t}$ y $\alpha_{x|t} \vee \beta = (\alpha \vee \beta)_{x|t}$, pues al realizar las sustituciones de la variable x por el término t, en la fórmula β no se hace ninguna sustitución, ya que la variable x no aparece libre ninguna vez.

Esto que hacemos no es una demostración de la equivalencia entre estas fórmulas. Es una forma de imaginarnos estas reglas como generalizaciones de algunas leyes lógicas. Por ejemplo, $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$ puede ser vista como una extensión de la ley distributiva. Y la equivalencia $\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$ como una extensión de la idempotencia (junto con la asociatividad y conmutatividad).

Si en lugar del cuantificador universal tuviéramos el cuantificador existencial, se tiene lo mismo. En el siguiente cuadro resumimos estas equivalencias para dos fórmulas α y β de un lenguaje de primer orden.

En β no hay ocurrencias libres de la variable x.	En α no hay ocurrencias libres de la variable x.
$\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$	$\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$
$\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$	$\alpha \vee \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$
$\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$	$\alpha \wedge \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$
$\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$	$\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$

El caso de que la variable x tenga alguna ocurrencia libre en la fórmula que queremos introducir en el radio de acción del cuantificador se tratará más adelante. No obstante, vamos a ver algún ejemplo que nos muestre que la equivalencia no es cierta.

Ejemplo 3.5.3. *Sean las fórmulas*

$\varphi = \forall x(C(x,a) \to U(x)) \wedge P(x)$

$\phi = \forall x((C(x,a) \to U(x)) \wedge P(x))$.

Consideramos la estructura siguiente:

$$D = \mathbb{Z}_5; \qquad a \mapsto 1; \qquad C(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = y \\ 0 & si\ x^2 \neq y \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} 1 & si\ x\ es\ unidad \\ 0 & si\ x\ no\ es\ unidad \end{cases} \qquad P(x) = \begin{cases} 1 & si\ x^2 = x \\ 0 & si\ x^2 \neq x \end{cases}$$

Para la valoración $v(x) = 0$ los valores de verdad de ambas fórmulas son:

<table>
<tr><th>x</th><th>$C(x,a)$</th><th>$U(x)$</th><th>$C(x,a) \to U(x)$</th><th>$\forall x(C(x,a) \to U(x))$</th><th>$P(x)$ $_{x=0}$</th><th>φ</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>x</th><th>$C(x,a)$</th><th>$U(x)$</th><th>$C(x,a) \to U(x)$</th><th>$P(x)$</th><th>$(C(x,a) \to U(x)) \wedge P(x)$</th><th>$\phi$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

Vemos entonces que no son equivalentes.

Ejercicio:

1. Da ejemplos que muestren que en general no son ciertas las equivalencias

   - $\forall x\alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$.
   - $\exists x\alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$.
   - $\exists x\alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

2. Comprueba que si la variable x no tiene ninguna ocurrencia libre en β entonces $\beta \to \forall x\alpha$ es lógicamente equivalente a $\forall x(\beta \to \alpha)$, pero que en general $\forall x\alpha \to \beta$ no es equivalente a $\forall x(\alpha \to \beta)$.

3. Busca una fórmula equivalente a $\forall x\alpha \to \beta$ de forma que el radio de acción del cuantificador incluya a β.

4. Repite el ejercicio anterior con las fórmulas $\exists x\alpha \to \beta$ y $\beta \to \exists x\alpha$.

3.5.3. Eliminación de cuantificadores.

Los cuantificadores se usan para cuantificar variables. Entonces, cuando tengamos un cuantificador y la fórmula sobre la que actúa (su radio de acción) no dependa de la variable que cuantifica, el cuantificador puede suprimirse (un cuantificador que no cuantifica es como si no estuviera). Dicho de otra forma, si α es una fórmula que no tiene ocurrencias libres de la variable x entonces $\forall x\alpha$ y α son lógicamente equivalentes.

En particular, si α es de la forma $\forall x\beta$ o $\exists x\beta$, entonces podemos suprimir el cuantificador $\forall$ (es decir, $\forall x\forall x\beta \equiv \forall x\beta$ y $\forall x\exists x\beta \equiv \exists x\beta$).

De la misma forma, $\exists x\alpha$ y α son lógicamente equivalentes si en α no hay ocurrencias libres de x. En particular, $\exists x\forall x\beta \equiv \forall x\beta$ y $\exists x\exists x\beta \equiv \exists x\beta$.

Como regla general podemos sacar que si una variable x aparece en el radio de acción de dos cuantificadores C_1x y C_2x ($C_1, C_2 \in \{\forall, \exists\}$), el que está más alejado (más a la izquierda) de ella no actúa sobre ella.

Ejemplo 3.5.4.
Sea la fórmula $\forall x(P(x) \to \exists xQ(x,a))$, entonces la variable x de $Q(x,a)$ está en el radio de acción de $\forall x$ y de $\exists x$. En tal caso, el cuantificador más a la izquierda, es decir, $\forall x$, no tienen ninguna influencia en esta aparición de la x.

3.5.4. Cambio de variable

Supongamos que decimos *existe un número natural x tal que x es par y x es primo*. Esta afirmación podemos traducirla a un lenguaje de primer orden como $\exists x(P(x) \wedge Pr(x))$ (no vemos necesario dar explícitamente la estructura).

Es claro que esta frase significa lo mismo que *existe un número natural y tal que y es par e y es primo*, cuya traducción al mismo lenguaje de primer orden (y considerando la misma estructura) sería $\exists y(P(y) \wedge Pr(y))$.

Parece claro que las fórmulas $\exists x(P(x) \wedge Pr(x))$ y $\exists y(P(y) \wedge Pr(y))$ son lógicamente equivalentes ya que el valor de verdad de la primera no depende del valor de la variable x sino sólo del significado de los símbolos de predicado P y Pr, y el valor de verdad de la segunda no depende del valor de la variable y.

Sabemos que al interpretar una fórmula con una variable ligada, la variable en cuestión no es significativa.

Lo que queremos es ver si una variable ligada podría ser cambiada por otra.

El siguiente ejemplo sencillo nos muestra que no siempre puede hacerse así:

Ejemplo 3.5.5.

Sea la fórmula $\exists z\forall x P(x,y,z)$*, consideramos la estructura siguiente:*

$$D=\mathbb{Z}_3; \qquad P(x,y,z)=\begin{cases} 1 & si\ xy=z \\ 0 & si\ xy\neq z \end{cases}$$

Con la valoración $v(x)=1$*,* $v(y)=0$*,* $v(z)=1$ *se tiene:*

z	x	$P(x,y,z)_{y=0}$	$\forall x P(x,y,z)$	$\exists z\forall x P(x,y,z)$
	0	1		
0	1	1	1	
	2	1		
	0	0		
1	1	0	0	1
	2	0		
	0	0		
2	1	0	0	
	2	0		

Si cambiamos x *por* y*, tenemos la fórmula* $\exists z\forall y P(y,y,z)$*, en cuyo caso tenemos*

z	y	$P(y,y,z)$	$\forall y P(y,y,z)$	$\exists z\forall y P(y,y,z)$
	0	1		
0	1	0	0	
	2	0		
	0	0		
1	1	1	0	0
	2	0		
	0	0		
2	1	0	0	
	2	0		

El problema aquí es que la variable y por la que cambiamos la x ya aparece en la fórmula.

Supongamos que α es una fórmula en la que no hay ninguna ocurrencia de la variable y (ni libre ni ligada).

Entonces $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x|y}$, y $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha_{x|y}$.

Ejemplo 3.5.6.

1. *Sea* $\alpha=\forall x(P(x)\to\exists x Q(x,a))$.

   Puesto que la variable y *no aparece en el radio de acción de* $\forall x$*, entonces podemos cambiar este cuantificador por* $\forall y$*. Nos queda que* α *es lógicamente equivalente a* $\forall y(P(y)\to\exists x Q(x,a))$.

   Notemos como hemos sustituido por y *la aparición libre de* x *en* $P(x)\to\exists x Q(x,a)$*. Esto se corresponde con lo que dijimos en el ejemplo 3.5.4. La* x *de* $Q(x,a)$ *está cuantificada por* $\exists x$*, pero no por* $\forall x$*, así que un cambio de variable en este cuantificador no la altera.*

2. *En el caso de que la variable por la que sustituimos aparezca en la fórmula, pero no tenga ninguna ocurrencia libre, en ocasiones obtendremos una fórmula lógicamente equivalente a la primera y en otras no.*

   - *Por ejemplo, si tenemos la fórmula* $\forall y(P(y)\to\exists x Q(x,a))$*, podemos cambiar la variable* y *por* x *aún cuando la variable* x *en* $P(y)\to\exists x Q(x,a)$.
   - *Si tenemos la fórmula* $\forall y(P(y)\to\exists x Q(x,y))$*, entonces si realizamos el cambio de* y *por* x*, la fórmula que obtenemos,* $\forall x(P(x)\to\exists x Q(x,x))$ *no es lógicamente a la primera. El motivo es que la variable* y *de* $Q(x,y)$ *estaba cuantificada por* $\forall y$*, al cambiarla por* x *pasa a estar cuantificada por el* $\exists x$ *que se encuentra en el interior de la fórmula.*

Para evitar errores, se recomienda evitar los cambios cuando la variable por la que se sustituye tenga alguna aparición en la fórmula.

3.5.5. Agrupar cuantificadores.

Ahora nos encontramos con fórmulas de la forma $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ y $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$. Nos preguntamos si son equivalentes a las fórmulas $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ y $\forall x(\alpha \vee \beta)$ respectivamente.

Enseguida podemos darnos cuenta que en el segundo caso no es posible. Consideramos los enunciados:

Todo número entero es par o impar.

Todo número entero es par o todo número entero es impar.

El primer enunciado es claramente cierto, mientras que el segundo no (pues no todo número entero es par ni todo número entero es impar).

El primer enunciado podríamos traducirlo a un lenguaje de primer orden como $\forall x(P(x) \vee Im(x))$, mientras que el segundo como $\forall xP(x) \vee \forall xIm(x)$ (se ha considerado la estructura cuyo dominio es $\mathbb{Z}$ y el significado de los símbolos de predicado P e Im es respectivamente *ser par* y *ser impar*).

Para comprobar que en el primer caso sí se da la equivalencia, vamos a construir una tabla como en secciones anteriores. Distinguiremos los cuatro casos que pueden darse en relación al valor de verdad de $\forall x\alpha$ y $\forall x\beta$.

<table>
<tr><th>x</th><th>α</th><th>β</th><th>$\alpha \wedge \beta$</th><th>$\forall x\alpha$</th><th>$\forall x\beta$</th><th>$\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$</th><th>$\forall x(\alpha \wedge \beta)$</th></tr>
<tr><td>a_1</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\alpha)$</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\beta)$</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\alpha \wedge \beta)$</td><td rowspan="7">0</td><td rowspan="7">0</td><td rowspan="7">0</td><td rowspan="7">0</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\alpha)$</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\beta)$</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\alpha \wedge \beta)$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>0</td><td>$I^{v_{x\vert a_i}}(\beta)$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_j</td><td>$I^{v_{x\vert a_j}}(\alpha)$</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\alpha)$</td><td>1</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\alpha)$</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\alpha)$</td><td>1</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\alpha)$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>1</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\beta)$</td><td>$I^{v_{x\vert a_1}}(\beta)$</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>1</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\beta)$</td><td>$I^{v_{x\vert a_2}}(\beta)$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_j</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="5">1</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>a_i</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
</table>

Los cuatro casos son los que se reflejan en las columnas quinta y sexta. Las columnas precedentes nos muestran una situación más o menos general para que se dé lo que se explicita en estas dos columnas. Puesto que las dos últimas columnas coinciden, vemos que las fórmulas $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ y $\forall x(\alpha \wedge \beta)$ son equivalentes.

Igual que en secciones precedentes podemos aproximarnos a esta equivalencia suponiendo que estamos en un dominio finito. En tal caso, tendríamos:

$$\begin{array}{rcl}\forall x\alpha \wedge \forall x\beta & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{x|a_m}) \wedge (\beta_{x|a_1} \wedge \beta_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge \beta_{x|a_m}) \\ & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \beta_{x|a_1}) \wedge (\alpha_{x|a_2} \wedge \beta_{x|a_2}) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{x|a_m} \wedge \beta_{x|a_m}) \\ & \equiv & (\alpha \wedge \beta)_{x|a_1} \wedge (\alpha \wedge \beta)_{x|a_2} \wedge \cdots \wedge (\alpha \wedge \beta)_{x|a_m} \\ & \equiv & \forall x(\alpha \wedge \beta)\end{array}$$

Y vemos que lo único que aplicamos es la asociatividad y conmutatividad de la conectiva $\wedge$.

Basándonos en esta equivalencia ($\forall x(\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$), en las vistas en la sección 3.5.1 y en las leyes de De Morgan obtenemos:

$$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \neg\neg(\exists x\alpha \vee \exists x\beta) \equiv \neg(\neg\exists x\alpha \wedge \neg\exists x\beta) \equiv \neg(\forall x\neg\alpha \wedge \forall x\neg\beta) \equiv$$
$$\equiv \neg(\forall x(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) \equiv \neg\forall x\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x\neg\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$$

Ejercicio 3.5.1.

1. *Busca un ejemplo que muestre que $\exists x\alpha \wedge \exists x\beta$ y $\exists x(\alpha \wedge \beta)$ no son equivalentes.*
2. *Estudia si alguna de las siguientes fórmulas puede transformarse en alguna equivalente con un único cuantificador.*
   a) $\forall x\alpha \to \forall x\beta$.
   b) $\forall x\alpha \to \exists x\beta$.
   c) $\exists x\alpha \to \forall x\beta$.
   d) $\exists x\alpha \to \exists x\beta$.

Aunque ya hemos demostrado con un ejemplo que las fórmulas $\forall x\alpha \vee \forall x\beta$ y $\forall x(\alpha \vee \beta)$ no son lógicamente equivalentes, vamos a tratar de ver el porqué de esa no-equivalencia.

Para simplificar supondremos que estamos en un lenguaje con dos símbolos de constante a y b, y que tenemos una estructura en la que el dominio tiene dos elementos, y en la asignación de constantes uno de ellos se le ha asignado al símbolo a y el otro al símbolo b. En tal caso, $\forall x\alpha$ significa lo mismo que $\alpha_{x|a} \wedge \alpha_{x|b}$. Entonces:

$$\begin{array}{rcl}\forall x(\alpha \vee \beta) & \equiv & (\alpha \vee \beta)_{x|a_1} \wedge (\alpha \vee \beta)_{x|a_2} \\ & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \vee \beta_{x|a_1}) \wedge (\alpha_{x|a_2} \vee \beta_{x|a_2}) \\ & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2}) \vee (\alpha_{x|a_1} \wedge \beta_{x|a_2}) \vee (\beta_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2}) \vee (\beta_{x|a_1} \wedge \beta_{x|a_2}) \\ & & \\ \forall x\alpha \vee \forall x\beta & \equiv & (\alpha_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2}) \vee (\beta_{x|a_1} \wedge \beta_{x|a_2})\end{array}$$

Luego $\forall x(\alpha \vee \beta) \equiv (\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \vee ((\alpha_{x|a_1} \wedge \beta_{x|a_2}) \vee (\beta_{x|a_1} \wedge \alpha_{x|a_2}))$.

Más adelante comprobaremos que $\forall x\alpha \vee \forall x\beta \to \forall x(\alpha \vee \beta)$ es universalmente válida. Pero con lo que hemos visto aquí puedes justificar esta última afirmación.

3.5.6. Inclusión de $\vee$ o $\wedge$ en el radio de acción de un cuantificador (II)

En la sección 3.5.2 estudiamos cómo incluir los conectores $\vee$ o $\wedge$ dentro del radio de acción de un cuantificador. Necesitábamos entonces que en una fórmula, una determinada variable no tuviera ocurrencias libres.

Supongamos ahora que tenemos una fórmula de la forma $\forall x\alpha \wedge \beta$, y que ahora la variable x aparece libremente en β. Elegimos entonces una variable que no tenga ninguna ocurrencia (ni libre ni ligada) en α ni ninguna ocurrencia libre en β. Sea ésta variable y. Sabemos (lo vimos en la sección 3.5.4) que $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x|y}$.

Entonces, tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\forall x\alpha \wedge \beta \equiv \forall y\alpha_{x|y} \wedge \beta \equiv \forall y(\alpha_{x|y} \wedge \beta).$$

De esta forma, ya hemos incluido la conectiva $\wedge$ y la fórmula β dentro del radio de acción del cuantificador.

Esto que hemos hecho vale igual si en lugar de la conectiva $\wedge$ tenemos la conectiva $\vee$, o si en lugar del cuantificador $\forall$ tenemos el cuantificador $\exists$.

Ejemplo 3.5.7.

Sea $\varphi = \forall x P(x) \vee \exists y Q(x,y)$

Puesto que la variable z *no aparece en* $P(x)$ *ni en* $\exists y Q(x,y)$*, se tiene que*

$$\varphi \equiv \forall z P(z) \vee \exists y Q(x,y) \equiv \forall z (P(z) \vee \exists y Q(x,y)).$$

Nos fijamos ahora en $P(z) \vee \exists y Q(x,y)$*. Puesto que la variable* y *no aparece en* $P(z)$*, ésta fórmula es equivalente a* $\exists y (P(z) \vee Q(x,y))$*.*

Con esto, concluimos que

$$\varphi \equiv \forall z \exists y (P(z) \vee Q(x,y)).$$

Nótese que en un principio podríamos haber sustituido la variable x *por la variable* y *(ya que* y *no aparece en* $P(x)$*, y su única ocurrencia en* $\exists y Q(x,y)$ *es ligada). En tal caso, tendríamos*

$$\varphi \equiv \forall y P(y) \vee \exists y Q(x,y) \equiv \forall y (P(y) \vee \exists y Q(x,y))$$

Ahora, al centrarnos en $P(y) \vee \exists y Q(x,y)$ *necesitamos hacer un cambio de variable, pues la variable* y *tiene una ocurrencia libre en* $P(y)$*. Nos queda entonces:*

$$\varphi \equiv \forall y (P(y) \vee \exists y Q(x,y)) \equiv \forall y (P(y) \vee \exists z Q(x,z)) \equiv \forall y \exists z (P(y) \vee Q(x,z))$$

También podríamos haber procedido como sigue:

$$\varphi \equiv \exists y (\forall x P(x) \vee Q(x,y)) \equiv \exists y (\forall z P(z) \vee Q(x,y)) \equiv \exists y \forall z (P(z) \vee Q(x,y))$$

3.5.7. Intercambio de cuantificadores.

Acabamos de ver que las fórmulas $\forall z \exists y (P(z) \vee Q(x,y))$ y $\exists y \forall z (P(z) \vee Q(x,y))$ son lógicamente equivalentes (pues ambas son equivalentes a $\forall x P(x) \vee \exists y Q(x,y)$.

Esto podría hacernos pensar que para una fórmula β, se tiene que $\forall x \exists y \beta \equiv \exists y \forall x \beta$.

Vamos a ver en el siguiente ejemplo que esto no es cierto.

Ejemplo 3.5.8.

Sean $\alpha_1 = \forall x \exists y Q(x,y)$ *y* $\alpha_2 = \exists y \forall x Q(x,y)$*. Y consideramos la siguiente estructura:*

Dominio $D = \mathbb{Z}_3$.

Predicado $Q(x,y) \equiv x = y$.

Vamos a calcular el valor de verdad de ambas fórmulas. Para ello, vamos a hacer dos tablas:

$v(x)$	$v(y)$	$Q(x,y)$	$\exists y Q(x,y)$	$\forall x \exists y Q(x,y)$
	0	1		
0	1	0	1	
	2	0		
	0	0		
1	1	1	1	1
	2	0		
	0	0		
2	1	0	1	
	2	1		

$v(y)$	$v(x)$	$Q(x,y)$	$\forall x Q(x,y)$	$\exists y \forall x Q(x,y)$
	0	1		
0	1	0	0	
	2	0		
	0	0		
1	1	1	0	0
	2	0		
	0	0		
2	1	0	0	
	2	1		

Es decir, $I(\alpha_1) = 1$ e $I(\alpha_2) = 0$ (para cada elemento x de $\mathbb{Z}_3$ hay un elemento de $\mathbb{Z}_3$ que es igual a x, pero no hay ningún elemento de $\mathbb{Z}_3$ que sea igual a todos).

Vemos entonces que las dos fórmulas no son lógicamente equivalentes.

Ahora bien, cuando los dos cuantificadores son iguales sí podemos intercambiarlos. Es decir, si α es una fórmula, entonces las fórmulas $\forall x \forall y \alpha$ y $\forall y \forall x \alpha$ son lógicamente equivalentes. Y lo mismo podemos decir de $\exists x \exists y \alpha$ y $\exists y \exists x \alpha$.

En general, si tenemos las fórmulas $\alpha_1 = \forall x \exists y \alpha$ y $\alpha_2 = \exists y \forall x \alpha$, y las ocurrencias libres de las variables x e y en α están en fórmulas atómicas distintas, entonces α_1 y α_2 son lógicamente equivalentes. Cuando en una misma fórmula atómica tengamos una ocurrencia libre de las variables x e y, entonces no serán equivalentes.

En la fórmula $\forall z \exists y (P(z) \vee Q(x, y))$, la variable z aparece en la fórmula atómica $P(z)$, mientras que la variable y lo hace en $Q(x, y)$. Entonces podemos intercambiar los cuantificadores.

Sin embargo, en $\forall x \exists y Q(x, y)$, las dos variables aparecen en la fórmula atómica $Q(x, y)$. Entonces no se pueden intercambiar los cuantificadores.

3.5.8. Resumen

Hacemos a continuación un resumen con las distintas equivalencias que hemos visto:

1. $\alpha \vee \beta \equiv \beta \vee \alpha$.
2. $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$.
3. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$.
4. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.
5. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.
6. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$.
7. $\alpha \vee \alpha \equiv \alpha$.
8. $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$.
9. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$.
10. $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$.
11. $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.
12. $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$.
13. $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$.
14. $\neg\forall x \alpha \equiv \exists x \neg\alpha$.
15. $\neg\exists x \alpha \equiv \forall x \neg\alpha$.
16. $\forall x \alpha \wedge \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$ si x no aparece libre en β.
17. $\forall x \alpha \vee \beta \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$ si x no aparece libre en β.
18. $\exists x \alpha \wedge \beta \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$ si x no aparece libre en β.
19. $\exists x \alpha \vee \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$ si x no aparece libre en β.
20. $\forall x \alpha \equiv \alpha$ si x no aparece libre en α.

- $\forall x \forall x \alpha \equiv \forall x \alpha$.
- $\forall x \exists x \alpha \equiv \exists x \alpha$.

21. $\exists x \alpha \equiv \alpha$ si x no aparece libre en α.

- $\exists x \forall x \alpha \equiv \forall x \alpha$.
- $\exists x \exists x \alpha \equiv \exists x \alpha$.

22. $\forall x \alpha \equiv \forall y \alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α.

23. $\exists x \alpha \equiv \exists y \alpha_{x|y}$ si y no aparece en la fórmula α.

24. $\forall x \alpha \wedge \forall x \beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$.

25. $\exists x \alpha \vee \exists x \beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.

26. $\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$.

27. $\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$.

3.6. Formas normales

Como ya dijimos en su momento, nuestro objetivo es tener un método para poder decidir si un conjunto de fórmulas es o no insatisfacible. Esto pasa por que las fórmulas del conjunto no sean fórmulas cualesquiera, sino que tengan una forma especial. Esta forma la llamaremos *forma clausular* por su analogía con lo estudiado en el capítulo referente a la lógica proposicional. No obstante, para llegar a ella necesitamos previamente la forma normal prenexa y la forma de Skolem.

3.6.1. Forma normal prenexa.

Comenzamos definiendo lo que significa que una fórmula esté en forma normal prenexa.

Definición 40. *Sea α una fórmula. Se dice que α está en forma normal prenexa si α es de la forma:*

$$C_1 x_1 C_2 x_2 \dots C_n x_n \beta$$

donde C_i es un cuantificador (universal o existencial) y β es una fórmula sin cuantificadores.

Es decir, una fórmula está en forma normal prenexa si todos los cuantificadores están al principio de la fórmula, y su radio de acción llega hasta el final de la fórmula.

Una fórmula que no tenga cuantificadores está en forma normal prenexa.

Ejemplo 3.6.1.

Las siguientes fórmulas están en forma normal prenexa:

1. $\forall x(H(x) \wedge Q(x,a))$.
2. $\exists x \forall y(P(x,y) \vee Q(b))$.
3. $\forall x \exists y(P(x,y) \rightarrow Q(b))$.
4. $H(a)$.
5. $\exists x H(x)$.
6. $\forall x \exists y \exists z R(x,y,z)$.
7. $\forall x R(x,y,z)$.

Las siguientes fórmulas no están en forma normal prenexa:

1. $\forall x P(x) \to \exists y Q(x,y)$.
2. $\forall x(P(x) \to \exists y Q(x,y))$.
3. $\exists x R(x,a) \to Q(b,x)$.

A continuación vamos a tomar varias fórmulas, y vamos a obtener fórmulas equivalentes a ellas que están en forma prenexa. Para esto, nos apoyaremos en las equivalencias estudiadas en secciones anteriores y que hemos recogido en la sección 3.5.8 (especialmente las que van desde la número 14 en adelante).

Cuando tengamos una fórmula en forma normal prenexa que sea equivalente a una fórmula α diremos que es una forma normal prenexa para α.

Ejemplo 3.6.2.

Sea $\alpha = \forall x S(x) \to \exists z \forall y R(z,y)$. *Vamos a calcular una forma normal prenexa para* α.

Sustituimos la implicación (equivalencia 10).

a) $\neg\forall x S(x) \vee \exists z \forall y R(z,y)$

Intercambiamos cuantificador y negación (equivalencia 14)

b) $\exists x \neg S(x) \vee \exists z \forall y R(z,y)$

Llegados aquí tenemos tres opciones para continuar. Analicemos las tres:

Opción 1

Puesto que la variable x *no es libre en la fórmula* $\exists z \forall y R(z,y)$, *podemos incluirla dentro del radio de acción de* $\exists x$ *(equivalencia 19).*

c-1) $\exists x(\neg S(x) \vee \exists z \forall y R(z,y))$.

Como no hay ninguna ocurrencia libre de z *en* $\neg S(x)$, *introducimos* $\neg S(x)$ *en el radio de acción de* $\exists z$ *(equivalencia 19 junto con equivalencia 1).*

d-1) $\exists x \exists z(\neg S(x) \vee \forall y R(z,y))$.

Y como la variable y *no aparece en* $\neg S(x)$, *podemos introducirla, en virtud de la equivalencia decimoséptima, en el radio de acción de* $\forall y$.

e-1) $\exists x \exists z \forall y(\neg S(x) \vee R(z,y))$.

Y llegamos así a una fórmula, equivalente a la de partida, que se encuentra en forma prenexa.

Opción 2

Introducimos $\exists x \neg S(x)$ *en el radio de acción de* $\exists z$, *lo que podemos hacer pues la variable* z *no aparece de forma libre en* $\exists x \neg S(x)$ *(equivalencia 19)*

c-2) $\exists z(\exists x \neg S(x) \vee \forall y R(z,y))$.

Repetimos lo mismo con $\forall y$ *(equivalencia 17).*

d-2) $\exists z \forall y(\exists x \neg S(x) \vee R(z,y))$.

Y por último introducimos $R(z,y)$ *en el radio de acción de* $\exists x$ *(equivalencia 19).*

e-2) $\exists z \forall y \exists x(\neg S(x) \vee R(z,y))$.

Y esta fórmula está también en forma normal prenexa.

Opción 3

Puesto que tenemos la disyunción de dos fórmulas, ambas iniciadas con el cuantificador $\exists$, *podemos agruparlos en un único cuantificador. Para esto, previamente cambiamos la variable* z *por la variable* x *(equivalencia vigesimotercera), lo cual podemos hacerlo ya que la variable* x *no aparece en la fórmula* $R(z,y)$.

c-3) $\exists x \neg S(x) \vee \exists x \forall y R(x,y)$.

Ahora agrupamos los dos cuantificadores existenciales $\exists x$ (equivalencia 25)

d-3) $\exists x(\neg S(x) \vee \forall y R(x,y))$

Por último, como y no es libre en la fórmula $\neg S(x)$, podemos desplazar el cuantificador correspondiente (equivalencia 17).

e-3) $\exists x \forall y(\neg S(x) \vee R(x,y))$.

Las tres fórmulas son equivalentes, y están en forma prenexa. Sin embargo, la última es más sencilla al aparecer en ella menos cuantificadores y menos variables. Y de las dos primeras, aunque aparentemente tienen la misma forma, es mejor la primera, pues los cuantificadores existenciales se encuentran más a la izquierda que en la segunda. En el siguiente apartado, veremos el porqué de esta última afirmación.

Ejemplo 3.6.3.

Sea ahora $\beta = \forall x(R(x,y) \wedge \neg\forall y R(x,y))$.

Nótese que esta fórmula no es una sentencia pues la primera aparición de la variable y es libre. Veremos, no obstante, como obtener una forma normal prenexa.

Al obtener una forma prenexa, las variables que tenga una ocurrencia libre, seguirán siendo libres en la forma prenexa.

Intercambiamos la negación y el cuantificador (equivalencia 14)

a) $\forall x(R(x,y) \wedge \exists y \neg R(x,y))$

Ahora hay que introducir $R(x,y)$ en el radio de acción de $\exists y$. En principio, eso no es posible, pues la variable y aparece libre en $R(x,y)$. Por tanto, sustituimos la variable y por z en $\exists y \neg R(x,y)$ (equivalencia 23).

b) $\forall x(R(x,y) \wedge \exists z \neg R(x,z))$

Y ahora sí podemos introducir $R(x,y)$ en el radio de acción de $\exists$ (equivalencia 18).

c) $\forall x \exists z(R(x,y) \wedge \neg R(x,z))$

Y obtenemos una forma normal prenexa. La ocurrencia libre de y se ha mantenido, mientras que la ocurrencia ligada se ha sustituido por otra variable (z) que sigue estando cuantificada.

Ejemplo 3.6.4.

$\gamma = \exists x R(x,y) \vee (\forall x S(x) \wedge \neg\exists z R(a,z))$

Intercambiamos negación y cuantificador (equivalencia decimocuarta).

a) $\exists x R(x,y) \vee [\forall x S(x) \wedge \forall z \neg R(a,z)]$

Tenemos ahora la conjunción de dos fórmulas que se inician con $\forall$. Si renombramos las variables de forma que tengamos la misma en ambas, podremos reducir un cuantificador. Por tanto, y puesto que en $R(a,z)$ no aparece la variable x, cambiamos la z por x (equivalencia vigesimosegunda)

b) $\exists x R(x,y) \vee [\forall x S(x) \wedge \forall x \neg R(a,x)]$

Y ahora, por la equivalencia decimosexta obtenemos

c) $\exists x R(x,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x))$

También aquí podemos tomar dos caminos:

Opción 1

Como x no es libre en $\forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x))$, podemos incluirlo en el radio de acción de $\exists x$ (equivalencia 19).

d-1) $\exists x(R(x,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x)))$

Pero ahora no podemos incluir $R(x,y)$ en el radio de acción de $\forall x$, pues la ocurrencia de x en $R(x,y)$ es libre (aunque no lo sea en la fórmula total). Renombramos entonces la variable x de $\exists x$ por z (también podríamos cambiar $\forall x$ por $\forall z$, y el resultado sería el mismo). En tal caso, en el radio de acción de $\exists x$, es decir, en $R(x,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x))$ debemos sustituir todas las ocurrencias libres de x por z. Nos queda entonces (equivalencia 23)

e-1) $\exists z(R(z,y) \vee \forall x(S(x) \wedge \neg R(a,x)))$

Nótese que las apariciones de x en $S(x)$ y $R(a,x)$ son ligadas, por tanto no se realiza ninguna sustitución.

Ahora ya sí podemos incluir $R(z,y)$ dentro del radio de acción de $\forall x$ (equivalencia 17)

f-1) $\exists z \forall x(R(z,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Que está en forma prenexa.

Opción 2

Como x no es libre en $\exists x R(x,y)$, por la equivalencia decimoséptima tenemos

d-2) $\forall x(\exists x R(x,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Y ahora, para introducir $S(x) \wedge \neg R(a,x)$ dentro del radio de acción de $\exists x R(x,y)$ necesitamos renombrar la variable x. Para esto nos valemos de la equivalencia 23.

e-2) $\forall x(\exists z R(z,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Y ahora sí podemos introducir $S(x) \wedge \neg R(a,x)$ en el radio de acción de $\exists z$ (equivalencia decimonovena).

f-2) $\forall x \exists z(R(z,y) \vee (S(x) \wedge \neg R(a,x)))$.

Si comparamos las dos fórmulas que nos han salido, vemos que la única diferencia está en el orden de los cuantificadores. Esto es así porque, tal y como vimos en la sección 3.5.7, las apariciones de las variables x y z se producen en fórmulas atómicas distintas.

De las dos formas prenexas que nos han salido, aunque son equivalentes, es preferible quedarnos con la primera, pues al hacer la forma de Skolem nos va a resultar una fórmula más sencilla.

Ejemplo 3.6.5.

$\delta = \forall x \forall z(\forall z P(x,z) \wedge \forall x P(x,z)) \rightarrow \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Comenzamos sustituyendo la implicación (equivalencia décima).

a) $\neg \forall x \forall z(\forall z P(x,z) \wedge \forall x P(x,z)) \vee \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Intercambiamos cuantificador y negación (equivalencia 14). Hacemos esto dos veces.

b) $\exists x \exists z \neg(\forall z P(x,z) \wedge \forall x P(x,z)) \vee \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Con las leyes de De Morgan (equivalencia decimotercera).

c) $\exists x \exists z(\neg \forall z P(x,z) \vee \neg \forall x P(x,z)) \vee \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Otra vez intercambiamos cuantificador y negación (equivalencia decimocuarta).

d) $\exists x \exists z(\exists z \neg P(x,z) \vee \exists x \neg P(x,z)) \vee \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Vamos a seguir dos caminos a partir de aquí (que realmente podrían ser 4, pues inicialmente vamos a trabajar independientemente las dos partes de la fórmula).

Opción 1

Puesto que la variable z aparece libre en $\exists x \neg P(x,z)$, sustituimos z por otra variable que no puede ser x. Tomamos, por ejemplo, y (equivalencia 22).

En la segunda parte de la fórmula, introducimos $\forall x Q(x)$ en el radio de acción de $\exists y$ (equivalencia 16).

e-1) $\exists x \exists z(\exists y \neg P(x,y) \vee \exists x \neg P(x,z)) \vee \forall x(\exists y(P(x,y) \wedge \forall x Q(x)))$

Introducimos $\exists x \neg P(x,z)$ en el radio de acción de $\exists y$ (equivalencia 19) y renombramos la variable x en $\forall x Q(x)$ (equivalencia 22).

f-1) $\exists x \exists z(\exists y(\neg P(x,y) \vee \exists x \neg P(x,z))) \vee \forall x \exists y(P(x,y) \wedge \forall z Q(z))$

Renombramos la variable x de $\exists x \neg P(x,z)$ (equivalencia 23. No podemos usar la variable z, y evitamos también el uso de la variable y para poder continuar) e introducimos $P(x,y)$ en el radio de acción de $\forall z$ (equivalencia 16).

g-1) $\exists x \exists z \exists y(\neg P(x,y) \vee \exists t \neg P(t,z)) \vee \forall x \exists y \forall z(P(x,y) \wedge Q(z))$

Extendemos $\exists t$ hasta $\neg P(x,y)$ (equivalencia decimonovena).

h-1) $\exists x \exists z \exists y \exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall x \exists y \forall z(P(x,y) \wedge Q(z))$

Renombramos las variables de la segunda parte de la fórmula (equivalencias 22 y 23).

i-1) $\exists x \exists z \exists y \exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall u \exists v \forall w(P(u,v) \wedge Q(w))$

Y ahora, en siete pasos, usando las equivalencias 17 y 19, introducimos todo en el radio de acción de los cuantificadores.

j-1) $\exists x \exists z \exists y \exists t \forall u \exists v \forall w(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee (P(u,v) \wedge Q(w))$

Aunque al estar unidas ambas fórmulas por un conector $\vee$ podríamos haber procedido, desde h-1), como sigue:

i-1) $\exists x \exists z \exists y \exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall u \exists t \forall w(P(u,t) \wedge Q(w))$

j-1) $\exists x \exists z \exists y(\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall u \exists t \forall w(P(u,t) \wedge Q(w)))$

k-1) $\exists x \exists z \exists y \forall u(\exists t(\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \exists t \forall w(P(u,x) \wedge Q(w)))$

l-1) $\exists x \exists z \exists y \forall u \exists t((\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee \forall w(P(u,x) \wedge Q(w)))$

m-1) $\exists x \exists z \exists y \forall u \exists t \forall w((\neg P(x,y) \vee \neg P(t,z)) \vee (P(u,x) \wedge Q(w)))$

Opción 2

Recordemos donde nos habíamos quedado:

d) $\exists x \exists z(\exists z \neg P(x,z) \vee \exists x \neg P(x,z)) \vee \forall x(\exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Vamos a intentar llegar a una forma prenexa pero con menos cuantificadores. Para eso, necesitamos hacer uso de las equivalencias 24 y 25, así como de las 20 y la 21, que son las que nos pueden reducir los cuantificadores. Previamente, necesitamos preparar la fórmula para poder aplicarlas.

En la primera parte de la fórmula hacemos uso de la equivalencia 19, pero en sentido inverso al que lo hemos hecho habitualmente (la variable z no es libre en $\exists z \neg P(x,z)$), mientras que en la segunda parte usamos la vigesimocuarta (también en sentido inverso al usado en otras ocasiones).

e-2) $\exists x(\exists z \neg P(x,z) \vee \exists z \exists x \neg P(x,z)) \vee (\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall x Q(x))$

Ahora, en la primera parte repetimos lo que acabamos de hacer, mientras que en la segunda parte hacemos uso de la vigésima equivalencia.

f-2) $(\exists x \exists z \neg P(x,z) \vee \exists z \exists x \neg P(x,z)) \vee (\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x Q(x))$

Las equivalencias vigesimoséptima y vigesimocuarta nos transforman esta fórmula en:

g-2) $(\exists x \exists z \neg P(x,z) \vee \exists x \exists z \neg P(x,z)) \vee \forall x(\exists y P(x,y) \wedge Q(x))$

Y ahora, por las equivalencias octava y decimooctava, nos queda la fórmula:

h-2) $\exists x \exists z \neg P(x,z) \vee \forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x))$

Renombramos las variables en la segunda parte (equivalencias 22 y 23):

i-2) $\exists x \exists z \neg P(x,z) \vee \forall y \exists z (P(y,z) \wedge Q(y))$

Utilizamos ahora las equivalencias 19 y 17.

j-2) $\exists x \forall y (\exists z \neg P(x,z) \vee \exists z (P(y,z) \wedge Q(y)))$

Y por último, la equivalencia 25.

k-2) $\exists x \forall y \exists z (\neg P(x,z) \vee (P(y,z) \wedge Q(y)))$.

Y tenemos aquí otra fórmula, equivalente a δ, en forma normal prenexa, pero mucho más sencilla que la obtenida anteriormente.

Tras estos ejemplos, no es difícil ver que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.6.1. *Sea α una fórmula de un lenguaje de primer orden. Entonces existe una fórmula equivalente a α y que está en forma normal prenexa.*

Observación:

Como hemos visto en estos ejemplos, puede haber muchas fórmulas equivalentes a una dada y que estén en forma normal prenexa. Cuando hayamos calculado una de ellas nos referiremos a ella como *la forma normal prenexa*, aún cuando sería más correcto decir *una forma normal prenexa*.

3.6.2. Forma normal de Skolem

Comenzamos definiendo lo que significa forma normal de Skolem.

Definición 41. *Sea α una fórmula en un lenguaje de primer orden. Se dice que α está en forma normal de Skolem si está en forma prenexa y en ella no aparecen cuantificadores existenciales.*

Dicho de otra forma, α está en forma normal de Skolem si es de la forma

$$\alpha = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$$

donde φ es una fórmula sin cuantificadores.

Ejemplo 3.6.6.

Las siguientes fórmulas están en forma de Skolem.

1. $\forall x (H(x) \wedge Q(x,a))$.
2. $\forall y (P(a,y) \vee Q(b))$.
3. $\forall x (P(x, f(x)) \rightarrow Q(b))$.
4. $\forall x \forall y (Q(x,y) \rightarrow H(x))$
5. $H(b)$
6. $\forall x R(x, f(x), g(x))$

Las siguientes fórmulas no están en forma normal de Skolem.

1. $\forall x H(x) \wedge Q(x,a)$.
2. $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(x,y))$.
3. $P(a) \rightarrow \forall x Q(x,b)$.

Dada una fórmula, no siempre puede ser transformada en otra equivalente a ella que esté en forma normal de Skolem. Pero para el objetivo que vamos persiguiendo no necesitamos conseguir fórmulas que sean equivalentes a las de partida.

Recordemos que nuestro problema era estudiar si un conjunto de fórmulas es satisfacible o insatisfacible. Entonces, dado un conjunto de fórmulas Γ vamos a transformar cada fórmula en otra fórmula que esté en forma normal de Skolem y de forma que del conjunto resultante sepamos que es insatisfacible si, y sólo sí, lo es Γ.

Para esto, una vez que hemos calculado una forma prenexa de una fórmula, sólo hay que ver cómo eliminar los cuantificadores existenciales. Esto se consigue sustituyendo cada variable cuantificada existencialmente por un término al mismo tiempo que se elimina el cuantificador correspondiente. El término por el que se sustituye será:

Caso 1 Un símbolo de constante si el cuantificador existencial que la acompaña no va precedido por ningún cuantificador universal. El nombre del símbolo debe ser elegido entre los que no aparezcan en la fórmula (o en el conjunto de fórmulas que se maneje).

Caso 2 Un símbolo de función cuya aridad sea igual al número de variables cuantificadas universalmente y que precedan a la variable a sustituir. La función debe aplicarse a todas estas variables, y el símbolo elegido no puede aparecer en la fórmula ni en el conjunto de fórmulas que se maneje.

Nota:

En su momento, después de la definición 20, comentamos que los símbolos de constante podrían ser considerados como símbolos de función 0-arios. En tal caso, no tendría sentido la distinción de casos que hemos hecho aquí, pues ambos casos serían el mismo. Para hallar la forma de Skolem de una fórmula (en forma prenexa), *cada variable cuantificada existencialmente se sustituye por un símbolo de función n-ario, donde n es el número de cuantificadores universales que la preceden.*

Ejemplo 3.6.7.

1. $\exists x \forall y(\neg S(x) \vee R(x, y))$.

   Como el cuantificador existencial no va precedido por ninguno universal estamos en el Caso 1 y la variable correspondiente, x, se sustituye por un símbolo de constante que no aparezca en la fórmula, por ejemplo a; entonces la forma de Skolem queda

$$\forall y(\neg S(a) \vee R(a, y))$$

2. $\forall x \exists z(R(x, y) \wedge \neg R(x, z))$.

   Como el cuantificador existencial va precedido por uno universal estamos en el Caso 2, elegimos un símbolo de función que no aparezca, por ejemplo f y sustituimos la variable z por el término $f(x)$, por ser x la variable que acompaña al cuantificador universal que precede al existencial que vamos a eliminar. La forma de Skolem queda:

$$\forall x(R(x, y) \wedge \neg R(x, f(x)))$$

3. $\forall x \exists y \exists z R(x, y, z)$.

   Primero eliminamos el cuantificador que lleva la variable y, como lo precede uno universal con la variable x, sustituimos y por una función de x, por ejemplo $f(x)$ puesto que el símbolo f no aparece. Queda entonces $\forall x \exists z R(x, f(x), z)$ y ahora procedemos a eliminar el cuantificador que acompaña a z, como el símbolo de función f ya aparece tomamos por ejemplo g, sustituimos entonces z por $g(x)$ y obtenemos

$$\forall x R(x, f(x), g(x))$$

4. $\forall x \exists y \forall z \exists u (R(x, y, u) \vee S(y, f(z)))$ *Para eliminar el cuantificador que acompaña a y elegimos un símbolo de función que no aparezca, por ejemplo* g *y sustituimos* y *por* $g(x)$*, queda*

$$\forall x \forall z \exists u (R(x, g(x), u) \vee S(g(x), f(z)))$$

ahora u *tiene que ser sustituída por otro término con un símbolo de función diferente, digamos* h*, en el que intervienen las dos variables cuantificadas universalmente que preceden a* u*,* x *y* z*, así nos queda:*

$$\forall x \forall z (R(x, g(x), h(x, z)) \vee S(g(x), f(z)))$$

5. $\forall x \forall y \exists u (R(x, y, u) \vee S(y, f(u)))$

En este caso u *se sustituye por un símbolo de función binario que depende de* x *e* y*, digamos* $g(x, y)$ *y por supuesto en todas las apariciones:*

$$\forall x \forall y (R(x, y, g(x, y)) \vee S(y, f(g(x, y))))$$

Observaciones:

1. La forma de Skolem de una fórmula no es única, aunque por abuso del lenguaje utilizamos el artículo determinado para nombrarla.
2. La forma de Skolem puede calcularse para cualquier fórmula, no es necesario que se trate de una sentencia. Si la fórmula no está en forma prenexa debemos transformarla previamente en una fórmula en forma prenexa.
3. Una fórmula y su forma de Skolem no son necesariamente lógicamente equivalentes (de hecho, lo normal es que no lo sean). Sin embargo tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.6.2. *Sea* Γ *un conjunto de fórmulas, y sea* Γ^* *el conjunto que resulta de sustituir cada fórmula de* Γ *por su forma de Skolem. Entonces*

Γ *es insatisfacible si, y sólo sí,* Γ^* *es insatisfacible*

Lo que sigue, hasta que se inicia el aparatado de *Forma Clausular* es una justificación (no una demostración) del teorema que acabamos de dar. Es conveniente leerlo, aunque no necesario.

Para esto, vamos a analizar algunos ejemplos.

Ejemplo 3.6.8. *Comenzamos con una fórmula sencilla. Por ejemplo,* $\exists x \forall y P(x, y)$

Dicha fórmula es satisfacible. Para comprobarlo, vamos a dar una estructura en la que se interprete como cierta.

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Predicados $P(x, y) \equiv x \cdot y = 0$.

Claramente, la fórmula es válida en la estructura dada, pues existe un número entero (el cero) que al multiplicarlo por cualquier entero sale 0.

Consideramos ahora la forma de Skolen de la fórmula dada, que sería $\forall y P(a, y)$

Para comprobar que es satisfacible esta fórmula, basta considerar la estructura que hemos tomado en la fórmula anterior, pero ahora debemos también asignar un valor a la constante a*. Le asignamos el valor* 0 *(que es el valor que le dábamos a* x *en la primera fórmula, y que hacía cierta la fórmula* $\forall y P(x, y)$*). Es decir, consideramos la estructura*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constantes $a = 0$.

Predicados $P(x, y) \equiv x \cdot y = 0$.

Y la fórmula $\forall y P(a,y)$ *es válida en esa estructura. El hecho de encontrar una estructura que hace satisfacible a la fórmula* $\exists x \forall y P(x,y)$ *nos da una estructura en la que es satisfacible su forma de Skolem.*

Es claro que las fórmulas $\exists x \forall y P(x,y)$ *y* $\forall y P(a,y)$ *no son equivalentes. Basta, por ejemplo, considerar la estructura*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constantes $a = 1$.

Predicados $P(x,y) \equiv x \cdot y = 0$.

En este caso, $I(\exists x \forall y P(x,y)) = 1$ *mientras que* $I(\forall y P(a,y)) = 0$.

Hemos tomado $\alpha = \exists x \forall y P(x,y)$, *y a partir de que* α *es satisfacible (pues hemos encontrado una estructura que la hace cierta) hemos visto que su forma de Skolem es también satisfacible (encontrando una estructura, relacionada con la primera, que la hace cierta).*

Vamos a ver que si partimos de una estructura que hace cierta a $\forall y P(a,y)$ *(la forma de Skolem de* α*) podemos obtener una estructura que hace cierta a* α.

Consideramos por ejemplo la estructura dada por

Dominio $D = \mathbb{N}$.

Constantes $a = 0$.

Predicados $P(x,y) \equiv x \leq y$.

Obviamente, para esta estructura se tiene que $I(\forall y P(a,y)) = 1$. *Consideramos ahora la estructura con el mismo universo y la misma asignación del predicado* P *(no necesitamos asignar constantes), es decir,*

Dominio $D = \mathbb{N}$.

Predicados $P(x,y) \equiv x \leq y$.

Entonces se tiene que $I(\alpha) = 1$, *pues existe un valor de la variable* x *(concretamente* $x = 0$*) para el que es cierta* $\forall y P(x,y)$.

Por tanto, de la satisfacibilidad de $\forall y P(a,y)$ *hemos deducido la satisfacibilidad de* $\exists x \forall y P(x,y)$.

Ejemplo 3.6.9.

Vamos a ver ahora un caso en el que el cuantificador existencial no se encuentra en primer lugar. Por ejemplo, consideramos la fórmula $\beta = \forall x \exists y P(x,y)$

La fórmula es satisfacible, pues es válida en la siguiente estructura

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Predicados $P(x,y) \equiv x + y = 3$.

En este caso, la existencia de un valor de la variable y *que haga cierta la fórmula está ligado al valor de* x. *Por tanto, este valor de* y *será función (dependerá) del valor que tome la variable* x. *Habrá que sustituirlo entonces por una función que dependa de* x.

La forma de Skolem de β *es* $\forall x P(x, f(x))$.

En nuestro ejemplo, se tiene que el valor de y *que hace cierto el predicado* $P(x,y)$ *es* $y = 3 - x$. *Por tanto, la siguiente estructura*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Funciones $f(x) = 3 - x$.

Predicados $P(x,y) \equiv x + y = 3$.

es un modelo para la fórmula $\forall x P(x, f(x))$.

Es decir, de un modelo para β *hemos obtenido un modelo para su forma de Skolem.*

Al igual que antes, es fácil ver que de un modelo de $\forall x P(x, f(x))$ *podemos obtener un modelo para* $\forall x \exists y P(x,y)$.

Ejemplo 3.6.10.

Vamos por último a ver un ejemplo en el que intervienen varias fórmulas:

Sea $\Gamma = \{\forall x(Q(x) \to \exists y R(y,x));\ \forall x \exists y R(x,y);\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$

Puesto que la primera fórmula no está en forma prenexa, la pasamos a dicha forma canónica, y nos queda entonces:

$$\Gamma' = \{\forall x \exists y(Q(x) \to R(y,x));\ \forall x \exists y R(x,y);\ \exists x \exists y \neg R(x,y)\}$$

Este conjunto es satisfacible. Basta considerar la estructura $\mathcal{E}$ *siguiente:*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Predicados $Q(x) \equiv x$ *es par;* $R(x,y) \equiv 2x = y$.

La primera fórmula de Γ *nos dice que para cualquier número entero par* x*, existe un número entero* y *tal que* $2y = x$*. Es decir, que todo número par es múltiplo de 2. Eso sabemos que es cierto.*

La segunda dice que para cualquier número entero x *existe un número* y *que es igual a* $2x$*. Claramente es también cierto.*

La tercera, dice que existen x *e* y *que son distintos. También es cierta.*

Ahora calculamos la forma de Skolen de cada una de las fórmulas. Para la primera, como la variable y*, que es la cuantificada existencialmente está precedida por una variable cuantificada universalmente, la sustituimos por una función monaria. Nos queda entonces* $\forall x(Q(x) \to R(f(x),x))$

Para la segunda procedemos de igual forma, pero no podemos utilizar ahora el mismo símbolo de función que en la primera fórmula. Sustituimos entonces y *por* $g(x)$*. Queda entonces* $\forall x R(x,g(x))$

En la tercera fórmula, sustituimos cada una de las variables por constantes (distintas).

Nos queda entonces el conjunto

$$\Gamma^* = \{\forall x(Q(x) \to R(f(x),x));\ \forall x R(x,g(x));\ \neg R(a,b)\}$$

El hecho de que el conjunto Γ *(o* Γ'*) fuera satifacible en la estructura dada, se traduce ahora en que* Γ^* *es satisfacible en la siguiente estructura.*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constantes $a = 2$*;* $b = 5$.

Funciones $f(x) = E\left(\frac{x}{2}\right)$ *(donde* $E(x)$ *denota la parte entera de* x*);* $g(x) = 2x$.

Predicados $Q(x) \equiv x$ *es par;* $R(x,y) \equiv 2x = y$.

Nótese que si hubiésemos empleado el mismo símbolo de función en la primera y en la segunda fórmula, no habríamos podido encontrar una estructura basada en $\mathcal{E}$ *que hiciera ciertas las fórmulas* $\forall x(Q(x) \to R(f(x),x))$*,* $\forall x R(x,f(x))$ *y* $\neg R(a,b)\}$*.*

Esto no significa que el conjunto $\{\forall x(Q(x) \to R(f(x),x));\ \forall x R(x,f(x));\ \neg R(a,b)\}$ *no sea satisfacible, sino que la satisfacibilidad de este conjunto no tiene nada que ver con lo que le ocurra al conjunto* Γ*. De hecho, este último conjunto es satisfacible. La siguiente estructura es una muestra de ello.*

Dominio $D = \mathbb{Z}$.

Constantes $a = 2$*;* $b = 5$.

Funciones $f(x) = x$.

Predicados $Q(x) \equiv x$ *es par;* $R(x,y) \equiv x = y$.

Ejemplo 3.6.11.

El siguiente conjunto $\Gamma = \{\exists x P(x),\ \exists x \neg P(x)\}$ *es claramente satisfacible.*

La forma de Skolem de la primera fórmula es $P(a)$*. A la hora de calcular la forma de Skolem de la segunda fórmula, la variable* x *hay que sustituirla por un símbolo de constante. No podemos usar el símbolo* a*, pues ya se ha usado (aunque haya sido en otra fórmula). Por tanto, su forma de Skolem podría ser* $\neg P(b)$*. El conjunto* $\{P(a),\ \neg P(b)\}$ *es satisfacible.*

Si hubiéramos tomado como forma de Skolem de la segunda fórmula $\neg P(a)$, el conjunto que obtenemos a partir de Γ sería $\{P(a),\ \neg P(a)\}$ que es insatisfacible.

Vemos entonces que al hallar la forma de Skolem de un conjunto de fórmulas, no podemos introducir un símbolo (de constante o de función) que ya se haya usado en otra fórmula.

3.6.3. Forma clausular

Una vez llegados a la forma de Skolem podemos definir lo que se conoce como forma clausular. Al igual que en la lógica proposicional, necesitamos algunos conceptos previos.

- Un *literal* es una fórmula atómica o el negado de una fórmula atómica.

  Si λ es un literal, denotaremos como λ^c al literal que es equivalente a $\neg\lambda$.

  Ejemplo 3.6.12.

  Son literales las siguientes fórmulas:

  1. $P(a)$.
  2. $\neg Q(x,a)$.
  3. $\neg H(x,g(x,a),y)$.
  4. $P(f(x))$.
  5. $Q(g(y,f(b)),x)$.

  Los complementarios de estos literales son:

  1. $\neg P(a)$.
  2. $Q(x,a)$.
  3. $H(x,g(x,a),y)$.
  4. $\neg P(f(x))$.
  5. $\neg Q(g(y,f(b)),x)$.

- El *cierre universal* de una fórmula sin cuantificadores es la fórmula que resulta de cuantificar universalmente todas las variables que aparecen en la fórmula.

  Ejemplo 3.6.13.

  1. *El cierre universal de la fórmula $P(a)$ es ella misma.*
  2. *El cierre universal de $\neg H(x,g(x,a),y)$ es $\forall x\forall y\neg H(x,g(x,a),y)$.*
  3. *El cierre universal de $P(a)\vee Q(x,g(y,b))\vee\neg H(x,g(x,a),y)$ es $\forall x\forall y(P(a)\vee Q(x,y,b)\vee \neg H(x,f(x,a),y))$.*

- Una *cláusula* es el cierre universal de una disyunción de literales. En la definición de cláusula se incluye el caso de *cierre universal de un literal.*

  También se incluye el caso de una *disyunción de cero literales.* Esta cláusula se denomina cláusula vacía, y la denotaremos como $\square$. Para cualquier interpretación $I=(\mathcal{E},v)$ se tiene que $I(\square)=0$ (es decir, la cláusula vacía es insatisfacible).

  Ejemplo 3.6.14.

  Son ejemplos de cláusulas:

  1. $P(a)$.
  2. $\forall x\forall y(P(a)\vee Q(g(x,y),b)\vee\neg H(x,f(a),y))$.

3. $\forall x \forall y \neg H(x, g(x, a), y)$.
4. $\forall x \forall y (P(f(x)) \vee \neg Q(y, f(b)) \vee H(x, x, x))$.

- Una fórmula se dice que está en *forma clausular* si está escrita como conjunción de cláusulas.

  Se incluye el caso de *conjunción de una cláusula*. Es decir, una cláusula es una fórmula que está en forma clausular.

  No se incluye el caso de *conjunción de cero cláusulas*.

  Ejemplo 3.6.15.

  Son fórmulas en forma clausular:

  1. $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(g(f(x), b), y)) \wedge \forall x H(a, x, f(x))$.
  2. $(P(a) \vee Q(a, f(b))) \wedge \forall x (Q(x, g(a, b)) \vee \neg P(x) \vee H(a, b, g(a, b)))$.
  3. $\square$.
  4. $\forall x \forall z P(g(x, z))$.

Observación:

1. Dada una fórmula α, llamaremos *forma clausular de* α a una fórmula que sea equivalente a la forma de Skolem de α y que esté en forma clausular.
2. Puesto que la forma de Skolem de una fórmula no es única, la forma clausular tampoco lo es. Es decir, una fórmula puede tener varias formas clausulares.
3. No toda fórmula tiene forma clausular, sólo si es sentencia, ya que en la forma clausular todas las ocurrencias de las variables son ligadas.
4. Para hallar la forma clausular de una sentencia procedemos como sigue:
   - Calculamos la forma normal de Skolem.
   - Sobre la subfórmula que resulta de quitar los cuantificadores, aplicamos las equivalencias 1-13 para transformarla en una conjunción de disyunción de literales. Este proceso es similar al que seguimos en la lógica proposicional. La fórmula tendrá entonces la forma
     $$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n (\delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \cdots \wedge \delta_m)$$
     donde δ_i es una disyunción de literales.
   - Utilizando la equivalencia 24, transformamos la fórmula en
     $$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \delta_1 \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \delta_2 \wedge \cdots \wedge \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \delta_m)$$
   - De cada una de las subfórmulas $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \delta_i$ eliminamos los cuantificadores correspondientes a variables que no aparecen en δ_i (equivalencia 20)

Ejemplo 3.6.16.

1. $\forall x (P(x, f(x)) \rightarrow Q(b))$.

   Esta fórmula ya está en forma de Skolem. Nos quedamos con $P(x, f(x)) \rightarrow Q(b)$*, que es equivalente a* $\neg P(x, f(x)) \vee Q(b)$.

   Por tanto, la forma clausular de $\forall x (P(x, f(x)) \rightarrow Q(b))$ *es* $\forall x (\neg P(x, f(x)) \vee Q(b))$.

2. $\forall x \forall y (R(x) \vee (Q(x, y) \wedge P(y) \wedge R(x)))$.

   Trabajamos con $R(x) \vee (Q(x, y) \wedge P(y) \wedge R(x))$*. Para simplificar la escritura podemos olvidarnos de los términos. Lo que tenemos es entonces* $R \vee (Q \wedge P \wedge R)$*, que es equivalente (equivalencia 5, junto con la 4) a* $(R \vee Q) \wedge (R \vee P) \wedge (R \vee R)$.

Volvemos a escribir la fórmula completa:

$$\begin{aligned}
\forall x\forall y(R(x)\vee(Q(x,y)\wedge P(y)\wedge R(x))) &\equiv \forall x\forall y((R(x)\vee Q(x,y))\wedge(R(x)\vee P(y))\wedge(R(x)\vee R(x)))\\
&\equiv \forall x\forall y((R(x)\vee Q(x,y))\wedge(R(x)\vee P(y))\wedge(R(x)))\\
&\equiv \forall x\forall y(R(x)\vee Q(x,y))\wedge\forall x\forall y(R(x)\vee P(y))\wedge\forall x\forall yR(x)\\
&\equiv \forall x\forall y(R(x)\vee Q(x,y))\wedge\forall x\forall y(R(x)\vee P(y))\wedge\forall xR(x)
\end{aligned}$$

Y la fórmula es conjunción de tres cláusulas: $\forall x\forall y(R(x)\vee Q(x,y))$, $\forall x\forall y(R(x)\vee P(y))$ *y* $\forall xR(x)$.

3. *Sea ahora* $\alpha=\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\vee P(y,z))\to\exists uQ(x,y,u))$. *Vemos que* α *es una sentencia. Vamos a calcular una forma clausular.*

$$\begin{array}{cll}
\alpha & = \forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\vee P(y,z))\to\exists uQ(x,y,u)) & \\
 & \equiv \forall x\forall y(\neg\exists z(P(x,z)\vee P(y,z))\vee\exists uQ(x,y,u)) & \\
 & \equiv \forall x\forall y(\forall z\neg(P(x,z)\vee P(y,z))\vee\exists uQ(x,y,u)) & \\
 & \equiv \forall x\forall y\exists u(\forall z\neg(P(x,z)\vee P(y,z))\vee Q(x,y,u)) & \\
 & \equiv \forall x\forall y\exists u\forall z(\neg(P(x,z)\vee P(y,z))\vee Q(x,y,u)) & \mathit{FNP}\\
 & \quad\ \forall x\forall y\forall z(\neg(P(x,z)\vee P(y,z))\vee Q(x,y,f(x,y))) & \mathit{FNS}\\
 & \equiv \forall x\forall y\forall z((\neg P(x,z)\wedge\neg P(y,z))\vee Q(x,y,f(x,y))) & \\
 & \equiv \forall x\forall y\forall z((\neg P(x,z)\vee Q(x,y,f(x,y)))\wedge(\neg P(y,z)\vee Q(x,y,f(x,y)))) & \\
 & \equiv \forall x\forall y\forall z(\neg P(x,z)\vee Q(x,y,f(x,y)))\wedge\forall x\forall y\forall z(\neg P(y,z)\vee Q(x,y,f(x,y))) & \mathit{FNC}
\end{array}$$

Notemos como al pasar de la forma normal prenexa a la forma de Skolem no hemos puesto el símbolo $\equiv$ *de equivalencia.*

Observación:

Cuando tenemos un conjunto de sentencias y calculamos la forma de Skolem y la forma clausular, sabemos que todas las variables que intervienen están cuantificadas universalmente. Por tal motivo, suelen omitirse los cuantificadores.

Así diremos que la forma clausular de $\forall x(P(x,f(x))\to Q(b))$ es $\neg P(x,f(x))\vee Q(b)$. O que la forma clausular de $\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\vee P(y,z))\to\exists uQ(x,y,u))$ tiene dos cláusulas que son $\neg P(x,z)\vee Q(x,y,f(x,y))$ y $\neg P(y,z)\vee Q(x,y,f(x,y))$.

Una vez que ya hemos visto como calcular la forma clausular de una sentencia, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.6.3. *Sea* $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$ *un conjunto de sentencias. Supongamos que para* $\gamma_i\in\Gamma$ *su forma clausular es* $C_{i1}\wedge C_{i2}\wedge\cdots\wedge C_{im_i}$. *Sea* Γ^{**} *el conjunto formado por todas las cláusulas que aparecen en la forma clausular de cada una de las fórmulas de* Γ, *es decir,*

$$\Gamma^{**}=\{C_{11},\ C_{12},\cdots,C_{1m_1},\ C_{21},\ C_{22},\cdots,C_{2m_2},\cdots,C_{n1},\ C_{n2},\cdots,C_{nm_n}\}.$$

Entonces Γ *es insatisfacible si, y sólo si,* Γ^{**} *es insatisfacible.*

Ejemplo 3.6.17.

Supongamos que tenemos las fórmulas

$$\alpha_1=\forall x(P(x)\wedge\neg Q(x)\to\exists y(R(x,y)\wedge S(y))).$$

$$\alpha_2=\exists y\forall x((R(y,x)\to T(x))\wedge T(y)\wedge P(y).$$

$$\alpha_3=\exists x(T(x)\wedge(Q(x)\vee S(x))).$$

Y queremos ver si $\{\alpha_1,\alpha_2\}\vDash\alpha_3$.

Vamos a transformar este problema en estudiar si un conjunto de cláusulas es o no insatisfacible. Para ello, vemos en primer lugar que lo anterior es equivalente a probar que el conjunto $\{\alpha_1,\alpha_2,\neg\alpha_3\}$ *es insatisfacible. Calculamos una forma clausular de cada una de las fórmulas.*

- *Para α_1 tenemos:*

$$\begin{array}{rcll}\alpha_1 & = & \forall x(P(x)\wedge\neg Q(x)\to\exists y(R(x,y)\wedge S(y))) & \\ & \equiv & \forall x(\neg(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\exists y(R(x,y)\wedge S(y))) & \\ & \equiv & \forall x((\neg P(x)\vee Q(x))\vee\exists y(R(x,y)\wedge S(y))) & \\ & \equiv & \forall x\exists y((\neg P(x)\vee Q(x))\vee(R(x,y)\wedge S(y))) & \textit{Forma normal prenexa} \\ & & \forall x((\neg P(x)\vee Q(x))\vee(R(x,f(x))\wedge S(f(x)))) & \textit{Forma normal de Skolem} \\ & \equiv & \forall x((\neg P(x)\vee Q(x)\vee R(x,f(x)))\wedge(\neg P(x)\vee Q(x)\vee S(f(x)))) & \\ & \equiv & \forall x(\neg P(x)\vee Q(x)\vee R(x,f(x)))\wedge\forall x(\neg P(x)\vee Q(x)\vee S(f(x))) & \textit{Forma clausular}\end{array}$$

- *Para α_2:*

$$\begin{array}{rcll}\alpha_2 & = & \exists y\forall x((R(y,x)\to T(x))\wedge T(y)\wedge P(y)) & \textit{Forma normal prenexa} \\ & & \forall x((R(a,x)\to T(x))\wedge T(a)\wedge P(a)) & \textit{Forma normal de Skolem} \\ & \equiv & \forall x((\neg R(a,x)\vee T(x))\wedge T(a)\wedge P(a)) & \\ & \equiv & \forall x(\neg R(a,x)\vee T(x))\wedge T(a)\wedge P(a) & \textit{Forma clausular}\end{array}$$

- *Y para $\neg\alpha_3$:*

$$\begin{array}{rcll}\alpha_3 & = & \neg\exists x(T(x)\wedge(Q(x)\vee S(x))) & \\ & \equiv & \forall x\neg(T(x)\wedge(Q(x)\vee S(x))) & \textit{Forma normal prenexa y de Skolem} \\ & \equiv & \forall x(\neg T(x)\vee\neg(Q(x)\vee S(x))) & \\ & \equiv & \forall x(\neg T(x)\vee(\neg Q(x)\wedge\neg S(x))) & \\ & \equiv & \forall x((\neg T(x)\vee\neg Q(x))\wedge(\neg T(x)\vee\neg S(x))) & \\ & \equiv & \forall x(\neg T(x)\vee\neg Q(x))\wedge\forall x(\neg T(x)\vee\neg S(x)) & \textit{Forma clausular}\end{array}$$

Y el problema es ahora probar si el siguiente conjunto de cláusulas

$$\Gamma=\left\{\begin{array}{lll}\neg P(x)\vee Q(x)\vee R(x,f(x)); & \neg R(a,x)\vee T(x); & T(a);\quad P(a) \\ \neg P(x)\vee Q(x)\vee S(f(x)); & \neg T(x)\vee\neg Q(x); & \neg T(x)\vee\neg S(x)\end{array}\right\}$$

es o no insatisfacible. Por ahora, lo dejaremos así. Más adelante veremos cómo responder a esta pregunta.

Notemos como al escribir el conjunto de cláusulas no hemos escrito los cuantificadores. Esto no significa que no estén. Como sabemos, todas las variables están cuantificadas universalmente.

Aunque lo normal es que se trabaje con sentencias, vamos a ver cómo proceder en el caso de que algunas de las fórmulas de las que partimos tengan variables libres.

La forma de hacerlo es muy similar, y eso está basado en los dos siguientes lemas:

Lema 3.6.1. *Sea $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}$ un conjunto de fórmulas, y $\gamma=\gamma_1\wedge\gamma_2\cdots\gamma_n$. Entonces Γ es satisfacible si, y sólo si, γ es satisfacible.*

Esto es claro, pues sabemos que el que el conjunto Γ sea satisfacible significa que hay una interpretación $I=(\mathcal{E},v)$ para la que se interpretan como ciertas todas las fórmulas del conjunto, es decir, $I(\gamma_1)=I(\gamma_2)=\cdots=I(\gamma_n)=1$. Pero eso es exactamente lo mismo que decir que la fórmula γ es satisfacible (pues para esa interpretación se tendría que $I(\gamma)=1$).

Otra forma de enunciar el lema es diciendo

$$\Gamma \text{ es insatisfacible si, y sólo si, } \gamma \text{ es una contradicción.}$$

Lema 3.6.2. *Sea α una fórmula en un lenguaje de primer orden, y sea x una variable que aparece libre en la fórmula α. Entonces α es contradicción si, y sólo si, $\exists x\alpha$ es una contradicción.*

También este lema es claro. El que α sea una contradicción se traduce en que, dada una estructura, para cualquier valor que le demos a la variable x, $v(x)$, se tiene que $I^v(\alpha)=0$. Pero esto significa que $I^v(\exists x\alpha)=0$.

Por tanto, tenemos que, dada una estructura, la fórmula $\exists x\alpha$ se interpreta como falsa.

Teorema 3.6.4. *Sea* $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$*. Supongamos que el conjunto de variables que tienen alguna ocurrencia libre en las fórmulas de* Γ *es* $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$*.*

Entonces Γ *es insatisfacible si, y sólo si, la fórmula* $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$ *es una contradicción.*

Observación:

La fórmula $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$ es una sentencia, y por tanto a esta fórmula le podemos hacer su forma clausular y reducir el problema a estudiar si un conjunto de cláusulas es satisfacible o insatisfacible.

Sin embargo, trabajar con la fórmula $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n(\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$ puede ser bastante engorroso.

Entonces podemos actuar como sigue:

Supongamos que tenemos un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ del que queremos saber si es satisfacible o insatisfacible.

Supongamos que encontramos una ocurrencia libre del símbolo de variable x. Entonces:

- Elegimos un símbolo de constante que no aparezca en ninguna fórmula del conjunto Γ.
- Sustituimos todas las apariciones libres del símbolo x en todas las fórmulas de Γ por este símbolo que hemos elegido (no se puede utilizar un símbolo en una fórmula y otro símbolo en otra fórmula).

Repetimos esto último mientras haya alguna fórmula que no sea una sentencia.

Con esto, el conjunto Γ se ha transformado en otro conjunto de fórmulas en el que todas las fórmulas son sentencias, y que es insatisfacible si, y sólo si, lo es Γ.

Ejemplo 3.6.18.

Sea $\Gamma = \{\forall x(P(x) \to Q(x, y)),\ Q(a, f(a)) \to \exists y P(g(y, x)),\ \forall x \exists z(P(x) \to H(x, y, z))\}$.

Queremos encontrar un conjunto de sentencias Γ' *del que sepamos que es insatisfacible si, y sólo si, lo es* Γ*.*

Nos fijamos y vemos que tenemos una aparición libre de la variable y *en la primera fórmula y en la tercera, y una aparición libre de* x *en la segunda. Entonces hemos de elegir dos símbolos de constante, que no puede ser* a *(ya que interviene en la primera fórmula). Elegimos entonces los símbolos* b *y* c*. Sustituimos las ocurrencias libres de* x *por* b *y las ocurrencias libres de* y *por* c*. Las ocurrencias ligadas las dejamos como están. Entonces, el conjunto* Γ' *sería:*

$$\Gamma' = \{\forall x(P(x) \to Q(x, c)),\ Q(a, f(a)) \to \exists y P(g(y, b)),\ \forall x \exists z(P(x) \to H(x, c, z))\}.$$

Este conjunto está formado únicamente por sentencias. Por tanto, ahora se podría calcular la forma clausular de cada una de ellas.