5. Modelos de Distribuciones Discretas y Continuas

1. Sea X: Nº de piezas defectuosas en una muestra de 12 unidades. $p = 0{,}05$, es la probabilidad de que una pieza sea defectuosa. Entonces, $X \rightsquigarrow B(12, 0{,}05)$.

   La producción se detiene si en una muestra de 12 piezas se encuentran dos o más defectuosas.

   a) $P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - 0{,}8816 = 0{,}1184$.
   b) $P[X = 2] = 0{,}0988$

2. Sea X: Nº de personas que se unen al club de una muestra de 11 personas. $p = 1/20 = 0{,}05$, es la probabilidad de que una persona se una al club. Entonces, $X \rightsquigarrow B(11, 0{,}05)$.

   a) $P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 1 - 0{,}8981 = 0{,}1019$
   b) $E[X] = np = 11 * 0{,}05 = 0{,}55$
   c) $P[X > 3] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016$
   d) $P[X = 2] = 0{,}0867$

3. Sea X: Nº de asegurados que tienen un accidente en una muestra de 8 personas. $p = 0{,}05$, es la probabilidad de que una persona tenga un accidente. Entonces, $X \rightsquigarrow B(8, 0{,}05)$.

   a) $P[X \leq 2] = 0{,}9942$
   b) $P[X = 0] = 0{,}6634$
   c) $P[X \leq 3] = 0{,}9996$

4. Sea X: Nº de alumnos que aprueban una asignatura de una muestra de 10 personas. $p = 0{,}3$, es la probabilidad de que un alumno apruebe. Entonces, $X \rightsquigarrow B(10, 0{,}3)$.

   a) $P[X > 5] = 1 - P[X \leq 5] = 1 - 0{,}9527 = 0{,}0473$.
   b) El 40 % de los presentados son $10 * 0{,}4 = 4$, $P[X > 4] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - 0{,}8497 = 0{,}1503$

5. Sea X: Nº de satélites que funcionan de manera adecuada de una muestra de 5 satélites. $p = 0{,}9$, es la probabilidad de que un satélite funcione de manera adecuada. Entonces, $X \rightsquigarrow B(5, 0{,}9)$.

   a) El 80 % de los satélites son $5*0{,}8 = 4$, $P[X \geq 4] = P[Y \leq 1] = 0{,}9185$. Siendo Y: nº de satélites que no funcionan de manera adecuada de una muestra de 5 satélites, $Y = 5 - X \rightsquigarrow B(5, 0{,}1)$
   b) $P[X = 0] = P[Y = 5] = 0{,}00001$, (cálculo realizado con la calculadora)

6. Sea X: nº de llamadas telefónicas a una centralita / 5 minutos. $\lambda = 3$, nº medio de llamadas / 5 minutos. Entonces, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(3)$

   a) $P[X = 6] = 0{,}0504$

   b) Sea Y: nº llamadas / 10 minutos, $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(6)$
   $P[Y = 3] = 0{,}0892$

   c) Sea Z: nº llamadas / 1 minuto, $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(0{,}6)$
   $P[Z = 2] = 0{,}0988$

7. Sea X: nº de personas que acuden a una oficina de información de un supermercado / 1 hora. $\lambda = 4$, nº medio de personas / 1 hora. Entonces, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(4)$

   a) $P[X = 2] = 0{,}1465$

   b) $P[Y < 3] = P[X \leq 2] = 0{,}2381$

   c) $P[X = 4] = 0{,}1954$

8. Sea X: nº de personas que utiliza un cajero / 1 hora. $\lambda = 6$, nº medio de personas que utiliza el cajero / 1 hora. Entonces, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(6)$

   a) $P[X = 6] = 0{,}1606$

   b) $P[X < 5] = 0{,}2851$

   c) Sea Y: nº personas / 10 minutos, $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(1)$
   $P[Y = 0] = 0{,}3679$

   d) Sea Z: nº personas / 5 minutos, $Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(0{,}5)$
   $P[Z = 0] = 0{,}6065$

9. Sea X: nº de accidentes que ocurren en un cruce transitado / 1 semana. $\lambda = 2$, nº medio de accidentes / 1 semana. Entonces, $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(2)$

   a) $P[X = 1] = 0{,}2707$

   b) $P[X = 3] = 0{,}1804$

10. Sea X: peso en kg de unos animales. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(95, 10^2)$
    $P[65 < X < 125] = P[X < 125] - P[X < 65] = P[Z < 3] - P[Z < -3] = 0{,}9987 - 0{,}0013 = 0{,}9974$

11. Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, 2)$

    a) $P[X > 3] = 0{,}8$, luego $P[Z \leq \frac{3-\mu}{\sqrt{2}}] = 0{,}2, \rightarrow \frac{3-\mu}{\sqrt{2}} = -0{,}84 \rightarrow \mu = 4{,}188$

    b) $P_{75} = x \Leftrightarrow P[X \leq x] = 0{,}75 \rightarrow P[Z \leq \frac{x-4{,}188}{\sqrt{2}}] = 0{,}75$. Buscamos en la tabla el valor que tiene probabilidad 0.75, entonces $0{,}67 = \frac{x-4{,}188}{\sqrt{2}}] \rightarrow x = 5{,}136$ kgs.

12. Se busca en la tabla el valor que tiene probabilidad 0.95.
    $P[Z < \frac{k-50}{10}] = 0{,}95 \rightarrow \frac{k-50}{10} = 1{,}645 \rightarrow k = 66{,}45$

13. Sea X: salario de un grupo de trabajadores (millones de euros). $\mu = 2{,}5$, $\sigma = 0{,}5$. Entonces, $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(2{,}5, 0{,}5^2)$

    a) $P[X > 3] = 1 - P[X \leq 3] = 0{,}1587$

    b) $x / P[X > x] = 0{,}45$, $x = 2{,}565$, luego el salario es de 2565000 euros.

14. Sea X: nº de piezas defectuosas en una muestra de 400 unidades. $p = 0{,}01$, es la probabilidad de que una pieza sea defectuosa.

    a) $X \rightsquigarrow B(400, 0{,}01)$.

    b) $P[X \leq 8] \approx 0{,}9786$, usando la aproximación de la Binomial por la Poisson.
    $n \geq 30, p < 0{,}1 \to B(400, 0{,}01) \approx \mathcal{P}(4)$.

    c) $P[X = 0] = 0{,}01795$, usando la función masa de probabilidad de la binomial.

    d) $E[X] = 4$, $Var(X) = 3{,}96$

15. Sea X: nº de parados en una población de 60 individuos. $p = 0{,}2$, es la probabilidad de que un individuo esté parado. Entonces, $X \rightsquigarrow B(60, 0{,}2)$

    a) $P[X \geq 20] \approx 0{,}0078$, usando la aproximación de la Binomial por la Normal y usando la corrección por continuidad.
    $n \geq 30, 0{,}1 < p < 0{,}9 \to B(60, 0{,}2) \approx \mathcal{N}(12, 9{,}6)$.

    b) $P[X = 12] = 0{,}1278$, usando la función masa de probabilidad de la binomial.

    c) $P[X = 6] = 0{,}0187$, usando la función masa de probabilidad de la binomial.

16. *a)* Si X es $F_{2,4} \to P[X \geq x] = 0{,}05, x = 6{,}944$, y $P[X \leq x] = 0{,}99, x = 18$.

    b) Si Y es $F_{10,12} \to P[Y \geq y] = 0{,}05, y = 2{,}753$, y $P[Y \leq y] = 0{,}99, y = 4{,}296$.

17. *a)* $P[X < 2] = 0{,}025$, $P[X \leq 0] = 0$ y $P[1{,}23 \leq Y \leq 2{,}21] = 0{,}1 - 0{,}025 = 0{,}075$

    b) Si X es $\chi_8 \to P[X \leq x] = 0{,}005, x = 1{,}34$, y $P[X \leq x] = 0{,}9, x = 13{,}4$.

    c) Si Y es $\chi_6 \to P[Y \leq y] = 0{,}01, y = 0{,}872$, y $P[Y \leq y] = 0{,}99, y = 17$.

18. *a)* $P[X \leq -1{,}813] = 0{,}05$, $P[2{,}764 \leq X \leq 4{,}588] = 0{,}9995 - 0{,}99 = 0{,}0095$

    b) Si X es $t_{10} \to P[X \geq x] = 0{,}05, x = 1{,}813$, y $P[X \leq x] = 0{,}95, x = 1{,}813$.

19. Sea X: Nº de enfermos que mejoran de cirrosis en una muestra de 8 personas. $p = 0{,}8$, es la probabilidad de que un enfermo mejore. Entonces, $X \rightsquigarrow B(8, 0{,}8)$.

    a) $P[X = 5] = P[Y = 3] = 0{,}1468$, siendo Y: nº de enfermos que no mejoran de cirrosis en una muestra de 8 personas. $Y \rightsquigarrow B(8, 0{,}2)$

    b) $P[X \geq 3] = P[Y \leq 5] = 0{,}9988$

    c) $E[X] = 6{,}4$. En media se espera que mejoren 6.4 pacientes.

20. ea X: Nº de hogares que están asegurados de una muestra de 5 hogares. $p = 0{,}2$, es la probabilidad de que un hogar esté asegurado. Entonces, $X \rightsquigarrow B(5, 0{,}2)$.

    a) $E[X] = 1$.

    b) $P[X = 2] = 0{,}2048$

    c) $P[X \geq 3] = 0{,}0579$

    d) $P[X = 0] = 0{,}3277$

    e) $P[X \geq 1] = 0{,}6723$

21. $\lambda = 0{,}4$

22. *a*) Sea X: nº de enfermos que son recibidos en un hospital / 10 minutos. $\lambda = 1{,}8$, nº medio de enfermos que recibe el hospital / 10 minutos. $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(1{,}8)$

    Función masa de probabilidad: $P[X = x] = e^{-1{,}8}\frac{1{,}8^x}{x!}$

    Función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]} P[X = k] & x \geq 0 \end{cases}$

    $E[X] = 1{,}8$, $Var(X) = 1{,}8$

    b) $P[X = 0] = 0{,}1653$, $P[X \geq 2] = 0{,}5372$

    c) Sea Y: nº de enfermos /30 minutos, $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(5{,}4)$

    $P[Y < 2] = 0{,}0289$, usando la función masa de probabilidad de la Poisson.

23. *a*) Sea X: nº de roturas producidas en una fábrica / 1 hora. $\lambda = 10$, nº medio de roturas / 1 hora. $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(10)$

    b) Función masa de probabilidad: $P[X = x] = e^{-10}\frac{10^x}{x!}$

    c) $P[X \geq 4] = 1 - P[X \geq 3] = 0{,}9897$

    d) Sea Y: nº de roturas / 2 horas, $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(20)$

    $P[Y < 4] \approx< 0{,}001$, usando la aproximación de la Poisson por una Normal.

24. Sea X: nº de licencias de matrimonio expedidas en cierta ciudad durante un mes. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(124, 7{,}5^2)$

    a) $P[100 < X < 150] = 0{,}998$

    b) Sea Y: nº de meses adecuados para casarse. $n = 12$, p, probabilidad de que se hayan producido más de 140 licencias. Entonces, $Y \rightsquigarrow B(12, 0{,}0166)$.

    $P[Y < 2] = 0{,}9837$, usando la función masa de probabilidad de la binomial.

25. Sea X: nº de alumnos que estudian más de 30 horas en el primer mes del curso, $n = 5$ alumnos, $p = 0{,}15$ probabilidad de estudiar más de 30 horas en el primer mes del curso. Entonces $X \rightsquigarrow B(5, 0{,}15)$.

    a) Función masa de probabilidad: $P[X = x] = (\begin{matrix} 5 \\ x \end{matrix})0{,}15^x 0{,}85^{5-x}$

    Función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]}(\begin{matrix} 5 \\ k \end{matrix})0{,}15^k 0{,}85^{5-k} & 0 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$

    $P[X = 5] = 0{,}0001$

    b) Sea Y: nº de alumnos que estudian más de 30 horas en el primer mes del curso, $n = 50$ alumnos, $p = 0{,}15$ probabilidad de estudiar más de 30 horas en el primer mes del curso. $Y \rightsquigarrow B(50, 0{,}15)$. El 14 % de 50 son: 7.

    $P[Y = 7] = 0{,}1574$, usando la función masa de probabilidad de la binomial.

26. Sea X: estatura de una población. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(1{,}7, 0{,}1^2)$

    a) $P[X < 1{,}72] = 0{,}5793$

    b) Sea Y: nº de personas que miden más de 1.72. $n = 3$, $p = 0{,}4207$, probabilidad de medir más de 1.72. Entonces, $Y \rightsquigarrow B(3, 0{,}4207)$.

    $P[Y = 1] = 0{,}4235$, usando la función masa de probabilidad de la binomial.