

## CÁLCULO

1. Comprueba que la ecuación  $x = 4 \log(x)$  tiene una única solución,  $c$ , en el intervalo  $]1/2, 2[$ . (1 pto.)

**Solución:** Presentamos la función con la que vamos a trabajar. Dado que:

$$x = 4 \log(x) \iff x - 4 \log(x) = 0$$

vamos a estudiar la función  $f(x) = x - 4 \log(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ . Tendremos que justificar que  $f$  se anula en un único punto del intervalo  $]1/2, 2[$ .

En primer lugar, la función  $f$  es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}^+$ . Además:

$$f(1/2) = 1/2 - 4 \log(1/2) = 1/2 + 4 \log(2) > 0$$

$$f(2) = 2 - 4 \log(2) = 2(1 - 2 \log(2)) = 2(1 - \log(4)) < 0$$

Utilizando el teorema de Bolzano deducimos de  $f$  admite al menos un cero en dicho intervalo. La cuestión es ¿es único?

Para responder a dicha pregunta, analizamos la derivada de  $f$ :

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x} = \frac{x-4}{x} \text{ y } f''(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 4 \text{ y } f''(4) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} > 0$$

Por tanto, en  $x = 4$  se tiene un mínimo relativo que, por ser el único punto crítico de la función, es el punto de mínimo absoluto de  $f$ . Es decir, en el intervalo  $]1/2, 2[$  la función es estrictamente decreciente, por lo que sólo existe un único punto  $c \in ]1/2, 2[$  donde la función  $f$  se anula.

2. Calcula la imagen de la función  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida como (2.25 pto.)

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} e^{1/x}.$$

**Solución:** La función dada es continua y derivable en su dominio. Estudiamos

la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 1) - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} e^{1/x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} e^{1/x} - \frac{1}{x^2 + 1} e^{1/x} = e^{1/x} \left( \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \right) \\ &= e^{1/x} \left( -\frac{x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \right) = -e^{1/x} \frac{(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Por tanto,  $f'(x) = 0 \iff x = 1$ . Pero, observamos que la derivada siempre es negativa, por lo que  $f$  es decreciente en todo  $\mathbb{R}^*$ .

Para calcular la imagen de  $f$  necesitamos calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} e^{1/x} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \\ \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x^2}{x^2 + 1} e^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x^2 + 1} \lim_{x \rightarrow 0_+} x^2 e^{1/x} \end{aligned}$$

Para calcular este último límite (presenta una indeterminación del tipo “ $0 \cdot \infty$ ”) hacemos un cambio de variable:  $\frac{1}{x} = y$ , y así:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} x^2 e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^2} e^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^2} = +\infty \text{ (por la escala de infinitos) .}$$

Calculamos ahora el límite en el cero por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x^2}{x^2 + 1} e^{1/x} = 0 .$$

Finalmente:

$$f(\mathbb{R}^*) = f(]-\infty, 0[) \cup f(]0, +\infty[)$$

( $f$  es estrictamente decreciente)

$$\begin{aligned} &= \left[ \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[ \cup \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) \right[ \\ &= ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} . \end{aligned}$$

3. a) Calcula  $\int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx$ .
- b) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función  $f(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2) dt$ . (2.25 pts.)

**Solución:**

- a) Se trata de una integral de tipo trigonométrico donde las potencias, tanto de la función seno, como de la función coseno, son enteras. Además, la función seno está sometida a una potencia impar. Por tanto, aplicamos el cambio de variable siguiente:

$$t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x) dx$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx &= \int \frac{\sin^2(x) \sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx = \int \frac{(1 - \cos^2(x)) \sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx \\ &\text{(aplicamos el cambio de variable establecido más arriba)} \\ &= - \int \frac{(1 - t^2)}{\sqrt{t}} dt = \int \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt = \int (t^{3/2} - t^{1/2}) dt \\ &= \frac{2}{5} t^{5/2} - 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{5} \cos^{5/2}(x) - 2\sqrt{\cos(x)} + C. \end{aligned}$$

- b) La función  $f(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2) dt$  es una función definida a través de una integral. Utilizando el teorema fundamental del Cálculo sabemos que esta función es derivable. Y a la vista de la derivada que obtengamos, deduciremos que también se puede derivar dos veces.

Nos piden el polinomio de Taylor en el origen ( $a = 0$ ) de orden 2; es decir, hay que calcular:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

Que, en nuestro caso, al ser  $a = 0$ , nos quedaría:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Vamos entonces a calcular los coeficientes de este polinomio. En primer lugar,

$$f(0) = \int_0^0 \cos(t^2) dt = 0.$$

Para calcular  $f'(x)$ , aplicamos el teorema Fundamental del Cálculo; por tanto:

$$f'(x) = \cos(x^4) 2x - \cos(x^2) \Rightarrow f'(0) = -1$$

$$f''(x) = 2 \cos(x^4) - 8x^4 \sin(x^4) + 2x \sin(x^2) \Rightarrow f''(0) = 2$$

Por tanto, el polinomio pedido es:

$$P_2(x) = 0 - x + \frac{2}{2!} x^2 = x^2 - x$$

4. Estudia el límite de la función  $f(x) = \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^x$  en 0 y en  $+\infty$ . (2 pts.)

**Solución:** Comenzamos con el límite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arctan(x)\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^x \lim_{x \rightarrow 0} (\arctan(x))^x$$

El primer factor no presenta ningún problema ( $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi}\right)^x = 1$ ); pero el segundo factor presenta una indeterminación del tipo “0<sup>0</sup>”. Para resolverla, aplicamos la fórmula del número  $e$ ; esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan(x))^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log(\arctan(x))}$$

Vamos a ocuparnos de calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} x \log(\arctan(x))$ . Como presenta una indeterminación de “0 · ∞”, arreglamos el producto y lo ponemos en forma de cociente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(\arctan(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\arctan(x))}{1/x}$$

Ahora tenemos una indeterminación del tipo “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{1+x^2} \cdot \frac{x^2}{\arctan(x)}$$

donde el primer factor tiende a  $-1$ , y el segundo factor es el problemático puesto que ahora presenta una indeterminación del tipo " $\frac{0}{0}$ ". Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital al segundo factor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arctan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2x(1+x^2) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log(\arctan(x))) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\arctan(x))^x = e^0 = 1$$

y entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arctan(x) \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \right)^x \lim_{x \rightarrow 0} (\arctan(x))^x = 1 \cdot e^0 = 1$$

Vamos ahora a calcular el límite en infinito. En este caso, como es sabido que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$  tenemos una indeterminación del tipo " $1^\infty$ ". Aplicamos ahora la regla del número  $e$ ; esto es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(x) - 1 \right] = L \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan(x) \right)^x = e^L$$

Nos ocupamos entonces de calcular  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(x) - 1 \right]$ . Para ello,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(x) - 1 \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2 \arctan(x) - \pi}{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} x (2 \arctan(x) - \pi) \end{aligned}$$

donde se presenta una indeterminación del tipo " $\infty \cdot 0$ ". Arreglamos la expresión para poder aplicar la regla de L'Hôpital :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x (2 \arctan(x) - \pi) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \arctan(x) - \pi}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{1+x^2} = -2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{2}{\pi} \arctan(x) - 1 \right] = \frac{-2}{\pi} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctan(x) \right)^x = e^{-2/\pi}.$$

5. a) Estudia la convergencia de la serie  $\sum \left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 7} \right)^{-n^3}$ .

b) Calcula  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+2} + 3^{-n}}{5^n}$ . (2.5 pts.)

**Solución:**

- a) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 7} \right)^{-n^3}} = \left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 7} \right)^{-n^2}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo “ $1^\infty$ ”; por tanto, aplicamos la regla del número  $e$ :

$$\begin{aligned} -n^2 \left[ \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 7} - 1 \right] &= -n^2 \left[ \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 7}{2n^2 + 7} \right] \\ &= -n^2 \frac{-6}{2n^2 + 7} = \frac{6n^2}{2n^2 + 7} \rightarrow \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 7} \right)^{-n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{2n^2 + 7} \right)^{-n^2} = e^3 > 1,$$

de lo que se deduce que la serie dada es no es convergente.

- b) Se trata de una serie que se puede descomponer en la suma de dos series geométricas. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 3} \frac{2^{n+2} + 3^{-n}}{5^n} &= \sum_{n \geq 3} 2^2 \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n \geq 3} \frac{3^{-n}}{5^n} \\ &= 4 \sum_{n \geq 3} \left( \frac{2}{5} \right)^n + \sum_{n \geq 3} \frac{1}{3^n 5^n} = 4 \sum_{n \geq 3} \left( \frac{2}{5} \right)^n + \sum_{n \geq 3} \left( \frac{1}{15} \right)^n. \end{aligned}$$

Las dos series que aparecen son convergentes ya que son geométricas con razón menor que 1. Para sumarlas aplicaremos la fórmula  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ . Aunque en este caso hemos que tener en cuenta que se nos pide la suma a partir de  $n = 3$ , por lo que usaremos que:

$$\sum_{n=3}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - (1 + r + r^2) = \frac{1}{1-r} - (1 + r + r^2).$$

Con todo esto terminamos de sumar la serie propuesta:

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n+2} + 3^{-n}}{5^n} &= 4 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{15}\right)^n \\ &= 4 \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} \right) - \left( 1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} \right) \right] + \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{15}} \right) - \left( 1 + \frac{1}{15} + \frac{1}{225} \right) \right] \\ &= 4 \left( \frac{5}{3} - 1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{25} \right) + \left( \frac{15}{14} - 1 - \frac{1}{15} - \frac{1}{225} \right) = \frac{269}{630}. \end{aligned}$$

Granada, a 11 de febrero de 2015.