

Derivabilidad

5

5.1 Definición. Recta tangente. 67 5.2 Reglas de derivación 69 5.3 Teorema del valor medio 71 5.4 Consecuencias del teorema del valor medio 72 5.5 Derivadas de orden superior 74 5.6 Concavidad y convexidad 75 5.7 Algunas aplicaciones de la derivada 76 5.8 Derivación numérica 78 5.9 Polinomio de Taylor 80 5.10 Ejercicios 84

5.1 Definición. Recta tangente.

Definición 5.1. Una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *derivable* en $a \in A \cap A'$ si existe

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A dicho límite lo notaremos $f'(a)$. A la función $a \mapsto f'(a)$ la llamaremos *función derivada* de f y la notaremos f' .

Observación 5.2.

- a) El cociente incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y la derivada se pueden ver también como un límite en cero haciendo un cambio de variable:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- b) La restricción de que a sea un punto de acumulación del dominio de la función ($a \in A \cap A'$) es obligatoria si queremos que el cociente incremental tenga sentido y no estemos dividiendo por cero. Recuerda que en el caso de que el conjunto A sea un intervalo se cumple que $A' = \bar{A}$ con lo que podemos estudiar la derivabilidad en cualquier punto del intervalo.

Ejemplo 5.3. La función $f(x) = x^2$ es derivable. Su derivada en un punto a es, según la definición,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = 2a.$$

Obtenemos así la fórmula usual de la derivada de $f(x) = x^2$, esto es, que $f'(x) = 2x$.

La condición de ser derivable es más fuerte que la de ser continua.

Proposición 5.4 (Condición necesaria de derivabilidad). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$, entonces f es continua en a .

El recíproco no es cierto. Hay funciones continuas que no son derivables.

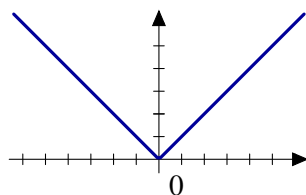


Figura 5.1 La función valor absoluto no es derivable en el origen

Ejemplo 5.5. La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua pero no es derivable en el origen: no coinciden los límites laterales en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \text{ y}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Por tanto, la función valor absoluto no es derivable en el origen. En el resto de puntos de la recta real, la función es o bien la identidad o bien la identidad cambiada de signo. En ambos casos, la función es derivable. ¿Por qué? Fíjate que la definición de derivabilidad está hecha usando límites y que, en particular, cuestiones como su carácter local siguen siendo válidas.

5.1.1 Interpretación geométrica de la derivada

La recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ es una recta secante a la gráfica de la función f . Puedes ver en la Figura 5.2 que el cociente incremental es

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tan(\theta).$$

Cuando hacemos tender x a a , dicha recta se convierte en tangente a la función f en el punto $(a, f(a))$. Si el valor $\tan(\theta)$ nos indica la pendiente de la recta secante, la derivada, $f'(a)$, nos indica la pendiente de la *recta tangente* que tiene como fórmula

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

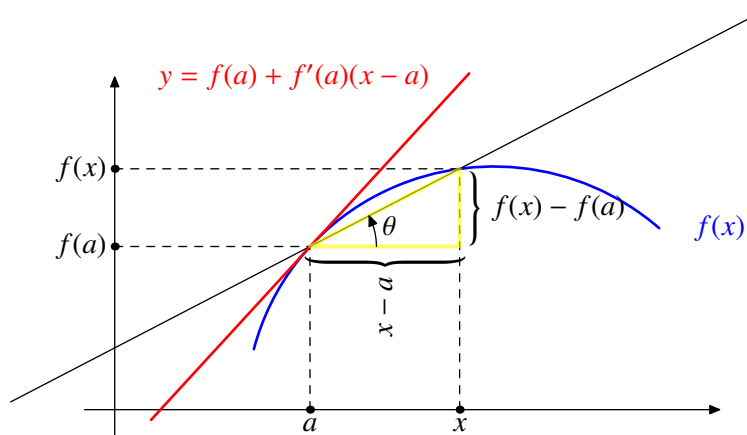


Figura 5.2 Recta tangente

5.1.2 Derivadas laterales

Puesto que la derivada está definida como un límite y sabemos la relación entre límites laterales y límite, podemos hablar de *derivadas laterales*. Aunque tiene sentido para un conjunto cualquiera, vamos a enunciarlo únicamente para funciones definidas en un intervalo I .

Definición 5.6. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, de forma que $\{x \in I : x < a\} \neq \emptyset$. Se dice que f es derivable por la izquierda en el punto a si existe

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$$

Este límite se llama *derivada lateral izquierda* de f en el punto a .

Si ahora el punto a es tal que $\{x \in I : x > a\} \neq \emptyset$, se dice que f es *derivable por la derecha* en el punto a si existe

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$$

Este límite se llama *derivada lateral derecha* de f en el punto a .

Observación 5.7. La relación que hay entre la derivabilidad y la derivabilidad lateral para funciones definidas en un intervalo I queda reflejada en las siguientes afirmaciones:

- Si $a = \min(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la derecha en a y además, $f'(a) = f'(a^+)$.
- Si $a = \max(I)$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda en a y además, $f'(a) = f'(a^-)$.
- Si $a \in \overset{\circ}{I}$, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es derivable por la izquierda y por la derecha en a y ambas derivadas coinciden. Además, en ese caso, $f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$.

Resumiendo, para que una función sea derivable deben de existir todas las derivadas laterales que tengan sentido y coincidir.

5.2 Reglas de derivación

Proposición 5.8 (Álgebra de derivadas). Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $a \in A$. Entonces

- La suma de funciones derivables es una función derivable y su derivada es la suma de las derivadas:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- El producto de funciones derivables es una función derivable y

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Si $g(a) \neq 0$, la función $\frac{f}{g}$ es derivable y su derivada es

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Usando el primer apartado podemos calcular la derivada de cualquier polinomio, siempre que sepamos la derivada de x^n . Comencemos por eso.

Ejemplo 5.9 (Derivada de una potencia). Es inmediato comprobar que la función identidad $f(x) = x$ es derivable y que $f'(x) = 1$. Usando la segunda propiedad se demuestra por inducción que cualquier potencia también lo es y que la derivada de la función $g(x) = x^n$ es $g'(x) = nx^{n-1}$, para cualquier natural n , aunque dicha derivada también se puede calcular directamente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} h + \dots = na^{n-1},$$

usando la fórmula del binomio de Newton.

Con esto tenemos resuelta la derivada de una función racional. Veamos otro tipo de funciones. Por ejemplo, ¿cuál es la derivada de la función exponencial?

Ejemplo 5.10 (Derivada de la función exponencial). Calculamos la derivada de la función exponencial. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a (e^{x-a} - 1)}{x - a}.$$

Usando la regla que tenemos para resolver indeterminaciones del tipo “ 1^∞ ” (Proposición 4.15),

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} (e^{x-a} - 1) = L \iff \lim_{x \rightarrow a} (e^{x-a})^{1/(x-a)} = e = e^L.$$

Por tanto $L = 1$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a (e^{x-a} - 1)}{x - a} = e^a$$

o, lo que es lo mismo, la derivada de la función exponencial es ella misma.

No parece fácil calcular la derivada de la función logaritmo únicamente con la definición, pero el siguiente resultado nos dice cómo calcular la derivada de la inversa de cualquier función.

Proposición 5.11 (Regla de la cadena). Sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subset B$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f derivable en $a \in A$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces, la función compuesta $g \circ f$ es también derivable en a con derivada

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

Teorema 5.12 (de derivación de la función inversa). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva con inversa $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $a \in A$ y supongamos que f es derivable en a . Entonces son equivalentes:

a) $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $f(a)$.

b) f^{-1} es derivable en $f(a)$.

En caso de que se cumplan ambas afirmaciones se tiene que $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Ejemplo 5.13. Usemos que la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$ para calcular la derivada de su inversa, f^{-1} , la función logaritmo. Aplicando el teorema de derivación de la función inversa,

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}.$$

Si $y = f(x)$, tenemos que $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y}$.

5.3 Teorema del valor medio

Definición 5.14. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *máximo relativo* en $a \in A$ si existe un entorno de a , $]a - r, a + r[\subset A$, donde se cumple que

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in]a - r, a + r[.$$

Si se cumple que $f(x) \geq f(a)$, diremos que la función tiene un *mínimo relativo* en a .

En general, nos referiremos a cualquiera de las dos situaciones diciendo que f tiene un *extremo relativo* en a .

Observación 5.15. En el caso particular de funciones definidas en intervalos, los extremos relativos sólo se pueden alcanzar en puntos del interior del intervalo, nunca en los extremos.

Al igual que la monotonía, la noción de extremo relativo no tiene nada que ver la continuidad o derivabilidad de la función en un principio. Sólo depende del valor de la función en un punto y en los puntos cercanos.

Ejemplo 5.16. La *parte entera* de un número real x es el único número entero $E(x)$ que verifica que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. La gráfica de dicha función la puedes ver en la Figura 5.3.

¿Tiene máximo o mínimos relativos? Si lo piensas un poco, descubrirás que la función alcanza un máximo relativo en *todos* los puntos y un mínimo relativo en cualquier punto que no sea entero.

En efecto, alrededor de un número no entero la función es constante y, por tanto, tiene un máximo y un mínimo relativo.

En cambio, si z es un número entero, se tiene que $f(z) \leq f(x)$ para cualquier $x \in]z - \frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}[$.

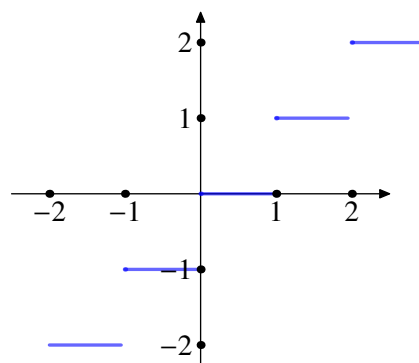


Figura 5.3 Función parte entera

En el caso de funciones derivables la búsqueda de extremos relativos es un poco más sencilla. El siguiente resultado nos dice que sólo tendremos que buscar puntos que anulen la derivada.

Proposición 5.17. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in A$. Si f tiene un extremo relativo en a , entonces $f'(a) = 0$.

Usualmente llamaremos *puntos críticos* a aquellos en los que se anula la derivada.

Teorema 5.18 (de Rolle). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y verificando que $f(a) = f(b) = 0$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demostración. Usando la propiedad de compacidad, la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos en $[a, b]$. Sean $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = \max(f)$ y $f(\beta) = \min(f)$.

a) Si $\alpha \in]a, b[$, α es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\alpha) = 0$.

b) Si $\beta \in]a, b[$, β es un mínimo relativo y, por tanto, $f'(\beta) = 0$.

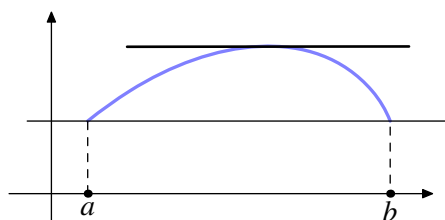


Figura 5.4 Teorema de Rolle

c) Si $\alpha, \beta \in [a, b]$, entonces f es constante y, por tanto $f'(x) = 0$ en todo el intervalo. \square

Teorema 5.19 (del valor medio). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Demostración. La función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle. Por tanto existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$ como queríamos. \square

5.4 Consecuencias del teorema del valor medio

5.4.1 Derivadas y monotonía

Proposición 5.20. Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable.

- a) f es creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para cualquier $x \in I$.
- b) f es decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para cualquier $x \in I$.
- c) f es constante si y sólo si $f'(x) = 0$ para cualquier $x \in I$.
- d) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.
- e) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.

Teorema 5.21 (del valor intermedio para la derivada). Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. Entonces $f'(I)$ es un intervalo.

Observación 5.22. El teorema del valor intermedio para la derivada no es una consecuencia del teorema del valor intermedio. Sería necesario que la función fuera de clase C^1 para garantizarnos la continuidad de la derivada. Sin embargo, se pueden encontrar funciones derivables cuya derivada no es una función continua (véase el Ejemplo 5.28).

La primera aplicación del teorema del valor intermedio para la derivada es que el estudio de la monotonía se simplifica sobremanera. Una vez que sabemos que la derivada no se anula (en un intervalo), basta evaluar en un punto arbitrario para saber su signo.

Ejemplo 5.23. Estudiemos la monotonía de la función $f(x) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{1+x}$ para $x > 0$. Para ello, veamos cuándo se anula la derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = 0 \iff \sqrt{x} = \sqrt{1+x} \iff x = 1+x$$

Por tanto, f' no se anula nunca. El teorema del valor intermedio para las derivadas nos asegura que f es estrictamente monótona en \mathbb{R}^+ . En efecto, si la derivada cambiase de signo, tendría que anularse, cosa que no ocurre.

Una vez que sabemos que f' tiene el mismo signo en todo \mathbb{R}^+ , podemos averiguar dicho signo evaluando en cualquier punto. Por ejemplo $f'(1) > 0$, con lo que f es estrictamente creciente.

Lo que hemos visto en el ejemplo anterior, lo podemos repetir con cualquier función cuya derivada no se anule.

Corolario 5.24. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona.

Teorema 5.25 (de la función inversa). Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es estrictamente monótona, f^{-1} es derivable y $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

5.4.2 Reglas de L'Hôpital

Proposición 5.26 (1ª regla de L'Hôpital). Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Entonces, si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L, +\infty, -\infty.$$

Podemos aplicar este resultado al estudio de la derivabilidad de una función continua. Aplicando la primera regla de L'Hôpital al límite de la definición de derivada se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 5.27 (Condición suficiente de derivabilidad). Sea I un intervalo, $a \in I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I \setminus \{a\}$.

a) Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$, entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \infty$, entonces f no es derivable en a .

Ejemplo 5.28. Estudiemos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Esta función es continua y derivable en \mathbb{R}^* . No es difícil comprobar que f es continua en 0. Usando que el producto de una función acotada por otra que tiende a cero es cero, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Sabemos que $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$. Usando que la función coseno no tiene límite en $+\infty$ (recuerda que sabemos por el Ejemplo 4.12 que ninguna función periódica no trivial tiene límite en infinito), concluimos que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Para estudiar la derivabilidad en el origen nos queda únicamente la definición

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

La función f es un ejemplo de una función derivable pero cuya derivada no es una función continua y, al mismo tiempo, un ejemplo de que la regla de L'Hôpital no es una equivalencia.

Proposición 5.29 (2ª regla de L'Hôpital). Sea I un intervalo, $a \in I$, $f, g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$. Entonces, si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

5.5 Derivadas de orden superior

Al igual que podemos estudiar la derivabilidad de una función, podemos repetir este proceso y estudiar si la derivada es una función derivable. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, notaremos f' a la primera derivada, f'' a la segunda derivada y $f^{(n)}$ a la derivada de orden n .

Definición 5.30. Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es de *clase C^1* si es derivable y f' es una función continua.

Si n es un número natural cualquiera, diremos que f es de *clase C^n* si f es n veces derivable y la derivada n -ésima $f^{(n)}$ es continua.

Por último, si una función admite derivadas de cualquier orden diremos que es de *clase C^∞* .

Usaremos la siguiente notación

$$C^1(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f' \text{ y es continua}\},$$

$$C^2(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f'' \text{ y es continua}\} \dots$$

En general,

$$C^n(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f^{(n)} \text{ y es continua}\}, \quad y$$

$$C^\infty(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{R} : \text{existe } f^{(n)} \text{ para todo } n \text{ natural}\}.$$

Se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$C^\infty(A) \subsetneq \dots C^{n+1}(A) \subsetneq C^n(A) \subsetneq \dots C^2(A) \subsetneq C^1(A) \subsetneq C(A),$$

donde $C(A)$ denota al conjunto de las funciones continuas en A . Para comprobar que las inclusiones son estrictas, tenemos que encontrar funciones de clase n que no sean de clase $n+1$. ¿Cómo buscamos una función con estas propiedades? La respuesta es sencilla: consideremos la función valor absoluto (o cualquiera otra con un pico) y, aunque todavía no hemos hablado de ello, calculemos una primitiva. Dicha primitiva se puede derivar una vez (obtenemos la función valor absoluto) pero no se puede volver a derivar. Si queremos que se pueda derivar más veces sólo tenemos que integrar más veces. Esto es lo que hacemos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5.31. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

es de clase C^n pero no de clase C^{n+1} . No es difícil comprobar que la derivada de orden $n+1$ no es continua en a :

$$f'(x) = \begin{cases} (n+1)(x-a)^n, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} (n+1)n(x-a)^{n-1}, & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a, \end{cases}$$

y, sucesivamente,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (n+1)!(x-a), & \text{si } x \geq a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Esta función *no* es derivable en $x = a$ porque las derivadas laterales existen y no coinciden.

$$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} (n+1)!, & \text{si } x > a, \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Obsérvese que la función f no es de clase $n+1$ porque no existe la derivada no porque no sea continua. En este sentido, el Ejemplo 5.28 es “mejor”: la función era derivable pero la derivada no era continua.

Proposición 5.32. Sea I un intervalo, $a \in I$ y n , un número natural mayor o igual que 2. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase n verificando

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

a) Si n es impar, f no tiene un extremo relativo en a .

b) Si n es par:

i) si $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a ,

ii) si $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a .

Ejemplo 5.33. La función $f(x) = x^4 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene un mínimo absoluto en el origen pero no se puede encontrar un intervalo centrado en 0 dónde la derivada tenga un único cambio de signo.

5.6 Concavidad y convexidad

Definición 5.34. Sea I un intervalo de \mathbb{R} . Diremos que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* si verifica que

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in I$.

Diremos que la función es *cóncava* si se verifica la desigualdad opuesta, esto es,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Las definiciones de concavidad y convexidad son completamente independientes de que la función sea o no continua, derivable o cualquier otra condición de regularidad. Dicho esto, como ocurre con la monotonía, la derivada es una gran herramienta que nos va a permitir simplificar el estudio de la concavidad y convexidad.

Observación 5.35.

- a) La convexidad (análogamente la concavidad) tiene una clara interpretación geométrica. Debe verificarse que el segmento que une los puntos $(x, f(x))$, $(y, f(y))$ quede por encima de la gráfica de la función. Recuerda que dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$, el segmento que los une es el conjunto

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}.$$

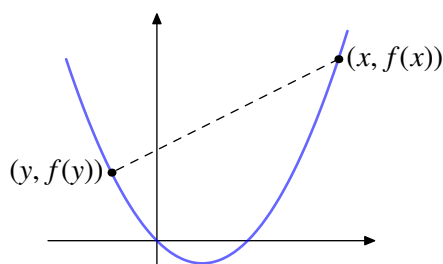


Figura 5.5 Función convexa

b) No está de más recalcar que f es convexa si, y sólo si, $-f$ es cóncava.

Proposición 5.36. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable. Entonces

a) Si $f''(x) > 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f convexa.

b) Si $f''(x) < 0$ para cualquier $x \in I$, entonces f cóncava.

Definición 5.37. Diremos que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *punto de inflexión* en $a \in I$ si en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

5.7 Algunas aplicaciones de la derivada

Ejemplos de máximos, mínimos, número de soluciones, desigualdades, estudio de una función, etc.

Imagen de una función

El teorema del valor intermedio junto con la monotonía permiten calcular la imagen de una función. Más concretamente, se cumple que

a) si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente entonces $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, y

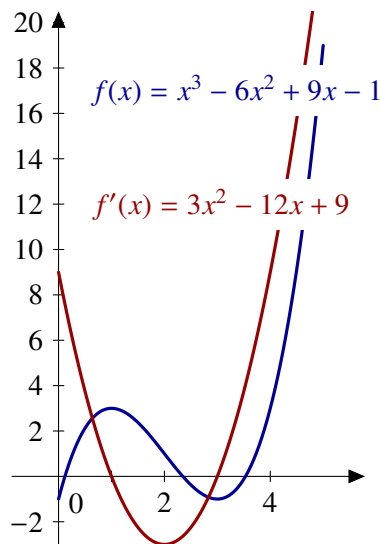
b) si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente entonces $f(]a, b[) =]\lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$.

Resultados similares se tienen para funciones decrecientes. Observa que necesitamos tres datos de la función para poder aplicarlos: continuidad, monotonía y que el dominio sea un intervalo. Observa que, hasta este momento, no ha aparecido la palabra derivada. Su papel es facilitarnos el estudio de la monotonía. Nada más.

Ejemplo 5.38. Veamos un ejemplo: vamos a calcular la imagen de la función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. En este caso, la función es derivable en todo su dominio, es un polinomio. ¿Cuáles son sus puntos críticos?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x = 1, 3.$$

Por tanto f es estrictamente monótona en $[0, 1]$, en $[1, 3]$ y en $[3, 5]$. Podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos para averiguar el carácter de la monotonía:



intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$[0, 1]$	0	+	est. creciente
$[1, 3]$	2	-	est. decreciente
$[3, 5]$	4	+	est. creciente

Con estos datos,

$$\begin{aligned} f([0, 5]) &= f([0, 1]) \cup f([1, 3]) \cup f([3, 5]) \\ &= [f(0), f(1)] \cup [f(3), f(1)] \cup [f(3), f(5)] \\ &= [-1, 3] \cup [-1, 3] \cup [-1, 19] = [-1, 19]. \end{aligned}$$

En particular, la función f tiene máximo y mínimo absolutos y ya sabemos su valor: -1 y 19 . También sabemos dónde se alcanzan: el mínimo en 0 y en 3 y el máximo en 5 .

Si en lugar del intervalo $[0, 5]$, hubiésemos considerado la función f definida en todo \mathbb{R} no sería necesario estudiar la monotonía. Piénsalo un momento. Se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = -\infty \text{ y que } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = +\infty.$$

Esto quiere decir que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.39. ¿Cuál es la imagen de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \arctan(x^9 - 2x^4 + \sin^3(2x - 3))?$$

Un vistazo a la derivada y te darás cuenta de que no parece fácil decidir la monotonía de la función. De nuevo, observa que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 - 2x^4 + \sin^3(2x - 3) &= -\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \text{ y que} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^9 - 2x^4 + \sin^3(2x - 3) &= +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(\mathbb{R}) \supset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. ¿Podría ser la imagen un conjunto mayor? En este caso no, ya que la función arcotangente no toma nunca valores fuera de dicho intervalo. En consecuencia $f(\mathbb{R}) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Extremos absolutos

Acabamos de ver cómo el estudio de la imagen de una función nos da automáticamente, si existen, los extremos absolutos. En el caso de que tengamos garantizado la existencia de dichos extremos *antes* de estudiar monotonía, es posible ahorrar algunos cálculos. Por ejemplo, la función del Ejemplo 5.38 tiene máximo y mínimo por la propiedad de compacidad: es una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Eso quiere decir que los extremos absolutos se tienen que alcanzar en uno de los siguientes puntos:

- puntos críticos,
- extremos del intervalo, o
- puntos donde la función no sea continua o no sea derivable.

En este caso, los extremos de la función $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ tienen que estar entre los siguientes: 0 , 1 , 3 y 5 . Hemos reducido el problema de averiguar el valor máximo o mínimo en todo un intervalo a averiguar el máximo o el mínimo de cuatro números. Sólo hace falta echar un vistazo para encontrarlos:

$$f(0) = -1, f(1) = 3, f(3) = -1, f(5) = 24.$$

Por tanto, el máximo absoluto se alcanza en 5 y el mínimo en 0 y en 1.

Desigualdades y ecuaciones

La demostración de una desigualdad o el estudio de el número de soluciones de una ecuación son sólo dos ejemplos que podemos resolver estudiando las funciones adecuadas. Por ejemplo, la validez de la desigualdad

$$\sin(x) < x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

la podemos ver de varias formas: pasamos restando o dividiendo y comprobamos que

a) la imagen de la función $f(x) = x - \sin(x)$ con $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ está contenida en \mathbb{R}^+ , o bien,

b) la imagen de la función $g(x) = \sin(x)/x$ con $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ está contenida en $]0, 1[$.

Dependiendo del tipo de funciones involucradas en la desigualdad, será más conveniente utilizar uno u otro método.

Calculemos cuál es la imagen de $f(x) = x - \sin(x)$ en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Como $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ en dicho intervalo, f es estrictamente creciente y, en consecuencia,

$$f\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)\right[= \left]0, \frac{\pi}{2} - 1\right[.$$

También podemos utilizar la monotonía para contar el número de soluciones de una ecuación. Para ello nos aprovecharemos de que una función continua y estrictamente monótona en un intervalo se anula (una única vez) si, y sólo si, cambia de signo en los extremos de dicho intervalo. Más concretamente,

sea $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. Se cumple que

a) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ o $\lim_{x \rightarrow b} f(x) < 0$, f no se anula en $]a, b[$, y

b) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$ y $\lim_{x \rightarrow b} f(x) > 0$, entonces f se anula *una única vez* en $]a, b[$.

5.8 Derivación numérica

A veces ocurre que calcular la derivada de una función f en un punto a del interior de dominio no es fácil, ya sea por la complejidad de la función dada, ya sea porque sólo dispongamos de una tabla de valores de f . En esta sección vamos a establecer métodos para calcular $f'(a)$. No es que vayamos a calcular la función derivada primera de f , sino que vamos a aproximar los valores de ésta en un punto dado a .

Hemos visto en este capítulo que la derivada de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en un punto $a \in I$ es

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h) - f(a)}{h}.$$

Si consideramos un valor de h suficientemente pequeño, podemos dar una primera aproximación

$$f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

5.8.1 Fórmulas de derivación numérica

En las fórmulas que vamos a estudiar en este apartado aparecen dos valores: el que aproxima $f'(a)$ y el error cometido. Aunque este último no se calcula explícitamente, sí se puede dar una acotación del mismo. Notemos que dicho error se obtiene gracias al desarrollo de Taylor de f centrado en a .

En lo que sigue, el parámetro h se suele tomar positivo y “pequeño”.

Fórmula de dos puntos

$$f'(a) = \frac{1}{h} (f(a) - f(a-h)) + \frac{h}{2} f''(\psi), \quad \psi \in]a-h, a[$$

Esta fórmula se llama *regresiva* porque utiliza información de f en a y en $a-h$.

$$f'(a) = \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) - \frac{h}{2} f''(\psi), \quad \psi \in]a, a+h[$$

Esta fórmula se llama *progresiva* porque utiliza información de f en a y en $a+h$.

El primer sumando de ambas fórmulas nos da una aproximación de $f'(a)$, y el segundo nos indica el error cometido.

Fórmula de tres puntos

$$f'(a) = \frac{1}{2h} (f(a+h) - f(a-h)) - \frac{h^2}{6} f'''(\psi), \quad \psi \in]a-h, a+h[$$

Esta fórmula se llama *central* porque utiliza información de f en $a-h$ y en $a+h$.

$$f'(a) = \frac{1}{2h} (-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)) + \frac{h^2}{3} f'''(\psi), \quad \psi \in]a, a+2h[$$

Esta fórmula es progresiva.

Fórmula de cinco puntos

$$f'(a) = \frac{1}{12h} (f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)) - \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\psi), \quad \psi \in]a-2h, a+2h[$$

Ésta es central.

$$f'(a) = \frac{1}{12h} (-25f(a) + 48f(a+h) - 36f(a+2h) + 16f(a+3h) - 3f(a+4h)) + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\psi),$$

con $\psi \in]a, a+4h[$. Esta es progresiva.

Unas observaciones sobre el término del error:

- Cuanto mayor es el exponente de h en la fórmula del error, mejor es la aproximación.
- Cuanto menor es la constante que aparece en la fórmula del error, mejor es la aproximación.

- c) Cuidado con los errores de redondeo cuando trabajemos con h excesivamente pequeño. Puede ocurrir que por la aritmética del ordenador, la aproximación numérica sea peor cuanto más pequeño sea h .

Veremos ejemplos más detallados en clase de prácticas.

5.9 Polinomio de Taylor

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $a \in I$, la recta tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

tiene cierto parecido con la función original. Más concretamente, ambas pasan por el punto $(a, f(a))$ y tienen la misma pendiente.

Si la función f se puede derivar más veces podemos plantearnos encontrar un polinomio que se ajuste con más exactitud a dicha función. Para ello podemos escoger varios caminos pero, en general, necesitamos imponer condicionales adicionales al polinomio. Por ejemplo: ¿existe un polinomio de grado 2 que coincida con la función, su derivada y la segunda derivada en un punto a ? Supongamos que el polinomio es $p(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2$. Si imponemos esas condiciones, obtenemos que:

$$a_0 = f(a),$$

$$a_1 = f'(a),$$

$$2a_2 = f''(a),$$

En general, el *problema de interpolación de Taylor* consiste en

Dado un punto a y $n + 1$ valores y_i , $i = 0, 1, \dots, n$, encontrar el polinomio P de grado menor o igual que n tal que $P^{(i)}(a) = y_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

En el caso de que los datos correspondan a una función, se trata de encontrar un polinomio que coincida con la función y sus derivadas hasta orden n en el punto a .

Definición 5.40. Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, n veces derivable en $a \in I$. El *polinomio de Taylor* de orden n centrado en a de la función f es

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

El *polinomio de McLaurin* es el polinomio de Taylor en el caso particular $a = 0$.

Ejemplo 5.41. Calcular el polinomio de Taylor de la función seno centrado en el origen. En primer lugar vamos a calcular las derivadas sucesivas de la función seno:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x), \\
f'(x) &= \cos(x), \\
f''(x) &= -\operatorname{sen}(x), \\
f'''(x) &= -\cos(x), \text{ y} \\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x).
\end{aligned}$$

Las derivadas a partir de orden 5 se vuelven a repetir. Expresar la derivada n -ésima así es, como mínimo, incómodo aunque tiene la ventaja de ser entenderse fácilmente. De otra forma,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}(x), \\
f'(x) &= \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\
f'''(x) &= \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),
\end{aligned}$$

y, por inducción, se tiene que

$$f^{(n)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Si sustituimos en el origen:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots$$

Se observa que todas las derivadas de orden par son nulas y las de orden impar van alternando los valores 1 y -1. El polinomio de Taylor de orden $2n - 1$ nos queda

$$\begin{aligned}
P_{2n-1}(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

El siguiente resultado se conoce como *fórmula infinitesimal del resto* y permite calibrar el parecido entre una función y su polinomio de Taylor cerca del punto donde estamos calculando el desarrollo.

Proposición 5.42 (Fórmula infinitesimal del resto). Sea I un intervalo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^n con $n \geq 1$ y P_n el polinomio de Taylor de f en $a \in I$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

A la diferencia entre la función y el correspondiente polinomio se le suele llamar *resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a* : $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

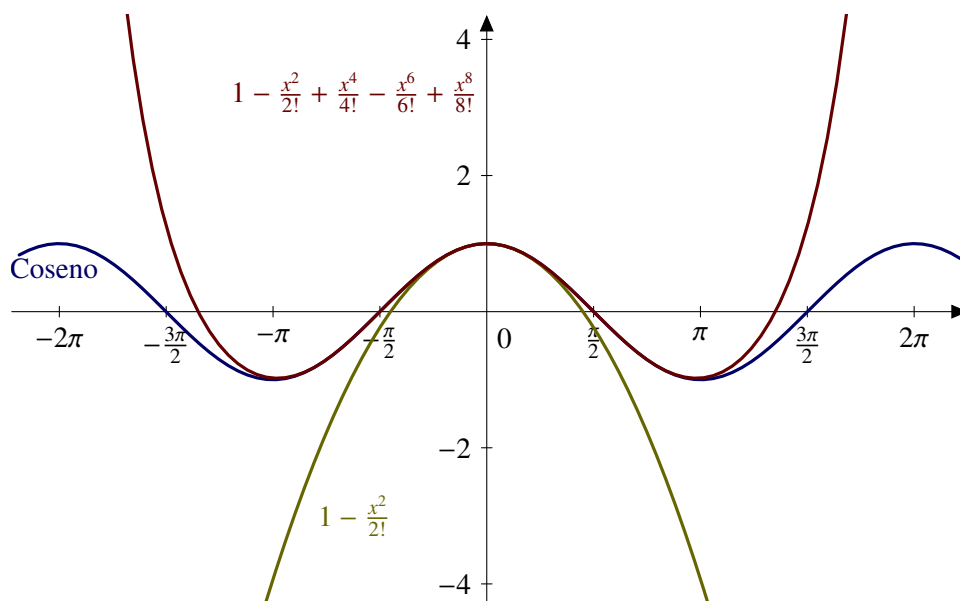


Figura 5.6 La función coseno y su polinomio de Taylor

Ejemplo 5.43 (Calcular). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(e - (1+x)^{\frac{1}{x}})$.

Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(e - (1+x)^{\frac{1}{x}} \right).$$

Consideremos la función $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = (1+x)^{1/x}$, $x > 0$ y $g(0) = e$, función que hemos estudiado en el Ejercicio ?? y obtuvimos que es derivable en cero y $g'(0) = -e/2$. Utilizando esta función y el teorema de Taylor, la función f podemos escribirla así:

$$f(x) = \frac{g(0) - g(x)}{x} = \frac{-g'(0)x - R_1(x)}{x} = \frac{e}{2} - \frac{R_1(x)}{x}, \forall x > 0$$

donde $R_1(x)$ representa el resto de Taylor de la función g en el cero, y de orden 1, por lo que sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_1(x)}{x} = 0$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{e}{2}.$$

Teorema 5.44 (Teorema de Taylor). Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Sea P_n el polinomio de Taylor de orden n en el punto a de la función f . Entonces, dado $x \in I$ existe $c \in]a, x[$ tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

La fórmula de Taylor permite dar una estimación del error que cometemos. Dejando aparte el valor de la derivada de orden $n+1$ de la función, estamos dividiendo por $(n+1)!$ lo que quiere decir que cuanto más alto sea el grado del polinomio mejor. Al mismo tiempo estamos multiplicando por $(x-a)^{n+1}$ lo cual quiere decir que cuanto mayor sea la distancia entre el punto donde desarrollemos, a , y el punto donde evaluemos, x , peor.

Ejemplo 5.45. La función coseno es uno de los ejemplos típicos de función que supuestamente conocemos. Decimos supuestamente porque en la práctica, salvo en unos cuantos valores destacados,

no sabemos calcularla. En cambio sí que podemos evaluar su polinomio de Taylor, por ejemplo, en el origen. Para ello usaremos las derivadas en el origen de $f(x) = \cos(x)$:

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, \text{ y } f^{(4)}(0) = 1.$$

El polinomio de Taylor en el origen de orden uno, dicho de otra manera, la recta tangente en 0 es

$$P_1(x) = 1.$$

Cerca del origen, el polinomio de Taylor y la función coseno no se diferencian demasiado, pero este parecido desaparece rápidamente cuando nos alejamos. Aumentemos el grado del polinomio de Taylor. La segunda derivada en el origen vale -1 y por tanto

$$P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

El polinomio de grado 4 es

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

que, como se puede ver la Figura 5.7, se diferencia aún menos de la función coseno.

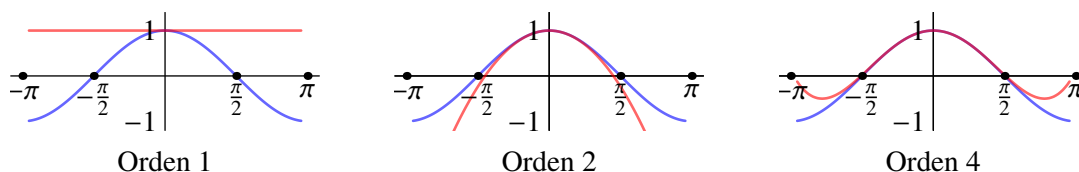


Figura 5.7 Polinomio de Taylor de la función coseno

A la vista de este ejemplo puede pensarse que si aumentamos el orden del polinomio de Taylor el error que cometemos será cada vez más pequeño y veremos que para la función coseno de hecho es así.

La función exponencial coincide con su derivada y, por tanto, con su derivada n -ésima. Su polinomio de Taylor en el origen es

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!}.$$

Por ejemplo, si queremos calcular el número e , el error será

$$R_n(1) = f(1) - P_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} (1-0)^{n+1},$$

donde $f(x) = e^x$ y c es un punto intermedio entre $a = 0$ y $x = 1$. No sabemos con exactitud cuanto vale e^c , lo que sí sabemos es que la exponencial es una función creciente y entre 0 y 1 está acotada por 3, por ejemplo. Por tanto

$$|R_n(1)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}.$$

Por tanto, utilizando dicha cota del error, tenemos

n	P_n(1)	error R_n(1)
0	1	3
1	2=1+1	$\frac{3}{2}$
2	2.5 = 1 + 1 + $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$2\frac{5}{6} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
4	≈ 2.708	0.025

Tabla 5.1 Aproximaciones del número e

Para poder calcular este polinomio lo único que necesitamos es la existencia de derivadas de cualquier orden en un punto a del dominio. En este ambiente, es natural plantearse preguntas como

- ¿Cualquier función de clase C^∞ es el límite en algún sentido de su polinomio de Taylor cuando el orden tiende a infinito?
- ¿Qué ocurre con funciones que presentan problemas de regularidad como, por ejemplo, la existencia de puntos de discontinuidad o en los que no existan todas las derivadas?
- Si el polinomio de Taylor no se parece a la función original siempre, ¿hay al menos algunos puntos en los que sí se parezca? Y, en ese caso, ¿cómo de grande es dicho conjunto?, ¿es un intervalo?, ¿es abierto, cerrado,...

5.10 Ejercicios

5.10.1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 5.1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

- $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen
- $y = \cos(x)$ en $(\frac{\pi}{2}, 0)$
- $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$
- $y = |x|$ en $(1, 1)$

Ejercicio 5.2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- $y = \sin(x + 3)$
- $y = \cos^2(x)$
- $y = \frac{1}{\cos(x)}$
- $y = \sec(x)$
- $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

Ejercicio 5.3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$
- $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$
- $f(x) = x^4 e^x \log(x)$
- $f(x) = x^x$
- $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$

Ejercicio 5.4. Comprueba que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Ejercicio 5.5. Calcula los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX .

Ejercicio 5.6. Sea $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - \sin(x)) - 2 \log(\cos(x))}{\sin(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

E **Ejercicio 5.7.** Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\log(x)}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Calcula la imagen de la función.

5.10.2 Teorema del valor medio

Ejercicio 5.8. Prueba que $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

E **Ejercicio 5.9.** Demuestra que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo.

E **Ejercicio 5.10.** Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

Ejercicio 5.11. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

E **Ejercicio 5.12.** Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Ejercicio 5.13. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.
- Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

E Ejercicio 5.14. Calcula la imagen de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.

Ejercicio 5.15. Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

b) Calcula la imagen de f .

Ejercicio 5.16. Calcula la imagen de $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Ejercicio 5.17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

5.10.3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 5.18. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Ejercicio 5.19. Calcula los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \sin(2x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)}$

Ejercicio 5.20. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + 2 \sin(3x))^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \sin(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \cos(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

Ejercicio 5.21. Estudia el comportamiento de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2, +\infty[$, $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $\alpha = 2$.

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1}$, $\alpha = 1$.

c) $A =]1, +\infty[$, $f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \log(x)}$, $\alpha = 1$.

Ejercicio 5.22. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \frac{\log(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}}$,

b) $g(x) = (a^x + x)^{1/x}$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 5.23. Estudia el comportamiento en el punto cero de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{x}}$,

c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

b) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (\sin(x) + \cos(x))^{1/x}$

Ejercicio 5.24. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

5.10.4 Optimización

Ejercicio 5.25. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $y = 6 - 2x - x^2$

b) $y = 3x^4 - 4x^3$

c) $y = (x - 1)^3$

Ejercicio 5.26. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Ejercicio 5.27. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r .

Ejercicio 5.28. Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

Ejercicio 5.29. ¿Cuál es la longitud mínima del segmento que tiene un extremo en el eje x , otro extremo en el eje y , y pasa por el punto $(8, 1)$?

Ejercicio 5.30. Demuestra que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

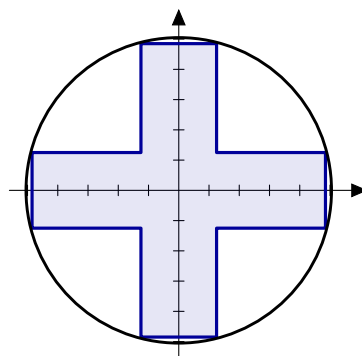
Ejercicio 5.31. Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Ejercicio 5.32. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Halla las dimensiones del rectángulo para que

a) el área sea máxima,

b) el perímetro sea máximo.

Ejercicio 5.33. Calcula el punto (a, b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.



- Ⓔ **Ejercicio 5.34.** A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12cm. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener de la pieza restante.

5.10.5 Polinomio de Taylor

Ejercicio 5.35. Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x - 2)$.

Ejercicio 5.36. Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e}$,

b) $\alpha = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 5.37. Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt{102}$ con un error menor que 10^{-2} .

- Ⓔ **Ejercicio 5.38.** Calcula una aproximación de $\cosh(\frac{1}{2})$ con un error menor que 10^{-4} .

- Ⓔ **Ejercicio 5.39.** Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.