TEMA 1

Conjuntos ordenados.

Ejercicio 1.1. ¿Cuántos órdenes existen sobre un conjunto de dos elementos? ¿Y sobre uno con tres? ¿ Y con cuatro? Resuelve el problema haciendo los diagramas de Hasse correspondientes.

Ejercicio 1.2. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

1. $(D(40),|)$, $A = \{4,5,10\}$ y $B = \{2,4,8,20\}$
2. $(D(20),|)$, $A = \{4,10,2\}$ y $B = D(20) \setminus \{1\}$
3. $(D(48),|)$, $A = \{2,4,6,12\}$ y $B = \{3,6,8,16\}$
4. $(D(60),|)$, $A = \{2,5,6,10,12,30\}$ y $B = \{2,3,6,10,15,30\}$.

Ejercicio 1.3. Si ordenamos todos los elementos del conjunto $\{2,3,4,\dots,98,99,100\}$ mediante la relación de divisibilidad, ¿cuántos elementos maximales resultan? ¿Y minimales?

Ejercicio 1.4. Dibuja el diagrama de Hasse de $\mathscr{P}(\{a,b,c,d\})$. Encuentra los elementos minimales y maximales de $\mathscr{P}(\{a,b,c,d\}) \setminus \{\emptyset, \{a,b,c,d\}\}$.

Ejercicio 1.5. Dados los conjuntos ordenados $(\mathrm{D}(24),|)$ y $(\mathrm{D}(108),|)$, consideramos el correspondiente orden producto cartesiano sobre el conjunto $\mathrm{D}(24) \times \mathrm{D}(108)$. Calcula los elementos distinguidos para el subconjunto $A = \{(8,6),(12,9),(6,36)\}$. A continuación haz lo mismo respecto al orden lexicográfico.

Ejercicio 1.6. Calcula los elementos distinguidos de cada uno de los subconjuntos siguientes de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con el orden producto cartesiano:

1. $\{(-2,-5),(1,2),(4,3)\}$.
2. $\{(-2,-5),(7,11),(12,29)\}$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 9\}$.

Ejercicio 1.7. Sean p y q dos números primos distintos. Dibuja el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados: $(D(p^2),|)$, $(D(p^3),|)$, $(D(p\cdot q),|)$, $(D(p^2\cdot q),|)$, $(D(p^2\cdot q^2),|)$, $(D(p^3\cdot q),|)$, $(D(p^3\cdot q^2),|)$.

Ejercicio 1.8. Sean p y q dos números primos distintos. Dibuja el diagrama de Hasse de cada uno de los siguientes conjuntos ordenados: $D(p)\times D(q)$, $D(p^2)\times D(q)$, $D(p^2)\times D(q^2)$, $D(p^3)\times D(q)$, $D(p^3)\times D(q^2)$ (en cada caso estamos considerando el orden producto). Compara estos diagramas con los obtenidos en el ejercicio anterior.

Ejercicio 1.9. Dibuja los diagramas de Hasse de: $D(20)\times D(9)$, $D(180)$, $D(10)\times D(21)$, $D(210)$, $D(6)\times D(15)$, $D(90)$, $D(60)\times D(75)$, $D(4500)$.

¿Podrías decir qué condiciones deben cumplir m y n para que los retículos $D(m)\times D(n)$ y $D(m\cdot n)$ sean isomorfos?.

TEMA 1

Retículos.

Ejercicio 2.1. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

Ejercicio 2.2. Da ejemplos de retículos finitos que verifiquen, cuando ello sea posible, ninguna, una, y dos de las siguientes propiedades: distributivo, complementado.

Ejercicio 2.3. Sea L un retículo distributivo. Demuestra que si $a, b, c \in L$ y verifican que $a \vee c = b \vee c$ y $a \wedge c = b \wedge c$ entonces $a = b$, es decir, se verifica una especie de ley simplificativa. Da ejemplos de retículos donde se ponga de manifiesto que en general no se verifica la anterior ley simplificativa.

Ejercicio 2.4. Consideramos el retículo $D(24) \times D(72)$. Para cada uno de los conjuntos siguientes, indica cuáles serían los elementos distinguidos (máximo, maximales, cotas superiores, etc.)

a) $\{(x, x) : x \in D(24)\}$.

b) $\{(2, 1), (12, 9), (8, 6), (6, 12)\}$.

c) $\left\{(x, \frac{72}{x}) : x \in D(24)\right\}$.

d) $\{(x, 3x) : x \in D(24)\}$.

Ejercicio 2.5. Consideramos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ el orden producto. Para cada uno de los siguientes subconjuntos, halla el máximo, el mínimo, las cotas superiores, las cotas inferiores, el supremo, el ínfimo, los elementos maximales y los elementos minimales.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 5\}$.

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{x, y\} \leq 3\}$.

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \leq 5\}$.

Ejercicio 2.6. Dado un retículo L y un subconjunto no vacío S de L, se dice que S es un *subrretículo* de L si para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$ se verifica que $s_1 \vee s_2 \in S$ y $s_1 \wedge s_2 \in S$. Comprueba que el subconjunto $\{2, 10, 14, 140, 350\}$ no es subrretículo de $(\mathrm{D}(1400), |)$.

Ejercicio 2.7. Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, estudia cuáles de los siguientes subconjuntos son subretículos de $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$:

1. $A = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}\}$.

2. $B = \{\{4\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 6\}, \{1, 2, 4, 5, 6\}\}$.

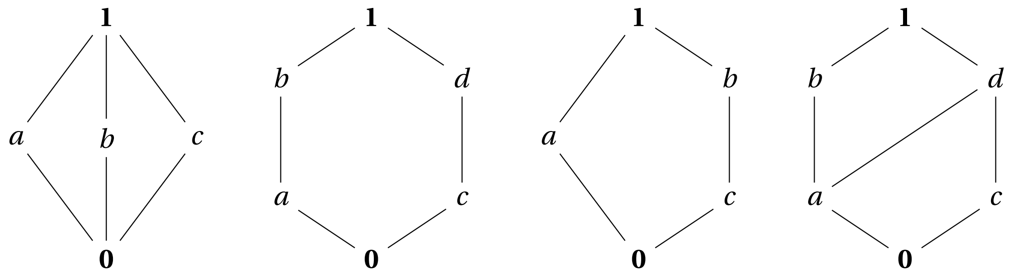
Ejercicio 2.8. Sea $X = \{1,2,3,4\}$. Consideramos los subconjuntos de X que tienen un número par de elementos. Al conjunto formado por todos estos subconjuntos, lo llamaremos $\mathscr{Y}$. Demuestra que $\mathscr{Y}$, con el orden dado por la inclusión, es un retículo, pero no es subrretículo de $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ ¿Es $\mathscr{Y}$ un retículo distributivo? ¿Y complementado?

Ejercicio 2.9. ¿Para cuántos números naturales $n \geq 1$ es $(\mathsf{D}(n), |)$ un subretículo de $(\mathsf{D}(1944), |)$?

Ejercicio 2.10. Un retículo $(L, \vee, \wedge)$ es *distributivo* si verifica las *leyes distributivas*, es decir, para cualesquiera $a, b, c \in L$:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

De los conjuntos ordenados siguientes representados mediante un diagrama de Hasse, estudia cuáles son retículos distributivos:



Ejercicio 2.11. Justifica que cualquier conjunto totalmente ordenado es un retículo distributivo.

Ejercicio 2.12. Un retículo L se dice *acotado* si existe el máximo y el mínimo de L. En tal caso ambos elementos se suelen denotar por $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$, respectivamente. En un retículo acotado L, se dice que un elemento $a \in L$ es *complementado* si existe al menos un elemento $b \in L$, denominado *complemento* de a, tal que $a \vee b = \mathbf{1}$ y $a \wedge b = \mathbf{0}$. Para cada uno de los retículos del Ejercicio 2.10 determine los elementos complementados y para cada uno de ellos obtén todos sus complementos.

Ejercicio 2.13. Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo distributivo y acotado. Justifica las afirmaciones siguientes.

- El subconjunto de los elementos de L que tienen complemento es un subretículo de L.
- Todo elemento de L tiene a lo sumo un complemento.

Ejercicio 2.14. Encuentra todos los elementos que tienen complemento en los retículos $D(24)$, $D(36)$, $D(100)$, $D(108)$, $D(210)$, $D(420)$, $D(1400)$, $D(1617)$, $D(11088)$, $D(23100)$. Estudia si estos elementos forman un subrretículo en cada uno de los casos.

TEMA 1

Algebras de Boole.

Ejercicio 3.1. Sea I el conjunto de los números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[0,1]$. Para todo $a, b \in I$ definimos $a \vee b = max\{a,b\}$, $a \wedge b = min\{a,b\}$ y $\overline{a} = 1 - a$ ¿Es I con estas operaciones un álgebra de Boole? Razona la respuesta.

Ejercicio 3.2. Sea A un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$, definimos la operación diferencia simétrica como $a \oplus b = (a \wedge b^*) \vee (a^* \wedge b)$. Demuestra que se verifican las siguientes identidades:

1. $a \oplus b = b \oplus a$
2. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3. $a \wedge (b \oplus c) = (a \wedge b) \oplus (a \wedge c)$
4. $a \oplus a = 0,\ a \oplus 0 = a,\ a \oplus a^* = 1,\ a \oplus 1 = a^*$
5. $x \oplus a = b$ si y sólo si $x = a \oplus b$
6. $a = b$ si y sólo si $a \oplus b = 0$

Ejercicio 3.3. Sea $D(70)$ el conjunto de los números naturales que son divisores de 70. En $D(70)$ se considera la relación de orden dada por

$$a \leq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b$$

1. Representa gráficamente este conjunto ordenado.
2. ¿Tiene $(D(70), \leq)$ estructura de retículo?
3. ¿Es un retículo complementado?
4. Calcula $35 \wedge (2 \vee 7)$ y $(2 \vee 7) \wedge (14 \wedge 10)$
5. ¿Es un álgebra de Boole? En caso afirmativo encuentra sus átomos.

Ejercicio 3.4. Utilizando las leyes del álgebra de Boole, demuestra que

$$(a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (\overline{a} \wedge c).$$

Ejercicio 3.5. Demuestra las *leyes de De Morgan* a partir de los axiomas de álgebra de Boole.

Ejercicio 3.6. Comprueba que el retículo $(\mathsf{D}(210), |)$ es un álgebra de Boole y a continuación evalúa las siguientes expresiones:

$$30 \vee (15 \wedge 10), \quad 14^* \wedge 21, \quad (6^* \vee 35)^* \vee 10, \quad ((3 \vee 10)^* \vee 2)^*.$$

Expresa los elementos 21 y 35 como supremo de átomos y como ínfimo de coátomos (complemento de los átomos).

Ejercicio 3.7. Sea $\mathscr{F}_n = Ap(\mathbb{B}^n, \mathbb{B})$ el álgebra de Boole de las funciones booleanas elementales n-arias. Interpreta geométricamente las funciones mintérminos y la formas disyuntivas canónicas, reducidas y no simplificables.

Ejercicio 3.8. Sean $f, g, h, t : \mathbb{B}^3 \longrightarrow \mathbb{B}$ las funciones definidas mediante la tabla:

x	y	z	f	g	h	t
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0

Halla sus formas canónicas y reducidas. Encuentra también las formas disyuntivas no simplificables.

Ejercicio 3.9. Halla las formas disyuntivas canónica y reducida de la función f dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3$. Encuentra sus formas disyuntivas no simplificables.

Ejercicio 3.10. Dada la función booleana $f : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ definida por

$$f(x, y, z, t) = xyzt \vee xy^*zt \vee xyzt^* \vee xy^*zt^* \vee x^*y^*z^*t^* \vee x^*yz^*t^* \vee x^*y^*z^*t \vee x^*yz^*t$$

1. Demuestra que $f(x, y, z, t) = xz \vee x^*z^*$ haciendo uso de las propiedades de álgebra de Boole.
2. Verifica el resultado anterior calculando las formas disyuntivas no simplificables.

Ejercicio 3.11. Dadas las siguientes funciones booleanas, represéntalas mediante la forma canónica y encuentra formas disyuntivas óptimas (no simplificables).

x	y	z	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	*l*	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

x	y	z	t	f_4	f_5	f_6
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	*l*	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	*l*	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Ejercicio 3.12. En cada caso, encuentra la expresión más sencilla que detecte, dentro del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ los números que cumplen:

1. son múltiplos de 2;
2. son múltiplos de 3;

3. son múltiplos de 4.

Considera $\{0,1,2,\dots,15\}$ como los elementos del 4-cubo.

Ejercicio 3.13. Un examen de tipo test consta de 4 preguntas. Las respuestas correctas son:

Pregunta 1: SI, Pregunta 2: NO, Pregunta 3: SI, Pregunta 4: SI.

Construye una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos (se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas).

Ejercicio 3.14. Un comité formado por tres personas toma decisiones mediante votación por mayoría. Cada miembro del comité puede "votar SI" pulsando un botón. Diseña una red lógica mediante la cual se encienda una luz cuando y sólo cuando haya una mayoria de "votos SI".

Ejercicio 3.15. Calcula la forma normal canónica disyuntiva de la aplicación $f(x,y,z) = (x \uparrow y) \downarrow z$.

Ejercicio 3.16. Calcula la forma normal conjuntiva y la forma normal disyuntiva para la función booleana $f(x,y,z) = (x^* y + z)^* + xz^*$.

Ejercicio 3.17. Se desea construir un circuito que tendrá como entradas cuatro líneas que suministran los dígitos de un número binario $n = (a_3 a_2 a_1 a_0)_2$ y tendrá como salida una línea que tomará el valor 1 cuando el número n sea múltiplo de tres o de cuatro, y 0 en otro caso. Obtén la función booleana f que rige el funcionamiento de dicho circuito. A continuación minimiza la expresión de f.

Ejercicio 3.18. Sea f la función booleana de cuatro variables que toma el valor 1 exclusivamente para $(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,1,0)$ y $(1,1,1,1)$. Aplica el método de Quine-McCluskey para para obtener todas las formas irredundantes posibles de f.

Ejercicio 3.19. Obtén una expresión de la función booleana $f(x,y,z) = xy + z^*$ en la que sólo aparezcan los operadores lógicos suma y complemento. A continuación obtén otra expresión de f en la que sólo aparezcan los operadores producto y complemento.

Ejercicio 3.20. Justifica que cualquier función booleana puede ser expresada usando exclusivamente las operaciones suma y complemento. Análogamente, usando las operaciones producto y complemento.

Ejercicio 3.21. Sea A un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$, definimos las operaciones binarias:

- a **NAND** b = $a \uparrow b = (a \wedge b)^*$.
- a **NOR** b = $a \downarrow b = (a \vee b)^*$.

Demuestra que todas las operaciones del álgebra de Boole se pueden expresar en función de **NAND**. Pruebalo también para **NOR**.

Ejercicio 3.22. Expresa la función booleana del Ejercicio 3.19 en términos únicamente del operador **NAND**. Haz lo mismo ahora con el operador **NOR**.