Teoria de Algoritmos

Capitulo 1: La Eficiencia de los Algoritmos

Tema 3: **Resolución de Recurrencias Asintóticas**

- Inducción
- Resolución de recurrencias con función característica
- Ecuaciones homogéneas
- Ecuaciones no homogéneas
- Cambio de variable
- Transformaciones del rango

Motivación

- Las ecuaciones recurrentes son frecuentes en Teoría de Algoritmos
- La inducción se usa en las demostraciones matemáticas asociadas a algoritmos recursivos
  - e.g. quicksort, búsqueda binaria
- También se usa para obtener estimaciones de los tiempos de ejecución
  - A partir de los tamaños de los datos de entrada
    - e.g. El tiempo crece ***linealmente*** con el numero de datos que se procesan
    - e.g. Tiempos basados en las veces que se ejecuta un lazo

El método inductivo

- La inducción se usa para resolver problemas como:
  - ¿Es cierto S(n) para todos los valores de n?
    - generalmente para todo n >= 0 o todo n >=1
- Ejemplo:
  - Sea S(n) "$n^2 + 1 > 0$"
  - Es cierto S(n) para todo n >= 1?

S(n) puede ser mucho mas complicado, por ejemplo un programa que se tenga que ejecutar para un valor *n*

El método inductivo

- ¿Como demostramos la veracidad o falsedad de S(n)?

- Una forma sería hacer la demostración para cada valor de n:
  - ¿Es S(1) cierto?
  - ¿Es S(2) cierto?
  - ...
  - ¿Es S(10,000) cierto?
  - ... ¡¡¡El método de la fuerza bruta!!!

No es muy práctico

El método inductivo

- La inducción es una técnica para demostrar rápidamente la veracidad o falsedad de S(n) para todo n
  - Solo hay que hacer dos cosas
- Primero demostrar que **S(1) es cierto**
- Segundo, suponer que S(n) es cierto, y usarlo para probar que S(n+1) es cierto
- Entonces S(n) es cierto para todo n>=1.

Ejemplo

- Demostrar que S(n): "$n^2 + 1 > 0$" $\forall n \geq 1$
- Primero probamos que S(1) es verdadero
- $S(1) = 1^2 + 1 = 2$, que es > 0
  - Así S(1) es verdadero
- Ahora probamos que S(n+1) es cierto supuesto que S(n) lo es
- Si S(n) es cierto, entonces $n^2+1 > 0$, luego
  - $S(n+1) = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 1 +1 = (n^2 + 1) + 2n + 1$
  - Como $n^2 + 1 > 0$, entonces $(n^2 + 1) + 2n + 1 > 0$
  - así S(n+1) es cierto, dado que S(n) lo era
  - Por tanto S(n) --> S(n+1)

La Inducción mas formalmente

- Tres hechos:
  - 1. Hay que demostrar una **propiedad** S(n)
    - la propiedad debe estar planteada sobre un valor entero n
  - 2. Una **base** para la demostración.
    - Esta es la propiedad S(b) para algún entero. A menudo b = 0, 1.
  - 3. Una **etapa inductiva** para la demostración.
    Se trata de demostrar que S(n+1) se sigue de S(n)
    "S(n) --> S(n+1)" $\forall$n .
- A S(n) se le suele llamar ***Hipótesis de Inducción***
  - Se concluye que S(n) es cierto para todo n >= b
    - S(n) podría no ser cierto para algún < b

Ejemplo 1

- Demostrar S(n): $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \geq 1$
  - e.g. 1+2+3+4 = (4*5)/2 = 10
- ***Base.*** S(1), n = 1 $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ 1 = (1*2)/2
  - ***Inducción.*** Suponemos que S(n) es cierto. Demostramos S(n+1), es decir:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n+1(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

Ejemplo 2

- Probar S(n): $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \; \forall n \geq 0$
  - e.g. 1+2+4+8 = 16-1
- ***Base***. S(0), n = 0 $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0$ $2^0 = 2^1 - 1$
- ***Inducción***. Suponemos S(n) cierta, y probamos S(n+1), que es:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1}$$

Ejemplo 3

- Demostrar S(n): $n! >= 2^{n-1}\ \forall n \geq 1$
  - e.g. $5! >= 2^4$, o lo que es lo mismo $120 >= 16$

- ***Base***. S(1), n = 1: $1! >= 2^0$
  así tenemos $1 >= 1$
- ***Inducción***. Suponemos S(n) cierta y probamos S(n+1), es decir: $(n+1)! >= 2^{(n+1)-1} >= 2^n$

$$(n+1)! = n! * (n+1)$$

Inducción parcial constructiva

- Supongamos la hipótesis **(parcialmente especificada)** de que cualquier entero >= 24 puede escribirse como 5a+7b para enteros no negativos a y b.
- La idea es aplicar el método inductivo y a lo largo de las demostraciones que hay que realizar, reunir información sobre a y b como para que se verifique la hipótesis inicial

Pueden encontrarse ejemplos en el libro de Brassard-Bratley

Resolución de recurrencias

- **Método de la función característica**
  - **Recurrencias homogéneas**

$$a_0\, t_n + a_1\, t_{n-1} + \dots + a_k\, t_{n-k} = 0$$

  - Los ti son los valores que buscamos. La recurrencia es lineal porque no contiene términos de la forma $t_i\, t_{i+1}$, t_i^2 ,
  - Los coeficientes a son constantes, y
  - La recurrencia es homogénea porque la combinación lineal de los t_i es igual a cero.
- La intuición nos sugiere intentar una solución de la forma

$$t_n = x^n$$

donde x^n es una constante aun desconocida

Recurrencias homogéneas

- Si ensayamos esa solución, obtenemos,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} = 0$$

- Esta ecuación se satisface si $x = 0$, o en caso contrario si

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

- Esta ecuación de grado k en x es la que se llama la **ecuación característica de la recurrencia**.
- Si las k raíces de esta ecuación, $r_1,\dots,r_k$, son todas distintas (¡podrían ser números complejos!), entonces

$$t_n = \Sigma_{i=1..n}\, c_i r_i^n$$

es una solución de la recurrencia, donde las k constantes c_i se determinan mediante condiciones iniciales. (Necesitamos exactamente k condiciones iniciales para determinar los valores de esas k ctes).

Ejemplo

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0,\ t_0 = 0,\ t_1 = 1.$$

- Ecuación característica,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

- Raíces: -1 y 4. Por tanto, la solución general tiene la forma,

$$t_n = c_1 (-1)^n + c_2 4^n$$

- El uso de las condiciones iniciales produce,

$$c_1 + c_2 = 0, \quad n = 0$$
$$-c_1 + 4c_2 = 1, n = 1$$

- $c_1 = -1/5$ y $c_2 = 1/5$, obteniendo finalmente,

$$t_n = (1/5)[4^n - (-1)^n]$$

Ejemplo

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2},\ n \geq 2,\ t_0 = 0 \text{ y } t_1 = 1.$$

- Esta recurrencia se corresponde con el algoritmo para calcular el termino general de la sucesión de Fibonacci
- Puede escribirse como

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

- Ecuación característica: $x^2 - x - 1 = 0$
- Obtenemos,

$$t_n = (1/\sqrt{5})(r_1^n - r_2^n) \qquad r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Es fácil demostrar que este es el mismo resultado que el obtenido por De Moivre, con su formula para calcular números de la sucesión de Fibonacci

Recurrencias homogéneas

- Las raíces de la ecuación característica no son distintas.
- Sea $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ y r una raíz múltiple. Para cualquier valor $n \geq k$, consideramos el polinomio,

$$h(x) = x[x^{n-k}p(x)]' = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \ldots + a_k(n-k)x^{n-k}$$

- Sea $q(x)$ el polinomio tal que $p(x) = (x-r)^2q(x)$.
- Entonces,

$$h(x) = x[(x-r)^2x^{n-k}q(x)]' = x[2(x-r)x^{n-k}q(x) + (x-r)^2[x^{n-k}q(x)]']$$

- Como $h(r) = 0$, se demuestra que,

$$a_0nr^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \ldots + a_k(n-k)r^{n-k}$$

es decir, $t = nr^n$ es también una solución

Recurrencias homogéneas

- Mas generalmente, si m es la multiplicidad de la raíz r, entonces

  $t_1 = r$, $t_2 = nr^n$, $t_3 = n^2r^n$,..., $t_m = n^{m-1}r^n$

  son todas las posibles soluciones de la ecuación.
- La solución general es una combinación lineal de estos términos y de los términos contribuidos por otras raíces de la ecuación característica.
- Así, de nuevo hay k constantes a determinar por las condiciones iniciales

Ejemplo

$$\mathbf{t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3},\ n \geq 3,\ t_0=0,\ t_1=1 \text{ y } t_2=2.}$$

- Esta recurrencia puede escribirse,

$$t_n - 5\,t_{n-1} + 8\,t_{n-2} - 4\,t_{n-3} = 0$$

- Característica: $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$
- Raíces: 1 (simple) y 2 (doble).
- Por tanto, la solución general es $t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$.
- Las condiciones iniciales dan,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \quad &= 0,\ n = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2\,c_3 &= 1,\ n = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 8\,c_3 &= 2,\ n = 2 \end{aligned}$$

- Así, $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = -(1/2)$ y $\mathbf{t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2}$.

Recurrencias no homogéneas

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

- El primer miembro es lo mismo que el de las homogéneas, pero en el segundo tenemos $b^n p(n)$, donde
  - b es una constante, y
  - p(n) es un polinomio en n de grado d.
- Por ejemplo, la recurrencia podría ser,

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

en cuyo caso b = 3 y p(n) = 1 es un polinomio de grado cero

Recurrencias no homogéneas

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

- La ecuación característica que le corresponde se organiza como

(Ecuación característica de la homogénea)$(x-b)^{d+1} = 0$

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

y se resuelve como en el caso de las homogéneas

- Si $t_n - 2t_{n-1} = 3^n$ entonces $(x-2)(x-3) = 0$
- Se aplican las mismas normas para raíces simples o múltiples que en el caso anterior

Ejemplo

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)\, 3^n$$

- Ecuación característica

$$(x-2)(x-3)^2 = 0$$

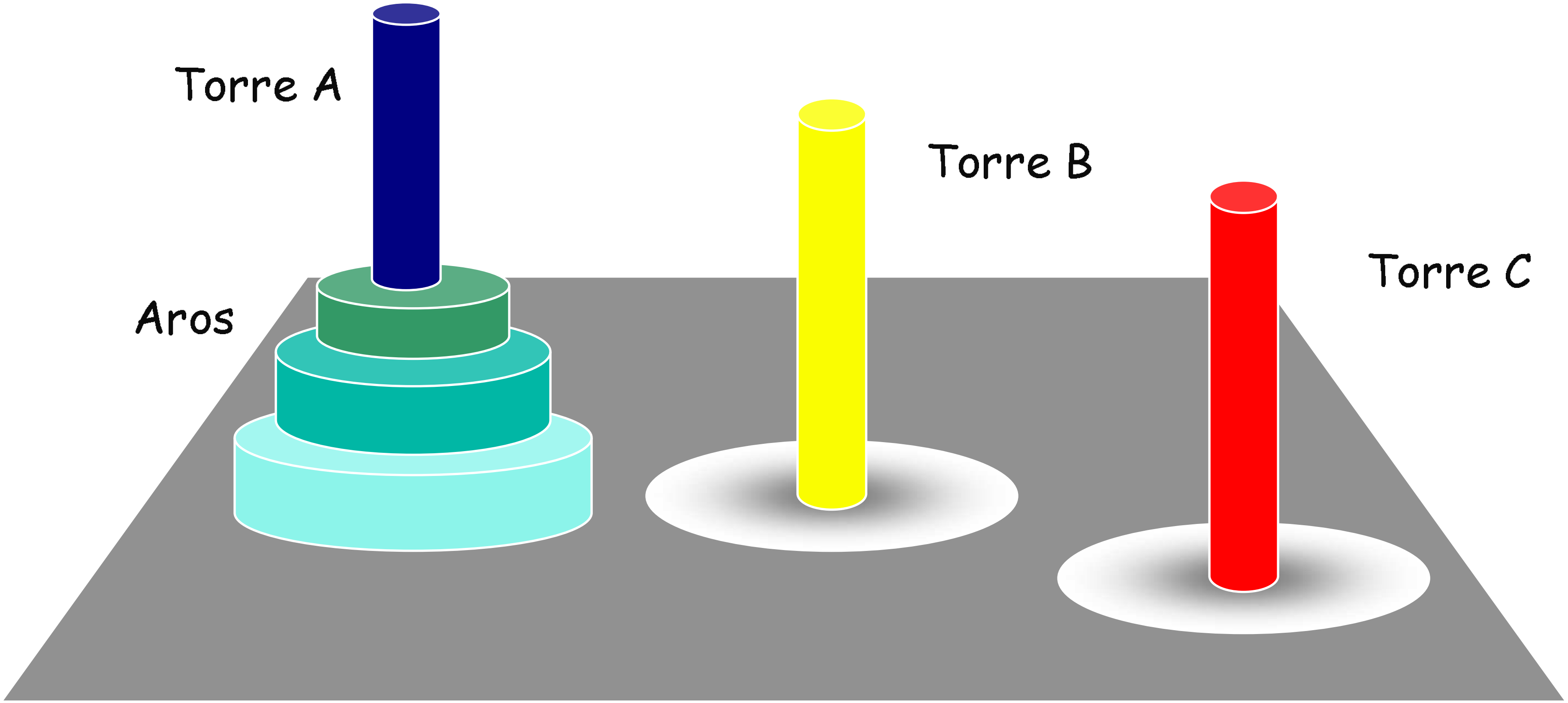
- Y por tanto la solución es

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

- Las constantes solo son útiles para conocer la solución con exactitud, pero no de cara a saber el orden del algoritmo del que proviene la recurrencia que estamos resolviendo
- Lo normal es conocer las condiciones iniciales a partir de datos experimentales

Ejemplo: Las Torres de Hanoi

Problema: trasladar todos los aros de la barra A a la B.



$$t_n = 2t_{n-1} + 1,\ n \geq 1,\ \text{con } t_0 = 0 \Rightarrow t_n = c_1 1^n + c_2 2^n$$

Ejemplo

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

- Puede rescribirse como $t_n - 2t_{n-1} = n$
- $b = 1$ y $p(n) = n$ un polinomio de grado 1.
- Ecuación característica: $(x-2)(x-1)^2 = 0$
- Raíces 2 (con multiplicidad 1) y 1 (con multiplicidad 2).
- Solución general: $t_n = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n1^n$
- En el problema buscamos una solución para la que $t_n \geq 0$ para cualquier n. Si esto es así podemos concluir inmediatamente que t_n debe ser $O(2^n)$.

Generalización

- Sea

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots$$

donde las b_i son constantes distintas y los $p_i(n)$ son polinomios en n de grado d_i respectivamente.

- Basta escribir la ecuación característica,

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k)(x-b_1)^{d1+1} (x-b_2)^{d2+1} = 0$$

- Por ejemplo $t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$, $n \geq 1$, con $t_0 = 0$.
- $b_1 = 1$, $p_1(n) = n$, $b_2 = 2$, $p_2(n) = 1$.
- Ecuación característica: $(x-2)(x-1)^2 (x-2) = 0$,
- Solución general: $t_n = c_1 1^n + c_2 n1^n + c_3 2^n + c_4 n2^n$

Cambio de variable

- **Calcular el orden de $T(n)$ si n es potencia de 2, y**

$$T(n) = 4T(n/2) + n, \; n > 1$$

- Reemplazamos n por 2^k (de modo que $k = \lg n$) para obtener $T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$. Esto puede escribirse,

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

- si $t_k = T(2^k) = T(n)$.
- La ecuación característica es $(x-4)(x-2) = 0$

  y entonces $t_k = c_1 4^k + c_2 2^k$.
- Poniendo n en lugar de k, tenemos $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$
- y $T(n)$ esta por tanto es $O(n^2$ /n es una potencia de 2)

Cambio de variable

- Encontrar el orden de $T(n)$ si n es una potencia de 2 y si

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2 \text{ , } n > 1$$

- Obtenemos sucesivamente

$$T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 4^k \text{, y}$$

$$t_k = 4t_{k-1} + 4^k$$

- Ecuación característica: $(x-4)^2 = 0$, y así

$t_k = c_1 4^k + c_2 k4^k$, $\mathbf{T(n) = c_1n^2 + c_2n^2lgn}$

- y (n) es $O(n^2\log n$ / n es potencia de 2).

Cambio de variable

- Calcular el orden de T(n) si n es una potencia de 2

$$T(n) = 2T(n/2) + n\lg n,\ n > 1$$

- Obtenemos

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + k2^k$$

$$t_k = 2t_{k-1} + k2^k$$

- La ecuación característica es $(x-2)^3 = 0$, y así,

$$t_k = c_1 2^k + c_2 k2^k + c_3 k^2 2^k$$

$$T(n) = c_1 n + c_2 n\lg n + c_3 n\lg^2 n$$

- Así T(n) es $O(n\log^2 n$ / n es potencia de 2).

Cambio de variable

- Calcular el orden de $T(n)$ si n es potencia de 2 y $T(n) = 3T(n/2) + cn$ (c es constante, $n \geq 1$).
- Obtenemos sucesivamente,

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + c2^k$$

$$t_k = 3t_{k-1} + c2^k$$

- Ecuación característica: $(x-3)(x-2) = 0$, y así,

$$t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$$

$$T(n) = c_1 3^{\lg n} + c_2 n$$

- y como $a^{\lg b} = b^{\lg a}$, $T(n) = c_1 n^{\lg 3} + c_2 n$

  y finalmente $T(n)$ es $O(n^{\lg 3}$ / n es potencia de 2).

Transformaciones del rango

- $T(n) = nT^2(n/2)$, $n > 1$, $T(1) = 6$ y n potencia de 2.
- Cambiamos la variable: $t_k = T(2^k)$, y así
$$t_k = 2^k t^2_{k-1},\ k > 0;\ t_0 = 6.$$
- Esta recurrencia no es lineal, y uno de los coeficientes no es constante.
- Para transformar el rango, creamos una nueva recurrencia tomando $V_k = \lg t_k$, lo que da,
$$V_k = k + 2V_{k-1},\ k > 0;\ V_0 = \lg 6.$$
- Ecuación característica: $(x-2)(x-1)^2 = 0$ y así,
$$V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k 1^k$$