CÁLCULO

1. Estudia el número de soluciones de la ecuación $4x^7 + 2x^3 + 3x + 1 = 0$. (1.5 ptos.)

   Solución. La función $f(x) = 4x^7 + 2x^3 + 3x + 1$ es derivable y su derivada es

   $$f'(x) = 28x^6 + 6x^2 + 3.$$

   La derivada es positiva en todo $\mathbb{R}$ (son potencias pares) y, por tanto, la función es estrictamente creciente. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la función sólo se anula una vez.

2. Calcula los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\big(1-\cos(x)\big)}{x-\operatorname{sen}(x)}$. (1.5 ptos.)

   Solución. Estamos en las condiciones de la primera regla de L'Hôpital. Vamos a usarla:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x\big(1-\cos(x)\big)}{x-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x) + x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}.$$

   Como $\frac{1-\cos(x)}{1-\cos(x)}$ es uno, sólo tenemos que resolver el resto. Para ello aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 2.$$

   Resumiendo, $\lim_{x\to 0} \frac{x\big(1-\cos(x)\big)}{x-\operatorname{sen}(x)} = 3$.

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\tan(x^2)}{x^2}\right)^{1/x}$. (1.5 ptos.)

   Solución. En la base tenemos una indeterminación de la forma $0/0$. Usamos la regla de L'Hôpital para calcular su límite

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\tan^2(x^2))2x}{2x} = 1.$$

   Como la base tiende a uno, aplicamos la regla del número e, y calculamos el siguiente límite usando la regla de L'Hôpital

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\tan(x^2)}{x^2} - 1\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2) - x^2}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\tan^2(x^2))2x - 2x}{3x^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\tan^2(x^2)\right)-1}{x^2}$$
$$= \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x^2)\left(1+\tan^2(x^2)\right)2x}{2x} = 0.$$

Por tanto, el límite pedido vale uno.

3. Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como (2 ptos.)

$$f(x) = \begin{cases} x \log|x|, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución. En primer lugar, la función es impar con lo que podemos ahorrarnos el estudio de la función en $\mathbb{R}^-$. Si no nos damos de cuento de esto, el cálculo es similar al que vamos a hacer en $[0,+\infty[$. Además de esto, usaremos que $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$, límite que ya hemos visto en clase.

- La función es continua en todo $\mathbb{R}$. El único punto dudoso es el origen, pero el límite mencionado antes nos lo resulve.
- La función no es derivable en 0: usando la definición de derivada
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\log|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty.$$
En $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \log(x) + 1$
- Puntos críticos (en $\mathbb{R}^+$): $f'(x) = 0 \iff x = 1/e$.
- Viendo el signo de la derivada, la función es estrictamente decreciente en $]-1, e[$ y estrictamente creciente en $]1/e, +\infty[$.
- $f([0,+\infty[) = [f(1/e), f(0)] \cup [f(1/e), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-1/e, 0] \cup [0, +\infty[= [-1/e, +\infty[$.
- $f(\mathbb{R}) = f([0,+\infty[) \cup f(]-\infty, 0]) = [-1/e, +\infty[\cup]-\infty, 1/e] = \mathbb{R}$.

No es necesario pasar por todo el proceso anterior para llegar al mismo resultado: sólo es necesario usar que la función es continua y calcular sus límtes en $+\infty$ y $-\infty$ para obtener que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

4. Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$. (2 ptos.)

a) Calcula su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero.

b) Acota el error obtenido al usar dicho polinomio para calcular $\operatorname{sen}(2)\cos(2)$.

Solución. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x), \quad f'(0) = 1\\
f''(x) &= -2\cos(x)\operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = -4\operatorname{sen}(x)\cos(x), \quad f''(0) = 0,\\
f'''(x) &= -4(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)).
\end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de f en cero es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x.$$

El error cometido, usando que seno y coseno en valor absoluto son menores que uno, se puede acotar de la siguiente forma

$$|R_2(2)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}(2-0)^3\right| = \left|\frac{-4(\cos^2(c) - \operatorname{sen}^2(c))}{3!}2^3\right| \leq 64/6 = 32/3.$$

5. Discute para que valores es cierta la desigualdad $|x+3| \leq |x-1|$. (1.5 ptos.)

   Solución.

$$|x+3| \leq |x-1| \iff (x+3)^2 \leq (x-1)^2 \iff 8x + 8 \leq 0 \iff x \leq -1.$$