

CÁLCULO

EXAMEN DE SEPTIEMBRE 2015

1. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^{2\sqrt{x}} \text{sen}(\text{sen}(t)) dt}{x} \quad (1 \text{ pto.})$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + \text{sen}(x) \cos(x)}{\text{sen}(x)} \right)^{1/x} \quad (1 \text{ pto.})$$

Solución:

a) Se presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Aplicamos la regla de L'Hôpital, y a su vez, el teorema fundamental del Cálculo (debido a que hay que derivar la función $\int_0^{2\sqrt{x}} \text{sen}(\text{sen}(t)) dt$) y nos queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{sen}(\text{sen}(2\sqrt{x})) \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\text{sen}(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}$$

El segundo sumando de la expresión anterior presenta, a su vez, una indeterminación del tipo “0/0”, por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\text{sen}(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\text{sen}(2\sqrt{x})) \cos(2\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(\text{sen}(2\sqrt{x})) \cos(2\sqrt{x}) = 2 \end{aligned}$$

Por tanto, el límite pedido es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^{2\sqrt{x}} \text{sen}(\text{sen}(t)) dt}{x} = 1 - 2 = -1.$$

b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \text{sen}(x) \cos(x)}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \cos(x)^2 - \text{sen}(x)^2}{\cos(x)} = 1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1[∞]”.

Aplicamos ahora la regla del número e . Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + \text{sen}(x) \cos(x)}{\text{sen}(x)} \right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2 + \text{sen}(x) \cos(x)}{\text{sen}(x)} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite que se plantea con la regla del número e :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{x^2 + \text{sen}(x) \cos(x)}{\text{sen}(x)} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \text{sen}(x) \cos(x) - \text{sen}(x)}{x \text{sen}(x)}$$

aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Nos queda entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \cos(x)^2 - \text{sen}(x)^2 - \cos(x)}{\text{sen}(x) + x \cos(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(x) \text{sen}(x) - 2 \text{sen}(x) \cos(x) + \text{sen}(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \text{sen}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 4 \cos(x) \text{sen}(x) + \text{sen}(x)}{2 \cos(x) - x \text{sen}(x)} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Observemos que hemos aplicado dos veces consecutivas la regla de L'Hôpital ya que volvía a haber indeterminación del tipo "0/0".

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + \sin(x) \cos(x)}{\sin(x)} \right)^{1/x} = e^1 = e.$$

2. a) Determina el número de ceros de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$. (1 pto.)
 b) Calcula $f([1, 3])$. (1 pto.)

Solución:

- a) La función f es polinómica de grado impar, por tanto, aplicando el teorema de Bolzano, al menos tendrá un cero. Y por tratarse de una función polinómica de grado 3 tendrá, a lo sumo, tres ceros. Vamos a precisar exactamente cuantos ceros tiene estudiando la derivada.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Tenemos por tanto dos puntos críticos de f : $x = 1$ y $x = 2$. Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si los puntos críticos son puntos de extremo relativo o no:

Si $x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Si $1 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Se deduce entonces que en el punto $x = 1$ se alcanza un máximo relativo y en el punto $x = 2$ se alcanza un mínimo relativo. Además, $f(1) = 12$, $f(2) = 11$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De lo anterior se deduce que f sólo tiene un cero para un valor de la variable < 1 , y a partir de dicho valor, la función siempre es positiva.

- b) Para calcular la imagen de f sobre el intervalo compacto $[1, 3]$ nos apoyamos en todos los cálculos realizados en el apartado anterior y en la propiedad de Compacidad, que nos asegura que $f([1, 3])$ ha de ser otro intervalo compacto. Como en el punto $x = 2$ teníamos un punto crítico y además:

$$f(1) = 12,$$

$$f(2) = 11,$$

$$f(3) = 16,$$

tenemos entonces que $f([1, 3]) = [f(2), f(3)] = [11, 16]$.

3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función cuyo polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero es $P_2(x) = 1 + x - x^2$. (1.25 ptos.)
 Calcula el polinomio de Taylor de igual orden y centro de la función $g(x) = \log(f(x))$.

Solución: El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero de f es:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x - x^2$$

Igualando coeficientes obtenemos:

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -2.$$

Para construir el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en cero de g , es decir:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2,$$

tendremos que calcular $g(0)$, $g'(0)$ y $g''(0)$. Para ello:

$$\begin{aligned} g(x) &= \log(f(x)) \Rightarrow g(0) = \log(f(0)) = \log(1) = 0, \\ g'(x) &= \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{1} = 1, \\ g''(x) &= \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f(x)^2} \Rightarrow g''(0) = \frac{-2-1}{1} = -3. \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 = x - \frac{3}{2}x^2.$$

4. Se considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$.

- Calcula una primitiva, F , de f . (1 pto.)
- Calcula, si existen, los puntos donde la pendiente de la recta tangente de F es mínima y donde es máxima. (1 pto.)

Solución:

a) Aplicamos el método de integración por partes para calcular $F(x)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2 e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \end{aligned}$$

Nos vuelve a quedar una integral que haremos también por partes:

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right] \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

Volviendo a la que teníamos en principio:

$$F(x) = \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2(x e^{-x} + e^{-x}) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$$

b) La pendiente de la recta tangente de F viene dada por $F'(x)$; pero como F es una primitiva de f , es decir, $F'(x) = f(x)$, se trata entonces de calcular, si existen, el máximo y mínimo absolutos de la función f .

f es una función derivable definida en todo \mathbb{R} . Calculamos su derivada:

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} x(2 - x)$$

La función f tiene dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 2$. Estudiando el signo de la derivada calculamos los intervalos de monotonía:

Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Si $0 < x < 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Si $x > 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Por tanto, en el punto $x = 0$ se alcanza un mínimo relativo, y en el punto $x = 2$ se alcanza un máximo relativo. Además $f(0) = 0$ y $f(2) = \frac{4}{e^2}$. Vamos a estudiar el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, de donde deducimos que la función f sí alcanza su mínimo absoluto y vale 0, pero no alcanza su máximo absoluto.

5. Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Prueba que $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(0.75 pts.)

b) Prueba que $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

(1 pto.)

Solución:

a) Para comprobar que $x_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, aplicamos el método de inducción:

- Para $n = 1$, es cierto que $x_1 = 1 \geq 0$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq 0$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq 0$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + x_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

Como, $\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \geq 0$, entonces:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \geq 0$$

b) Vamos a probar que la sucesión dada es monótona y acotada. Comenzamos con la monotonía.

Como $x_1 = 1 > x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \approx 0,724$, vamos a probar que es monótona decreciente. En efecto,

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 > x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > x_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} + x_n > \frac{1}{2} + x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} + x_n} > \sqrt{\frac{1}{2} + x_{n+1}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + x_n} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{1}{2} + x_{n+1}} - \frac{1}{2} \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por $x_1 = 1$. Además, por el apartado (a) sabemos que está acotada inferiormente por 0. Esto es, $0 \leq x_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim x_n = x$ con lo que nos queda:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} + x} - \frac{1}{2}.$$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} + x} - \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + x \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 1/2$ y $x = -1/2$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que 0. El motivo es que $0 \leq x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim x_n = 1/2$.

6. Estudia la convergencia de la serie $\sum \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$. (1 pto.)

Solución: Aplicamos el criterio del cociente para determinar el carácter de la serie propuesta. Llamamos $a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$, entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)(4n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{2n+3}{4n+2}$$

Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < 1$, de lo que se deduce que la serie dada es convergente.

Granada, a 1 de septiembre de 2015.