



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid

La media aritmético-geométrica de Gauss

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Autor: Arturo del Cerro Vergara

Tutor: José García-Cuerva Abengoza

Curso 2019-2020

Resumen

Desde los Griegos antiguos hasta las últimas investigaciones matemáticas de este siglo: la media aritmético-geométrica siempre ha sido de interés para los matemáticos que hacían de ella un herramienta para resolver los problemas que se les planteaba. De entre todos los matemáticos célebres que han podido investigar acerca del contenido de nuestro trabajo brilla por sí solo el nombre de Carl Friedrich Gauss, pionero en las investigaciones sobre esta media, tanto así que le da nombre. Durante este trabajo vamos a recorrer aquellos campos donde aparece la media aritmético-geométrica: desde una breve introducción histórica hasta los resultados más profundos en el plano complejo, pasando por integrales elípticas, funciones theta y todos los resultados y algoritmos que nos proporciona esta media, que nos nutre de métodos para el cálculo de π , logaritmos o longitudes de arco de ciertas curvas.

Abstract

From the ancient Greeks to the last mathematical investigations of this century: the arithmetic-geometric mean has always been interesting for mathematicians who conceived this mean as a work tool in order to solve the problems raised. Among all of the notorious mathematicians who had investigated ours work content, one of them deserves a special mention. He is Carl Friedrich Gauss, the one who pioneered mathematician researches in this mean so He even gives it his name. During this document we are going to explore those fields where the arithmetic-geometric means appears: it is going to begin with a brief historical introduction and it will end with the most deep results on the complex plane through elliptic integrals, theta functions and all of results and algorithms that this mean can provide to us. These are methods for calculating π , logarithms or arc lengths of some curves.

Índice general

1. Medias	1
2. La media aritmético-geométrica	4
3. Integrales elípticas	7
3.1 La lemniscata	7
3.2 La elipse	9
3.3 Integrales elípticas y la AGM	10
4. Funciones theta	17
4.1 Motivación	17
4.2 Funciones theta y la AGM	19
5. La media aritmético-geométrica en el plano complejo	24

1. Medias

En este capítulo vamos a estudiar las medias n-dimensionales y sus propiedades. Hay muchas definiciones de medias, pero la más utilizada es la propuesta por Cauchy y se encuentra en el libro *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: Inequalities, Cambridge, 1934*. A través de la formalización de las medias iremos a los casos especiales y veremos algunas de las utilidades que algunos matemáticos les dieron.

Definición. Sea $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vector estrictamente positivo, una **media n-dimensional** es cualquier función continua $M : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i) \leq M(\bar{x}) \leq \max_{i=1, \dots, n} (x_i)$$

Vamos a ver las diferentes propiedades que puede tener una media. La propiedad reflexiva la comparten todas las medias, mientras que las demás no siempre se cumplen.

Propiedades.

1. M es *reflexiva* si $M(x_i, \dots, x_i) = x_i \ \forall x_i > 0$.
2. M es *simétrica* si $M(\bar{x}) = M(\bar{y})$ para cualquier permutación \bar{y} de \bar{x} .
3. M es *estricta* si $\min_{i=1, \dots, n} (x_i) < \max_{i=1, \dots, n} (x_i) \Rightarrow \min_{i=1, \dots, n} (x_i) < M(\bar{x}) < \max_{i=1, \dots, n} (x_i)$
4. M es *homogénea* si $M(t\bar{x}) = tM(\bar{x})$.
5. M es (*estrictamente*) *monótona* si $M(x_1, \cdot, \dots, \cdot), M(\cdot, x_2, \dots, \cdot), \dots, M(\cdot, \dots, \cdot, x_n)$ son (*estrictamente*) crecientes

Definición. Sea $\lambda \in (-\infty, \infty)$, la **media de Hölder** (o media potencial) está definida por

$$M_\lambda(\bar{x}) := \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \right)^{1/\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Observaciones.

1. $M_0(\bar{x})$ es la **media geométrica**. Vamos a ver que los límites en 0 coinciden y que efectivamente $M_\lambda(\bar{x})$ es continua en 0. La demostración que damos a continuación está tomada de [3].

Escribiendo $M_\lambda(\bar{x})$ usando la función exponencial tenemos

$$\exp \left(\ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \right]^{1/\lambda} \right) = \exp \left(\frac{\ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \right]}{\lambda} \right)$$

En el límite $\lambda \rightarrow 0$ aplicamos L'Hôpital al argumento de la función exponencial:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \ln x_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$$

Como la función exponencial es una función continua, podemos sustituir en la expresión anterior para obtener

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} M_\lambda(\bar{x}) = \exp \left(\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \right) = M_0(\bar{x})$$

2. M_∞ es el **máximo**. Tomando el límite y suponiendo $x_k = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} M_\lambda(\bar{x}) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \right)^{1/\lambda} = x_k \cdot \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_k} \right)^\lambda \right)^{1/\lambda} = x_k = M_\infty(\bar{x})$$

3. $M_{-\infty}$ es el **mínimo**. Esto lo podemos probar partiendo de $M_{-\infty}(\bar{x}) = \frac{1}{M_\infty(1/\bar{x})}$

4. M_1 es la **media aritmética**.

5. M_{-1} es la **media armónica**.

Propiedades.

1. $M_i(\bar{x}) \leq M_j(\bar{x}) \forall i < j$.

2. Para \bar{x} fijo, $M(\lambda) := M_\lambda(\bar{x})$ es una función continua para $\lambda \in \mathbb{R}$.

La propiedad 1 la veremos y demostraremos enseguida para el caso $n = 2$ y M_0, M_1 pero es sabido que la media aritmética es mayor o igual a la geométrica. La demostración para cualquier n, i, j utiliza funciones estrictamente convexas y la desigualdad de Jensen. Para ver la segunda propiedad basta con observar que $M(\lambda)$ es derivable en todo punto (en el caso de $\lambda = 0$ ya hemos visto que es continua).

Una vez vistas las medias generalizadas para n dimensiones, vamos a continuar únicamente con las 2-dimensionales, ya que son las que acontecen nuestro trabajo. También vamos a hacer un breve repaso histórico para entender algunos ejemplos de medias y cómo surgieron algunos de los objetos matemáticos con los que vamos a trabajar.

Pappus de Alejandría introdujo en sus libros (siglo IV d.C) las principales aportaciones matemáticas de las medias de los Griegos Antiguos. En ellas, se describen las medias 2-dimensionales definidas por los pitagóricos: la media aritmética, geométrica, armónica, contrarmónica y 6 medias más sin nombre.

Definición. Sea $a, b \in \mathbb{R}, a \geq b > 0$ definimos:

$$\mathcal{A} = \frac{a+b}{2} \text{ como la media aritmética.}$$

$$\mathcal{G} = \sqrt{ab} \text{ como la media geométrica.}$$

$$\mathcal{H} = \frac{2ab}{a+b} \text{ como la media armónica.}$$

Vamos a remontarnos a Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) para ver uno de los primeros ejemplos de la utilización de las medias en sucesiones dobles para el cálculo de π . Arquímedes, en su libro '*Sobre la medida del círculo*' plantea el problema del cálculo de π , definido ya por entonces como la proporción entre el perímetro de un círculo y su diámetro. Considerando un círculo de diámetro unidad y denotando a p_n y P_n como los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscritos y circunscritos respectivamente, observó que

$$p_n \leq \pi \leq P_n, \forall n \geq 3.$$

El algoritmo que Arquímedes construyó hacia el 250 a.C. fue la forma más eficiente para el cálculo de π durante 1800 años más. Éste consiste en tomar $a_k = P_{2^k \cdot 3}$ y $b_k = p_{2^k \cdot 3}$ y realizar la sucesión doble definida por

$$a_{k+1} = \mathcal{H}(a_k, b_k), b_{k+1} = \mathcal{G}(a_{k+1}, b_k), k \geq 0$$

Podemos ver entonces que con los valores iniciales $a_0 = 3\sqrt{3}$ y $b_0 = 3\sqrt{3}/2$ las sucesiones $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergen al número π .

Para $k = 7$ este algoritmo nos proporciona una cota para π de $3,14155760 < \pi < 3,14166274$ ya que en este caso la convergencia del algoritmo es lineal. También hay que decir que en la época de Arquímedes la notación decimal no se conocía por lo que el resultado que obtuvo con polígonos de 96 lados ($k=5$) se expresó usando fracciones y resultó

$$3,1408 < 3 + \frac{10}{71} < p_{96} < \pi < P_{96} < 3 + \frac{1}{7} < 3,1429.$$

Otro ejemplo del uso de las medias en sucesiones dobles es el que le dio Lagrange (1736-1813) para el cálculo de algunas integrales irracionales de la forma

$$\int \frac{N(y^2)}{\sqrt{(1+p^2y^2)(1+q^2y^2)}} dy$$

donde N es una función racional. En este caso se utiliza un método iterativo que podemos encontrar en [10] para racionalizar la función basado en la sucesión doble definida por

$$a_0 = p, b_0 = q \text{ y } a_{k+1} = \mathcal{A}(a_k, b_k), b_{k+1} = \mathcal{G}(a_k, b_k), k \geq 0.$$

Todos estos algoritmos sirvieron y sirven para el cálculo numérico de integrales y otras funciones que *a priori* resultaban muy complicadas de evaluar y gracias a estos métodos se pudo progresar en la investigación de estos objetos matemáticos mucho más rápido, dando lugar a resultados de una complejidad e interés superior, los cuales veremos en los siguientes capítulos.

2. La media aritmético-geométrica

En este capítulo vamos a definir y presentar el elemento principal de nuestro trabajo. Una vez hecho esto comentaremos alguna de sus propiedades haciendo hincapié en aquellas que resultan más importantes para resultados posteriores.

De nuevo, la media aritmético-geométrica la presentamos como un algoritmo, como ya hemos visto en el capítulo 1, en concreto como una sucesión doble en la que intervienen la media aritmética y la geométrica, como su propio nombre indica. Este algoritmo aparece por primera vez por medio de Lagrange, pero no fue hasta que llegó Gauss (1777-1855) cuando se descubrió por medio del mismo la profundidad real del algoritmo. Sin embargo, Gauss publicó poco durante su vida acerca de la media aritmético-geométrica (bautizada así por él), y no fue hasta años más tarde durante la publicación de su trabajo (1868-1927) que salió a la luz la verdadera extensión de su trabajo.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq b > 0$, consideramos las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidas por

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} a_0 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \\ b_0 = b, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{array} \right\} n = 0, 1, 2, \dots$$

donde b_n es siempre la raíz positiva.

Más adelante veremos qué es lo que ocurre si nos damos la opción de escoger la raíz negativa.

Definición. Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ las sucesiones definidas por (1) entonces la **media aritmético-geométrica (AGM)**¹ de a y b , $\mathcal{M}(a, b)$, es un número tal que

$$\mathcal{M}(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Teorema 2.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \geq b > 0$ entonces los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existen y coinciden.

Antes de probar el teorema vamos a enunciar dos lemas que nos van a resultar útiles tanto para demostrar el teorema como para conocer algunas propiedades de $\mathcal{M}(a, b)$.

Lema 2.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \geq b > 0$,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

¹AGM por sus siglas en alemán (Arithmetisch-Geometrisches Mittel)

Demostración. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0.$

☒

Este lema viene a decir que la media aritmética siempre es mayor o igual que la geométrica, algo que ya habíamos anunciado en el capítulo 1.

Lema 2.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a \geq b > 0$ entonces

$$a \geq a_1 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq b_n \geq b_{n-1} \geq \dots \geq b_1 \geq b \quad \forall n \geq 0.$$

Demostración. Por el lema 2.1 tenemos $a_{n-1} \geq b_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2a_{n-1} \geq a_{n-1} + b_{n-1} \Rightarrow$

$$a_{n-1} \geq \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_n$$

También, por el lema, $a_{n-1}b_{n-1} \geq b_{n-1}^2 \Rightarrow$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \geq b_{n-1}$$

☒

Demostración(Teorema). Vamos a demostrar primero por inducción la desigualdad

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$$

Para el caso $n = 0$ es trivial por la definición de a_0 y b_0 . Suponiendo que para n es cierto, tenemos:

$$0 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq a_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \stackrel{\text{hipotesis}}{\leq} \frac{a-b}{2^{n+1}}.$$

Ahora vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{2^n} = 0 \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-b}{2^n} = 0$, y dado que los límites existen por monotonía de las sucesiones en (1) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

☒

Ya hemos construido y definido el eje central del trabajo, ahora vamos a empezar a profundizar en sus particularidades.

Propiedades de la AGM. Muchas de las propiedades ya han sido vistas anteriormente, pero hay otras nuevas de gran interés.

1. $\mathcal{M}(a, a) = a$ (reflexiva)
2. $\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(b, a)$ (simétrica)
3. $\mathcal{M}(a, 0) = 0$
4. $\mathcal{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{M}(a, b)$ (homogénea de grado 1)
5. $\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(a_1, b_1) = \mathcal{M}(a_2, b_2) = \dots = \mathcal{M}(a_n, b_n) \quad \forall n \geq 0$
6. De la propiedad anterior podemos deducir $\mathcal{M}(a, b) = \mathcal{M}(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) \Rightarrow \mathcal{M}(1, x) = \mathcal{M}(\frac{1+x}{2}, \sqrt{x})$ lo cual muestra que $f(x) := \mathcal{M}(1, x)$ es solución de la ecuación funcional

$$f(x) = \frac{1+x}{2} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

De esta última propiedad hay que comentar que la media aritmético-geométrica en la forma de una sola variable, es decir, escogiendo $a = 1$, es conocida como la *forma de Legendre*. Veremos más tarde la relación de este apunte con las integrales elípticas ya que toma cierta importancia en algunos de los algoritmos más importantes y sofisticados para el cómputo de números como π .

Precisamente para el posterior uso de la media aritmético-geométrica en algoritmos nos interesa saber cómo de bien funciona y con qué rapidez.

Definición. Sea $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que converge a A . Supongamos que $\exists C > 0, m \geq 1$ tal que $|\alpha_{n+1} - A| \leq C|\alpha_n - A|^m$ con $n \geq 1$, entonces el **orden de convergencia** de $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ es m .

Sea una sucesión $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ auxiliar tal que

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}, \quad n \geq 0$$

tenemos

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{2(a_n + b_n)} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} \leq \frac{c_n^2}{4\mathcal{M}(a, b)}$$

y como $\mathcal{M}(a, b)$ es una constante, aplicando la definición de orden de convergencia tenemos $m = 2$, o que c_n converge a 0 cuadráticamente.

Este resultado es brillante ya que nos indica que la media aritmético-geométrica puede resultar útil para el cálculo de constantes irracionales como π , logaritmos, integrales elípticas y/o funciones theta y podemos comparar los algoritmos en los que interviene la AGM con otros.

Ejemplo. Vamos a poner un ejemplo de algo que veremos en el capítulo siguiente. Escogiendo $a = \sqrt{2}, b = 1$, $\mathcal{M}(a, b)$ podemos ver que con 4 iteraciones $\mathcal{M}(a, b)$ coincide en 19 decimales con $\pi/\bar{\omega}$ donde $\bar{\omega}$ denota la mitad del arco de una lemniscata.

Nota. A la cte $1/\mathcal{M}(1, \sqrt{2}) = \pi/\bar{\omega} = 0,8346268\dots$ se la conoce como constante de Gauss.

n	a_n	b_n	Decimales coincidentes
0	1.414213562373905048802	1.000000000000000000000	0
1	1.207106781186547524401	1.189207115002721066717	0
2	1.198156948094634295559	1.198123521493120122607	4
3	1.198140234793877209083	1.198140234677307205798	9
4	1.198140234735592207441	1.198140234735592207439	19

Tabla 1: $\mathcal{M}(\sqrt{2}, 1)$ con 4 iteraciones

Todos los datos de la tabla están redondeados a 21 decimales. Lo realmente sorprendente es que estos cálculos no fueron hechos por ordenador sino por el propio Gauss en uno de los 4 ejemplos que dio en su manuscrito "*De origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum*" escrito en 1800.

3. Integrales elípticas

En este capítulo vamos a introducir las integrales elípticas de primera y segunda especie de la mano de la lemniscata de Bernoulli y la elipse. A continuación veremos la relación entre estas integrales elípticas y la media aritmético-geométrica, además de alguna de sus aplicaciones junto con algún ejemplo. Por último veremos los algoritmos más sofisticados y útiles en los que interviene la media aritmético-geométrica.

3.1. La lemniscata

En 1694, Jacob Bernoulli (1655-1705) publicó un artículo en el que por primera vez se estudia explícitamente la curva que él mismo llamó *lemniscus*. Realmente Bernoulli estaba estudiando un caso especial de los óvalos de Cassini, descritos en 1680. Más tarde fueron Gauss y Euler los que, con su trabajo sobre la longitud de arco de la lemniscata dieron lugar al estudio en profundidad de las funciones e integrales elípticas.

El objetivo de esta sección va a ser el cálculo de la longitud de arco de la lemniscata. Dicho esto vamos a definirla.

Sean α_1, α_2 dos puntos (focos) tal que $|\alpha_1 - \alpha_2| = 2a$ y sean r_1 y r_2 las distancias desde un punto arbitrario a los focos α_1 y α_2 respectivamente entonces la *lemniscata* se define como el lugar geométrico de los puntos tal que el producto de las distancias a los focos es cte (c^2). La ecuación en coordenadas cartesianas es

$$r_1 r_2 = [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} = c^2$$

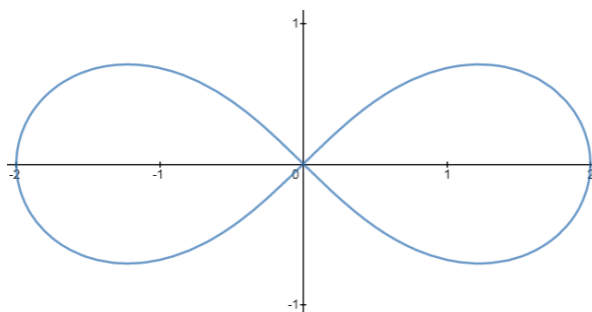


Figura 3.1: Lemniscata con valores $a = \sqrt{2}, c = a$

Tomando

$$(3.2) \quad r_1^2 = (x + a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 + 2ax$$

$$(3.3) \quad r_2^2 = (x - a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 - 2ax$$

con $r^2 = x^2 + y^2$

Multiplicando (3.2) y (3.3) obtenemos:

$$(3.4) \quad r^4 + 2a^2r^2 + a^4 - 4a^2x^2 = (r_1r_2)^2 = c^4$$

Ahora vamos a escoger aquellas lemniscatas que tienen la forma de un infinito y pasan por el cero, es decir, las que toman valor $c = a$, y vamos a escoger también $2a^2 = 1$ para que $|\alpha_1 - \alpha_2| = \sqrt{2}$.

Por (3.4) y sabiendo que $r^2 = x^2 + y^2$, tenemos

$$(3.5) \quad 2x^2 = r^2 + r^4$$

$$(3.6) \quad 2y^2 = r^2 - r^4$$

Como la lemniscata es simétrica en los ejes, vamos a mirar únicamente el valor del arco en el primer cuadrante, luego tomaremos un $r \in [0, 1]$.

Diferenciando (3.5) y (3.6) respecto de r , obtenemos

$$\frac{dx}{dr} = \frac{r + 2r^3}{2x}, \quad \frac{dy}{dr} = \frac{r - 2r^3}{2y}$$

Sustituyéndolo en la ecuación de la longitud de arco $l(r)$ de la lemniscata, tenemos

$$\left(\frac{dl}{dr}\right)^2 = \left(\frac{r + 2r^3}{2x}\right)^2 + \left(\frac{r - 2r^3}{2y}\right)^2$$

o lo que es lo mismo

$$(2xy)^2 \left(\frac{dl}{dr}\right)^2 = y^2(r + 2r^3)^2 + x^2(r - 2r^3)^2$$

Si observamos que $(2xy)^2 = (r^2 + r^4)(r^2 - r^4) = r^4(1 - r^4)$, y sustituyendo en (3.5) y (3.6),

$$r^4(1 - r^4) \left(\frac{dl}{dr}\right)^2 = \frac{r^2 - r^4}{2}(r^2 + 4r^4 + 4r^6) + \frac{r^2 + r^4}{2}(r^2 - 4r^4 + 4r^6)$$

$$\Rightarrow (1 - r^4) \left(\frac{dl}{dr}\right)^2 = 1$$

Si resolvemos para $l(r)$, nos da un cuarto de la longitud de arco de la lemniscata, que multiplicado por 4 nos da el resultado que queríamos:

$$l(r) = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - r^4}} dr$$

Una vez llegados hasta aquí hay que comentar que este tipo de integral es un caso especial de integrales elípticas y que ya apareció en 1691 presentada por Jacob Bernoulli.

Escogiendo los valores $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ se puede demostrar que esta última integral que denota el valor del arco de la lemniscata está relacionada con la AGM. Para demostrarlo necesitaríamos los resultados que vamos a presentar a continuación, aunque una demostración se puede encontrar en [5].

En 1799 Gauss observó a base de cálculos numéricos que la mitad la longitud del arco de la lemniscata $\bar{\omega} = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}} dr$ y $\frac{\pi}{\mathcal{M}(\sqrt{2}, 1)}$ coincidían al menos en los primeros 19 decimales. Tras su descubrimiento así lo comentó en su diario: *"La demostración de este resultado seguro que abrirá un nuevo campo dentro del análisis"*.

Definición. Una **integral elíptica** es de la forma

$$\int_0^u R(x, y) dx$$

donde R es una función racional de x e y , e y^2 es igual a un polinomio de grado 3 o 4 en x . Como veremos ahora, existen 3 tipos de integrales elípticas, aunque en este trabajo solo veremos las dos primeras. La integral elíptica es completa si $u = 1$

Si nos centramos en las integrales elípticas de primera y segunda especie hay que añadir que Liouville probó en 1834 que éstas son integrales no elementales, esto es, que son integrales tales que las primitivas de sus integrandos no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales (polinomios, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y/o composiciones de estas funciones) salvo algunas excepciones.

Definición. Sea $|x| < 1$, una **integral elíptica completa de primera especie** es de la forma

$$(3.7) \quad K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(\phi)}} d\phi \stackrel{t=\sin \phi}{=} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2 x^2)}} dt$$

3.2. La elipse

El objetivo de esta sección va a ser el de calcular la longitud de arco de la elipse. Una vez tengamos esto, vamos a poder relacionarla con las integrales elípticas de segunda especie.

Sean una elipse con eje mayor y menor $2a$ y $2b$ respectivamente, y excentricidad

$e := \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2} \in [0, 1)$, la longitud de su arco la definimos como $l(a, b)$

La ecuación en coordenadas cartesianas de todas estas elipses es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como antes, ya que la elipse es simétrica en los ejes vamos a escoger el primer cuadrante, donde

$$y(x) = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, y'(x) = -\frac{bx}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

Esto implica

$$l(a, b) = 4 \int_0^a \sqrt{1 + y'^2(x)} \stackrel{z=x/a}{=} 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - ez^2}}{\sqrt{1 - z^2}} dz = 4a \int_0^1 \frac{1 - ez^2}{\sqrt{(1 - ez^2)(1 - z^2)}} dz$$

A donde nos ha llevado este resultado es a un ejemplo de integral elíptica de segunda especie.

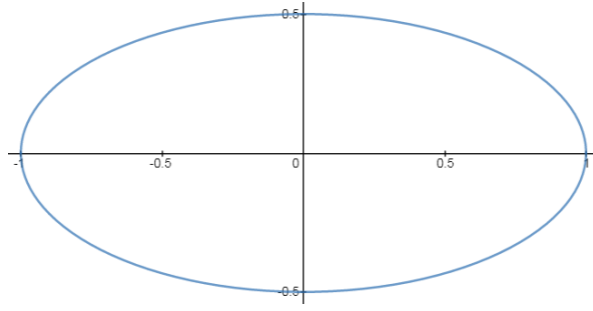


Figura 3.2: Elipse con valores $a = 1, b = 0,5$

Definición. Sea $|x| < 1$, una **integral elíptica completa de segunda especie** es de la forma

$$(3.8) \quad E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2(\phi)} d\phi = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - x^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

A diferencia de las integrales elípticas de primera especie, las integrales elípticas de segunda especie no pueden ser expresadas directamente en función de la media aritmético-geométrica. Una vez definidas las integrales de primera y segunda especie vamos a empezar a ver su relación con nuestro trabajo.

Utilizando las propiedades de la media aritmético-geométrica, en concreto la número 6, y usando que es homogénea, tenemos:

Proposición. Sea $x = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}$, entonces

$$(3.9) \quad \mathcal{M}(1+x, 1-x) = \frac{1}{a} \mathcal{M}(a, b).$$

Demostración. Escogiendo $a_0 = 1+x, b_0 = 1-x$, aplicando (1) tenemos $a_1 = 1, b_1 = \frac{b}{a}$. Extrayendo $\frac{1}{a}$ y aplicando la propiedad 5 la proposición queda probada.

⊠

Una cuestión a remarcar de este teorema es que x es la excentricidad de una elipse con eje mayor $2a$ y eje menor $2b$, como hemos visto previamente.

3.3. Integrales elípticas y la AGM

Va a ser ahora cuando nos adentremos más profundamente en la verdadera importancia de la media aritmético-geométrica y sus resultados. Al final de la sección veremos algunas aplicaciones útiles.

Teorema 3.1. Sea $a \geq b > 0$, sea

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2(\phi) + b^2 \sin^2(\phi)}} d\phi,$$

entonces

$$(3.10) \quad \mathcal{M}(a, b) = \frac{\pi}{2I(a, b)}$$

Observación. Sea $a > 0$ entonces $I(a, a) = \frac{\pi}{2a}$. Esta ligera observación nos ayuda a entender cómo es la función $I(a, b)$ y aparecerá en la demostración del teorema. Vamos con ella.

Demostración. La demostración de este teorema podemos encontrarla en múltiples documentos ya que es un teorema importante. En [5], [9] y [6] se realiza la prueba por el camino que tomó Gauss, mientras que en [2] y [6] se realizan diferentes -más de una- en base a las expansiones en series de un caso particular de la AGM. En este trabajo vamos a seguir la línea de los hermanos Toader y los hermanos Borwein en las demostraciones que aparecen en [2] y [10].

La clave de la demostración está en demostrar

$$(3.11) \quad I(a, b) = I(a_1, b_1)$$

En la demostración de Gauss, se introduce la variable ϕ' tal que

$$\text{sen} \phi = \frac{2a \text{sen} \phi'}{a + b + (a - b) \text{sen}^2 \phi'}$$

y con esto se demuestra $(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \text{sen}^2 \phi)^{-1/2} d\phi = (a_1^2 \cos^2 \phi' + b_1^2 \text{sen}^2 \phi')^{-1/2} d\phi'$ y (3.11) queda probado.

En este trabajo se va a realizar otra demostración también interesante.

Haciendo un cambio de variable $x = b \tan \phi$:

$$dx = b \frac{d\phi}{\cos^2 \phi}; \quad \frac{d\phi}{\cos \phi} = \frac{dx}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$\Rightarrow I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \phi}} \frac{d\phi}{\cos \phi} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \frac{dx}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$\text{Entonces } I(a_1, b_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a_1^2 + t^2)(b_1^2 + t^2)}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2 + 4t^2)(ab + t^2)}}$$

Haciendo un cambio de variable $t = \frac{x^2 - ab}{2x}$, $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ab}{x^2}\right) dx$, el cambio de t a x es una biyección de la recta real en $(0, \infty)$, por lo que tenemos

$$I(a_1, b_1) = \int_0^\infty \frac{x^2 + ab}{\sqrt{(a^2 x^2 + b^2 x^2 + a^2 b^2 + x^4)(a^2 b^2 + 2abx^2 + x^4)}} dx = I(a, b)$$

\Rightarrow (3.11) queda probado

Iterando (3.11): $I(a, b) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \dots = I(a_n, b_n)$

$$\Rightarrow I(a, b) = I(a_n, b_n) = I(\mathcal{M}(a, b), \mathcal{M}(a, b)) = \frac{\pi}{2\mathcal{M}(a, b)}$$

ya que la función $(a_n^2 \cos^2 \phi + b_n^2 \text{sen}^2 \phi)^{-1/2}$ converge uniformemente a la *cte* $\mathcal{M}(a, b)$ (con a y b fijos) y además $I(a, b)$ es continua en a y b .

☒

Definición. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$ denominado **módulo**, el **módulo complementario de x** es

$$(3.12) \quad x' = \sqrt{1 - x^2}$$

tal que $x^2 + x'^2 = 1$.

Esta definición aparecerá en próximas ocasiones y toma una gran importancia en teoremas, demostraciones y algoritmos.

Colorario 3.1. Sea $K(x)$ como en (3.7)

$$(3.13) \quad K(x) = \frac{\pi}{2\mathcal{M}(1, x')} \text{ y } K(x') = \frac{\pi}{2\mathcal{M}(1, x)}$$

Este corolario es una implicación directa y sencilla del teorema 3.1, ya que escogiendo los parámetros adecuados entonces $I(1, x') = K(x)$ y $I(1, x) = K(x')$. Por primera vez en este trabajo hemos relacionado las integrales elípticas de primera especie con la media aritmético-geométrica.

Corolario 3.2. Sean $x = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ y $J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$ entonces

$$(3.14) \quad E(x) = \frac{1}{a}J(a, b), \quad K(x) = aI(a, b)$$

De esta forma finalmente relacionamos las funciones I y J con las integrales elípticas de primera y segunda especie.

Para conseguir algoritmos más sofisticados para la computación de π vamos a introducir algunas definiciones y teoremas.

Teorema 3.2. Sea $J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi$, y $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$, entonces

$$J(a, b) = \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(a, b)$$

En particular

$$(3.15) \quad E(x) = \left(1 - \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) K(x)$$

A continuación vamos a realizar la prueba del teorema 3.2 pero antes necesitamos un resultado que va a ser necesario para la demostración. Éste consiste en la relación entre $J(a_n, b_n)$ y $J(a_{n+1}, b_{n+1})$ y la prueba de la misma se puede encontrar en [2]. Aquí no la realizaremos ya que es larga y requiere de muchos resultados previos, pero para dar una línea general de la demostración, se utiliza lo ya probado en (3.10) y la proposición (3.9).

La relación a la que nos referimos es la identidad

$$J(a_n, b_n) = 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_n b_n I(a, b)$$

Demostración (Teorema 3.2). Usando esta identidad que acabamos de comentar y viendo $4a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - 2a_n b_n = -c_n^2$, entonces tenemos

$$2^{n+1} [J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_{n+1}^2 I(a, b)] - 2^n [J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a, b)] = 2^{n-1} c_n^2 I(a, b).$$

Sumando tenemos la primera parte del teorema y utilizando (3.14) tenemos el teorema 3.2 demostrado.

⊠

La utilidad de este teorema la veremos más adelante pero de momento ya podemos ver que relaciona las integrales elípticas de primera y segunda especie con algunos de los parámetros que llevamos viendo durante todo el capítulo.

Una vez ya tenemos las herramientas necesarias podemos ver uno de los resultados que más interés genera. Por primera vez vamos a relacionar integrales elípticas completas de primera y segunda especie dando lugar a una constante tan interesante como π . Es obvio lo que vamos a ver a continuación se utiliza más tarde en los algoritmos para el cálculo de π , como ya veníamos anunciando.

Teorema 3.3. (Relación de Legendre) Sean x y x' como en (3.12) entonces

$$K(x)E(x') + K(x')E(x) - K(x)K(x') = \frac{\pi}{2}$$

Esta identidad fue descubierta por Legendre (1752-1833) en 1811. Legendre dio con la fórmula por accidente cuando buscaba aplicaciones para su método de evaluación de integrales elípticas.

Demostración. Los hermanos Borwein realizan una demostración en [2] utilizando el wronskiano y otros resultados previos. Aquí vamos a realizar una demostración más parecida a la de [6].

Para demostrar este teorema primero vamos a ver que la parte de la izquierda de la relación de Legendre es una cte, y después veremos que efectivamente es $\pi/2$.

Para facilitar la demostración vamos a denotar a las funciones integrales $E(x)$ y $K(x)$ como E y K respectivamente, al igual que $E(x')$ y $K(x')$ como E' y K' respectivamente.

Vamos a comenzar viendo las expresiones de $\frac{dE}{dx}$ y $\frac{dK}{dx}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dx} &= \frac{E - K}{x} \\ \frac{dK}{dx} &= \frac{1}{x} \left(\frac{E}{x'^2} - K \right)\end{aligned}$$

La primera expresión es trivial, para la segunda sí que hace falta un mayor esfuerzo, así que vamos a probarla:

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{x} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - x^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - x^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \right) \stackrel{(*)}{=}$$

Ahora, si usamos la igualdad $\frac{1 - x^2}{(1 - x^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = (1 - x^2 \sin^2 \phi)^{1/2} - x^2 \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\sin \phi \cos \phi}{(1 - x^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \right)$ y sustituyéndola en la ecuación anterior podemos ver cómo continúa

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 - x^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - x^2 \sin^2 \phi)^{1/2}} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{E}{x'^2} - K \right)$$

Una vez vistas y demostradas estas expresiones podemos hacer lo mismo para diferenciar $\frac{dE'}{dx'}$ y $\frac{dK'}{dx'}$ ya que solo requiere un cambio de variable.

Ahora encaminando la primera parte de la demostración, si utilizamos la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dE'}{dx} &= \frac{dE'}{dx'} \frac{dx'}{dx} = \frac{-x}{x'^2} (E' - K') \\ \frac{dK'}{dx} &= \frac{dK'}{dx'} \frac{dx'}{dx} = -\frac{1}{xx'^2} (E' - x^2 K')\end{aligned}$$

Así que ya podemos concluir con

$$\frac{d}{dx} (KE' + K'E - KK') = (KE' - EK') \left(-\frac{1}{x} - \frac{x}{x'^2} + \frac{1}{xx'^2} \right)$$

Pero como

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x} - \frac{x}{x'^2} + \frac{1}{xx'^2} &= \frac{-(1-x^2) - x^2 + 1}{xx'^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} (KE' + K'E - KK') &= 0 \Rightarrow KE' + K'E - KK' = cte\end{aligned}$$

Ahora queda ver el valor de la constante y vamos a hacerlo aproximando x^2 a 0. Por tanto x'^2 tiende a 1.

$$(E - K) = -x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2 \phi}} d\phi \leq -x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \phi}{\sqrt{1-x^2}} d\phi = -\frac{x^2}{x'} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \phi d\phi = O(x^2)$$

y

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x'^2 \sin^2 \phi}} d\phi \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}} d\phi = \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = O(x^{-1}).$$

Así que, siguiendo con la demostración, y partiendo de la relación de Legendre,

$$\lim_{x^2 \rightarrow 0} [KE' + K'E - KK'] = \lim_{x^2 \rightarrow 0} [(E - K)K' + E'K] = \lim_{x^2 \rightarrow 0} \left[O(x) + 1 \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

□

Una vez finalizada esta bonita demostración podemos poner algún ejemplo de gran utilidad

Ejemplo. Sea $x = \frac{1}{\sqrt{2}} = x'$,

$$K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[2E \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - K \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{\pi}{2}.$$

En este caso la elección de x y x' es muy importante para la simplificación de los cálculos necesarios para π . Esta elección reduce la *Relación de Legendre* al cálculo de una integral elíptica de primera y segunda especie, lo cual nos proporciona un método cómodo y relativamente sencillo.

Vamos a ver a continuación una fórmula, también conocida por la fórmula de Gauss-Salamin o fórmula de Salamin - se le atribuye a Brent y Salamin aunque fue descubierta por Gauss en 1800 -, que utiliza la media aritmético-geométrica para el cálculo de π . Está demostrado que esta fórmula y la *Relación de Legendre* son equivalentes y una se puede derivar de la otra.

Esta fórmula fue olvidada durante muchos años -150 aproximadamente- y aún todavía no se explica el porqué. Salamin en su publicación *Computation of π using Arithmetic-Geometric Mean* comenta: "Es sorprendente que una fórmula tan fácilmente derivable para π haya sido pasada por alto por 155 años. [...] Las dos piezas clave son la fórmula de Gauss para calcular integrales elípticas y la Relación de Legendre. Si somos capaces de determinar cuando fueron publicadas esas fórmulas, entonces sabremos cuánto tiempo lleva el método para calcular π esperando a ser descubierto. Hay que apuntar sin embargo que el método de la AGM, que conlleva operaciones muy precisas de multiplicación, división y raíces cuadradas, no era muy práctico en los días de Legendre y Gauss. Solamente cuando se han descubierto las técnicas de multiplicación más rápidas de N^2 ha sido cuando el método para el cálculo de π a través de la AGM se ha convertido en algo más que en una fórmula teórica."

Teorema 3.4. (Fórmula de Brent-Salamin) Sean c_n y $\mathcal{M}(a, b)$ definidas como antes, entonces

$$\pi = \frac{2\mathcal{M}^2\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}$$

Demostración. Sea $a = 1$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x = x' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ por lo que podemos aplicar (3.15) y (3.14), con lo que obtenemos

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ahora, usando el ejemplo hemos usado previamente, si sustituimos esta última igualdad en nuestra expresión, obtenemos

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left[2 \left[\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{\pi}{2}$$

Por último, haciendo uso de (3.13), tenemos

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2\mathcal{M}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

Después de sustituir esto en la expresión anterior, vemos finalmente que resulta la igualdad del teorema.

☒

Este teorema es la base de muchos de los algoritmos que posteriormente se desarrollaron para el cálculo de π .

Para finalizar este capítulo y darle una utilidad práctica a todo lo que hemos visto hasta ahora vamos a comentar un algoritmo para π basado en las herramientas y resultados que acabamos de estudiar. Éste aparece en [2], a menudo se le conoce como Algoritmo de Gauss-Legendre, está basado en la media aritmético-geométrica y es un algoritmo con convergencia cuadrática. Fue descubierto independientemente por Brent y por Salamin en 1973 y en 1976 con la ayuda de un ordenador les permitió conseguir el record de 3 millones decimales correctos de π fijado en 1 millón hasta entonces. Hasta entonces se había utilizado las series de la arcotangente

para el cálculo de π

Algoritmo 3.1 Sea $a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y a_n, b_n como en (1) el algoritmo consiste en

$$\pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2}$$

La similitud con la fórmula de Brent-Salamin es obvia. Se puede ver que π_n converge monótonamente a π y que se cumple

$$\pi - \pi_{n+1} \leq \frac{2^{-(n+1)}}{\pi^2} (\pi - \pi_n)^2$$

En cada iteración tenemos al menos el doble de cifras correctas que en la anterior, las primeras 8 iteraciones del algoritmo producen 0, 3, 8, 19, 41, 84, 171 y 344 dígitos correctos. En la iteración número 24 ya tenemos $45 \cdot 10^6$ cifras correctas de π . La razón de su convergencia tan rápida es que incluye la AGM. También hay que decir que computacionalmente hablando el algoritmo requiere mucha memoria y por eso a veces se prefieren otros algoritmos aunque converjan más despacio.

4. Funciones theta

En este capítulo introduciremos y trabajaremos con las funciones theta comenzando con una motivación acerca de su origen, siguiendo con los resultados más importantes que relacionan las funciones theta con la AGM y terminando con los casos en los que nos puede ser de utilidad.

4.1. Motivación

Vamos a introducir las funciones theta a través de un problema particular de conducción del calor. Sea θ la temperatura en un tiempo t en cualquier punto de un material sólido, ρ la densidad del material, s el calor específico del material, k la conductividad térmica, entonces θ satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\chi \nabla^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

donde $\chi = \frac{k}{s\rho}$ es la difusividad térmica.

Si escogemos el caso en el que no hay variación de la temperatura en los ejes x e y de un rectángulo $0xyz$, el flujo de calor es paralelo al eje z , por lo que la ecuación de la conducción del calor queda

$$(4.16) \quad \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

con $\theta = \theta(z, t)$

El problema que vamos a estudiar es el del flujo de calor en una barra de longitud infinita, limitada por los planos $z = 0, \pi$, con unas condiciones de contorno uniformes en los límites para todo tiempo t . Según estas condiciones podemos aplicar la ecuación (4.16).

Estableciendo las condiciones de contorno tal que los límites de la barra se mantienen a una temperatura 0, es decir, $\theta(z = (0, \pi), t) = 0$. Suponiendo también en $t = 0$ que $\theta = f(z)$ para $0 < z < \pi$, entonces la solución de la ecuación en derivadas parciales se puede realizar por el método de separación de variables, que lleva a la solución

$$\theta(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-n^2 \chi t} \text{sen}(nz)$$

donde β_n son los coeficientes de Fourier determinados por

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(z) \text{sen}(nz) dz$$

Siguiendo con los cálculos que se pueden encontrar en [8] obtenemos que la difusión del calor sobre la barra viene dada por la ecuación

$$(4.17) \quad \theta = \theta_1(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1/2} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz}$$

con $q := e^{-4\chi t}$. En la figura 4.3(a) podemos ver una solución gráfica de la evolución de la temperatura en la barra según avanza el tiempo. Se observa que el calor se va perdiendo por la frontera de la barra hasta que termina disipándose por completo.

Definición. La serie (4.17) define la **primera función theta de Jacobi** $\forall z \in \mathbb{C}, |q| < 1$. Para ver la convergencia de esta serie, sea u_n el n -ésimo término de la serie, entonces

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |q^{2n+2} e^{2iz}| = |q|^{2n+2} e^{-2y}$$

tomando $z = x + iy$. Si $n \rightarrow \infty$, como $|q| < 1$ entonces $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow 0$, y por el test de *D'Alembert* entonces la serie converge. Una prueba similar se hace para ver que también converge si $n \rightarrow -\infty$. Además, la serie converge uniformemente en cualquier franja tal que $-Y \leq \text{Im}(z) \leq Y$, con $Y > 0$.

Si cambiamos las condiciones de contorno de nuestro problema, poniendo que los límites de la barra están aisladas de tal forma que el calor no pasa a través de ellas, es decir, $\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$ en $z = 0, \pi$, entonces la solución del problema es

$$\theta = \theta_4(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz}$$

con $q := e^{-4\chi t}$ como antes. En la figura 4.3(b) encontramos la solución gráfica de este problema con nuevas condiciones de frontera y vemos que esta vez el calor no se disipa por la frontera y según avanza t el calor en la barra tiende a ser igual en todo punto.

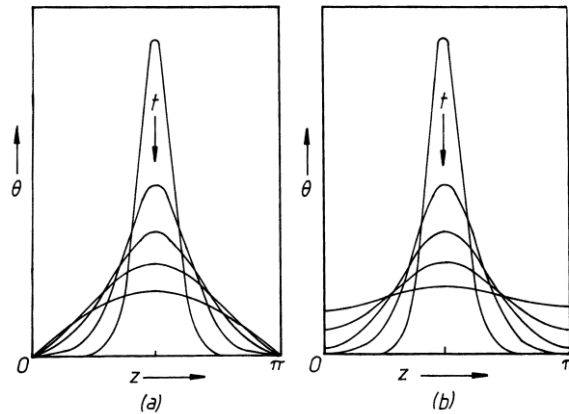


Figura 4.3: Difusión del calor en una barra

Definición. θ_4 es la **cuarta función theta de Jacobi** $\forall z \in \mathbb{C}, |q| < 1$.

Si incrementamos z en un cuarto de periodo en θ_1 , tenemos:

$$\theta_1\left(z + \frac{\pi}{2}, q\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2} e^{(2n+1)iz} = \theta_2(z, q)$$

Definición. θ_2 es la **segunda función theta de Jacobi** $\forall z \in \mathbb{C}, |q| < 1$.

Si incrementamos z en un cuarto de periodo en θ_4 , tenemos:

$$\theta_4\left(z + \frac{\pi}{2}, q\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz} = \theta_3(z, q)$$

Definición. θ_3 es la **tercera función theta de Jacobi** $\forall z \in \mathbb{C}, |q| < 1$.

Observación. Una notación alternativa, que es la que usaremos de aquí en adelante, es la que utilizó Gauss, que consiste en escribir

$$q = e^{i\pi\tau}$$

y como $|q| < 1$ tiene que cumplirse, entonces

$$\text{Im}(\tau) > 0$$

Bajo esta notación, a q se le llama el **nome**² de la función theta y a τ su **parámetro**.

4.2. Funciones theta y la AGM

Ahora vamos a volver a centrar la atención a las observaciones de Gauss sobre la AGM en términos de las funciones theta. Para ello vamos a restringirnos a las funciones theta tales que

$$z = 0$$

por lo que quedan tal que

$$\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_2(0) = 0$$

$$\theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \quad \theta_3(0) = 1$$

$$\theta_4(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad \theta_4(0) = 1$$

con $|q| < 1$.

Vamos a ver ahora la primera forma de relacionar las funciones theta con la AGM. Hay que comentar que la solución de la AGM en términos de funciones theta fue realizada por Gauss. Sin embargo el estudio de las funciones theta en el contexto de las integrales elípticas - algo que veremos al final del capítulo - fue empezado por Bernoulli, posteriormente por Gauss y Euler y desarrollado más a fondo por Jacobi en *Fundamenta Nova Theoriae*.

²en inglés

Teorema 4.1. (Representación de la AGM vía funciones theta) Sea $|q| < 1$

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \frac{\theta_3^2(q) + \theta_4^2(q)}{2} &= \theta_3^2(q^2) \\ \sqrt{\theta_3^2(q)\theta_4^2(q)} &= \theta_4^2(q^2) \end{aligned}$$

Demostración. En este trabajo vamos a seguir la línea de demostración que se realiza en [9] y en [2]. Para empezar vamos a hacer una observación importante:

$$\theta_3(-q) = \theta_4(q)$$

que implica

$$(4.19) \quad \theta_3(q) + \theta_4(q) = 2 \sum_{n \text{ par}} q^{n^2} = 2\theta_3(q^4)$$

También tenemos

$$\theta_3^2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{n^2+m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r_2(n) q^n$$

donde $r_2(n)$ cuenta el número de formas en las que se puede escribir

$$n = j^2 + k^2$$

distinguiendo signo y permutaciones. *Ejemplo:* $r_2(5) = 8$ ya que $5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$ (Se toma $r_2(0) = 1$)

De la misma manera,

$$\theta_4^2(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+m} q^{n^2+m^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r_2(n) q^n$$

ya que $n + m \equiv n^2 + m^2 \pmod{2}$.

Ahora hay que observar que

$$(4.20) \quad r_2(n) = r_2(2n)$$

para poder seguir con la demostración. Lo demostramos a continuación:

Para el caso $n = 0$ es trivial. Sea ahora $n \geq 1$ y observando que

$$2a^2 + 2b^2 = (a - b)^2 + (a + b)^2$$

entonces un par (a, b) resuelve $n = a^2 + b^2$ para $n \iff (A, B) := (a - b, a + b)$ también es cierto para $2n$. Ahora podemos ver que la función

$$\mathcal{F} : (a, b) \rightarrow (A, B) = (a, b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es biyectiva, lo que demuestra (4.20)

Ahora ya podemos continuar, y utilizando (4.20) tenemos

$$(4.21) \quad \theta_3^2(q) + \theta_4^2(q) = \sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n [1 + (-1)^n] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} r_2(2n)q^{2n} = 2\theta_3^2(q^2)$$

con lo que ya tendríamos la primera expresión del teorema demostrada.

De (4.19) y (4.21) podemos resolver la expresión para $\theta_3(q)\theta_4(q)$. Tenemos

$$\theta_3(q)\theta_4(q) = \frac{1}{2} \left[\theta_3(q) + \theta_4(q) \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\theta_3^2(q) + \theta_4^2(q) \right] = 2\theta_3^2(q^4) - \theta_3^2(q^2) = \theta_4^2(q^2)$$

□

Es obvia la similitud entre la media aritmético-geométrica y el teorema 4.1. De hecho escogiendo $a_n = \theta_3^2(q^{2^n})$, $b_n = \theta_4^2(q^{2^n})$ vemos que a_n y b_n satisfacen la iteración de la media aritmético-geométrica con propiedades muy interesantes que incluso más tarde, en el plano complejo, aparecerán.

Una vez establecida una de las relaciones de las funciones theta con la AGM podemos empezar a ver resultados más interesantes.

Corolario 4.1. Sea $|q| < 1$, entonces

$$\mathcal{M}(\theta_3^2(q), \theta_4^2(q)) = \mathcal{M}(\theta_3^2(q^2), \theta_4^2(q^2)) = \dots = \mathcal{M}(\theta_3^2(q^{2^n}), \theta_4^2(q^{2^n})) \quad \forall n > 0.$$

Es fácil ver ahora que, como $\theta_3(0) = \theta_4(0) = 1$, entonces da lugar al siguiente corolario

Corolario 4.2. Sea $|q| < 1$,

$$\mathcal{M}(\theta_3^2(q), \theta_4^2(q)) = 1$$

Corolario 4.3. (Identidad de Jacobi) Sea $q \in (0, 1)$

$$\theta_3^4(q) = \theta_4^4(q) + \theta_2^4(q)$$

Demostración. Siguiendo [9] tenemos

$$\begin{aligned} \theta_3^2(q) - \theta_3^2(q^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_2(n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_2(2n)q^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_2(2n+1)q^{2n+1} \\ &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k+m \text{ impar}}}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{k^2+m^2} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $k = i - j$, $m = i + j + 1$ tenemos

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (q^2)^{(i+1/2)^2 + (j+1/2)^2} = \theta_2^2(q^2)$$

Por lo tanto, tenemos

$$\theta_3^2(q^2) + \theta_2^2(q^2) = \theta_3^2(q)$$

que con (4.18) queda:

$$\theta_3^2(q^2) - \theta_2^2(q^2) = \theta_4^2(q)$$

Multiplicando las dos identidades anteriores tenemos $\theta_3^4(q^2) - \theta_2^4(q^2) = \theta_3^2(q) \cdot \theta_4^2(q)$. Como tenemos $q \in (0, 1)$ entonces $q^{1/2} \in (0, 1)$ y podemos reemplazar q por $q^{1/2}$. Aplicando ahora (4.18) a la parte derecha de la igualdad tenemos la Identidad de Jacobi demostrada.

□

Sea $x := x(q) = \frac{\theta_2^2(q)}{\theta_3^2(q)}$, entonces según la Identidad de Jacobi su módulo complementario es $x' := \sqrt{1 - x^2} = \frac{\theta_4^2(q)}{\theta_3^2(q)}$, por lo que tenemos:

Teorema 4.2. (Representación de la AGM vía funciones theta II). Sean x y x' como acabamos de definir y $K(x)$ como en (3.7) la AGM satisface

$$\mathcal{M}(1, x') = \theta_3^{-2}(q)$$

En particular,

$$(4.22) \quad K(x) = \frac{\pi}{2} \theta_3^2(q)$$

Demostración. Usando que \mathcal{M} es homogénea y el corolario 4.2 tenemos

$$\mathcal{M}(1, x') = \mathcal{M}\left(1, \frac{\theta_4^2(q)}{\theta_3^2(q)}\right) = \frac{1}{\theta_3^2(q)} \mathcal{M}(\theta_3^2(q), \theta_4^2(q)) = \frac{1}{\theta_3^2(q)}$$

Para demostrar la segunda parte del teorema únicamente aplicamos la identidad de (3.13).

□

Así que de esta manera, por primera vez hemos relacionado explícitamente la media aritmético-geométrica, integrales elípticas de primera especie y funciones theta. Un resultado brillante que contiene todo lo que hemos ido estudiando hasta ahora. Por último no podríamos cerrar el capítulo sin comentar la utilidad - por si no tuviera interés ya por sí mismo - de haber desarrollado todo esto. Vamos a comentar un sencillo algoritmo que encierra a π , integrales elípticas, funciones theta y logaritmos. Pero antes vamos a enunciar un teorema.

Teorema 4.3. Sean $x := x(q) = \frac{\theta_2^2(q)}{\theta_3^2(q)}$, $x' := \sqrt{1 - x^2} = \frac{\theta_4^2(q)}{\theta_3^2(q)}$ entonces $\forall x \in (0, 1)$

$$(4.23) \quad \pi \frac{K(x')}{K(x)} = \log\left(\frac{1}{q}\right)$$

La demostración se basa en observar que existe una fórmula inversa que da q en términos de x : $q = \exp\left(-\pi \frac{K(x')}{K(x)}\right)$ que es equivalente al enunciado del teorema. Una demostración más completa podemos encontrarla en el libro de los hermanos Borwein [2] que utiliza la fórmula de la transformada de theta junto con la fórmula (4.22) del teorema 4.2 y la fórmula (3.13) del corolario 3.1.

Finalmente podemos ir ya con el algoritmo para el cálculo del logaritmo $\log\left(\frac{1}{q}\right)$ basado en el teorema que acabamos de enunciar.

Algoritmo 4.1. Sea $q \in (0, 1)$ entonces el algoritmo consiste en

1. Calcular $\frac{K(x)}{\pi}$ desde (4.22).
2. Calcular $x = \frac{\theta_2^2(q)}{\theta_3^2(q)}$
3. Calcular $K(x')$ usando (3.13)
4. Calcular $\log\left(\frac{1}{q}\right)$ desde (4.23)

Merece la pena comentar el grado de importancia de este algoritmo ya que a parte de recoger todas las herramientas que hemos ido utilizando es de gran utilidad para el cálculo de algoritmos y a parte es de una gran belleza. Conviene también comentar que este algoritmo, propuesto y analizado por Sasaki y Kanada, solo requiere de un cálculo de la media aritmético-geométrica. La única pega es que π debe de haber sido calculado con anterioridad.

Por último vamos a comentar un corolario que cierra con todo el capítulo y es brillante debido a su simplicidad.

Corolario 4.4 (Fórmula de Sasaki y Kanada) Sea $q \in (0, 1)$ entonces

$$\log\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\pi}{\mathcal{M}(\theta_2^2(q), \theta_3^2(q))}$$

Demostración. Como tenemos que $x = \frac{\theta_3^2(q)}{\theta_2^2(q)}$, si usamos (3.13) y (4.22) y lo sustituimos en (4.23), teniendo en cuenta que la AGM es homogénea de grado 1, queda demostrado.

□

Visto este maravilloso resultado que nos permite calcular logaritmos con el único cálculo de una media aritmético-geométrica su utilidad ha quedado evidenciada.

5. La media aritmético-geométrica en el plano complejo

Hasta ahora hemos estado trabajando con la AGM en \mathbb{R} . Vamos a ver ahora qué es lo que sucede en el plano complejo, viendo si todo lo anterior funciona o no y lo que ello supone.

El primer obstáculo que encontramos está en la definición de la media aritmético-geométrica de dos números complejos, ya que en el algoritmo (1) ya no hay una elección clara para b_{n+1} , si no que hay dos posibles elecciones para b_{n+1} para cada n . Así que, dados a y b el algoritmo genera unas sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ que no sabemos si convergen al mismo número o no.

Definición. Sea $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, $a \neq \pm b$, la **raíz cuadrada** b_1 de ab es la **elección buena** si

1. $|a_1 - b_1| \leq |a_1 + b_1|$;
2. Si $|a_1 - b_1| = |a_1 + b_1|$, entonces se cumple $\operatorname{Im}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) > 0$

Para ver el sentido de esta definición vamos a suponer que $\operatorname{Im}(b_1/a_1) = 0$, entonces $b_1/a_1 = r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y tenemos

$$|a_1 - b_1| = |a_1||1 - r| \neq |a_1||1 + r| = |a_1 + b_1|$$

Es interesante observar también que la elección buena se mantiene invariante si intercambiamos a y b , y que si $a \geq b > 0 \in \mathbb{R}$ entonces la elección buena de $(ab)^{1/2}$ es la positiva.

Observación. Por el contrario, llamaremos **elección mala** a la opción que no es la elección buena.

Ejemplo. En la figura 5.4 encontramos, para cada color y para cada a, b , una 3-tupla cuyos elementos son a, b y la elección buena de ab . En la figura, esta última es el punto de la 3-tupla cuya distancia a los otros dos puntos es la menor.

Puede parecer lo más lógico pensar en definir la media aritmético-geométrica usando (1) y escogiendo siempre b_{n+1} como la elección buena para $(a_n b_n)^{1/2}$. Sin embargo hay más posibilidades ya que podemos escoger alguna elección mala para b_{n+1} y aún así tener resultados interesantes.

Ejemplo. Como podemos ver en la tabla 5.2 b_1 es la elección mala de ab pero b_{n+1} es la elección buena de $(a_n b_n)^{1/2}$ para $n \geq 1$ y aún así $\{a_n\}_{n=0}^7$ y $\{b_n\}_{n=0}^7$ parecen converger al mismo número. A continuación vamos a formalizar la idea un poco mejor.

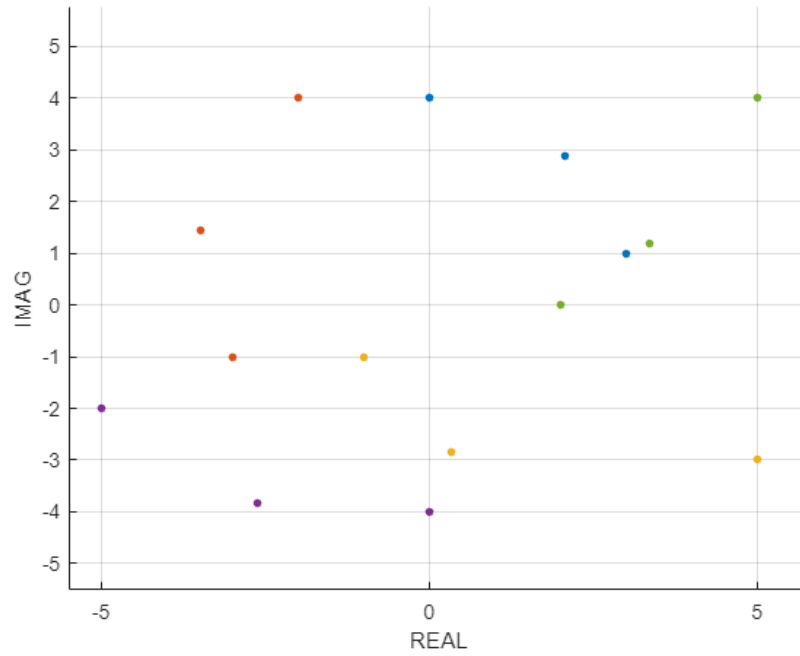


Figura 5.4: Elección buena de cada par (a, b)

n	a_n	b_n
0	2	5
1	3.5000000	-3.1622776
2	0.1688611	3.3268561i
3	0.0844305 + 1.6634280i	0.5299890 + 0.5299890i
4	0.3072098 + 1.0967085i	0.4536090 + 1.0210840i
5	0.3804094 + 1.0588963i	0.3821312 + 1.0613683i
6	0.3812703 + 1.0601323i	0.3812695 + 1.0601316i
7	0.3812699 + 1.0601319i	0.3812699 + 1.0601319i

Tabla 5.2: Ejemplo con la primera elección mala

Definición. Sea $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ tal que $a \neq \pm b$, un **par de sucesiones** $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son **buenas** si b_{n+1} es la elección buena de $(a_n b_n)^{1/2} \forall n \geq 0$ menos un número finito de n 's.

El siguiente teorema va a ser la pieza clave a través de la cual vamos a poder ver el funcionamiento de la AGM en el plano complejo, y a empezar a construir algunos de los resultados de este capítulo.

Teorema 5.1. Sea $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, $a \neq \pm b$, entonces cualquier par de sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidas como en (1) convergen a un límite común, y este límite es distinto de 0 $\Leftrightarrow \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones buenas.

Antes de demostrar este teorema vamos a estudiar un poco más a fondo la propiedades de la elección buena b_1 de $(ab)^{1/2}$ ya que nos va ayudar en nuestra demostración más adelante. Vamos a enunciar el siguiente lema

Lema 5.1. Sea $0 \leq \angle(a, b) < \pi$ el ángulo sin orientar entre a y b , entonces

1. $|a_1 - b_1| \leq \frac{1}{2}|a - b|$
2. $\angle(a_1, b_1) \leq \frac{1}{2}\angle(a, b)$

Demostración (Lema 5.1). Para demostrar la primera identidad usamos que, como b_1 es la elección buena para $(ab)^{1/2}$ entonces $|a_1 - b_1| \leq |a_1 + b_1|$. Multiplicando por $|a_1 - b_1|$ tenemos

$$|a_1 - b_1|^2 \leq |a_1 - b_1||a_1 + b_1| = \left| \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right| \left| \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \right| = \frac{1}{4} |(a+b)^2 - 4ab| = \frac{1}{4} |a-b|^2$$

Tomando raíces a ambos lados queda demostrada la identidad.

Para la segunda identidad vamos a realizar una prueba un tanto más geométrica.

Sea $\phi_1 = \angle(a_1, b_1)$, $\phi = \angle(a, b)$, por el teorema del coseno tenemos

$$|a_1 \pm b_1|^2 = |a_1|^2 + |b_1|^2 \pm 2|a_1||b_1|\cos \phi_1$$

Como b_1 es la elección buena, $|a_1 - b_1| \leq |a_1 + b_1| \Rightarrow \phi_1 \leq \pi/2$, por lo que también tenemos

$$\angle(a_1, b_1) = \phi_1 \leq \pi - \phi_1 = \angle(a_1, -b_1)$$

Se puede probar que, o bien b_1 o bien $-b_1$, llamémosle b'_1 , bisecciona ϕ , es decir, que $\angle(a, b'_1) = \angle(b'_1, b) = \phi/2$. Podemos ayudarnos de la imagen 5.5.

Como a_1 se encuentra en el punto medio del segmento que une a y b , entonces podemos ver que $\angle(a_1, b'_1) \leq \pi/2$, y como $b'_1 = \pm b_1$, junto con las desigualdades anteriores tenemos

$$\angle(a_1, b_1) = \phi_1 \leq \angle(a_1, b'_1) \leq \phi/2 = \frac{1}{2}\angle(a, b)$$

□

Una vez demostrado este lema que usaremos ahora podemos pasar a demostrar el teorema.

Demostración (Teorema 5.1.) Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ sucesiones buenas entonces $\exists N \geq 0, N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\forall n \geq N$ b_n es la elección buena. Sea ahora $\phi_n =$

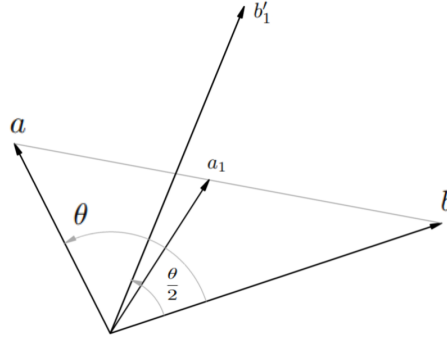


Figura 5.5: Ángulos θ y $\theta/2$

$\angle(a_n, b_n)$ y recordando que por el lema $\phi = \angle(a, b) \leq \pi$, si aplicamos el lema sucesivamente podemos ver que

$$(5.24) \quad \begin{cases} |a_n - b_n| \leq \frac{|a - b|}{2^n} \\ \phi_n \leq \frac{\phi}{2^n} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

Si aplicamos (5.24), usando que $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$, tenemos

$$|a_n - a_{n+1}| \leq \frac{|a - b|}{2^{n+1}}$$

Ahora tomando $m > n$, tenemos

$$|a_n - a_m| \stackrel{\text{des. triangular}}{\leq} \sum_{k=n}^{m-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} 2^{-(k+1)} \right) |a - b| < \frac{|a - b|}{2^n}$$

Podemos ver que como $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy entonces es convergente, y por (5.24) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Hemos visto ya que si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones buenas entonces los límites de las sucesiones convergen a un límite común. Ahora falta ver cuál es ese límite y si es distinto de 0.

Sea $m_n = \min\{|a_n|, |b_n|\}$ entonces es fácil ver que $|b_{n+1}| \geq m_0$. Usando el teorema del coseno de nuevo tenemos

$$(2|a_{n+1}|)^2 = |a_n|^2 + |b_n|^2 + 2|a_n||b_n|\cos\phi_n \geq 2m_n^2(1 + \cos\phi_n) = {}^3 4m_n^2 \cos^2(\phi_n/2)$$

Ahora ya tenemos relacionadas $|a_{n+1}|, |b_{n+1}|$ y m_n .

Seguimos la demostración observando que $m_{n+1} \geq \cos(\phi_n/2)m_n$ ya que $0 \leq \phi_n < \pi$ (esto es una implicación de (5.24) y $\phi < \pi$), y aplicando repetidas veces (5.24) resulta

$$m_n \geq \left(\prod_{k=1}^n \cos(\phi/2^k) \right) m_0.$$

³Usando $\frac{1 + \cos(x)}{2} = \cos^2(x/2)$

Por la Fórmula de Euler $\frac{\text{sen}\phi}{\phi} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(\phi/2^k)$, con $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\text{sen}\phi}{\phi} = 1$, tenemos

$$m_n \geq \frac{\text{sen}\phi}{\phi} m_0$$

Y ahora, como $0 \leq \phi < \pi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

Por lo que ya hemos demostrado que si $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ son buenas no solo convergen al mismo número, sino que éste es distinto de cero. Ahora queda ver qué ocurre si no son sucesiones buenas y cuál es ese límite.

Supongamos ahora que $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ no son sucesiones buenas, sea $M_n = \max\{|a_n|, |b_n|\}$ nuestro objetivo va a ser demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$. Es fácil observar que

$$\forall n \geq 0 \quad M_{n+1} \leq M_n.$$

Ahora suponemos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que b_{n+1} no es la elección buena de $(a_n b_n)^{1/2}$. Esto implica que $-b_{n+1}$ es la elección buena, y que, si aplicamos la primera fórmula de (5.24) entonces tenemos la desigualdad

$$|a_{n+2}| = \frac{1}{2}|a_{n+1} + b_{n+1}| = \frac{1}{4}|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2}M_n$$

Además tenemos que $|b_{n+2}| \leq M_n$, así sumando $|b_{n+2}|$ a cada lado de la desigualdad anterior y observando que $2M_{n+3} \leq |a_{n+2}| + |b_{n+2}|$ resulta:

$$2M_{n+3} \leq |a_{n+2}| + |b_{n+2}| \leq \frac{1}{2}M_n + |b_{n+2}| \leq \frac{3}{2}M_n \Rightarrow$$

$$(5.25) \quad M_{n+3} \leq \frac{3}{4}M_n$$

Y como $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ no son sucesiones buenas, entonces (5.25) tiene que pasar para infinitos n 's, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$.

☒

Conviene hacer una pequeña revisión de lo probado hasta ahora ya que contiene mucha información y de gran importancia: Hemos probado que todo par de sucesiones definidas como en (1) que no son buenas converge a un límite común que es 0, y que todo par de sucesiones buenas definidas como en (1) convergen a un límite común distinto de cero.

Ahora ya habiendo establecido todas las definiciones y demostraciones necesarias podemos por fin definir la media aritmético-geométrica en el plano complejo.

Definición. Sea $a, b \in \mathbb{C}, a, b \neq 0, a \neq \pm b$. $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una **media aritmético-geométrica** de a y b , si existen sucesiones *buenas* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ generadas por (1) tales que $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Observación. Es interesante observar el verdadero papel de la media aritmético-geométrica, ya que ahora ésta es una función de a y b que toma múltiples valores, siendo el número de éstos contable y convirtiendo a $\mathcal{M}(a, b)$ en una colección de números. Es interesante apreciar que hay algunos de estos valores de $\mathcal{M}(a, b)$ más especiales que otros.

Definición. Llamamos **valor más simple** de $\mathcal{M}(a, b)$ al límite común de $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ donde b_{n+1} es la elección buena de $(a_n b_n)^{1/2} \forall n \geq 0$.

Observación. Si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces el valor más simple de $\mathcal{M}(a, b)$ coincide con $\mathcal{M}(a, b)$ del capítulo 2. Es importante remarcar esto para ver la consistencia de las herramientas con las que estamos trabajando.

Para acabar este capítulo y este trabajo vamos a enunciar el último teorema que, relacionando un par de valores más simples de dos medias aritmético-geométricas, nos aporta todos los posibles valores de una media aritmético-geométrica, lo cual supone un avance enorme en el conocimiento que tenemos sobre la AGM en el plano complejo y sus posibles usos.

Teorema 5.2. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$, tales que $|a| \geq |b|$ y sean μ, λ los valores más simples de $\mathcal{M}(a, b)$ y $\mathcal{M}(a+b, a-b)$ respectivamente, entonces todos los posibles valores μ' de $\mathcal{M}(a, b)$ vienen dados por la ecuación

$$(5.26) \quad \frac{1}{\mu'} = \frac{d}{\mu} + \frac{ic}{\lambda}$$

donde c y d son coprimos arbitrarios satisfaciendo $c \equiv 0 \pmod{4}$ y $d \equiv 1 \pmod{4}$.

La demostración de este teorema no la vamos a realizar aquí ya que nos llevaría otro trabajo a parte por su alta complejidad y extensión. La podemos encontrar en [5] y [6]. Pero sí que vamos a comentar las herramientas que se usan y los caminos que la demostración traza.

La demostración se realiza en 4 pasos. En un primer lugar se hace uso de las funciones theta, que como hemos visto antes están bien definidas en \mathbb{C} , y de algunas de las relaciones que siguen siendo ciertas en el plano complejo. Utilizando $x'(q) = \theta_4^2(q)/\theta_3^2(q)$, entonces escogemos un q con $|q| < 1$ tal que $x'(q) = b/a$. Sea $\mu = a/\theta_3^2(q)$, $a_k = \mu\theta_3^2(q^{2^k})$ y $b_k = \mu\theta_4^2(q^{2^k})$ entonces se demuestra que $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ son sucesiones buenas que satisfacen (1) y que convergen a μ . Como podemos ver estos resultados se asemejan mucho a algunos de los que ya habíamos probado. Después entra en escena un teorema que dice que todos los valores de $\mathcal{M}(a, b)$ surgen de esta manera.

El segundo paso de la demostración consiste en encontrar todas las posibles soluciones de $x'(q) = b/a$. Haciendo uso de formas modulares de peso 1, del grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$ y de las transformaciones de $\theta_3(q)$ y $\theta_4(q)$ bajo este grupo se demuestra a través de otro teorema que $x'(q)$ es una función modular del subgrupo de congruencia

$$\Gamma_2(4) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{4}, b \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

A consecuencia de esto, siendo $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im}(\tau) > 0\}$ ⁴, $x' : \mathcal{H}/\Gamma_2(4) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ es una biyección. Además, en $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ es donde se encuentran todos los b/a .

En el tercer paso de la demostración se ven las consecuencias del teorema anterior. Sea \mathbb{F} el dominio fundamental de $\Gamma_2(4)$, escogiendo un $q_0 \in \mathbb{F}$ tal que $x'(q_0) = b/a$, entonces tenemos que todas las soluciones de $x'(q) = b/a$ son de la forma $q = \frac{aq_0 + b}{cq_0 + d}$ con $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_2(4)$, y que $\mu = a/\theta_3^2(q_0)$ es el valor más simple de $\mathcal{M}(a, b)$.

En el último paso se realiza la demostración del teorema 5.2 usando los teoremas probados. Tenemos que todos los valores de la AGM son $\mu' = a/\theta_3^2(q)$ con $x' = b/a$. Entonces

$$\frac{1}{\mu'} = \frac{1}{a}\theta_3^2(q) = \frac{1}{a}\theta_3^2\left(\frac{aq_0 + b}{cq_0 + d}\right) = \frac{1}{a}(cq_0 + d)\theta_3^2(q_0) \quad \Gamma_2(4) \subseteq \Gamma_0(2)$$

⁴Recordemos que $q = e^{i\pi\tau}$ y que $|q| < 1 \Rightarrow \text{Im}(\tau) < 1$

$$= d \frac{\theta_3^2(q_0)}{a} + c \frac{q_0 \theta_3^2(q_0)}{a} = \frac{d}{\mu} + \frac{ic}{\lambda}$$

ya que $\mu = \frac{a}{\theta_3^2(q_0)}$ y $\lambda = \frac{ia}{q_0 \theta_3^2(q_0)}$ son los valores más simples de $\mathcal{M}(a, b)$ y $\mathcal{M}(a + b, a - b)$ respectivamente.

Hay que comentar también que, a pesar de los avances en funciones theta y funciones modulares que realizó Gauss, él nunca consiguió llegar a la fórmula (5.26) del teorema 5.2, pero se quedó muy cerca con una fórmula similar y ya sabía las propiedades de la AGM de números complejos. La fórmula fue demostrada en 1928 por Geppert y Ludwig von David independientemente. En una de las publicaciones de Gauss se encuentra: "*Los valores de la AGM cambian cuando se escoge el valor negativo para $n', n'', n''',$ etc.*"⁵. Y en su diario también se encuentran comentarios acerca de este hecho: "*Entre dos números dados siempre hay infinitas medias aritmético-geométricas y armónico-geométricas. La observación de su conexión ha sido una fuente de felicidad para nosotros.*"

Ejemplo. Escogiendo $a = 13 + 2i, b = 4 - 8i, c, d \in [-450, 450]$ tenemos los siguientes valores para las medias aritmético-geométricas y su inverso, representadas en las figuras 5.6 (arriba) y 5.6 (abajo) respectivamente.

Atendiendo a la demostración completa del teorema 5.2 se entiende el comportamiento de las gráficas. Hay que comentar que los resultados obtenidos dependen totalmente de a y b . Para cada a y b se obtiene una pendiente diferente en $1/\mu'$ y unas circunferencias diferentes en μ' . En las gráficas se ha coloreado diferente para cada d y los puntos que faltan se debe a los puntos donde c y d no son coprimos. Relacionando las dos gráficas y escogiendo la función $f: q \rightarrow 1/q$ que manda $0 \rightarrow \infty, \infty \rightarrow 0$ y -1 a 1 y viceversa, entonces vemos que f manda líneas a círculos, que es lo que se realiza en la demostración del teorema.

⁵Aquí Gauss trabajaba con $\mathcal{M}(m, n)$

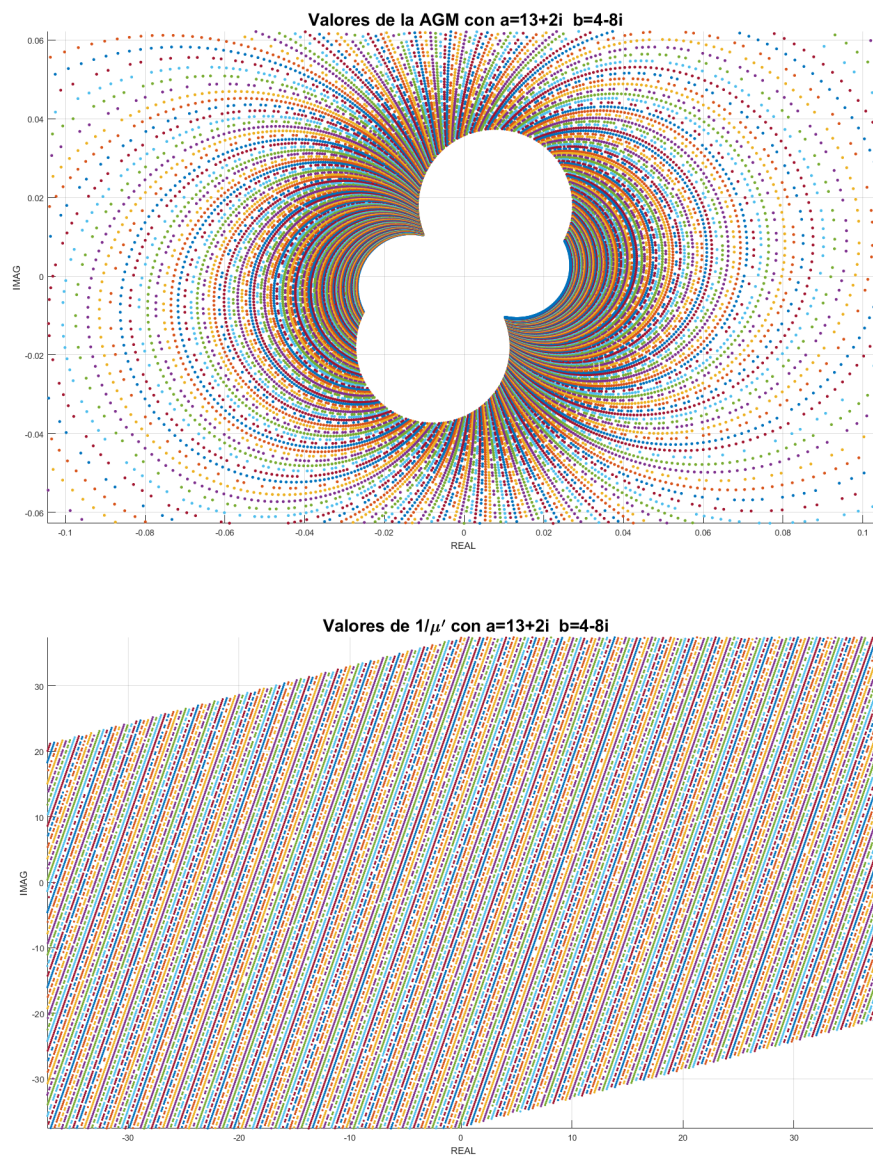


Figura 5.6: Caption

Por último, hay que comentar la utilidad de la AGM de números complejos para explorar todas las posibilidades que nos sugiere. Vemos que la AGM aparece en algoritmos para el cálculo de $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$ y $\arccos(x)$ utilizando $\arctan(x) = \operatorname{Im}(\ln(1 + ix))$; o para el cálculo de $\tan(x)$, $\sin(x)$ y $\cos(x)$ utilizando el método anterior y el de Newton o utilizando $\cos(x) + i\sin(x) = \exp(ix)$ donde la exponencial de un número complejo se calcula a través del método de Newton desde el logaritmo complejo.

También vemos que la AGM en \mathbb{C} aparece en el cálculo de periodos de curvas elípticas en \mathbb{C} y en el cálculo de logaritmos elípticos complejos.

Finalmente, merece una mención todo el trabajo de Gauss acerca de la media aritmético-geométrica que, empezando con la simple observación de que la longitud de arco de la lemniscata y la AGM tenían algo en común, fue capaz de relacionar mediante la AGM campos del análisis tan diversos como integrales elípticas, funciones theta y variable compleja, siendo pionero en muchos de estos campos y abriendo el camino de una investigación muchos más profunda para los matemáticos que le siguieron. También deben tener un espacio para ser nombrados aquí los hermanos Borwein, que a través de su libro *Pi and the AGM* recogieron y supieron ligar de una forma interesante todas las investigaciones relacionadas con medias, π , funciones theta y la AGM, además de dar una base amplia para el cálculo computacional a través de teoría y algoritmos que más tarde han sido de gran utilidad.

Bibliografía

- [1] ARNDT, JÖRG AND HAENEL, CRISTOPH. *Pi - Unleashed* pp. 87-102
- [2] BORWEIN, J.M AND BORWEIN, P.B. *Pi and the AGM: A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*. Monographies et Études de la Societé Mathématique du Canada. Wiley, Toronto (1987)
- [3] BULLEN, P.S. *Handbook of Means and Their Inequalities* pp 175-176.
- [4] COSTIN, JULIA. AND TOADER, GHEORGHE *Means in Mathematical Analysis: Bivariant Means*
- [5] COX, DAVID A. *The arithmetic-geometric mean of Gauss*. L'Enseignement Mathématique, vol. 30 (1984) pp.275-330
- [6] GILMORE, TOMACK. *The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss* Queen Mary, University of London.
- [7] GUILLERA, JESÚS. *Historia de las fórmulas y algoritmos para π* . La gaceta de la RSME, Vol 10.1 (2007) pp. 159-178.
- [8] LAW DEN, DEREK F. *Theta Functions*. In: Elliptic Functions and Applications. Applied Mathematical Sciences, vol 80. Springer, NY. (1989)
- [9] TKACHEV, VLADIMIR G.. *Elliptic functions: Introduction Course*. Royal Institute of Technology Lindstedtsvägen.
- [10] TOADER, GHEORGHE AND TOADER, SILVIA. *Greek means and the arithmetic-geometric mean*.