

# NOMBRE DE LA ASIGNATURA

UNIDAD Nº III

RAZONES Y PROPORCIONES.



# Introducción

Las Razones y Proporciones tienen una gran importancia y aplicación en la vida diaria y también en las operaciones comerciales que se llevan a cabo, como por ejemplo, cuando se realizan compras.

De este modo, nos permiten hallar las relaciones que existen entre dos precios a medida que las cantidades asciendan o desciendan.

Por ejemplo, aunque parezca algo netamente deductivo y evidente, el determinar que la cantidad de dinero que se pagará por la compra de 1 kilo de papas incrementará o se reducirá en relación a que la cantidad adquirida varíe, entre kilo y kilo, es una de las aplicaciones del siguiente tema.

También se pueden resolver problemas relacionados al exceso de carga por parte de los camiones en las rutas, un factor que influye en la capacidad de frenado y en la suspensión de los vehículos, lo que puede derivar en accidentes.

## Ideas Fuerza

1. **IDEAS FUERZA:** Razones y proporciones, definición y conceptos básicos.  
Aplicación en la vida cotidiana.
2. **IDEAS FUERZA:** Proporcionalidad directa e indirecta, aplicaciones y resolución de problemas.
3. **IDEAS FUERZA:** utilización de la regla de tres para la resolución de problemas de proporcionalidad directa e inversa.

# Desarrollo

## Razones: definición y propiedades.

Es el resultado de la composición que se establece entre las cantidades dadas. Dicha comparación se puede dar de dos formas:

- 1) Hallando en cuanto excede una cantidad respecto de otra (por medio de la resta).  
Ejemplo:  $6 - 2 = 4$
- 2) Hallando en cuanto contiene una cantidad a otra (por medio de la división). Ejemplo:  
 $6/2 = 3$

Por lo tanto, decimos que una razón puede ser: Aritmética o por diferencia, o geométrica o por cociente.

### **a) Razón Aritmética o por Diferencia.**

Es la diferencia que se da entre 2 cantidades. Como su operación básica es la sustracción o resta, La Razón Aritmética se puede dar de 2 formas:

- Separando las cantidades por el signo de la sustracción ( - )
- Por medio de un punto ( . ) Ejemplo:

$$\begin{array}{lcl}
 6 - 2 = 4 & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 & & \text{Valor de la Razon} \\
 & \searrow & \\
 & & 2^\circ \text{ Término (consecuente)} \\
 \downarrow & & \\
 & & 1^\circ \text{ Término (antecedente)}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 6 \\ 2 \\ 1 \end{array}} \right\} \in \mathbb{Z}^+$$

Lo anterior se lee: “6 excede a 2 en 4” ; “6 es mayor que 2 en 4” ; “2 es menor que 6 en 4”, etc.

## Propiedades de la Razón Aritmética.

Las propiedades de las razones aritméticas, son las mismas propiedades que en la resta o sustracción.

- 1) Si al antecedente de la R.A. se le suma o resta una cantidad, entonces el valor de la Razón quedará aumentado o disminuido en dicha cantidad, respectivamente.

Ejemplo.:

$$\text{Si } 6 - 2 = 4 \Rightarrow \underbrace{6 + 3}_{9} - 2 = \underbrace{4 + 3}_7 \quad (\wedge) \quad \underbrace{6 - 1}_5 - 2 = \underbrace{4 - 1}_3$$

- 2) Si el consecuente de la R.A. quedase aumentado o disminuido en cierta cantidad, entonces el valor de la Razón quedara disminuido, en el primer caso, o aumentado, en el 2do caso, en dicha cantidad.

Ejemplo.:

$$\text{Si } 6 - 2 = 4 \Rightarrow 6 - \underbrace{(2 - 1)}_{-1} = \underbrace{4 + 1}_5 \quad (\wedge) \quad 6 - \underbrace{(2 + 1)}_{-3} = \underbrace{4 - 1}_3$$

- 3) Si al antecedente y al consecuente de una R.A. Se le suma o se le resta una misma cantidad, entonces el valor de la Razón no se verá afectado (permanecerá constante).

Ejemplo:

$$\text{Si } 6 - 2 = 4 \Rightarrow \underbrace{6 + 1}_7 - \underbrace{(2 + 1)}_{-3} = 4 \quad (\wedge) \quad \underbrace{6 - 1}_5 - \underbrace{(2 - 1)}_{-1} = 4 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \underbrace{6 + 1}_7 - \underbrace{(2 + 1)}_{-3} \\ \underbrace{6 - 1}_5 - \underbrace{(2 - 1)}_{-1} \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{A Ambos} \\ \text{Términos o se les suma} \\ \text{o se les resta la misma} \\ \text{cantidad} \end{array}$$

## b) Razón Geométrica o por Cociente.

Es la Razón que se establece por medio del cociente que se obtiene al dividir 2 cantidades. Se pueden representar de 2 modos: en forma de fracción o por medio de 2 puntos, signo de la división ( $a/b$  ó  $\div$ ) Ejemplo:

$$6/2 = 3 \Leftrightarrow 6 : 2 = 3$$

$\downarrow$  Valor de la Razon

$\downarrow$  2° Término (consecuente)

$\downarrow$  1° Término (antecedente)

}

$\in \mathbb{Z}^+$

Lo anterior se lee “6 contiene a 2 en 3”; “6 contiene 3 veces a 2”; “2 está incluido en 6, 3 veces” etc.

### Propiedades de la Razón Geométrica.

Son las mismas propiedades que en las fracciones.

- 1) Si el antecedente de la R.G. queda multiplicada o dividida por una cantidad, el valor de la Razón quedará también multiplicado o dividido por la misma cantidad, respectivamente.

Ejemplo.:

$$Si \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5 \quad (\wedge) \quad \frac{6 : 3}{2} = 3 : 3$$

30
2
15
1

- 2) Si el consecuente de un R.G. queda multiplicado o dividido, por una cantidad entonces el valor de la Razón quedará dividido, en el 1er caso; o multiplicado, en el 2do caso, por esa misma cantidad. Ejemplo:

$$Si \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6}{2 \cdot 3} = 3 : 3 \quad (\wedge) \quad \frac{6}{2 : 2} = 3 : 2$$

6
1
1
6

- 3) Si el antecedente ya la consecuente de una R.G. se les multiplica o se les divide por una misma cantidad, entonces el valor de la Razón permanecerá constante.  
 Ejemplo:

$$\text{Si } \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \frac{6 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 3 \quad (\wedge) \quad \frac{6:5}{2:5} = 3$$

$\frac{24}{8}$ 
 $\frac{6/5}{2/5}$

Ejemplos de razones:

Si en un salón de clases tenemos 24 niñas y 18 niños, entonces lo representaremos de alguna de las siguientes formas:

$$\frac{24}{18} \quad \text{o} \quad 24:18$$

Y como la fracción podemos simplificarla al dividirla entre 6, entonces tendremos:

$$\frac{24:6}{18:6} = \frac{4}{3}$$

Y se lee que existe una razón de 4 a 3, o de 4 por cada 3.

Las razones, además se pueden representan gráficamente, tal como se ve en el siguiente ejemplo:

| Cantidad  | Razón  | Cantidades                                   | Representación   |       |       |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
|-----------|--------|--|--|-------|-------|--|--|--|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| 1 queque  | 4:2    | 4 tazas de harina por cada 2 tazas de leche  | <table><tr><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>leche</td><td>leche</td></tr></table>   |       |       |  |  |  | harina | harina | harina | harina | leche | leche |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
| harina    | harina | harina                                       | harina   | leche | leche |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
| 2 queques | 8:4    | 8 tazas de harina por cada 4 tazas de leche  | <table><tr><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>leche</td><td>leche</td></tr><tr><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>leche</td><td>leche</td></tr></table>  |       |       |  |  |  | harina | harina | harina | harina | leche | leche | harina | harina | harina | harina | leche | leche |        |        |        |        |       |       |
| harina    | harina | harina                                       | harina   | leche | leche |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
| harina    | harina | harina                                       | harina   | leche | leche |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
| 3 queques | 12:6   | 12 tazas de harina por cada 6 tazas de leche | <table><tr><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>leche</td><td>leche</td></tr><tr><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>leche</td><td>leche</td></tr><tr><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>harina</td><td>leche</td><td>leche</td></tr></table> |       |       |  |  |  | harina | harina | harina | harina | leche | leche | harina | harina | harina | harina | leche | leche | harina | harina | harina | harina | leche | leche |
| harina    | harina | harina                                       | harina   | leche | leche |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
| harina    | harina | harina                                       | harina   | leche | leche |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |
| harina    | harina | harina                                       | harina   | leche | leche |  |  |  |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |        |        |        |        |       |       |

## PROPORCIONES: definición y propiedades

Las proporciones son igualdades que se establecen entre 2 Razones de la misma clase. Las proporciones pueden ser:

**1) Proporciones Aritméticas o Equidiferencia:** Es la igualdad que se establece entre 2 Razones Aritméticas, Una Equidiferencia se escribe de 2 formas siguientes:

$$a - b = c - d \quad \text{o} \quad a * b = c * d; \forall a; b; d \in \mathbb{Z}^+$$

**Términos de una Proporción Aritmética:**

|   |                   |  |                      |                                    |
|---|-------------------|--|----------------------|------------------------------------|
| $\underbrace{a - b}_{1^\circ \text{miembro}} = \underbrace{c - d}_{2^\circ \text{miembro}}$ | $\longrightarrow$ | $a; c = \text{antecedentes}$<br>$b; d = \text{consecuentes}$<br>$a; d = \text{t. extremos}$<br>$b; c = \text{t. medios}$ | $\blacktriangleleft$ | Se lee "a es a b<br>como c es a d" |
|---|-------------------|--|----------------------|------------------------------------|

**Propiedad Fundamental:** “En toda equidiferencia la suma de los extremos es igual a la suma de los medios”.

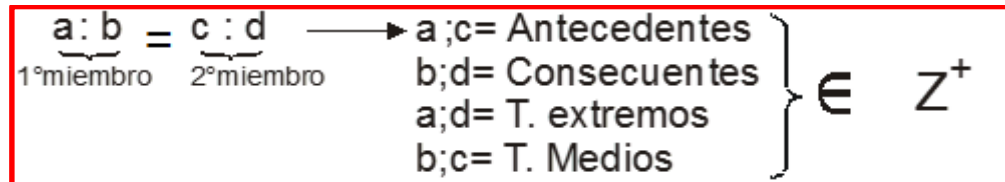
Si  $a - b = c - d$  es Proporción Aritmética  $\Rightarrow a + d = c + b$ .

Ejemplo:  $8 - 6 = 11 - 9 \Rightarrow 9 + 8 = 11 + 6 \Rightarrow 17 = 17$

**2) Proporciones Geométricas o Equicocientes:** Son las igualdades que se establecen entre 2 Razones geométricas. Una Proporción geométrica se puede representar de 2 maneras:

$$a : b = c : d \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

**a) Términos de una Proporción Geométrica:**



Se lee “a es a b como c es a d”

**b) Propiedad Fundamental:** En todo equicociente el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ es una proporción}$$

*Ejemplo:*

$$\frac{18}{6} = \frac{51}{17} \Rightarrow 18 \cdot 17 = 6 \cdot 51 \Rightarrow 306 = 306$$

**c) Transformaciones de Proporciones Geométricas.**

Una Proporción geométrica puede sufrir hasta 8 transformaciones distintas y legítimas entre sí (una transformación es legítima cuando su propiedad fundamental permanece constante en valor numérico).

Sea la proporción Geométrica:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; sus variaciones legítimas serán.



$$1) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad 2) \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad 3) \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \quad 4) \frac{c}{d} = \frac{a}{b};$$

$$5) \frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad 6) \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \quad 7) \frac{c}{a} = \frac{d}{b}; \quad y \quad 8) \frac{b}{a} = \frac{d}{c};$$

Ejemplo: la proporción  $\frac{32}{16} = \frac{16}{8}$ ; puede escribirse de 8 modos:

$$1) \frac{32}{16} = \frac{16}{8}; \quad 2) \frac{8}{16} = \frac{16}{32}; \quad 3) \frac{16}{8} = \frac{32}{16}; \quad 4) \frac{16}{32} = \frac{8}{16};$$

$$5) \frac{32}{16} = \frac{16}{8}; \quad 6) \frac{8}{16} = \frac{16}{32}; \quad 7) \frac{16}{8} = \frac{32}{16}; \quad 8) \frac{16}{32} = \frac{8}{16};$$

#### d) Comparación de Proporciones Geométricas.

- 1) Si 2 proporciones geométricas tienen razón común, las otras 2 Razones formarán proporción geométrica. Ejemplo:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} (\wedge) \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$$

- 2) Si 2 proporciones geométricas tiene antecedentes iguales, los consecuentes formarán proporción geométrica. Ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} (\wedge) \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{6}{2} = 3 (\wedge) \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

- 3) Si 2 proporciones geométricas tienen consecuentes iguales, los antecedentes formarán proporción geométrica. Ejemplo:

$$\frac{72}{8} = \frac{108}{12} (\wedge) \frac{56}{8} = \frac{84}{12} \Rightarrow \frac{72}{108} = \frac{56}{84}$$

- 4) El producto que se obtiene al multiplicar, término a término, distintas proporciones geométricas da lugar a una proporción geométrica. Ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}; \frac{3}{9} = \frac{6}{18}; \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Multiplicando} \\ \text{antecedentes y} \\ \text{consecuentes} \end{array} \quad \frac{1}{2} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{54} (\wedge) \frac{2}{4} \times \frac{6}{18} \times \frac{8}{12} = \frac{96}{864};$$

Luego,  $\frac{6}{54} = \frac{96}{864}$  es una P.G. porque:  $6 \cdot 864 = 54 \cdot 96$

- 5) Con los 4 Términos de 2 productos iguales se puede formar una proporción geométrica. Ejm.:  $6 \times 3 = 2 \times 9 \Leftrightarrow \frac{3}{9} = \frac{2}{6}$

### e) Propiedades de las Proporciones Geométricas.

Sea la proporción  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ; se cumple:

|   |   |
|---|---|
| 1) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$               | 2) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$             |
| 3) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ | 4) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$         |
| 5) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + c}{a - c} = \frac{b + d}{b - d}$           | 6) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a \mp c}{b \mp d}$ |
| 7) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a - b}{a + b} = \frac{c - d}{c + d}$           |   |

### f) Operaciones con las Proporciones Geométricas.

|   |   |
|---|---|
| 1) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm k}{b \pm k} = \frac{c \pm k}{d \pm k} \Rightarrow R \pm k$ | } Siendo:   |
| 2) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ak}{bk} = \frac{ck}{dk} \Rightarrow R(\text{cte})$               |   |
| 3) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a/k}{b/k} = \frac{c/k}{d/k} \Rightarrow R(\text{cte})$           |   |
| 4) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^k = \left(\frac{c}{d}\right)^k$               | 5) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \sqrt[k]{\frac{c}{d}}$ |

### G) Serie de Razones Equivalentes (S.R.E.)

Son las igualdades que se establecen entre los grupos de proporciones que poseen la misma constante de Razón. Puede ser de 2 formas:

**1) S.R.E. Aritméticas:** Si la igualdad se establece entre 2 o más proporciones aritméticas.

Ejemplo:  $8 - 5 = 7 - 4 = 11 - 8 = 6 - 3 = \dots\dots\dots$

$$18 - 15 = 15 - 12 = 12 - 9 = 9 - 6 = \dots\dots\dots$$

**2) S.R.E. Geométricas:** Si la igualdad se establece entre 2 ó más proporciones geométricas.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \dots\dots\dots k(\text{cte}).$$

#### Propiedades de las S.R.E.G:

$$(*) \text{ Si } \underbrace{\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \dots\dots = \frac{Z}{\alpha}}_{\text{"N" RAZONES}} = K(\text{cte}) \Rightarrow \frac{abcd\dots Z}{bcde\dots \alpha} = (K)^n$$

$$\text{Se Cumple : } \boxed{a = \alpha k^n ; b = \alpha k^{(n-1)} ; c = \alpha k^{(n-2)} ; \dots\dots ; Z = \alpha k}$$

Donde:

- **K** = Cte. De proporcionalidad ( $k \in \mathbb{Z}^+$ )
- **a** = 1° antecedente
- **N** = # Total de Razones geométricas
- **$\alpha$**  = Ultimo consecuente.

$$(*) \text{ Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots\dots = \frac{Z}{\alpha} = k \Rightarrow \frac{a \pm c \pm e \pm \dots\dots \pm Z}{b \pm d \pm f \pm \dots\dots \pm \alpha} = k$$

$$(*) \text{ Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{Z}{\alpha} = k \Rightarrow \frac{a^P \pm c^P \pm e^P \pm \dots \pm Z^P}{b^P \pm d^P \pm e^P \pm \dots \pm \alpha^P} = k^P$$

Dónde:  $k = \text{cte. De proporcionalidad } (\in \mathbb{Q}^+)$  ;  $P \in \mathbb{Z}^+$

Ejercicios resueltos.

1. Un equipo ha marcado 68 goles y ha encajado 44. ¿Cuál es la razón entre las dos cantidades?

$$\text{Razón entre goles marcados y goles encajados: } \frac{68}{44} = \frac{17}{11} = 1,55$$

$$\text{Razón entre goles encajados y goles marcados: } \frac{44}{68} = \frac{11}{17} = 0,65$$

2. Calcular el valor de “x” para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

|          | Año | Enero |
|----------|-----|-------|
|          |     |       |
| Ciudad A | x   | 150   |
|          |     |       |
| Ciudad B | 480 | 80    |

$$150/x = 80/480 \quad 150 \cdot 480 = 80x \quad (150 \cdot 480)/80 = 900$$

Para que las cantidades de agua sean proporcionales, la ciudad A debe registrar 900.

3. Calcular el valor de “x” para que las cantidades de agua registradas en un año completo y en un mes en ambas ciudades sean proporcionales.

|          | Año  | Enero |
|----------|------|-------|
|          |      |       |
| Ciudad A | 1200 | x     |
|          |      |       |
| Ciudad B | 480  | 80    |

$$\frac{x}{120} = \frac{80}{480} \quad x \cdot 480 = 1200 \cdot 80 \quad (1200 \cdot 80)/480 = 200$$

## PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Si dos magnitudes son tales que, a doble, triple... cantidad de la primera corresponde doble, triple... cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son directamente proporcionales.

### Ejemplo

**Un saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 2 sacos?**

**Un cargamento de papas pesa 520 kg ¿Cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?**

|                 |    |    |    |     |     |     |
|-----------------|----|----|----|-----|-----|-----|
| Número de sacos | 1  | 2  | 3  | ... | 26  | ... |
| Peso en kg      | 20 | 40 | 60 | ... | 520 | ... |

Para pasar de la 1ª fila a la 2ª basta multiplicar por 20

Para pasar de la 2ª fila a la 1ª dividimos por 20

Observemos que  $\frac{1}{20} = \frac{2}{40} = \frac{3}{60} = \dots$

Las magnitudes **número de sacos** y **peso en kg** son **directamente proporcionales**.

La **constante de proporcionalidad** para pasar de número de sacos a kg es 20.

Esta manera de funcionar de las proporciones nos permite adentrarnos en lo que llamaremos Regla de tres y que nos servirá para resolver una gran cantidad de problemas matemáticos.

## REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

**Ejemplo 1: En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?**

Como en la doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple, triple, etc. Las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son directamente proporcionales.

Si representamos por  $x$  el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

|                |       |       |
|----------------|-------|-------|
| Litros de agua | 50    | $x$   |
| Gramos de sal  | 1.300 | 5.200 |

Se verifica la proporción:  $\frac{50}{1.300} = \frac{x}{5.200}$

Y como en toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos (en palabras simples, se multiplican los números en forma cruzada) resulta:

$$50 \text{ por } 5.200 = 1.300 \text{ por } x$$

Es decir 
$$x = \frac{50 \cdot 5.200}{1.300} = 200$$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } 50 \text{ l hay } 1300 \text{ g de sal} \\ \text{En } x \text{ l habrá } 5200 \text{ g de sal} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 50 \text{ l } \underline{\hspace{1cm}} 1300 \text{ g} \\ x \text{ l } \underline{\hspace{1cm}} 5200 \text{ g} \end{array} \Rightarrow x = \frac{50 \cdot 5200}{1300} = 200$$

**Ejemplo 2: Un automóvil gasta 5 litros de bencina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?**

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ l } \underline{\hspace{1cm}} 100 \text{ km} \\ 6 \text{ l } \underline{\hspace{1cm}} x \text{ km} \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{5} = 120$$

Luego, con 6 litros el automóvil recorrerá 120 km

## MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES.

Si dos magnitudes son tales que, a doble, triple... cantidad de la primera corresponde la mitad, la tercera parte ... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son inversamente proporcionales.

**Ejemplo: Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?**

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales)

Formamos la tabla:

|         |    |    |   |     |    |
|---------|----|----|---|-----|----|
| Hombres | 3  | 6  | 9 | ... | 18 |
| Días    | 24 | 12 | 8 | ... | ?  |

Vemos que los productos  $3 \text{ por } 24 = 6 \text{ por } 12 = 9 \text{ por } 8 = 72$

Por tanto  $18 \text{ por } x = 72$

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Como regla general, la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes inversamente proporcionales se obtiene multiplicando las magnitudes entre sí, y el resultado se mantendrá constante.

## REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA (O INDIRECTA)

**Ejemplo 1: Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?**

Vemos que, con el mismo forraje, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto, son magnitudes inversamente proporcionales.

X = número de días para el que tendrán comida las 450 vacas

|             |     |     |
|-------------|-----|-----|
| Nº de vacas | 220 | 450 |
| Nº de días  | 45  | x   |

Se cumple que: 220 por 45 = 450 por x, de donde  $x = \frac{220 \cdot 45}{450} = 22$

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} 220 \text{ vacas tienen para } 45 \text{ días} \\ 450 \text{ vacas tienen para } x \text{ días} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 220 \text{ vacas } \underline{\hspace{1cm}} 45 \text{ días} \\ 450 \text{ vacas } \underline{\hspace{1cm}} x \text{ días} \end{array} \Rightarrow x = \frac{220 \cdot 45}{450} = 22$$

Luego 450 vacas podrán comer 22 días

**Ejemplo 2:** Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

$$\left. \begin{array}{l} 8 \text{ toneles } \underline{\hspace{1cm}} 200 \text{ litros} \\ 32 \text{ toneles } \underline{\hspace{1cm}} x \text{ litros} \end{array} \right\} x = \frac{8 \cdot 200}{32} = 50$$

Pues la cantidad de vino = 8 por 200 = 32 por x

Debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.



## PROPORCIONALIDAD COMPUESTA DE MAGNITUDES

Regla de tres compuesta. Método de reducción a la unidad

**Ejemplo 1: Proporcionalidad directa: Cuatro chicos durante 10 días de campamento han gastado en comer 25.000 pesos. En las mismas condiciones ¿cuánto gastarán en comer 6 chicos durante 15 días de campamento?**

- Doble número de chicos acampados el mismo número de días gastarán el doble. Luego las magnitudes número de chicos y dinero gastado son directamente proporcionales.
- El mismo número de chicos, si acampan el doble número de días gastarán el doble. Luego las magnitudes número de días de acampada y dinero gastado son directamente proporcionales.

Hemos relacionado las dos magnitudes conocidas, n° de chicos y n° de días con la cantidad desconocida, gasto.

|                        |   |
|------------------------|---|
| SABEMOS QUE            | 4 chicos — en 10 días gastan 25.000 pesos                     |
| REDUCCIÓN A LA UNIDAD  | 1 chico — en 10 días gasta $25.000/4 = 6.250$ pesos           |
|                        | 1 chico — en 1 día gasta $6.250/10 = 625$ pesos               |
|                        | 6 chicos — en 1 día gastan $625 \times 6 = 3.750$ pesos       |
| BÚSQUEDA DEL RESULTADO | 6 chicos — en 15 días gastan $3.750 \times 15 = 56.250$ pesos |

**Ejemplo 2: Proporcionalidad inversa: 15 obreros trabajando 6 horas diarias, tardan 30 días en realizar un trabajo. ¿Cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo 10 obreros, empleando 8 horas diarias?**

- Doble número de obreros trabajando el mismo número de días trabajarán la mitad de horas al día para realizar el trabajo. Por tanto, el número de obreros y el número de días de trabajo son inversamente proporcionales.
- Doble número de horas diarias de trabajo el mismo número de obreros tardarán la mitad de días en realizar el trabajo. Luego el número de horas diarias de trabajo y el número de días de trabajo son inversamente proporcionales.

Hemos relacionado las dos magnitudes conocidas, nº de obreros y nº de horas diarias de trabajo, con la cantidad desconocida, nº de días de trabajo.

|                        |   |
|------------------------|---|
| SABEMOS QUE            | 15 obreros $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 6 horas diarias $\xrightarrow{\text{tardan}}$ 30 días                      |
| REDUCCIÓN A LA UNIDAD  | 1 obrero $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 6 horas diarias $\xrightarrow{\text{tarda}}$ $30 \cdot 15 = 450$ días        |
|                        | 1 obrero $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 1 hora diaria $\xrightarrow{\text{tarda}}$ $450 \cdot 6 = 2700$ días         |
| BÚSQUEDA DEL RESULTADO | 10 obreros $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 1 hora diaria $\xrightarrow{\text{tardan}}$ $\frac{2700}{10} = 270$ días   |
|                        | 10 obreros $\xrightarrow{\text{trabajando}}$ 8 horas diarias $\xrightarrow{\text{tardan}}$ $\frac{270}{8} = 33.75$ días |

Por tanto, 10 obreros empleando 8 horas diarias tardarán 33,75 días.

**Ejemplo 3: Si 12 perros comen 36 kg de alimento en 6 días. ¿Cuántos kg comen 15 perros en 8 días?**

Este problema corresponde a un ejercicio de Proporcionalidad Compuesta, pues intervienen tres o más variables.

En el ejercicio aparecen tres variables: perros, kilos de comida, días. Para resolverlo, cada variable se relaciona por separado con la incógnita. El valor encontrado en la primera relación se aplica en la segunda y así sucesivamente.

| Perros | Kg alimento | Días |
|--------|-------------|------|
| 12     | 36          | 6    |
| 15     | x           | 8    |

Si se relacionan los perros con los Kg de comida (para el mismo número de días: 6). Se puede deducir que mientras más perros más comida necesitan para el mismo número de días; o al revés, mientras menos perros menos Kg de comida necesitan, por lo tanto, esta relación es una proporción directa.

La proporción se escribe tal cual:

$$\frac{12 \text{ perros}}{15 \text{ perros}} = \frac{36 \text{ Kg}}{x}$$

$$x = \frac{15 \cdot 36}{12}$$

$$x = 45$$

Ahora se reemplaza este valor en lugar de 36 (sabemos ahora que 15 perros necesitan 45 kg para 6 días) y se plantea la nueva proporción:

$$\frac{45 \text{ Kg}}{x} = \frac{6 \text{ días}}{8 \text{ días}}$$

$$x = \frac{45 \cdot 8}{6}$$

$$x = 60$$

La relación Kg de alimento es directamente proporcional con los días (para el mismo número de perros: 15), pues mientras más alimento, para más días alcanza.

Por lo tanto, si hay 15 perros y la comida debe alcanzar para 8 días, entonces se necesitarán 60 Kg.

# Conclusión

En la vida diaria como en las operaciones comerciales es necesario comparar cosas y enunciados que involucran números, además estos enunciados tienen un significado muy restringido si no se comparan con otras cantidades.

También podemos concluir que existen dos tipos de razones:

- Razón aritmética: una sustracción.
- Razón geométrica: una división.

Presentan diferentes elementos como:

- Antecedentes
- Consecuente
- Valor de razón geométrica
- Valor de razón aritmética.

Podemos decir que una proporción es la igualdad de dos razones de una misma clase y que tienen el mismo valor. Al igual que en las razones, existen dos tipos de proporciones: aritmética y geométrica.

Las Proporciones es una manera de poder encontrar relaciones entre cantidades que crecen o disminuyen de la misma manera. Así, la cantidad de dinero que pagas por lo que compras en la tienda va creciendo "en la misma proporción" con la que crece el número de artículos que comprarás. A este tipo de relación entre cantidades se le llama en Matemáticas Proporción directa o Razones Proporcionales.

Si, por el contrario, al crecer una cantidad, otra relacionada con esta disminuye, se le llama Proporción Inversa o Productos Proporcionales. De esta manera varían los lados de un rectángulo cuya área no cambia: si un lado disminuye su tamaño, el otro tiene que aumentar para conservar el área sin cambio.

La regla de 3 es una simplificación de plantear las proporciones. De este modo, encontramos las operaciones que se deben realizar sin escribir varios pasos. En un sólo paso se encuentra el resultado.

## Bibliografía

|   |                |
|---|----------------|
| - <a href="http://www.madrimasd.org/cienciaysociedad/resenas/ensayos/resena.asp?id=497">http://www.madrimasd.org/cienciaysociedad/resenas/ensayos/resena.asp?id=497</a>                       | 05 / 04 / 2017 |
| - <a href="http://misecundaria.com/Main/RelacionesDeProporcionalidad">http://misecundaria.com/Main/RelacionesDeProporcionalidad</a>   | 05 / 04 / 2017 |
| - <a href="http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&amp;pid=S1665-58262012000100006">http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&amp;pid=S1665-58262012000100006</a> | 05 / 04 / 2017 |
| - <a href="http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137520">http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?ID=137520</a>   | 05 / 04 / 2017 |
| - <a href="http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Proporcionalidad.htm">http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Proporcionalidad.htm</a>   | 05 / 04 / 2017 |

