IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL

NIVELACIÓN MATEMÁTICA

UNIDAD Nº II

Lenguaje Algebraico.

Introducción

Se puede pensar que el álgebra comienza cuando se empiezan a utilizar letras para representar números, pero en realidad comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los mismos números, y así el gran paso de la aritmética al álgebra.

La utilización de letras dentro del ambiente matemático es muy antigua, ya que los griegos y romanos las utilizaban para representar números bien determinados. Las ecuaciones y sus soluciones son de mucha importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia.

Una fórmula es el enunciado algebraico de que dos expresiones representan al mismo número. Por ejemplo, la fórmula del área de un círculo es: 2 A = π r. El símbolo A representa el área, lo mismo que la expresión: 2 π r , pero aquí el área se expresa en términos de otra cantidad, el radio: r . A menudo es necesario resolver una fórmula para una letra o símbolo que aparecen en ella.

En la práctica es necesario plantear ecuaciones para ser resueltas y no siempre es fácil identificar la información que nos lleva a la ecuación. Los problemas de aplicación no vienen en forma “resuelva la ecuación”, sino que son relatos que suministran información suficiente para resolverlos y debemos ser capaces de traducir una descripción verbal al lenguaje matemático. Cualquier solución matemática debe ser verificada si es solución del problema en cuestión, porque podría tener solución matemática que carezca de sentido con el contexto del problema.

Ideas Fuerza

1. **IDEAS FUERZA:** Ecuaciones de primer grado: resolver ecuaciones de primer grado con coeficiente racional, utilizando mínimo común múltiplo para simplificar la expresión.
2. **IDEAS FUERZA:** Lenguaje algebraico: plantear a partir de una situación dada una ecuación de primer grado, permita dar solución a un problema.
3. **IDEAS FUERZA:** Lenguaje algebraico: plantear a partir de una situación dada una ecuación de primer grado con coeficiente racional, permita dar solución a un problema.

Desarrollo

Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios.

¿Qué sucede cuándo nos enfrentamos a una ecuación de este tipo?

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{5} = \frac{5}{15}x + 19$$

Para resolver una ecuación de este tipo la transformamos en una ecuación equivalente que no contenga fracciones, multiplicando ambos miembros de la ecuación por el mínimo común denominador de los denominadores de la ecuación original. Recordemos que al multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad, ésta debe ser diferente de cero, ya que de lo contrario la ecuación resultante no sería equivalente a la original.

Ejemplo:

1. $\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}.$

El mínimo común denominador de los denominadores 2, 12, 6 y 4 es **12** y $12 \neq 0$ (doce es distinto de cero).

$\left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12}\right)(12) = \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{4}\right)(12)$	Multiplicamos ambos miembros por 12
$6x + 24 - x = 2x - 15$	Realizamos operaciones
$6x - x - 2x = -15 - 24$	Trasponemos términos
$3x = -39$	Reducimos términos semejantes
$x = -13$	Dividimos ambos miembros entre 3.

Otros ejemplos:

$$1)\quad \frac{30}{x+5} + \frac{5+4x}{x+5} = 5$$

1. Se suprimen los denominadores.

m.c.m. (x + 5, 1) = x + 5

$$\frac{30+5+4x}{x+5} = \frac{5x+25}{x+5}$$

$$\cancel{(x+5)}\left(\frac{30+5+4x}{\cancel{x+5}}\right) = \cancel{(x+5)}\left(\frac{5x+25}{\cancel{x+5}}\right)$$

30 + 5 + 4x = 5x + 25

Otra forma de hacerlo es dividir el m.c.m entre cada denominador y multiplicarlo por su correspondiente numerador:

30 + 5 + 4x = 5(x + 5)

2. Se hace la transposición de términos.

4x - 5x = 25 - 30 - 5

3. Se reducen los términos semejantes.

- x = - 10

4. Se despeja la incógnita.

x = 10

$$\boxed{2)\quad \frac{2}{x+1} = \frac{x}{x-1} - 1}$$

1. Se suprimen los denominadores.

$$\text{m.c.m. } (x+1, x-1) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

$$\frac{2(x-1)}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - (x^2-1)}{x^2-1}$$

$$\cancel{(x^2-1)}\left[\frac{2(x-1)}{\cancel{x^2-1}}\right] = \cancel{(x^2-1)}\left[\frac{x(x+1)-(x^2-1)}{\cancel{x^2-1}}\right]$$

$$2(x-1) = x(x+1) - x^2 + 1$$

$$2x - 2 = \cancel{x^2} + x \cancel{-x^2} + 1$$

2. Se hace la transposición de términos.

2x - x = 1 + 2

3. Se reducen los términos semejantes.

x = 3

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{2x-2} = -\frac{3}{2x+2}}$$

$$(x-1)^2 = (x-1)(x-1)$$

$$2x - 2 = 2(x-1)$$

$$2x + 2 = 2(x+1)$$

$$\text{m.c.m.}\left[(x-1)^2,\ 2x-2,\ 2x+2\right] = 2(x-1)^2(x+1)$$

Dividimos el m.c.m. por cada denominador y multiplicamos por el numerador.

$$2(x+1) - 3(x-1)(x+1) = -3(x-1)^2$$

$$2x + 2 - 3x^2 + 3 = -3x^2 + 6x - 3$$

$$2x + 5 = 6x - 3$$

$$-4x = -8$$

$$x = 2$$

Desarrollar los siguientes ejercicios.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 \qquad \frac{x}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5x}{6} = 3$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{3} - x \qquad \frac{7}{2}x = \frac{5}{3}x - 2x$$

Soluciones: 6 - 7/6 – 3 – 0

Resolución de problemas.

Recordemos que una expresión algebraica es una colección significativa de números, variables y signos de operación. Expresiones algebraicas son formadas mediante el uso de constantes, variables y las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, uso de exponentes y buscando raíces.

Ejemplos de Expresiones Algebraicas.

$2p + 5$	$4a - 6$	$3x - 9 + 2$
$3x^2 + 5x - 3$	$(3x - y)^3$	$a + b - 5$
$4x$	$\frac{x+2}{x-3}$	$\frac{1}{x+9}$

Cuando se le asigna un valor numérico o literal a cada variable de una expresión algebraica y se resuelven las operaciones indicadas en la expresión, para obtener un resultado o un valor final, se está valorizando una expresión algebraica.

Calculemos el valor numérico de la expresión algebraica $5a^2 - b^3$, considerando que:

$a = -2$

$b = 1$

Pasos:

1. Reemplazar cada variable, en este caso las letras a y b, por el valor numérico asignado, -2 y 1 respectivamente, en la expresión algebraica.

   $5a^2 - b^3$

   $5 \cdot (-2)^2 - (1)^3$

2. Resolver las potencias

   5 · 4 — 1

3. Realizar las multiplicaciones y/o divisiones, siempre de izquierda a derecha

   20 — 1

4. Realizar las sumas y/o restas, siempre de izquierda a derecha.

   20 + — 1= 19

5. Es importante recordar que cuando se anota 2a, significa que hay una operación de multiplicación entre ellos, es decir , 2 a = 2 · a.

Otro ejemplo:

Si n = 3, entonces $n^2 - \frac{n}{3} + 3n$ es igual a

a) 6

b) 9

c) 14

d) 17

e) 18

En efecto, al reemplazar n = 3, en la expresión $n^2 - \frac{n}{3} + 3n$, se tiene

$$3^2 - \frac{3}{3} + 3 \cdot 3 = 9 - 1 + 9 = 17.$$

Así, la opción correcta es D).

a) Cómo plantear y resolver Problemas

A lo largo del desarrollo de esta unidad se han presentado diversos tipos de problemas sencillos, en esta sección profundizaremos en las técnicas para resolverlos.

En los problemas nos planteamos la o las ecuaciones que relacionan los datos con las incógnitas. Lo difícil es identificar la información que nos lleva a la ecuación que debemos resolver, esto se debe a menudo, a que parte de la información se infiere, pero no está explícitamente establecida.

A continuación se mostrará la forma en que se utilizan las expresiones algebraicas para plantear y resolver ecuaciones lineales en alguna de sus aplicaciones. Son ellas y sus soluciones de gran importancia en casi todos los campos de la tecnología y de la ciencia. Una de las aplicaciones más importantes se presenta en matemáticas, física, ingeniería y otros campos.

Pasos útiles para resolver un problema.

I.- COMPRENDER EL PROBLEMA
II.- CONCEBIR un plan
III.- EJECUTAR el plan
IV.- EXAMINAR la solución obtenida

I.- COMPRENDER el problema:

En esta etapa se debe leer el enunciado. Se deben señalar cuáles son los datos, qué es lo que se conoce del problema. Si llegase a ser necesario se elabora un mapa conceptual o un esquema de la situación.
Se debe encontrar la relación entre los datos y las incógnitas. Se debe introducir una notación adecuada, si hay alguna figura relacionada con el problema, se debe dibujar.

En síntesis, debemos plantearnos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición que relaciona los datos con las incógnitas?
- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?
- ¿Es insuficiente? ¿Es redundante? ¿Es contradictoria?

II.- CONCEBIR un plan:

Se tiene un plan cuando sabemos, al menos a groso modo, qué cálculos, qué razonamientos o construcciones habremos de efectuar para determinar la incógnita.

Para concebir un plan debemos tener claro si nuestros conocimientos son suficientes, puesto que es imposible resolver un problema si desconocemos por completo el tema del cual trata.
Con frecuencia es adecuado abordar un problema planteándonos las siguientes preguntas:

- ¿Hemos resuelto un problema semejante? o
- ¿Hemos visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conocemos un problema relacionado con éste?

Si no podemos resolver el problema propuesto tratamos de resolver primero algún problema similar más sencillo que nos aporte información para el nuestro.

III.- EJECUTAR el plan:

Esta etapa también hay que plantearla de una manera flexible, alejada de todo mecanicismo. Se debe tener presente que el pensamiento no es lineal, que necesariamente se van a producir saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.
Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.

- ¿Se puede ver claramente qué cada paso es correcto?

Antes de hacer algo se debe pensar:

- ¿Qué se consigue con esto? Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

Cuando tropezamos con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.

IV.- EXAMINAR la solución obtenida:

Examinar la situación supone: Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado. Se debe poner atención en la solución.

- ¿Parece lógicamente posible?
- ¿Es posible comprobar la solución?
- ¿Es posible encontrar alguna otra solución?

Siguiendo estos cuatro pasos podremos tener una buena idea y base para pensar acerca de cómo encarar distintas situaciones problemáticas y adquirir más habilidad para resolverlos.

Problemas resueltos

Problema 1: La base de un rectángulo es doble que su altura. ¿Cuáles son sus dimensiones si el perímetro mide 30 cm?

Luego de leer el problema, nos damos cuenta que nos entregan los siguientes datos:

Altura $\rightarrow$ x   Base $\rightarrow$ 2x

Sabemos también que el perímetro de un rectángulo cualquiera es la suma de sus cuatro lados o bien es la suma de dos veces su altura y dos veces la base:

Perímetro de un rectángulo = 2* base + 2*altura. Luego volviendo al problema junto a los datos dados tenemos que:

P= $2 \cdot (x) + 2 \cdot (2x), tambien\ sabemos\ que\ el\ perimetro\ es\ 30$
$30 = 2 \cdot (x) + 2 \cdot (2x), y\ en\ este\ momento\ se\ puede\ resolver\ la\ ecuación$
$30 = 2x + 4x$
$30 = 6x$
$\frac{30}{6} = x$
$5 = x$

Solución: Luego la altura del rectángulo es 5 centímetros y la base es 2x, que por tanto es 10.

Problema 2: En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

Datos entregados:

- Hombres $\rightarrow$ x
- Mujeres $\rightarrow$ 2x
- Niños $\rightarrow$ 3 · (x + 2x) = 3 · 3x = 9x

Con los datos listos, podemos plantear nuestra ecuación:

x + 2x + 9x = 96
12x = 96
x = 8

Solución: al reemplazar con los valores obtenidos nos queda que hay 8 hombres, 16 mujeres y 72 niños.

Problema 3: Una granja tiene cerdos y pavos, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

Escribimos los datos dados:

- Cerdos $\rightarrow$ x
- Pavos $\rightarrow$ 35 – x (al total de animales, le restamos la cantidad de cerdos, que en este caso, es nuestra incógnita x)

Luego utilizamos la información que se entrega sobre la cantidad de patas que hay, con lo que podemos decir:

- Los cerdos tienen 4 patas, que multiplicamos por la cantidad que hay, x, lo que se representa algebraicamente como 4x
- Los pavos tienen 2 patas, lo cual lo multiplicamos por la cantidad de pavos que tenemos 2(35 – x)
- La suma de toda la cantidad de patas es 116, por lo que podemos plantear la ecuación de la siguiente manera:

$4x + 2 \cdot (35 - x) = 116$
$4x + 70 - 2x = 116$
$2x = 46 \qquad x = 23$

Cerdos $\rightarrow$ 23
Pavos $\rightarrow$ 35 − 23 = 12

Solución: Luego de reemplazar los valores, nos queda que hay 23 cerdos y 12 pavos.

Problema 4: Las tres cuartas partes de la edad del padre de Juan excede en 15 años a la edad de éste. Hace cuatro años la edad del padre era doble de la edad del hijo. Hallar las edades de ambos.

	Juan	Padre de Juan
Hace cuatro años	x	2x
Hoy	x + 4	2x + 4

Luego con datos dados podemos escribir la ecuación, reemplazando con los valores de la edad de ambos en la actualidad.

$$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 4 + 15$$

$$\frac{6x + 12}{4} = x + 19$$

$6x + 12 = 4(x + 19)$
$6x + 12 = 4x + 76$
$6x - 4x = 76 - 12$
$2x = 64 \qquad x = 32$

Solución: luego reemplazamos con los datos datos y nos queda que:

- Edad de Juan: 32 + 4 = 36.
- Edad del padre: 2 · 32 + 4 = 68.

Problema 5: Un número y su quinta parte suman 18. ¿Cuál es el número?

x = el número buscado. (Definición de la incógnita)

Su quinta parte es $\frac{x}{5}$ (transformación al lenguaje algebraico).
$x + \frac{x}{5} = 18$ (Es el planteamiento de la ecuación).

Resolvemos la ecuación:

5x + x = 90
6x = 90
90/ 6 = x
X= 15

Solución: Notamos que al volver a leer el problema x = 15 es coherente con el enunciado, 15 más 3 (su quinta parte) son18.

Problema 6: Perdí un tercio de las ovejas y llegué con 24. ¿Cuántas ovejas tenía?

- y = número de ovejas que tenía.
- Un tercio de las que tenía es y/3

El planteamiento será una resta:

$$y - \frac{y}{3} = 24$$
$$y - \frac{y}{3} = \frac{24}{\cdot 3}$$

$3y - y = 72$
$2y = 72$
$y = \frac{72}{2}$
$y = 36$

Solución: la cantidad de ovejas es 36 y podemos notar que el resultado es un número natural coherente con el enunciado.

Conclusión

La importancia de las ecuaciones no es otra que ayudarnos a resolver situaciones problemáticas que se nos plantean en la realidad, para ello en primer lugar se traduce el problema al lenguaje algebraico, después se las soluciones de las ecuaciones planteadas, y por último se comprueba si la solución matemática obtenida es válida como respuesta al problema de partida.

Los problemas con enunciados son un tipo de problemas entre otros posibles. Llamamos problema a una situación que plantea un obstáculo, un desafío, que moviliza ideas y pensamientos para su resolución. En este sentido podríamos decir que el enfrentarse a un problema implica insertarse en una situación en la que se reconoce que se tiene que "hacer algo" para resolverla y la solución no es evidente.

Mirado de esta manera se vuelve de vital importancia el rol de lector que se incorpore la solución de esta nueva problemática. A partir de lo anterior se puede decir que la deficiencia en comprensión lectora es una problemática que se encuentra vinculada tanto con el área de lengua como de matemática.

La comprensión lectora ayuda notablemente en la ejercitación de los problemas matemáticos ya que mediante el proceso de lectura se van desarrollando habilidades para leer. La mejor forma de desarrollar estas habilidades es practicando cada una de las estrategias vistas y enfatizar en la repetición del proceso de lectura tantas veces como se pueda; solo así se puede llegar a un conocimiento de sus propios procesos mentales.

Bibliografía

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/algebra2ValorizarExpres.htm	16 / 03 / 2017
http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Problemas/ESTRATEGIAS%20HEUR%C3%8DSTICAS.pdf	16 / 03 / 2017
http://matematicaylisto.webcindario.com/polinomios/expralge/multipli.htm	16 / 03 / 2017
http://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso6ecuaciones1grado.pdf	16 / 03 / 2017

IPLACEX
TECNOLÓGICO NACIONAL