

# NIVELACIÓN EN MATEMÁTICA

UNIDAD Nº I:

Conjuntos numéricos.



# Introducción

Los conjuntos numéricos son construcciones matemáticas que definen diversos tipos de números y que guardan una serie de propiedades estructurales.

Históricamente el primer conjunto numérico desarrollado sobre una base intuitiva es el conjunto de los números naturales, ya que desde sus inicios el ser humano necesitó representar sus posesiones con el fin protegerlas. El hombre primitivo por ejemplo, dibujaba marcas en las paredes de las cuevas, en pedazos de piedras, maderas y huesos como forma de contar sus pertenencias.

El orden de construcción de los conjuntos numéricos (de menor a mayor complejidad) es el siguiente:

- a) Números naturales
- b) Números enteros
- c) Los números racionales
- d) Números irracionales
- e) Números reales

**¿Ha pensado alguna vez en las diversas aplicaciones que tienen los números en las distintas disciplinas o tecnologías?**

Es importante reconocer que los conjuntos numéricos son construcciones matemáticas que definen diversos tipos de números y que guardan una serie de propiedades estructurales.

Dichas propiedades nos permitirán poder realizar operaciones aritméticas básicas ayudándonos de la calculadora.

Junto con lo anterior, la profundización en la aritmética implica conocer los números racionales (que incluyen fracciones, decimales, potencias y raíces) en donde se pueden resolver una serie de situaciones problemáticas en el contexto de la matemática.

Dicho dominio, permite también transformar dichos números en sus diversas representaciones semióticas (simbólicas), lo que nos ayudará a realizar cálculos aritméticos más complejos.

# I.- Conjuntos numéricos.

Los conjuntos conformados por números ocupan un lugar de especial importancia en el mundo de las matemáticas. Muchas veces hemos escuchado, o incluso trabajado, con distintos tipos de números como por ejemplo:

$$2, \quad -3, \quad 5.6, \quad -7.8, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{-7}{9}, \quad \frac{\pi}{2}$$

Todas estas expresiones hacen parte de diferentes conjuntos de números, llamamos a estos, conjuntos numéricos. Comenzaremos por estudiar tres conjuntos en particular, los números naturales, los números enteros y los números racionales o fraccionarios.

Estos conjuntos de números han ido apareciendo a medida que la humanidad se ha visto en la necesidad de solucionar problemas y retos cada vez más complejos y más profundos.

## Los números naturales

Los números naturales se utilizan para contar los elementos de un conjunto (número cardinal). O para expresar la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (ordinal).

Debido a la importancia de este conjunto de números se creó un símbolo especial para identificarlo, usaremos la letra  $\mathbb{N}$  para representar el conjunto de los números naturales.

*¿Cuál es el último número natural?*

*No existe un último número natural, porque es un conjunto que no termina nunca, y por esta razón es un conjunto infinito ( $\infty$ )*

## Propiedades de los números naturales:

1. Propiedades de la Adición, pensemos que **a, b, c** son tres números naturales:

- **Interna:**  $a + b \in \mathbb{N}$  (si sumamos dos números naturales, el resultado será un natural)
- **Asociativa:**  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- **Conmutativa:**  $a + b = b + a$
- **Elemento neutro:**  $a + 0 = a$

2. Propiedades de la resta

- **No es una operación interna:**  $2 - 5 \notin \mathbb{N}$
- **No es Conmutativa:**  $5 - 2 \neq 2 - 5$

3. Propiedades de la multiplicación (**a, b, c** : tres números naturales)

- **Interna:**  $a \cdot b \in \mathbb{N}$
- **Asociativa:**  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Conmutativa:**  $a \cdot b = b \cdot a$
- **Elemento neutro:**  $a \cdot 1 = a$
- **Distributiva:**  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- **Sacar factor común:**  $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

4. Propiedades de la división (**D, d, c, r**: números naturales)

- **División exacta:**  $D = d \cdot c$  ( $D : c = d$ ,  $D : d = c$ )
- **División entera :**  $D = d \cdot c + r$  ( $r$ , es el resto, cantidad que queda en una división)
- **No es una operación interna:**  $2 : 6 \notin \mathbb{N}$
- **No es Conmutativo:**  $6 : 2 \neq 2 : 6$
- **Cero dividido entre cualquier número da cero.**  $0 : 5 = 0$
- **No se puede dividir por 0.**

Para practicar: Busca el número natural que falta.

$$327 + \underline{\hspace{2cm}} = 1.208$$

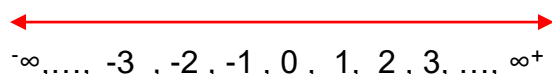
$$\underline{\hspace{2cm}} - 4.121 = 626$$

$$321 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 32\,100$$

## Los números enteros.

Los números enteros son una generalización del conjunto de números naturales que incluye números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor además del cero). Así los números enteros están formados por un conjunto de enteros positivos que podemos interpretar como los números naturales convencionales, el cero, y un conjunto enteros negativos que son los opuestos de los naturales (éstos pueden ser interpretados como el resultado de restar a 0 un número natural).

Los enteros se representan gráficamente en la recta de números enteros como puntos a un mismo espacio entre sí desde menos infinito, hasta más infinito: los números enteros no tienen principio ni fin.



El hombre siempre tuvo la necesidad de contar. Para hacerlo, creó lo que se conoce como números naturales. Sin embargo, estos números no le fueron suficientes para representar algunas cantidades, ni distinguir ciertas situaciones de otras. Por ejemplo, las temperaturas sobre cero y bajo cero, las pérdidas o los años transcurridos antes y después de Cristo. Los números enteros se representan por la letra Z.

**1.- Números opuestos:** Dos números enteros que se encuentran a la misma distancia del cero, pero en sentido contrario uno del otro, se denominan números enteros opuestos. Ejemplo:

a) 1 y -1

b) 2 y -2

c) 3 y -3

**2.- Valor absoluto:** Es la distancia a la que se encuentra el número del cero. La distancia entre el origen y el punto 3 es igual a la distancia entre el origen y el punto -3. Esta distancia se representa por medio del número 3 en ambos casos. El valor absoluto se expresa encerrando el número entre dos barras.

Así, escribimos

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |-3| = 3 \quad \text{o sea que} \quad |3| = |-3| = 3$$

y concluimos que:

- El valor absoluto de cualquier número entero es positivo
- El valor absoluto de cero es cero.

### 3.- Orden entre los números enteros:

Observaciones generales:

- Todo número positivo es mayor que cero.
- Todo número negativo es menor que cero. Así,  $-5 < 0$  y  $-4 < 0$ .
- Todo número positivo es mayor que todo número negativo.  $5 > -2$ ,  $8 > -1$
- De dos números negativos, es mayor el que está más cerca del cero.  $-2 > -8$
- De dos números positivos, es mayor el que está más lejos del cero.  $10 > 2$

### Operaciones aritméticas en los enteros.

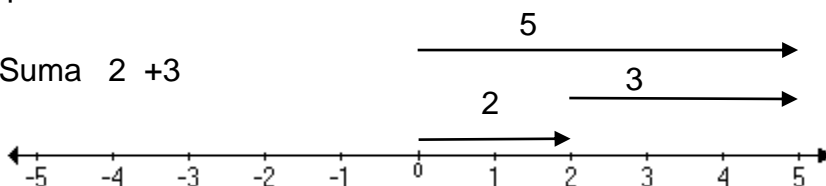
#### 1. Adición de números enteros.

Veamos la suma geométricamente sobre la recta numérica:

**Caso 1:** Suma de números enteros de igual signo. Se suman los números y su signo es el mismo.

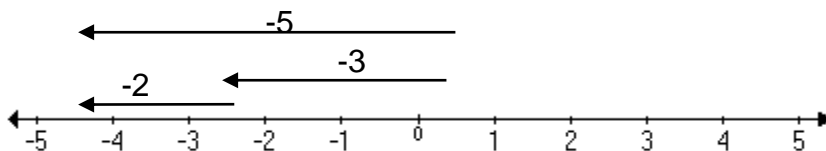
Ejemplos:

1) Suma  $2 + 3$



Solución:  $2 + 3 = 5$  ambos sumandos son positivos.

2) Suma  $(-3) + (-2)$

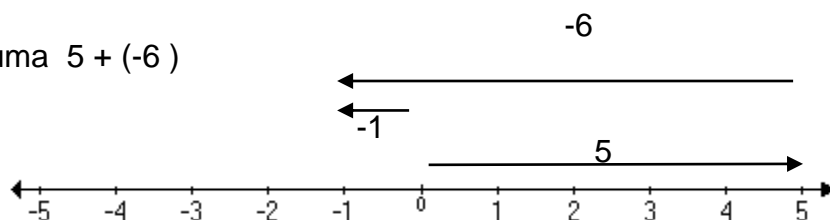


Solución:  $(-3) + (-2) = -5$  ambos sumandos son negativos.

**Caso 2:** Suma de dos números enteros de signos diferentes. Se restan los números y su signo es igual al del número de mayor valor absoluto.

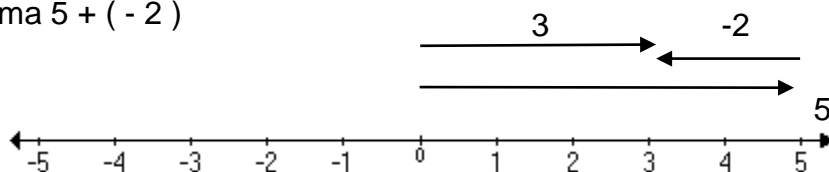
Ejemplos.

1) Suma  $5 + (-6)$



Solución:  $5 + (-6) = -1$  ambos sumandos son de signos diferentes

2) Suma  $5 + (-2)$



Solución:  $5 + (-2) = 3$  ambos sumando son de signos diferentes

### Propiedades de la adición en $\mathbb{Z}$ :

- **Cerrada:** la suma de dos enteros es otro número entero.
- **Conmutativa:** el orden de los sumandos no altera la suma  $2 + (-3) = (-3) + 2$
- **Asociativa:**  $2 + (-5) + 4 = 2 + ((-5) + 4) = (2 + (-5)) + 4$
- **Elemento neutro:** la suma es el mismo número,  $2 + 0 = 2$ ,  $(-4) + 0 = -4$
- **Inverso aditivo u opuesto:** la suma es cero,  $2 + (-2) = 0$

A practicar:

$1 - 8 - 10 + 8 = \underline{\hspace{2cm}}$	$-3 - 5 - 11 - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$-2 - 5 - 11 + 40 + 12 = \underline{\hspace{2cm}}$
$-1 - 7 - 11 - 5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 - 4 + 7 - 8 + 3 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$34 + 18 - 66 - 33 = \underline{\hspace{2cm}}$

Resuelva los siguientes problemas:

- a) Si un hombre nació en el año 32 antes de nuestra era y murió 43 años después de nuestra era. ¿Cuántos años vivo?
- b) En una ciudad comenzó la temperatura a 5 °C bajo cero, la temperatura se eleva 8°C, después desciende 10°C y finalmente se eleva 8°C. Hallar la temperatura final.

## 2.- Multiplicación de números enteros

Para multiplicar (lo mismo se aplica en la división) números enteros debemos conocer la **ley de los signos**:

$(+) \times (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(+) \times (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \times (+) = -$	$(-) : (+) = -$
$(-) \times (-) = +$	$(-) : (-) = +$

En la multiplicación signos iguales siempre dan positivo y signos diferentes siempre dan negativo.

Por ejemplo:

- 1)  $(+6) (4) = + 24$
- 2)  $(-3) (-6) = + 18$
- 3)  $(+5) (-6) = - 30$
- 4)  $(-4) (+11) = - 44$

### Propiedades de la multiplicación:

- Propiedad clausura:  $(-5) (3) = - 15$
- Propiedad conmutativa:  $(-2) (5) = (5) (-2)$
- Propiedad asociativa:  $[(-2)(3)] (4) = (-2) [(3)(4)]$
- Propiedad elemento neutro:  $(-5) (1) = - 5$
- Propiedad distributiva con respecto a la adición:  $(-3) \times (2+5) = (-3) \times (2) + (-3) \times (5)$
- Propiedad distributiva con respecto a la sustracción:  $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$



Practica:

$(-4) (-2) (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-3) (-3) (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-1) (-4) (+5) (+2) = \underline{\hspace{2cm}}$
$(-1)(-1)(-1)(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-2)(-3)(-1)(-4)(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(+12) \div (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$
$(-25) \div (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(+30) \div (-5) = \underline{\hspace{2cm}}$	$(-24) \div (+) = -4 = \underline{\hspace{2cm}}$

### **Mínimo común múltiplo (m.c.m) y máximo común divisor (m.c.d)**

El m.c.m y m.c.d son necesarios porque nos sirven para resolver problemas de matemática que veremos más adelante y necesitaremos aplicar estos temas, ayudan a factorizar, así como aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir no importa con cuántas cifras. Ayudan a sumar y restar con fracciones con denominadores distintos, ya que necesitaremos aplicar el m.c.m.

#### **El mínimo común múltiplo (m.c.m)**

En matemáticas, el mínimo común múltiplo (abreviado m.c.m) de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo común de todos ellos. Por ejemplo:

- Los múltiplos de 4 son 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44,...
- Los múltiplos de 5 son 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50,...

Los múltiplos comunes de 4 y 5 son: 20, 40, 60, 80, etc.

El m.cm es simplemente el más pequeño de los múltiplos comunes. En el ejemplo anterior, el menor de los múltiplos comunes es 20, así que el mínimo común múltiplo de 4 y 5 es 20.

Para encontrar en mínimo común múltiplo de números más grandes o para más cantidad de números debemos hacer lo siguiente:

Encontrar el m.c.m de 45, 27, 12

Números			Divisores
45	27	12	2
45	27	6	2
45	27	3	3
15	9	1	3
5	3	1	3
5	1	1	5
1	1	1	540

1. Pensamos en los números primos (Un número primo es aquel que solo tiene como divisores a sí mismo y al 1, por ejemplo, el 3, el 5, el 7 o el 19, etc.) que dividen a cada número.
2. Y se realiza la división y los resultados se van poniendo bajo cada número, esto se hace hasta llegar a 1
3. Luego, multiplicamos cada uno de los divisores y el resultado es el mínimo común múltiplo de los números dados.

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 540$$

$$\text{m.c.m (45, 27, 12)} = 540$$

Encuentra el m.c.d en los siguientes pares de números: 76 y 98 – 50 y 90 – 47 y 21

A continuación veremos cómo se aplican a problemas matemático, el m.c.m:

Los viajeros:

Un viajero va a Barcelona cada 18 días y otro cada 24 días. Hoy han estado los dos en Barcelona ¿Dentro de cuantos días volverán a estar los dos a la vez en Barcelona?

SOLUCIÓN:

Como demos identificar la cantidad de días que se volverán a juntar, debemos pensar en qué momento los días coincidirán y esto es precisamente, calcular el mínimo común múltiplo.

Número		Divisores
18	24	2
9	12	2
9	6	2
9	3	3
3	1	3
1	1	$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

Al hacer el procedimiento para calcular el mínimo común múltiplo, llegamos a que es 72, por lo que la respuesta a nuestro problema, es que ambos amigos se encontrarán nuevamente en 72 días.

### El máximo común divisor (m.c.d)

El concepto de máximo común divisor es fácil de entender. Por simplificar la exposición supondremos que los enteros son siempre positivos. Dados dos números enteros positivos su máximo común divisor no es más que el mayor de los divisores comunes de ambos números. El máximo común divisor siempre existe, pues el 1 siempre será un divisor común.

He aquí un ejemplo de cálculo del m.c.d. Tomemos 45 y 75. Los divisores de esos números son:

- Divisores de 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45.
- Divisores de 75: 1, 3, 5, 15, 25, 75.

Se observa enseguida que, de los divisores comunes (1, 3, 5, 15), el mayor es 15 y, por tanto, el m.c.d.(45, 75)=15.

El cálculo del m.c.d. por este método consiste en la **enumeración de los divisores** de ambos números. Este enfoque es bueno para ilustrar la definición de m.c.d. Se puede usar mientras los números tengan pocos divisores.

Cuando nos enfrentamos a números más grandes o más cantidad de números, por ejemplo nos piden encontrar en m.c.d (126, 68, 94, 200)

Números	Divisores
126    68    94    200	2
63    34    47    2	

1. Pensamos en los números primos (Un número primo es aquel que solo tiene como divisores a sí mismo y al 1, por ejemplo, el 3, el 5, el 7 o el 19, etc.) que dividen a cada número al mismo tiempo. Observando nuestro números, nos damos cuenta que el número dos los divide a todos.
2. Luego escribimos el resultado de la división en la fila de abajo
3. Luego, nos números que quedan, no tienen otro divisor en común, por lo que el m.c.d (126, 68, 94, 200) = 2

Otro ejemplo: calcular el m.c.d (81, 63, 99)

Números	Divisores
81    63    99	3
27    21    33	3
9    7    11	$3 \times 3 = 9$

1. Pensamos en los números primos que dividen al mismo tiempo a cada número.
2. Luego escribimos el resultado de la división en la fila de abajo y nuevamente dividimos por 3
3. Luego, nos números que quedan, no tienen otro divisor en común, por lo que ahora multiplicamos  $3 \times 3 = 9$ . Luego el m.c.d (81, 63, 99) = 9

Encuentra el m.c.d en los siguientes pares de números: 70 y 80 – 55 y 90 – 36 y 72

Pero saber hacer estos cálculos, pareciera no tener mayor relevancia, es por esto que ahora veremos su aplicación en algunos problemas matemáticos.

El ebanista ahorrador:

Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible.

- ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?
- ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

SOLUCIÓN:

- La longitud del lado del cuadrado tiene que ser un divisor de 256 y de 96, y además debe ser el mayor divisor común; luego hay que calcular el m.c.d. (256, 96).

256	96	2
128	48	2
64	24	2
32	12	2
16	6	2
8	3	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

La longitud del lado de cada cuadrado debe ser de 32 centímetros

- Para saber cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera debemos conocer el área de la plancha de madera:

$$256 \times 96 = 24576 \text{ centímetros.}$$

Además debemos conocer el área de cada uno de los cuadrados:

$$32 \times 32 = 1024 \text{ centímetros.}$$

Y para saber cuántos cuadrados se obtienen, sólo debemos dividir las dos áreas:

$$24576 : 1024 = 24. \text{ Por lo que la respuesta es que se obtienen 24 cuadrados.}$$

## Los racionales

Un número racional es una cifra o valor que puede ser referido como el cociente de dos números enteros. Al conjunto de los números racionales se lo denota con la letra  $\mathbb{Q}$ , que viene de la palabra anglosajona “Quotient” traducción literal de cociente, y que sirve para reconocerlos como subgrupo dentro de los números reales.

Un número racional puede ser expresado de diferentes maneras, sin alterar su cantidad mediante fracciones equivalentes, por ejemplo:

$$\frac{4:2}{8:2} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$$

*Fracciones equivalentes (Simplificada)*

$$\frac{1^{x2}}{2^{x2}} = \frac{2^{x2}}{4^{x2}} = \frac{4}{8}$$

*Fracciones equivalentes (amplificada)*

Debido a que estas son fracciones reducibles (se pueden simplificar: dividir por el mismo número el numerador y el denominador o bien amplificar: multiplicar por el mismo número el numerador y el denominador).

Asimismo existe una clasificación de los números racionales dependiendo de su expresión decimal, estos son:

- **Los números racionales limitados:** cuya representación decimal tiene un número determinado y fijo de cifras, por ejemplo  $1/8$  es igual a  $0,125$ .
- **Los números racionales periódicos:** en los cuales sus decimales tienen un número ilimitado de cifras, pero se diferencian de los números irracionales porque de esas cifras se puede descubrir un patrón definido mientras que en los números irracionales sus cifras decimales son infinitas y no-periódicas. A su vez los números racionales periódicos se dividen en dos:
  - **Periódicos puros:** cuyo patrón se encuentra inmediatamente después de la coma, por ejemplo  $0,6363636363\dots$
  - **Periódicos mixtos o semiperiódicos:** de los cuales el patrón se encuentra después de un número determinado de cifras, por ejemplo  $5,48176363636363\dots$

## Propiedades de los números racionales

Existen para la suma y resta, y para la multiplicación y división, distintas propiedades de los números racionales, estos son:

Entre las propiedades de la suma y resta están:

- **Propiedad interna:** según la cual al sumar dos números racionales, el resultado siempre será otro número racional, aunque este resultado puede ser reducido a su mínima expresión si el caso lo necesitara.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

- **Propiedad asociativa:** se dice que si se agrupa los diferentes sumandos racionales, el resultado no cambia y seguirá siendo un número racional. Veamos:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) - \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right)$$

- **Propiedad conmutativa:** donde en la operación, si el orden de los sumando varía, el resultado no cambia, de esta manera:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

- **Elemento neutro:** el elemento neutro, es una cifra nula la cual si es sumada a cualquier número racional, la respuesta será el mismo número racional.

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

- **Inverso aditivo o elemento opuesto:** es la propiedad de números racionales según la cual, existe un elemento negativo que anula la existencia del otro. Es decir que al sumarlos, se obtiene como resultado el cero.

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0$$

Por otro lado, existen también las propiedades de los números racionales por parte de la multiplicación y la división, y estas son:

- **Propiedad interna:** en razón de que al multiplicar números racionales, el resultado también es un número racional.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$$

- **Propiedad asociativa:** donde al agrupar diferentes factores la forma de la agrupación, no altera el producto.

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

- **Propiedad conmutativa:** aquí se aplica la famosa frase, el orden de los factores no altera el producto, entre los números racionales también funciona.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

- **Propiedad distributiva:** al combinar sumas y multiplicaciones, el resultado es igual a la suma de los factores multiplicado por cada uno de los sumandos, veamos el ejemplo:

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

- **Elemento neutro:** en la multiplicación y la división de números racionales, existe un elemento neutro que es el número uno, cuyo producto o cociente con otro número racional, dará como resultado el mismo número.

$$\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$$

¿Cuál o cuáles de estas propiedades se pueden aplicar a la división?



## Irracionales

Un número irracional es un número que no se puede escribir en fracción, el decimal sigue para siempre sin repetirse.

### Números irracionales famosos:

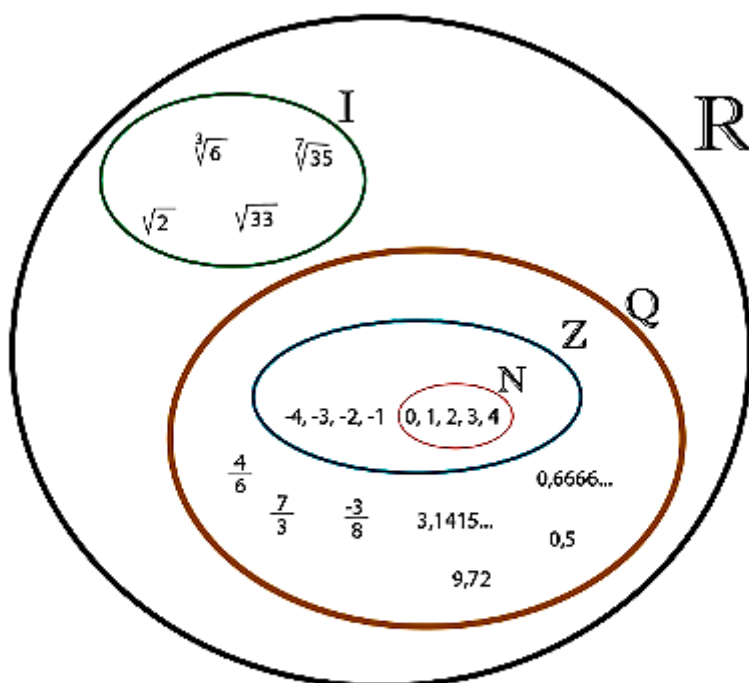
$\pi$	<p>Pi es un número irracional famoso. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin repetirse. Los primeros son estos:</p> <p>3,1415926535897932384626433832795 (y sigue...)</p>
$e$	<p>El número e (el número de Euler) es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de e sin encontrar ningún patrón. Los primeros decimales son:</p> <p>2,7182818284590452353602874713527 (y sigue...)</p>
$\varphi$	<p>La razón de oro es un número irracional. Sus primeros dígitos son:</p> <p>1,61803398874989484820... (y más...)</p>
$\sqrt{\quad}$	<p>Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son irracionales. Ejemplos:</p> <p><math>\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059</math> (etc)</p> <p><math>\sqrt{99} = 9,9498743710661995473447982100121</math> (etc)</p>

Fuente: <http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/numeros-irracionales.html>

## Los reales.

El conjunto de los números reales pertenece en matemáticas a la recta numérica que comprende a los números racionales y a los números irracionales. Esto quiere decir que incluyen a todos los números positivos y negativos, el símbolo cero, y a los números que no pueden ser expresados mediante fracciones de dos enteros que tengan como denominador a números no nulos (excluye al denominador cero).

Lo anterior, se puede resumir en:



N= números naturales (enteros positivos)  
 Z= números enteros (positivos y negativos)  
 Q= números racionales (fracciones y decimales)  
 I= Irracionales

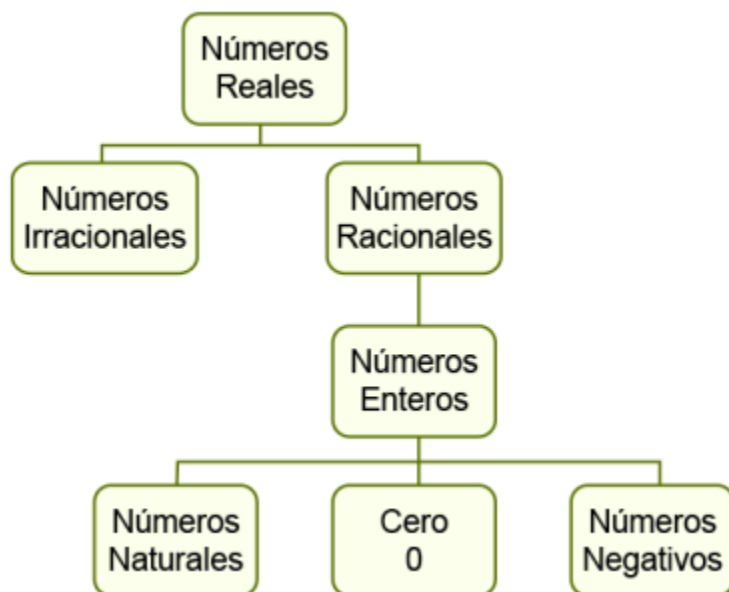
Fuente: <http://www.numerosreales.com/>

## Conclusión

El sistema de números reales se compone principalmente de dos grandes conjuntos, el de los números racionales que son aquellos que pueden ser expresados como la división de dos números enteros como  $34/34$ ,  $15/15$ , incluso un número entero puede ser expresado como una fracción, ya que el número entero puede ser dividido en 1, sin cambiar su esencia, por ejemplo el número 8 puede ser expresado en fracción así:  $8/1$ ; mientras que el otro gran conjunto del sistema de números reales es el de los números irracionales cuya representación decimal es expansiva, infinita y aperiódica.

Los números irracionales son un conjunto en sí mismos pero, a su vez, los números racionales tienen subconjuntos que son: las fracciones no enteras con sus respectivas notaciones negativas; los números enteros; dentro de los números enteros están los negativos y los enteros positivos; estos últimos a su vez incluyen a los números naturales y al cero. Para aclarar esta conjunción, se puede graficar como en el diagrama de arriba.

De otra forma, se muestra a continuación un mapa conceptual de números reales:



Fuente. <http://www.numerosreales.com/>

# Bibliografía

- Matemáticas I: Aritmética y Álgebra. Patricia Ibañez. Cengage Learning (2012).
- Enseñar matemáticas. Alcina C y otros. Grao (1996).
- <http://www.numerosreales.com/> (13 de diciembre de 2016)
- [http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros\\_reales.html](http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Numeros_reales.html) (9 de diciembre de 2016)

