

Proyecto

Arturo Pérez Roncero

December 2021

Índice

1. Notación Newtoniana	3
2. Notación Lagrangiana	3
2.1. Ángulos pequeños	4
2.1.1. $\omega^2 < g/R$	4
2.1.2. $\omega^2 > g/R$	5
3. Término T_0	5
4. Integrabilidad	6
5. Ligaduras	6
6. Notación Hamiltoniana	7
7. Diagrama de fases	7
8. Discusión	9
9. Anexos	10

1. Notación Newtoniana

A lo largo de este trabajo, se considerará $\theta = 0$ la parte superior de la esfera, y $\theta = \pi$ la parte inferior. Podemos obtener las fuerzas ejercidas sobre la bola mediante la ecuación de Coriolis:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} - m \left[\left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_o + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_o \times \vec{r} \right] \quad (1)$$

Donde sabemos que:

$$\left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_o \times \vec{r} = 0 \quad (3)$$

La expresión resultante es:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} - m [2\vec{\omega} \times \vec{v}_o + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \quad (4)$$

Realizando las correspondientes transformaciones de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega \hat{u}_z \\ \vec{v} &= \dot{\theta} R \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_z &= \cos \theta \hat{u}_r - \sin \theta \hat{u}_\theta / R \end{aligned} \quad (5)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} 2\vec{\omega} \times \vec{v} &= 2\omega \dot{\theta} \cos \theta \hat{u}_\varphi \\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= -\omega^2 \sin \theta (\sin \theta \hat{u}_r + \cos \theta \hat{u}_\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

Lo que nos deja las expresiones:

$$\begin{aligned} ma_r &= F_r + m\omega^2 \sin^2 \theta \\ ma_\theta &= F_\theta + m\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ ma_\varphi &= F_\varphi + 2\omega \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

Sustituimos a continuación la fuerza de la gravedad:

$$\hat{F} = -mg (\cos \theta \hat{u}_r - R^{-1} \sin \theta \hat{u}_\theta) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} ma_r &= -mgR^{-1} \cos \theta + m\omega^2 \sin^2 \theta \\ ma_\theta &= mgR^{-1} \sin \theta + m\omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ ma_\varphi &= 2\omega \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = w \quad (10)$$

Obteniendo finalmente la ecuación de movimiento:

$$a_\theta = gR^{-1} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (11)$$

En el caso de que $\omega = 0$, no existe fuerza de Coriolis que deba ser compensada por la ligadura del sistema, y se tendría un péndulo normal y corriente.

2. Notación Lagrangiana

El lagrangiano en coordenadas esféricas es:

$$\begin{aligned} L &= T - U = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgR(1 + \cos \theta) \\ L &= \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega^2) - mgR(1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

Donde las ecuaciones de Lagrange-Euler serán:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (13)$$

Las ligaduras del sistema son:

$$\begin{aligned}r - R &= 0 \\ \varphi - \omega t &= 0\end{aligned}\quad (14)$$

Las ecuaciones finales de movimiento son:

$$\begin{aligned}mR(\theta^2 + \sin^2 \theta \omega^2) - mg(1 + \cos \theta) &= \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \ddot{\theta} &= gR^{-1} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta \\ mR^2 \sin^2 \theta \omega &= F_\varphi \cos \theta = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\end{aligned}\quad (15)$$

2.1. Ángulos pequeños

Para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento queda:

$$\ddot{\theta} = \theta \left(\frac{g}{R} + \omega^2 \right) = c\theta \quad (16)$$

Lo que deja como solución:

$$\theta = c_1 e^{\sqrt{c}t} + c_2 e^{-\sqrt{c}t} \quad (17)$$

A continuación estudiamos la expresión de energía potencial, que es la energía de una bola de ángulo θ_0 parada respecto al sistema no inercial:

$$E_p(\theta_0) = mgR(1 + \cos \theta_0) - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta_0 \quad (18)$$

Realizando la derivada respecto al ángulo, e igualándola a 0, obtenemos los máximos y mínimos

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR \sin \theta - m\omega^2 R^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (19)$$

$$\cos \theta = \frac{\theta}{\omega^2 R} \quad (20)$$

Esta última ecuación no dará resultados reales para ciertos valores iniciales, por lo que es necesario diferenciar entre dos tipos de sistemas, que dependerán de la constante c , definida al principio de esta sección.

2.1.1. $\omega^2 < g/R$

En el caso de que $\omega^2 < g/R$, $\frac{\theta}{\omega^2 R}$ será mayor a 1, y el punto de equilibrio antes expuesto no será real, y no tendrá significado físico. Eso deja los puntos $\theta = 0$, en la parte superior del montaje, siendo un punto inestable al ser un máximo de la energía potencial; y $\theta = \pi$, en la parte inferior del montaje, estable. Estas condiciones dan lugar a soluciones que giran en torno al centro de forma estable.

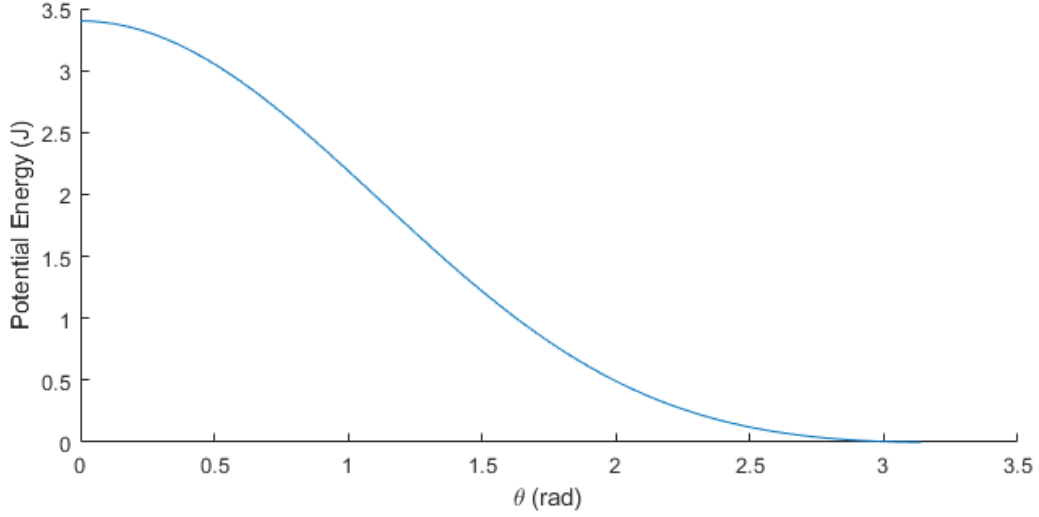


Figura 1: Energía potencial respecto a θ .

2.1.2. $\omega^2 > g/R$

En este segundo caso, el punto de equilibrio en $\theta = 0$ sigue siendo inestable, pero el punto en $\theta = \pi$ pasa de ser estable a inestable. Al ser $\frac{\theta}{\omega^2 R}$ menor que 1, aparecerá un punto de equilibrio estable en:

$$\cos \theta = \frac{\theta}{\omega^2 R} \quad (21)$$

Estas condiciones dan lugar a soluciones que en vez de girar en torno al centro, son desplazadas hacia el exterior, donde se encuentra el punto de equilibrio estable.

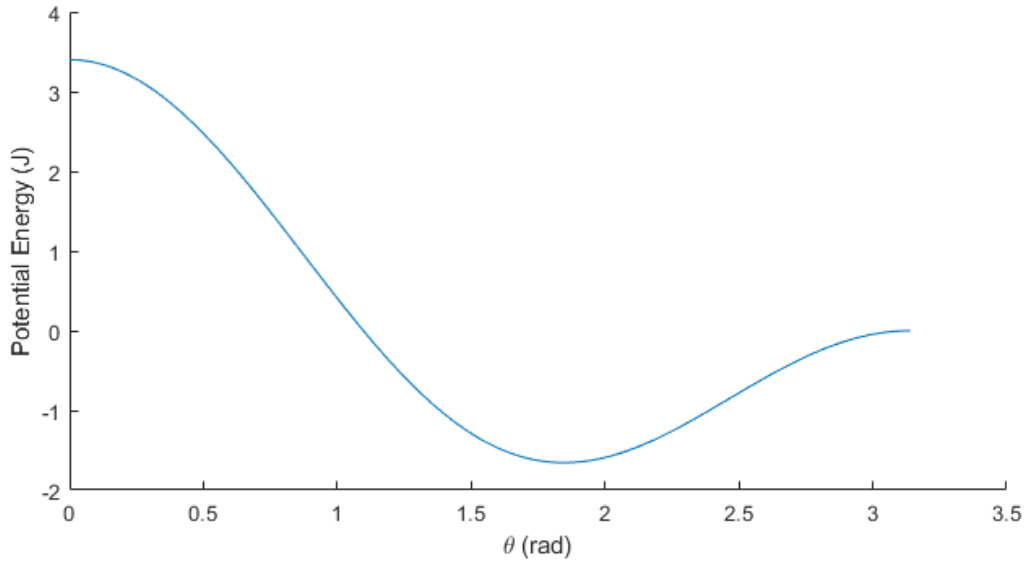


Figura 2: Energía potencial respecto a θ .

3. Término T_0

Conocemos que:

$$\mathbf{v}_i \equiv \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (22)$$

Y la energía cinética es:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \equiv T_2 + T_1 + T_0 \quad (23)$$

Por o que T_0 será:

$$T_0 \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \quad (24)$$

Al existir un término T_0 no nulo, el sistema no es natural. Esto es una consecuencia de la variación con el tiempo de las fuerzas de ligadura del montaje, causada por la imposición del enunciado de mantener la velocidad angular constante.

4. Integrabilidad

Al ser el lagrangiano independiente del tiempo, la función de Jacobi (h) será constante. Al ser también independiente del tiempo la energía cinética (T), sabemos que h será igual al hamiltoniano, por lo que:

$$h = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (25)$$

$$h = H = E = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega^2) + mgR(1 + \cos \theta) \quad (26)$$

La energía mecánica de la canica se conserva. Esto significa que, junto con las ecuaciones de movimiento y la ecuación de la conservación de la energía, hay más ecuaciones que grados de libertad, y el sistema es integrable de Liouville. Despejando $\dot{\theta}$ de la expresión de la energía e integrando, obtenemos:

$$t = \int_{\theta(0)}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{(E - mgR(1 + \cos \theta')) \frac{2}{mR^2} - \sin^2 \theta' \omega^2}} \quad (27)$$

La conservación de la energía puede parecer extraña si tenemos en cuenta que hay un término de la energía T_0 no nulo. Esto se debe a la naturaleza del montaje experimental. Estamos tratando un caso del experimento en el que el aro en rotación que contiene a la canica es capaz de mantener una velocidad angular constante, a pesar de tener que compensar la fuerza de Coriolis, que varía con el tiempo dependiendo de la posición y velocidad de la canica. Esto significa que para analizar el sistema tal y como lo hemos hecho nosotros, hay que asumir que la masa del aro es infinita, y no es afectada por la bolita, por lo que no entra dentro del balance energético. En un análisis más extenso habría que tener en cuenta el intercambio de energía que hay entre el montaje experimental y la canica.

5. Ligaduras

Si recordamos de los apartados anteriores, las ligaduras radiales y acimutales en el tratamiento newtoniano son:

$$\begin{aligned} F_r &= -mgR^{-1} \cos \theta + m\omega^2 \sin^2 \theta \\ F_\varphi &= 2\omega \dot{\theta} \cos \theta \end{aligned} \quad (28)$$

Mientras que en el lagrangiano son:

$$\begin{aligned} F_r &= mR (\theta^2 + \sin^2 \theta \omega^2) - mg(1 + \cos \theta) = \\ F_\varphi &= mR^2 \sin^2 \theta \omega \end{aligned} \quad (29)$$

Hay discrepancias entre ambos métodos que pueden resultar de la interacción de la canica con el montaje experimental.

6. Notación Hamiltoniana

La expresión del hamiltoniano es:

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(p_j) - L(q_j, \dot{q}_j(p_j), t) \quad (30)$$

Donde:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (31)$$

Por lo que, derivando el lagrangiano, obtenemos:

$$\begin{aligned} p_r &= 0 \\ p_\theta &= mR^2 \dot{\theta} \\ p_\varphi &= mR^2 \omega \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (32)$$

El hamiltoniano es entonces:

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left(p_\sigma^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgR(1 + \cos \theta) \quad (33)$$

Las ecuaciones siguen la forma:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mR^2} \\ \omega &= \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (35)$$

7. Diagrama de fases

Siguiendo las instrucciones del enunciado, el diagrama de fases resultante es el siguiente:

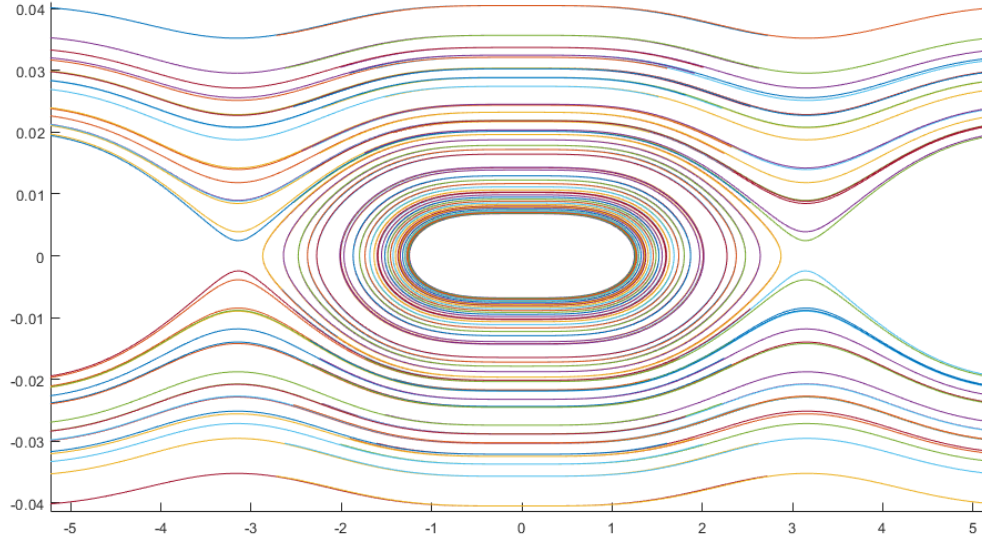


Figura 3: Diagrama de fases (p frente a θ).

Es fácil distinguir en el diagrama dos tipos de comportamientos, uno confinado y uno abierto. Las curvas cerradas en centro del diagrama corresponden a movimientos confinados a la parte inferior de la esfera, más concretamente a órbitas similares a las planetarias en torno al centro. Estas órbitas pueden tener una frecuencia distinta a la del giro del arco en el que esta enganchada la canica, resultando en una

precesión de su movimiento. En este caso, la canica no tiene suficiente energía como para abandonar la mitad inferior del montaje.

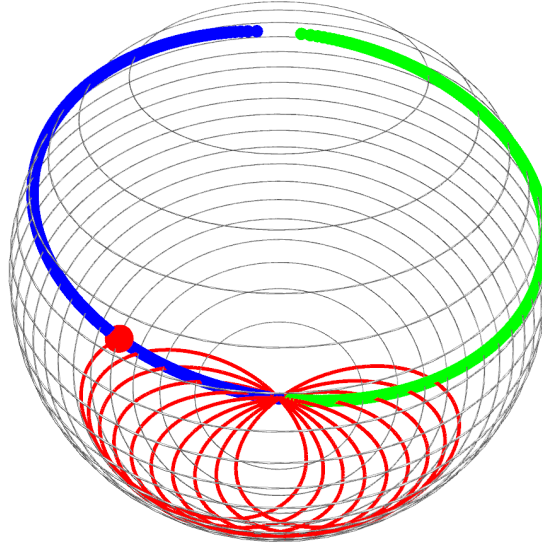


Figura 4: Movimiento confinado. Los arcos azul y verde representan el aro que contiene a la bolita.

Las trayectorias que no están confinadas en el diagrama de fases, por otro lado, son capaces de desplazarse por todo el montaje, pero siguen siendo periódicos, y también están sujetos a una posible precesión.

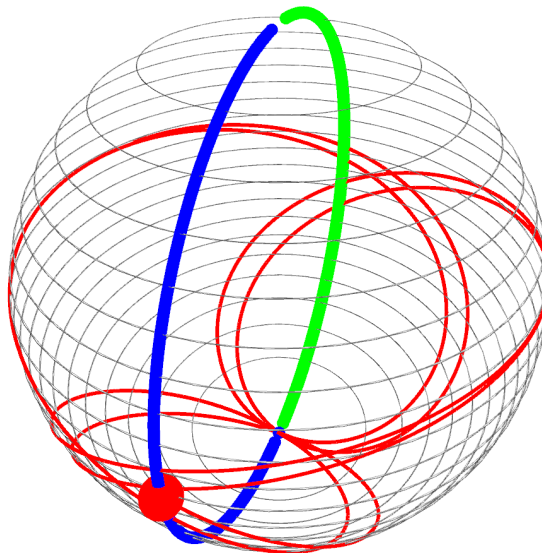


Figura 5: Movimiento abierto. Los arcos azul y verde representan el aro que contiene a la bolita.

8. Discusión

Durante la realización de este trabajo se han utilizado los formalismos newtoniano, lagrangiano y hamiltoniano. Cada uno de ellos tiene sus ventajas y sus desventajas, pero salta a la vista que la notación newtoniana es, en comparación al resto, muy tediosa y poco intuitiva a la hora de manejarla. La hamiltoniana, por otro lado, ofrece la facilidad de la obtención de las ecuaciones de movimiento de la notación lagrangiana, y una fácil interpretación de los resultados mediante los diagramas de fases, resultando en, en mi opinión, el formalismo óptimo para estudiar este problema.

9. Anexos

```

1 dt=0.1;
2 t=0:dt:100;
3 e=-pi:0.1:pi;
4 e=3.1;
5
6 E=zeros(length(e),length(t));
7 O=[];
8 P=[];
9 x=[];
10 y=[];
11 z=[];
12 cur=[];
13
14
15 r=1;
16 de=0;
17 o=0;
18 w=0.01;
19 m=1;
20 %g=r*w^2*cos(e); equilibrio
21 %g=0.9999999*r*w^2; %ang peq (creo)
22 g=w^2;
23 A=e*sqrt(g/r+w^2);
24
25 for j=1:length(e)
26 for i=1:length(t)
27
28 dde=sin(e(j))*(-w^2*cos(e(j))+g/r);
29 %dde=e(j)*(-w^2*g/r);
30 de=de+dde;
31 e(j)=e(j)+de;
32
33 o=o+w;
34
35 p=m*r^2*de;
36
37 E(j,i)=e(j);
38 if j==1
39 O=[O o];
40 end
41 P(j,i)=p;
42
43 cur=[cur e^(A*i/1000)];
44 end
45 end
46
47 end
48
49 for c=-r:r/5:r
51 for i=0:0.1:2*pi+0.
52 x=[x sqrt(r^2-c^2)*cos(i)];
53 y=[y sqrt(r^2-c^2)*sin(i)];
54 z=[z c];
55 end
56 end
57
58 %xlim([-2*r,2*r])
59 %ylim([-2*r,2*r])
60 %zlim([-2*r,2*r])
61 %plot3(x,y,z);
62 hold on
63 for j=1:length(e)
64 %comet3(r.*cos(O).*sin(E(j,:)),r.*sin(O).*sin(E(j,:)),r.*cos(E(j,:)));
65 %comet(r.*cos(cur).*sin(E(j,:)),r.*sin(cur).*sin(E(j,:)));
66 end
67
68
69
70 %diagrama fases
71
72 hold on
73 xlim([-2*pi,2*pi])
74 %ylim([-2*r,2*r])
75 xlabel('\theta (rad)')
76 ylabel('p (kg m/s)')
77 for j=1:length(e)
78 plot(E(j,:),P(j,:));
79 end
80
81
82
83
84 % energ a potencial
85
86 % r=1;
87 % m=1;
88 % g=1.7;
89 % w=2.5;
90 % w=1.1;
91 %
92 % q=[0:0.01:pi];
93 % a=m*g*r*(1+cos(q))-0.5*m*(r^2)*(sin(q).^2)*(w^2);
94 % xlabel('\theta (rad)')
95 % ylabel('Potential Energy (J)')
96 % plot(q,a);

```

Listing 1: Simulador del rotor (Matlab)

```

1 import java.util.*;
2 import peasy.PeasyCam;
3 PeasyCam cam;
4
5 float step=1;
6 float o=PI/4;
7 float t,ddr,dr,r,dde,de,e,fe,m,m2;
8 int i;
9 PVector pp[]= new PVector[10000];
10 PVector p= new PVector(200, 0, 200);
11 //PVector v= new PVector(-1, -1, 0);
12 //PVector a= new PVector(0, 0, 0);
13 //PVector temp,vv,aa;
14
15 void setup() {
16 fullScreen(P3D);
17 //translate(width/2, height/2);
18 //cam = new PeasyCam(this, 1000);
19
20 for(int i=0; i<pp.length; i++){
21 pp[i]= new PVector(0, 0, 0);
22 }
23
24
25 r=500;
26 fe=5;
27 e=fe;
28
29 p= new PVector(r*cos(o)*sin(e), r*sin(o)*sin(e), r*cos(e));
30 }
31
32 void draw() {
33 t+=1;
34 background(255);
35 m=map(mouseY,height,0,0,PI/2);
36 m2=map(mouseY,height,0,0.5,1);
37 camera(0,1200*sin(m),1200*cos(m),0,0,0,0,-1);
38
39
40 for (float z = -r; z < r; z+=50) {
41 beginShape(TRIANGLE_STRIP);
42 for (float i = 0; i <= 2*PI+0.1; i+=0.1) {
43 stroke(0,100);
44 strokeWeight(1);
45 vertex(sqrt(r*r-z*z)*cos(i),sqrt(r*r-z*z)*sin(i),z);
46
47 endShape(CLOSE);
48 }
49
50 println(r);
51 for (float z = -r; z < r; z+=1) {
52 beginShape(TRIANGLE_STRIP);
53 stroke(0,255,0);
54 strokeWeight(20);
55 point(sqrt(r*r-z*z)*cos(o),sqrt(r*r-z*z)*sin(o),z);
56 stroke(0,0,255);
57 point(-sqrt(r*r-z*z)*cos(o),-sqrt(r*r-z*z)*sin(o),z);
58 endShape(CLOSE);
59 }
60
61 stroke(255,0,0);
62 strokeWeight(6);
63
64 pushMatrix();
65 translate(p.x,p.y,p.z);
66 sphere(30);
67 popMatrix();
68
69 beginShape(LINES);
70 for (int o = 0; o < i-1; o+=1) {
71 vertex(pp[o].x,pp[o].y,pp[o].z);
72 vertex(pp[o+1].x,pp[o+1].y,pp[o+1].z);
73 // vertex for lines, point for points
74 }
75 endShape();
76
77 pp[i].add(p);
78
79 float w=0.02;
80 float g=0.1;
81 println(dde);
82 o+=w;
83 dde=(g*sin(e)/r-w*w*sin(e)*cos(e));
84 de+=dde;
85 e+=de;
86
87
88 p= new PVector(r*cos(o)*sin(e), r*sin(o)*sin(e), r*cos(e));
89
90
91 i++;
92 }

```

Listing 2: Simulador del rotor (Processing)