Analisis de algoritmos 2022-1

Tarea 9. Segunda parte de la tarea opcional, permite obtener puntos extra.

Fecha de entrega: jueves 27 de enero de 2022
Entrega individual

1 Ejercicios

Cada uno de los siguientes problemas permite obtener hasta un 0.4 de calificación extra; con un total de a lo más, 0.8 puntos.

1. Considera el siguiente problema. Entrada: una secuencia S de n intervalos abiertos: $(b_1, e_1), (b_2, e_2), \ldots, (b_n, e_n)$, tal que el i-ésimo intervalo comienza en b_i y termina en e_i. Salida: una secuencia de n números entre el 1 y el n: $c_1, c_2, \ldots, c_n$, de tal forma que:

   (a) Para todos $1 \leq i < j \leq n$, si los intervalos i-ésimo y j-ésimo se intersecan, entonces los números de salida c_i y c_j son distintos entre sí.

   (b) el número total de valores *distintos* en la salida, es el mínimo posible.

   Podrías interpretar el problema, como el de asignar a cada uno de los intervalos una "frecuencia" para transmitir, de tal forma que dos intervalos que se intersecan requieren frecuencias distintas, pero dos que no se intersecan pueden tener la misma. Y además, que el número total de frecuencias distintas que se quieren asignar en total, sea el mínimo número posible.

   Instancias de ejemplo:

   (a) Entrada: (0,1), (2,3), (4,5). Salida: 1,1,1 .

   (b) Entrada: (2,3),(4,5),(1,6). Salida: 1,1,2 . (podría ser también 2,2,1; o incluso 3,3,6; los valores concretos no importan, sólo hay que respetar las dos restricciones).

   (c) Entrada: (1,3),(2,5),(4,7),(6,8). Salida: 1,2,1,2 .

   Implementa tu solución con un algoritmo *greedy* de complejidad $O(n \log n)$. Plantea el algoritmo, demuestra su corrección, apoyandote de un argumento de intercambio, y analiza su complejidad.

2. Considera un mapa bidimensional con un rio vertical pasando por su parte central. Hay n postes en la parte izquierda, todos sobre una línea vertical, y con valores de ordenada (coordenada y): $l(1), l(2), \ldots, l(n)$ respectivamente, y n postes del lado derecho, todos sobre una línea vertical, y con valores de ordenada: $r(1), r(2), \ldots, r(n)$ respectivamente. Se quiere encontrar la forma de hacer puentes que crucen el río y que conecten los postes entre sí, con las siguientes dos propiedades:

   (a) Para todo i entre 1 y n: el poste i-ésimo del lado izquierdo sólo puede conectarse con el poste i-ésimo del lado derecho.

   (b) Los puentes se consideran segmentos de recta, y deben tener la propiedad de que dos de ellos no se pueden cruzar.

   Considera que la entrada se codifica con las dos secuencias de valores de l (ordenadas de los postes del lado izquierdo, del primero al n-ésimo), y de r (ordenadas de los postes del lado derecho, del primero al n-ésimo). La salida debe ser la colección de los identificadores de (las parejas de) postes que se unirán con un puente.

   Diseña una solución de programación dinámica que resuelva el problema de calcular un conjunto válido de puentes de mayor cardinalidad posible.

   Instancias de ejemplo:

   (a) Entrada: $l = (1, 2)$, $r = (2, 4)$. Salida: 1,2 . (En esta instancia, ambos pares de postes pueden conectarse).

   (b) Entrada: $l = (1, 2)$, $r = (4, 2)$. Salida: 1 . Observa que en esta instancia, otra posible salida es: 2 . Pero no es posible conectar simultáneamente a los dos pares de postes, pues los dos puentes no son compatibles (se cruzan).

   Para este ejercicio la rúbrica es la siguiente:

   (a) 1pt. Propón la ecuación de Bellman del problema, demuestrando que es correcta por inducción.

   (b) 1pt. Propón la versión recursiva con memorización del algoritmo que resulta de aplicar la ecuación de Bellman. Analiza su corrección y complejidad.

   (c) 1pt. Propón la versión iterativa de programación dinámica del algoritmo anterior. Analiza su corrección y complejidad.

   (d) 1pt. Propón el algoritmo que, a partir de la(s) tabla(s) generadas por el algoritmo anterior, calcula un conjunto de puentes válido de tamaño máximo (los algoritmos anteriores calculan sólo su longitud).