Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Solución a Sistemas de Ecuaciones Lineales

Práctica No. 2

Alumnos:
López Espíndola Luis Enrique
Mucio Alvarez Santos
Muñiz Lescale Marco Aurelio
Reynoso Sánchez Arturo Yitzack

26 de noviembre de 2021

EJERCICIO 1

1. Dada $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\text{Rango}(A) = n$.

(b) $\det(A) \neq 0$

(c) A tiene inversa.

Sea $I_m(A) = \{ y \in \mathbb{R}^n : Ax = y$ para alguna $x \in \mathbb{R}^n \}$.

Entonces $\text{Rango}(A) = \dim I_m(A)$.

Sea $N_A = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$ el espacio nulo de A.

$\nu(A) = \dim N_A$ es la nulidad de A.

Por un resultado de álgebra lineal, tenemos el siguiente resultado

$$\text{Rango}(A) + \nu(A) = n.$$

Demostración:

(c) $\Rightarrow$ (a)

Sea $A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow A^{-1}A\bar{x} = \bar{0}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

Por lo tanto, si $x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n = 0$ donde $\bar{a}_i$ es la i-ésima columna de A, tenemos que $x_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Entonces las n columnas de A forma un conjunto l. i.
Por lo tanto Rango$(A) = n$.

(a) ⇒ (b)

Sea $A \in M_{n \times n}$ tal que Rango$(A) = n$. Entonces por cada i existe v_i t. $Av_i = e_i$ (el vector canónico con 1 en la i-ésima posición y 0 en las demás.

Sea $B = [v_1\ v_2\ \ldots v_i \ldots v_n]$, la matriz con columna i igual a v_i

Entonces $AB = I$ ∴ A es invertible.

Como A es invertible, tenemos que.

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

(b) ⇒ (c)

Sea A ∋ $\det(A) \neq 0$. Sea $\operatorname{adj}(A)$ la adjunta de A.

Tenemos

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$$

$$\operatorname{adj}(A) \cdot n = \det(A) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\right) = I_n \quad y \quad \left(\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)\right) \cdot A = I_n$$

⇒ A es invertible. ∴ Los afirmaciones son equivalentes.

2. Dada la siguiente norma

$$\|A\| = \sup\{\|A\bar{u}\| : \bar{u} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{u}\| = 1\} = \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\bar{u}\|$$

probar que $\|\cdot\|$ es norma consistente para $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$.

<u>Dem.</u>

P.D.
1) $\|A\bar{x}\| \leq \|A\|\|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
2) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$
3) $\|I_n\| = 1$

1) $$\|A\bar{x}\| = \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\bar{x}\bar{u}\|$$

$$= \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\| |\bar{x}\bar{u}|$$

$\overset{\in\mathbb{R}}{\bar{x}\bar{u}} = \langle \bar{x}, \bar{u} \rangle$

$$\leq \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\|\|\bar{x}\|\|\bar{u}\|$$

$\leq \|\bar{x}\|\|\bar{u}\|$

$$= \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\|\|\bar{x}\| \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|\bar{u}\|$$

$\sup(a\cdot b) = \sup(a)\sup(b)$

$$= \|A\|\|\bar{x}\|\, 1$$

$\sup(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$

$$= \|A\|\|\bar{x}\| \checkmark$$

2) $$\|AB\| = \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|AB\bar{u}\|$$

$$\leq \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\|\|B\bar{u}\|$$

$B\bar{u} \in \mathbb{R}^n$

$$= \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\| \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|B\bar{u}\|$$

$\sup(a\cdot b) = \sup(a)\sup(b)$

$$= \|A\|\|B\bar{u}\| \checkmark$$

3) $$\|I\| = \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|I\bar{u}\|$$

$$= \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|\bar{u}\|$$

$$= 1 \checkmark$$

$\sup(c) = c$, $c \in \mathbb{R}$

3. Demostrar:

(a) Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, una norma es Inducida o Subordinada si se tiene:

$$\|A\| = \max_{\bar{x}\neq 0} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$$

Con la definición anterior para norma matricial, demostrar:

$$\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\,\text{Cond}(B)$$

con $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$.

(b) Dar un ejemplo donde la afirmación anterior no se cumpla para alguna norma matricial.

a) Dem

Hacemos unas cuantas observaciones:

En clase definimos que dada una norma vectorial $\|\cdot\|_v$, se define la norma subordinada como.

$$\|A\| = \sup\{\|A\bar{u}\| : \bar{u}\in\mathbb{R}^n, \|\bar{u}\|=1\} = \sup_{\|\bar{u}\|=1} \|A\bar{u}\|$$

Y notemos que

$$\sup_{\bar{x}\neq 0} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Props} \\ \text{norma}}}{=} \sup \left\| \frac{1}{\|\bar{x}\|} A\bar{x} \right\| = \underbrace{\sup_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\|}_{\text{Def norma subordinada}}$$

Y la definición presentada en el enunciado nos permite decir que el cociente $\|A x\|/\|x\|$ alcanza su supremo en $\mathbb{R}^n/\{0\}$

por $\frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$ alcanza su supremo en $S=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}\|=1\}$

Por ende tenemos una def más amplia

$$\rightarrow \|A\| = \max_{\bar{x}\neq 0} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\bar{x}\|$$

$\rightarrow$ Dada una norma inducida, Pd que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ ← ★

Dem $\forall\, \bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $\|AB\bar{x}\| \leq \|A\|\cdot\|B\bar{x}\| \leq \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|\bar{x}\|$

$$\rightarrow \|AB\| = \max_{\|\bar{x}\|=1} \|AB\bar{x}\| \leq \max_{\|\bar{x}\|=1} \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|\bar{x}\| = \|A\|\cdot\|B\|$$

$\Rightarrow$ Ahora si Pd que: $\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\cdot\text{Cond}(B)$

$$\rightarrow \text{Cond}(AB) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vista} \\ \text{en clase}}}{=} \|(AB)^{-1}\|\cdot\|AB\| \overset{\text{Props Matrices no-singulares.}}{=} \|B^{-1}A^{-1}\|\cdot\|AB\|$$

$$\overset{★}{\leq} \|B^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\|B\|$$

$$\overset{\text{Son reales}}{=} \|A\|\,\|A^{-1}\|\cdot\|B\|\cdot\|B^{-1}\|$$

$$= \text{Cond}(A)\cdot\text{Cond}(B)$$

$\therefore$ Dada una norma inducida, $\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\cdot\text{Cond}(B)$

b) Contra ejemplo

Definimos la siguiente norma para $A \in M_{n\times n}$ como:

$$\|A\| = \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$$

Verifiquemos que es norma

→ Pd $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \longleftrightarrow A = O_n$.

Dem

→ Al tomar el valor absoluto la norma siempre será mayor a cero y por lo estar tomando el máximo la única forma en que la norma de 0 es si $A = O_n$ ✓

→ Pd $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

Dem

$$\|\alpha A\| = \max_{i,j} \{|\alpha a_{ij}|\} = \max_{i,j} \{|\alpha|\cdot|a_{ij}|\}$$

α multiplica cada entrada de A $\overset{\text{I}}{=}$ $|\alpha|(\max\{|a_{ij}|\}) = |\alpha|\|A\|$ ✓

→ Pd $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$$\|A+B\| = \max\{|a_{ij} + b_{ij}|\} \leq \max\{|a_{ij}|\} + \max\{|b_{ij}|\} = \|A\| + \|B\|$$

$$|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}|$$

$\therefore$ $\|A\| = \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$ es norma matricial.

→ Pd que con $\|A\| = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}$ $\text{Con}(AB) \not\leq \text{Cond}(A)\cdot\text{Cond}(B)$

Sea $A, B \in M_{n\times n}$ ⊥ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ∧ $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

→ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \wedge (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & -3/4 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

⇒ $\text{Con}(AB) = \|(AB)^{-1}\| \cdot \|AB\| = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$

⇒ $\text{Cond}(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = 2 \cdot 1 = 2$

⇒ $\text{Cond}(B) = \|B^{-1}\| \cdot \|B\| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

→ $\text{Con}(AB) = 12 \not\leq 4 = (2)(2) = \text{Cond}(A)\text{Cond}(B)$

$\therefore$ $\text{Cond}(AB) \not\leq \text{Cond}(A)\,\text{Cond}(B)$

EJERCICIO 4

4. Propiedades de Cond(A).

Demostrar:

(a) Para $I_n \in M_{n\times n}$, $Cond(I_n) = 1$.

(b) Para $A \in M_{n\times n}$, $Cond(A) \geq 1$.

(c) Para $A \in M_{n\times n}$, y $\alpha \neq 0$, $Cond(\alpha A) = Cond(A)$.

Suponer una norma consistente

Dem:

(a) Por definición de norma consistente, $\|I_n\| = 1$.

$\Rightarrow Cond(I_n) = \|I_n\| \|I_n^{-1}\| = 1 \cdot 1 = 1$.

(b) Si A es singular, $Cond(A) = +\infty$.

Si A es no singular, como $\| \ \|$ es norma consistente, tenemos

$$1 = \|I_n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = Cond(A).$$

Por lo tanto $Cond(A) \geq 1$.

(c) $Cond(\alpha A) = \|(\alpha A)^{-1}\| \|\alpha A\|$

$= \|\frac{1}{\alpha} A^{-1}\| \|\alpha A\|$

Norma saca escalares

$\overset{\searrow}{=} \frac{1}{|\alpha|} \cdot |\alpha| \|A^{-1}\| \|A\|$

$= \|A^{-1}\| \|A\| = Cond(A)$

5. Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ con A no singular, ¿se cumple $\|A\| \neq 0$?, en caso afirmativo demostrar, en caso contrario mostrar un ejemplo.

Sí se cumple.

Demostración por contrapositiva:

P.D. $\|A\| = 0 \implies A \in M_{n\times n}$ es singular

$$\begin{aligned}\|A\| = 0 &\iff A = 0_n\\ &\iff \det(A) = 0\\ &\iff A \text{ es singular } \blacksquare\end{aligned}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} \tag{1}$$

6. Para la matriz en (1) realizar el procedimiento completo de la factorización LU.

→ Aplicando $\mathcal{L}\mathcal{U}$

$$\rightarrow M_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{3} & 1 & 0 \\ \frac{-6}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow M_2 \cdot M_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U} = M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversa [redacted]
es [redacted]

$$\Rightarrow \mathcal{L} = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathcal{L}\mathcal{U}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} \tag{1}$$

7. Para la matriz en (1) realizar el procedimiento completo de la factorización LU con pivoteo parcial.

Llevamos la matriz A a una matriz triangular superior con matrices de permutación y eliminación.

$$P_1A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

$$M_1P_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{9} & 1 & 0 \\ \frac{6}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 3 & 4 & 5 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$P_2M_1P_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$M_2P_2M_1P_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = U$$

$$M_2P_2M_1P_1A = U \implies A = P_1^{-1}M_1^{-1}P_2^{-1}M_2^{-1}U = \tilde{L}U$$

$$\tilde{L} = P_1^{-1}M_1^{-1}P_2^{-1}M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{9} & 1 & 0 \\ -\frac{6}{9} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ← triangular inferior con renglones permutados

Por lo tanto:

$$A = \tilde{L}U = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 14 & 16 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix}$$

2) Pivoteo total

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1 A}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1 A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2 M_1 A}$$

Ahora

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = M_2^{-1} M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Suponga que se tiene la factorización LU de A una matriz no singular, ¿con dicha factorización cómo se puede resolver el sistema $A^T\bar{x} = \bar{b}$

Como A es no singular $\Rightarrow$ A^t es no singular $\Rightarrow$ $A^t\bar{x} = \bar{b}$ sí tiene solución ✓

Como $A = LU$, con L triangular inferior y U triangular superior, entonces

$A^t\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow (LU)^t\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow U^tL^t\bar{x} = \bar{b}$

sea $\bar{y} = L^t\bar{x}$, entonces por cambio de variable $U^t\bar{y} = \bar{b}$

como U es triangular superior $\Rightarrow$ U^t es triangular inferior, entonces la solución $\bar{y}$ del sistema $U^t\bar{y} = \bar{b}$ se encuentra con sustitución hacia adelante, una vez obtenida $\bar{y}$ y como L es triangular es triangular inferior $\Rightarrow$ L^t es triangular superior, entonces la solución $\bar{x}$ del sistema $L^t\bar{x} = \bar{y}$ se encuentra con sustitución hacia atrás.

10) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ "perfectamente bien condicionado" ed $cond(A) = 1$, ¿Cuáles de las matrices conservan la misma propiedad?

a) cA, $c \in \mathbb{R}$

Si $c = 0 \Rightarrow \|cA\| = |c|\,\|A\| = 0$

$\therefore\; cond(A) = 0 \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Si $c \neq 0 \Rightarrow \|cA\| = |c|\,\|A\|$

y $\|cA^{-1}\| = |c|\,\|A^{-1}\|$

$\Rightarrow |c|\,\|A\| \cdot |c|\,\|A^{-1}\| = c^2$

si $c = 1 \Rightarrow$ si se cumple, en otro caso no.

b) DA dond D es una matriz diagonal y no singular

Veamos que como D es diagonal

$\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}\,(i \neq j \Rightarrow (D)_{ij} = 0)$

$$\Rightarrow (DA)_{ii} = \begin{cases} (D)_{ii}(A_{ii}) \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$\therefore$ DA es invertible y diagonal

$\therefore\; DA = (DA)^{-1}$

$\Rightarrow \|DA\| = \|(DA)^{-1}\|$

$\|DA\| \cdot \|(DA^{-1})\| \neq 1$

c) PA, donde P es una matriz de permutación

Como P es de permutación $\|P\| = 1$

$\Rightarrow \|PA\| = \|A\|$ pues sólo se intercambian renglones y columnas

por otro lado $(PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1}$

pero $\|A^{-1}P^{-1}\| = \|A^{-1}\|$

$\therefore$ PA cumple con ser perfectamente condicionada

d) BA donde B es una matriz cualquiera no singular.

No pues si $B = \bar{0} \Rightarrow BA = \bar{0}$

$\therefore \|BA\| = 0$ $\therefore$ no cumple

e) A^{-1} la inversa de A

Sí, por def $\text{cond}(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \underline{1}$ n

f) A^t la transpuesta de A

EJERCICIO 11

11. Clasificar las siguientes matrices como bien condicionadas y mal condicionadas, calculando la condición para cada una.

$$A = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Usaremos la norma 1.

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max\{|10^{10}|, |10^{-10}|\} = 10^{10}.$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}, \quad \|A^{-1}\|_1 = \max\{|10^{-10}|, |10^{10}|\} = 10^{10}.$$

$$\Rightarrow \text{Cond}(A) = \|A^{-1}\|_1 \|A\|_1 = 10^{10} \times 10^{10} = 10^{20}$$

Como $\text{Cond}(A) > 10^6$, la matriz A está mal condicionada

$\|B\|_1 = \max\{|10^{10}|, |10^{10}|\} = 10^{10}$.

$$B^{-1} = \frac{1}{10^{20}}\begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}$$

$\|B^{-1}\|_1 = \max\{|10^{-10}|, |10^{-10}|\} = 10^{-10}$

$\Rightarrow Cond(B) = \|B^{-1}\|_1 \|B\|_1 = 10^{10} \times 10^{-10} = 1$

Como $Cond(B) < 10^6$, la matriz B está bien condicionada.

$\|C\|_1 = \max\{|10^{-10}|, |10^{-10}|\} = 10^{-10}$.

$$C^{-1} = \frac{1}{10^{-20}}\begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$$

$\|C^{-1}\|_1 = \max\{|10^{10}|, |10^{10}|\} = 10^{10}$.

$\Rightarrow Cond(C) = \|C^{-1}\|_1 \|C\|_1 = 10^{10} \times 10^{-10} = 1$.

Como $Cond(B) < 10^6$, la matriz C está bien condicionada.

$\|D\|_1 = \max\{|1|+|2|, |2|+|4|\} = 6$.

D es singular, ya que solo tiene una columna linealmente independiente.

Como D es singular $Cond(D) = +\infty$.

Por lo tanto, D está mal condicionado.

12. ¿Cuáles son las dos propiedades que una matriz A debe tener para aceptar la factorización de Cholesky?

Que la matriz sea simétrica y positiva definida. es decir

i) $A = A^t$

ii) Es positiva definida si todos sus determinantes superiores izquierdos son positivos.

ej sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$

$$l_{00} = \sqrt{a_{00}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$l_{10} = \frac{a_{10}}{l_{00}} = \frac{15}{\sqrt{6}} = 6.1237$$

$$l_{20} = \frac{a_{20}}{l_{00}} = \frac{55}{\sqrt{6}} = 22.454$$

Ya tenemos la primer columna de L, para calcular la segunda columna volvemos a aplicar las igualdades anteriores.

$$l_{11} = \sqrt{a_{11} - l_{10}^2} = \sqrt{55 - 6.1237^2} = 4.1833$$

$$l_{21} = \frac{a_{21} - l_{10}l_{20}}{l_{11}} = \frac{55 - (6.1237)(22.454)}{4.1833}$$

$$= 20.916$$

finalmente, dado que $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ sólo falta la resta de la entrada l_{22}

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{20}^2 + l_{21}^2)}$$

$$= \sqrt{979 - (22.454^2 + 20.916^2)}$$

$$= 6.1106$$

$$\therefore \quad L = \begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.454 & 20.916 & 6.1106 \end{pmatrix}$$

$$L^T = \begin{pmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.454 \\ 0 & 4.1833 & 20.916 \\ 0 & 0 & 6.1106 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \underline{A = L L^T}$$

13. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ tal que la suma de los elementos de cada columna es cero, demostrar que A es singular.

Recordemos qu por ser cuadrada $\det(A) = \det(A^t)$

$\rightarrow$ Pd que $\det(A^t) = 0$

$\rightarrow$ A^T tiene la característica de que la suma de los elementos de cada renglon es cero por la definición de matriz transpuesta

$\rightarrow$ Y sea $\bar{x} \in \mathbb{R}$ t $\bar{x}$ es el vector columna de puros 1's.

$$\rightarrow \quad A^t\bar{x} = 0 = 0\bar{x}$$

Por que sus renglones suman cero

Esto quiere decir que $\bar{x}$ es un eigenvector con eigenvalor 0.

Y recordemos que en AL 1 aprendimos que el determinante es el producto de los eigenvalores y acabamos de ver que cero es un eigenvalor

$$\therefore \det(A^t) = 0$$

$$\therefore \det(A) = 0$$

$\therefore$ A es singular

EJERCICIO 14

14. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ tal que $A^2 = O$ (matriz cero). Demostrar que A es singular.

Supongamos por contradicción que A es no singular. Entonces $\exists B \neq \bar{O}$ t.q. $AB = BA = I$.

$$\Rightarrow BA^2 = B \cdot \bar{O} = \bar{O}$$

$$\Rightarrow IA = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A = \bar{O}$$! Ya que supusimos que A es invertible y debe ser distinta de la matriz cero.

Por lo tanto A es singular.

15. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

(a) ¿Cuál es el determinante de A?.

(b) En aritmética de punto flotante con precisión simple, ¿cuál es rango de valores de ϵ para que el determinante sea cero?.

(c) ¿Cuál es la factorización LU de A?.

(d) En aritmética de punto flotante con precisión simple, ¿cuál es el rango de valores para ϵ tal que U se vuelve singular?.

(a)
$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1)(1) - (1-\varepsilon)(1+\varepsilon) \\ &= 1 - (1^2 - \varepsilon^2) \\ &= 1 - 1 + \varepsilon^2 \\ &= \varepsilon^2 \end{aligned}$$

(b) $\det(A) = \varepsilon^2 = 0$

$\iff \varepsilon = 0$

El sistema de punto flotante para precisión simple está dado por $\mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{F}(2, 24, -126, 127)$

entonces $\varepsilon = 0 \iff \varepsilon = \pm 1.0 * 2^E$ con $E \in [-126, -23]$

$\pm$	E	$d_0 \; d_1 \; \ldots \; d_{22}$
1 bit	8 bits	23 bits

32 bits

$$\varepsilon = 1.0 * 2^E = \underbrace{\underbrace{\overset{d_0 d_1 d_2 \ldots d_{22}}{0.00\ldots0}}_{23} \; \overbrace{00\ldots1}^{\text{pérdida de información}}}_{|E|+1}$$

Nota: $d_0 = 0$
(se almacena en mantisa)

Ejemplo:

$$\varepsilon = 1.0 * 2^{-23} = \underbrace{0.00\ldots0}_{23}\overbrace{1}^{\text{pérdida de info.}} = 0.00\ldots0 = 0$$

(c) Para evitar pérdida de información usaremos pivoteo parcial

$$M_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(1-\varepsilon) & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} = U$$

$M_1 A = U \Rightarrow A = M_1^{-1} U = LU$

$L = M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto:

$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$

(d) U es singular $\Leftrightarrow \det(U) = 0$

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (1)(\varepsilon^2) - (0)(1+\varepsilon) = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon^2 = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon = 0$

$\Leftrightarrow \varepsilon = \pm 1.0 * 2^E$ con $E \in [-126, -23]$ $\leftarrow$ (a)

16. Dado el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

con solución $\bar{x} = (1,1)^t$. Transforme A ligeramente en

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

y considere el nuevo sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

Calcular la nueva solución mediante la aritmética de redondeo a cinco dígitos:

(a) ¿Cómo difiere de la solución real?.

(b) ¿Es A una matriz mal condicionada?.

(c) ¿Es A' una matriz mal condicionada?.

Sol

Calculamos la nueva solución, tenemos el sig sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ .9999x_1 + 2x_2 = 3.0001 \end{cases} \rightarrow x_1 = 3 - 2x_2 \rightarrow .9999(3-2x_2) + 2x_2 = 3.0001$$

$$\rightarrow 2.9997 - 1.9998x_2 + 2x_2 = 3.0001 \rightarrow \frac{1}{5000}x_2 = \frac{1}{2500}$$

Sustituimos $\longrightarrow x_2 = \frac{5000}{2500} = 2$

$$x_1 = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$$

$\therefore \bar{x}' = (-1,2)^t$ es la nueva solución

(a) Calculamos la condición de cada matriz.
Usando matricial del máximo para ambas matrices, obtenemos:

Para A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -10{,}000 & 10{,}000 \\ \frac{10{,}001}{2} & -5000 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \|A\|_1 = \max\{2.0001, 4\} = 4$$

$$\rightarrow \|A^{-1}\|_1 = \max\{15{,}000.5, 15{,}000\} = 15{,}000.5$$

$$\Rightarrow Cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| = 15.000.5 \cdot 4 = 60{,}002$$

$$\boxed{\therefore Cond(A) = 60{,}002}$$

Para A'

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ .9999 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A'^{-1} = \begin{pmatrix} 10{,}000 & -10000 \\ -4999.5 & 5000 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \|A'\|_1 = \max\{1.9999, 4\} = 4$$

$$\rightarrow \|A'^{-1}\|_1 = \max\{14{,}999.5, 15{,}000\} = 15{,}000$$

$$\Rightarrow Cond(A') = \|A'^{-1}\| \cdot \|A'\| = 15.000 \cdot 4 = 60{,}000$$

$$\boxed{\therefore Cond(A') = 60{,}000}$$

(b) Tomando formato simple. $(\beta = 10)$. $[Cond(M) < 10^3]$

$$\longrightarrow Cond(A) = 60{,}002 > 1{,}000 = 10^3$$ $\boxed{\therefore A \text{ esta mal condicionada}}$

(c) Tomando formato simple. $(\beta = 10)$. $[Cond(M) < 10^3]$

$$\longrightarrow Cond(A') = 60{,}000 > 1{,}000 = 10^3$$ $\boxed{\therefore A' \text{ esta mal condicionada}}$

17. Demostrar:

(a) El producto de matrices triangulares inferior es triangular inferior.

(b) La inversa de una matriz triangular inferior no singular, es triangular inferior.

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ matrices triangulares inferiores

$\rightarrow$ Pd $A\cdot B$ es una matriz triangular inferior

Sean $i,j \in \{1,\dots,n\}$. $i<j$

Pd que $(AB)_{i,j} = 0$

Dem

Por def $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{i} a_{ik}\cdot b_{kj}}_{\star} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{j-1} a_{i,k}\cdot b_{kj}}_{\bullet} + \underbrace{\sum_{k=j}^{n} a_{i,k}\cdot b_{k,j}}_{\smile} = \#$$

Dividimos en tres

$\rightarrow$ En $\star$ y $\bullet$ $j>k \rightarrow b_{k,j}=0$ (Ya que B es triangular inferior), en $\smile$ y $\bullet$ $\rightarrow k>i$ y por ello $a_{i,k}=0$ (Ya que A es triangular inferior)

$$\Rightarrow \# = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\cdot \underbrace{b_{kj}}_{\substack{0\\(j>i\geq k)}} + \sum_{k=i+1}^{j-1} \underbrace{a_{i,k}}_{\substack{0\\(k>i)}}\cdot \underbrace{b_{kj}}_{\substack{0\\(j>k)}} + \sum_{k=j}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{\substack{0\\(k\geq j>i)}}\cdot b_{k,j} = 0$$

$\therefore$ El producto de matrices triangulares inferiores es triangular inferior

(b) $\rightarrow$ Tomamos una No singular $\Rightarrow \exists A^{-1}$

Pd que A^{-1} es triangular inferior ; A es ~~[illegible]~~ i.e $A_{j,k}=0$ $\forall\, j<k$

Dem Sea B la inversa de A $\rightarrow AB = I_n$

Separamos la demostración en $n-1$ pasos: $p=1,\dots,n-1$. En el p-ésimo paso vamos a demostrar que para cada $q\in\{p+1,\dots,n\}$ se tiene que $B_{p,q}=0$. Ojo: Estamos suponiendo que ya hicimos los pasos anteriores y hemos demostrado que:

$$\forall\, j\in\{1,\dots,p-1\} \wedge \forall\, q\in\{j+1,\dots,n\} \rightarrow B_{jq}=0 \longrightarrow (\#)$$

"Tipo Hip. Inducción" por partir la dim en n-1 pasos

Sabemos que $(AB)_{p,q} = (I_n)_{pq} = \delta_{pq} = 0$. Por otro lado del producto de matrices

$$(AB)_{pq} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k}B_{k,q} = \sum_{k=1}^{p-1} A_{p,k}\underbrace{B_{k,q}}_{0} + A_{p,p}B_{p,q} + \sum_{k=p+1}^{n} \underbrace{A_{p,k}}_{0}B_{k,q}$$

Porque $k\leq p-1 \rightarrow q>k$ y por $(\#) \Rightarrow B_{kq}=0$

$k\geq p+1$ pero A es triangular inferior $\Rightarrow A_{pk}=0$

$\longrightarrow (AB)_{p,q} = A_{pp}B_{pq} = 0$ Pero... A es triangular y en lineal aprendimos que es invertible sii $A_{pp}\neq 0$ (entradas de la diagonal distintas de cero) $\therefore B_{pq}=0$

$\therefore$ B es triangular inferior

18) Demostrar que las matrices (2) y (3) son definidas positivas con el criterio visto en clase.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = A \qquad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} = B \qquad (3)$$

<u>Demostración.</u>

Para (2);

es definida positiva si todos sus determinantes son mayores a cero

$\det(2) = 2 > 0$ ✓

$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$ ✓

$$\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-(-1)\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ 0 \det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2(2-1)$$
$$+ (-1-0)$$
$$+ 0$$
$$= 2 - 1 = 1 > 0 \checkmark$$

$\therefore A$ es definida positiva $\square$

Para (3):

$\det(1) = 1 > 0 \checkmark$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 1 = 4 > 0 \checkmark$$

$$\det(B) = 1\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$
$$-(-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$+1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= (30-9) + (-6+3) + (3-5)$$
$$= 21 - 3 - 2$$
$$= 16 > 0 \checkmark$$

$\therefore B$ es definida positiva $\square$

Escaneado con CamScanner

19. Sea A dada como:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

escribir el procedimiento completo para factorizar A en $A = LDL^t$, donde D es una matriz diagonal y L una matriz triangular inferior.

$$M_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 M_1 A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1 A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = U$$

$$M_2 M_1 A = U \implies A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_{L} U$$

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$A = LU = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}}_{DL^t = U}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad L^t = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto;

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

20. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ escribir el procedimiento completo para factorizar A en $A = LL^T$ con un matriz L triangular inferior.

$$l_{00} = \sqrt{a_{00}} = \sqrt{1} = 1$$

$$l_{10} = \frac{a_{10}}{l_{00}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$l_{20} = \frac{a_{20}}{l_{00}} = \frac{1}{1} = 1$$

Para la 2da columna

$$l_{11} = \sqrt{a_{11} - l_{10}^2}$$
$$= \sqrt{5 - 1^2}$$
$$= \sqrt{4}$$
$$= 2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21} - l_{10}\, l_{20}}{l_{11}}$$

$$= \frac{1 - (-1)(1)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

por último $l_{22} = \sqrt{a_{22} - (l_{20}^2 + l_{21}^2)}$

$$= \sqrt{6 - (1^2 + 1^2)}$$

$$= \sqrt{6 - 2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\therefore \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

21. Sea A una matriz definida positiva,

(a) Mostrar que A es no singular.

(b) Mostrar que A^{-1} es definida positiva.

(c) Los elementos de la diagonal de A son positivos.

Dem

Dem (Contradicción).

a) A es definida positiva, i.e, $\bar{x}^t A \bar{x} > 0 \ \forall \ \bar{x} \neq \bar{0}$

$\rightarrow$ Sup que A es singular

$\rightarrow A \cdot \bar{x} = 0$ p.a $\bar{x} \neq 0. \Rightarrow \bar{x}^t \cdot A\bar{x} = 0$ p.a $\bar{x} \neq 0$!

Pero eso sería imposible por que A definida positiva

$\therefore$ A es no singular.

b) Pd A^{-1} es definida positiva.

A es no singular

I

$$\forall \ \bar{y} \neq \bar{0} \ \exists \ \bar{x} = A^{-1}\bar{y} \neq \bar{0} \ + \ \bar{y} = A\bar{x} \Rightarrow \bar{y}^t A^{-1} \bar{y} = \bar{x}^t A^t (A^{-1} A) \bar{x}$$

$$= \bar{x}^t A^t \bar{x} = (A\bar{x})^t \bar{x} = (\underbrace{\bar{x}^t A \bar{x}}_{\in \mathbb{R}.})^t = x^t A \bar{x} > 0.$$

$\Rightarrow \bar{y}^t A^{-1} \bar{y} > 0 \ \therefore A^{-1}$ definida positiva

(c) Pd $a_{ii} > 0 \ \forall \ i,i \in \{1, \ldots, n\}$

Sea $\bar{e}_i$ el vector canónico en $\mathbb{R}^n$

A definida positiva $\Rightarrow \bar{e}_i^t A \bar{e}_i > 0$

$$\rightarrow [\ldots, 1, \ldots] \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ii} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} > 0$$

$$\rightarrow (a_{11} \ldots a_{ii} \ldots a_{nn}) \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} > 0$$

$$\Rightarrow a_{ii} > 0$$

22. Determine cuáles de los siguientes son simétricos, singulares, diagonal dominante y/o definida positiva.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es simétrica pues $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = A^t$

Veamos que $\det(A) = 5 \neq 0$ $\therefore$ es invertible

$\therefore$ es no singular

veamos $\sum_{j=1, i \neq j}^{2} |a_{ij}|$ $\forall i \in \{1, 2\}$

$= |a_{21}| = 1$ y $|a_{11}| = 2$, $|a_{22}| = 3$

y $|a_{12}| = 1$

y como $2 > 2$! y $3 > 2 \Rightarrow$ no es diagonal dominante

veamos $\det(a_{11}) = 2 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 1 > 0$

$\therefore$ es def. positiva.

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es simétrica pues $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B = B^t$

$\det(B) \neq 0 \Rightarrow$ es invertible ed es no singular.

veamos si $|a_{ii}| > \sum_{j=1, i \neq j}^{2} |a_{ij}|$ $\forall i \in \{1, 2\}$

$|a_{12}| = 1$

$|a_{21}| = 1$ y $2 > -2$ y $2 > -3$

$\therefore$ no es diagonal dominante

$\det(a_{11}) = -2 < 0$ $\therefore$ no es def positiva

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

no es simétrica pues $a_{21} = 0$ y $a_{12} = 1$ y $0 \neq 1$

$\Rightarrow$ no puede ser def positiva. pues debe ser simétrica.

por otro lado C es invertible pues $\det(C) \neq 0$

$\therefore$ es no singular.

veamos si $|a_{ii}| > \sum_{j=1, i\neq j}^{2} |a_{ij}| \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{j=1, i\neq j}^{3} |a_{ij}| = |a_{21}| + |a_{31}| + |a_{12}| + |a_{32}| + |a_{13}| + |a_{23}|$$

$$= 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2$$

y $2 = 2$, $3 > 2$, $4 > 2$

$\therefore$ no es diagonal dominante.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

no es simétrica pues $D_{21} = 3$, $D_{12} = 2$ y $3 \neq 2 \Rightarrow$ no es def positiva

Veamos que $\det(D) = 0$ $\therefore$ no es invertible

$\therefore$ es singular

además $2 + 6 + 3 + 7 - \cancel{2} - \cancel{1} = 15$

$4 < 15$, $0 < 15$, $-3 < 15$

$\therefore$ no es diagonal dominante.

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

veamos que $E_{21} = 6$ y $E_{12} = 0$ y $6 \neq 0$ $\therefore$ no es simétrica y además no es def positiva.

$\det(E) = 28 \neq 0$ $\therefore$ E es invertible ed es no singular.

como $6 > 4 \Rightarrow$ no es dominante

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

F no es simétrica pues $F_{21} \neq F_{21}$ $\Rightarrow$ no es def positiva.

Además $\det(F) = 0 \Rightarrow$ no es invertible $\therefore$ es singular.

además es no dominante.

EJERCICIO 23

23. Obtener α de modo que A sea definida positiva para

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Necesitamos que los determinantes esquinados sean mayores a cero

$$\det(A) = 8\alpha - 1 - 1 - 4 - \alpha - 2$$
$$= 7\alpha - 8 > 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$\det \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > 1 \quad \ldots \quad (2)$$

$$\alpha > 0 \quad \ldots \quad (3)$$

de (1) tenemos $7\alpha > 8$

$$\Rightarrow \quad \alpha > \frac{8}{7}.$$

Necesitamos que se cumplan las siguientes 3 condiciones:

1. $\alpha > 1$
2. $\alpha > \frac{8}{7}$
3. $\alpha > 0$.

Por lo tanto, si $\boxed{\alpha > \frac{8}{7}}$ se cumplen las tres condiciones.

EJERCICIO 24

24. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Calcular los valores de α para los cuales

(a) A es singular.

(b) A es estrictamente diagonal dominante.

(c) A es simétrica.

(d) A es definida positiva.

(a) Necesitamos α t.q. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ esté en el espacio generado de

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -1 &= a \\ 1 &= b \\ \alpha &= -a+b \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Necesitamos que $\alpha = 2$ para que A sea singular.

(b) A no es estrictamente diagonal dominante, no importa el valor de α. Para $i=1$.

$1 = |a_{11}| \not> |a_{13}| = 1$.

(c) Cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Necesitamos que:

1. $1 > 0$
2. $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0$
3. $\det(A) = \alpha - 1 - 1 = \alpha - 2 > 0$

$$\Rightarrow \alpha > 2.$$

Necesitamos que $\alpha > 2$ para que A sea definida positiva.