Análisis numérico

Facultad de Ciencias, UNAM
INTERPOLACIÓN

Jorge Zavaleta Sánchez

Semestre 2022-1

Índice

Preliminares

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from Solsislin import triDiagluSol
```

[2]:
```
# Funciones auxiliares

## Derivada numerica
def derivada(f,x,tol = 1e-12, maxiter = 500):
    """Calcula la derivada de f en x (f'(x)) mediante diferencias progresivas.

    - Entrada >
      f (function)  - Funcion de la cual se quiere conocer su derivada.
      x (float)     - Punto donde se quiere conocer el valor de f'.
      tol (float)   - Opcional. Tolerancia para la diferencia entre dos␣
↪aproximaciones.
      maxiter (int) - Opcional. Numero maximo de iteraciones.

    - Salida >
      dfx (float) - Valor aproximado de f'(x).
    """
    d,h,it = np.inf,0.5,1
    dfx_a = f(x+1) - f(x)
    while abs(d) > tol and it < maxiter:
        dfx = (f(x+h) - f(x)) / h
```

```
        d = dfx - dfx_a
        dfx_a = dfx
        h /= 2
        it += 1
    return dfx

## Funciones de prueba
f1 = lambda x:np.sin(np.exp(x**2))
f2 = lambda x:5.0*np.sin(x)/(x+np.exp(-0.75*x)) - 3.0*x/5.0
```

Interpolación de Newton

SUpongamos que $P_n(x)$ es el n-ésimo *polinomio de Lagrange* que concuerda con la función f en los números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Las **diferencias divididas** de f respecto a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se usan para expresar $P_n(x)$ en la forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$$

para las constantes apropiadas $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Estás constantes requeridas están dadas por

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$ donde $f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$ es la k-ésima diferencia dividida relativa a $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$. por lo tanto se puede reescribir $P_n(x)$ como

$$P_n = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$$

A esta ecuación se le conoce con el nombre de **fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton**.

Para implementar esto es necesario calcular las diferencias divididas. Por ejemplo, para x_0, x_1, x_2 y x_3 y $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ es necesario calcular

x	$f(x)$	**Primeras diferencias divididas**	**Segundas diferencias divididas**	**Terceras diferencias divididas**
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$

Si se considera la tabla anterior como una matriz `F`, la primera columna que corresponde al indice `0` tendría los valores de las diferencias divididas de orden cero, esto es, `F[j,0]` $= f[x_j]$, $j = 0, \ldots, n$. Luego, las primeras diferencias divididas estarían en la segunda columna, `F[j,1]` $= f[x_{j-1}, x_j]$,

$j = 1, \ldots, n$. En general, la k-ésima columna de `F` contendría la k-ésima diferencia dividida relativa a $x_{j-k}, x_{j-k+1}, \ldots, x_j$ para $j = k, \ldots, n$, es decir

- `F[j,k]` $= f[x_{j-k}, x_{j-k+1}, \ldots, x_j] \quad j = k, \ldots, n$

para $k = 0, \ldots, n$. De esta manera, se pueden ir calculando por renglones las diferencias divididas que son necesarias para la fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton y que se encuentran en la diagonal de la matriz `F`.

[3]:
```
def ddnewton(x,fx):
    """ Funcion que calcula la formula de diferencias divididas interpolantes de
    Newton (Algoritmo 3.2 Richard L. Burden).

    - Entrada >
      x (1D ndarray)  - Vector de tamaño n con los valores de las abscisas.
      fx (1D ndarray) - Vector de tamaño n con las valuaciones de los puntos x_j␣
↪
                        en alguna funcion continua f desconocida.

    - Salida >
      (1D ndarray) - Vector de tamaño n con los coeficientes de las
                     diferencias divididas del polinomio interpolante.
    """
    n = fx.size
    F = np.zeros((n,n))
    F[:,0] = fx
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1):
            F[i+1,j+1] = (F[i+1,j]-F[i,j])/(x[i+1]-x[i-j])
    return F.diagonal()
```

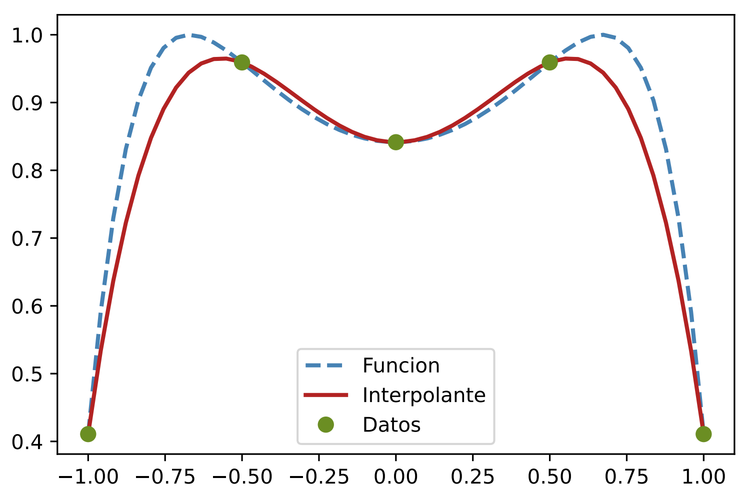
[4]:
```
def interpNewton(x,fx,p,fun = None):
    """Funcion que realiza la interpolacion mediante diferencias divididas
    interpolantes de Newton.

    - Entrada >
      x (1D ndarray)  - Vector de tamaño n con los valores de las abscisas.
      fx (1D ndarray) - Vector de tamaño n con las valuaciones de los puntos x_j␣
↪
                        en alguna funcion continua f desconocida.
      p (1D ndarray)  - Vector de tamaño m con abscisas en las cuales se quiere
                        conocer el valor de la funcion continua f desconocida.
      fun (function)  - Funcion f.
    """
    F = ddnewton(x,fx)
    n = p.size
    fp = np.zeros((n,))
    for k in range(n):
```

```
        fp[k] = F[0]
        for i in range(1,x.size):
            fac = np.prod(p[k]-x[:i])
            fp[k] += F[i]*fac
    if fun is not None:
        plt.plot(p,fun(p),'--',color = 'steelblue',label = 'Funcion',lw=2)
    plt.plot(p,fp,color='firebrick',label = 'Interpolante',lw=2)
    plt.plot(x,fx,'o',markersize = 7,color = 'olivedrab',label = 'Datos')
    ax = plt.gca()
    ax.legend()
    plt.show()
```

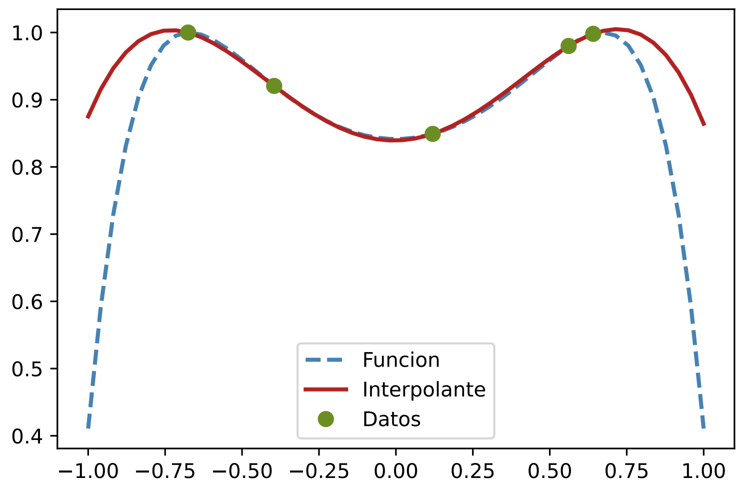
Ejemplos

[5]:
```
# Datos
fun = f1 #Funcion
inter = (-1,1) # Intervalo
npts = 5 #No. de puntos
```

[6]:
```
x = np.linspace(inter[0],inter[1],npts)
fx = fun(x)
p = np.linspace(inter[0],inter[1])
interpNewton(x,fx,p,fun)
```



[7]:
```
x = inter[0] + (inter[1] - inter[0])*np.random.rand(npts)
x.sort()
fx = fun(x)
p = np.linspace(inter[0],inter[1])
interpNewton(x,fx,p,fun)
```


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
Funcion
Interpolante
Datos

Interpolación de Hermite

Un método para generar las aproximaciones de Hermite tiene como base la fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton para el polinomio de Lagrange en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $P_n(x)$, y la conexión entre la n-esima diferencia dividida y la derivada de grado n de f.

Supongase que los números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ están dados junto con los valores de sus evaluaciones en f y f'. Definase la sucesión $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$ mediante

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

y se construye una tabla de diferencias divididas para estos valores, de forma análoga como en el caso del interpolante de Newton. Dado que $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ para cada i, no se puede definir $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ a partir de la fórmula de diferencias divididas. Si se supone que

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i) \quad i = 0, \ldots, n$$

entonces las diferencias divididas de primer orden quedarían definidas ya que se conocen los valores de $f'(x_i)$. Con esto, las diferencias divididas restantes se pueden calcular y se usan las diferencias divididas apropiadas en la fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton. Esto ya que se puede probar que el polinomio de Hermite está dado por

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - z_j)$$

Por ejemplo, para determinar el polinomio $H_5(x)$ para x_0, x_1, x_2, la siguiente tabla contiene los datos que se usan en las columnas de las tres primeras diferencias divididas

x	$f(x)$	**Primeras diferencias divididas**	**Segundas diferencias divididas**
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$	$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$	$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$	$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$	$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$	$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$

Las demás diferencias divididas se cálculan como en el caso del interpolante de Newton

[8]:
```
def ddhermite(x,fx,dfx):
    """ Calcula los coeficientes del polinomio interpolante de Hermite H_{2n+1}(x)
```

```
    (Algoritmo 3.3 Richard L. Burden).

    - Entrada >
      x (1D ndarray)   - Vector de tamaño n con los valores de las abscisas.
      fx (1D ndarray) - Vector de tamaño n con las valuaciones de los puntos x_j
                        en alguna funcion continua f desconocida.
      dfx (1D ndarray) - Vector de tamaño n con las valuaciones de los puntos x_j
                         en la derivada de alguna funcion continua f desconocida.

    - Salida >
      (1D ndarray) - Vector de tamaño n con los puntos z_{2i} = z_{2i+1} = x_{i}.
      (1D ndarray) - Vector de tamaño n con los coeficientes de las
                     diferencias divididas del polinomio interpolante.
    """
    Q = np.zeros((2*x.size,2*x.size+1))
    Q[::2,0] = Q[1::2,0] = x.copy()
    Q[::2,1] = Q[1::2,1] = fx.copy()
    Q[1::2,2] = dfx.copy()
    Q[2::2,2] = (Q[1:-1:2,1] - Q[2:-1:2,1])/((Q[1:-1:2,0] - Q[2:-1:2,0]))
    for i in range(1,2*x.size-1):
        for j in range(1,i+1):
            Q[i+1,j+2] = (Q[i+1,j+1]-Q[i,j+1])/(Q[i+1,0]-Q[i-j,0])
    return Q[:,0],Q.diagonal(1)
```

[9]:

```
def interpHermite(x,fx,dfx,p,fun = None):
    """Funcion que realiza la interpolacion mediante el polinomio de Hermite␣
↪H_{2n+1}(x)

    - Entrada >
      x (1D ndarray)   - Vector de tamaño n con los valores de las abscisas.
      fx (1D ndarray) - Vector de tamaño n con las valuaciones de los puntos x_j
                        en alguna funcion continua f desconocida.
      dfx (1D ndarray) - Vector de tamaño n con las valuaciones de los puntos x_j
                         en la derivada de alguna funcion continua f desconocida.
      p (1D ndarray)   - Vector de tamaño m con abscisas en las cuales se quiere
                        conocer el valor de la funcion continua f desconocida.
      fun (function)   - Funcion f.
    """
    z,Q = ddhermite(x,fx,dfx)
    n = p.size
    fp = np.zeros((n,))
    for k in range(n):
        fp[k] = Q[0]
        for i in range(1,z.size):
            fac = np.prod(p[k]-z[:i])
            fp[k] += Q[i]*fac
    if fun is not None:
        plt.plot(p,fun(p),'--',color = 'steelblue',label = 'Funcion',lw=2)
    plt.plot(p,fp,color='firebrick',label = 'Interpolante',lw=2)
    plt.plot(x,fx,'o',markersize = 7,color = 'olivedrab',label = 'Datos')
    ax = plt.gca()
    ax.legend()
    plt.show()
```

Ejemplos

Ejemplo 1 Utilizar el polinomio de Hermite que concuerda con los datos de la siguiente tabla para obtener una aproximación de $f(1.5)$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

[10]:
```
x = np.array([1.3,1.6,1.9])
fx = np.array([0.6200860,0.4554022,0.2818186])
dfx = np.array([-0.5220232,-0.5698959,-0.5811571])
```

[11]:
```
# Se contruye el espacio de la tabla
Q = np.zeros((2*x.size,2*x.size+1))

# Puntos z, y diferencias divididas de orden 0 y 1
Q[::2,0] = Q[1::2,0] = x.copy() #z_{2i} y #z_{2i+1}
Q[::2,1] = Q[1::2,1] = fx.copy() #f_{z_i}
Q[1::2,2] = dfx.copy() #f'_{x_i}
Q[2::2,2] = (Q[1:-1:2,1] - Q[2:-1:2,1])/((Q[1:-1:2,0] - Q[2:-1:2,0])) #␣
↪f[z_{i},z_{i+1}]

# Se calcula el resto de las diferencias divididas
for i in range(1,2*x.size-1):
    for j in range(1,i+1):
        Q[i+1,j+2] = (Q[i+1,j+1]-Q[i,j+1])/(Q[i+1,0]-Q[i-j,0])
with np.printoptions(precision=6, suppress=True):
    print("Tabla de diferencias divididas ",Q,sep="\n\n")
```

```
Tabla de diferencias divididas

[[ 1.3       0.620086  0.        0.        0.        0.        0.      ]
 [ 1.3       0.620086 -0.522023  0.        0.        0.        0.      ]
 [ 1.6       0.455402 -0.548946 -0.089743  0.        0.        0.      ]
 [ 1.6       0.455402 -0.569896 -0.069833  0.066366  0.        0.      ]
 [ 1.9       0.281819 -0.578612 -0.029054  0.067966  0.002667  0.      ]
 [ 1.9       0.281819 -0.581157 -0.008484  0.068567  0.001002 -0.002775]]
```

Los elementos de la diagonal principal de la matriz `Q[:,1:]` corresponden a los coeficientes necesarios para construir el polinomio interpolante de Hermite dado por

$$
\begin{multline}
H_5(x) = 0.620086 - 0.522023(x-1.3) - 0.089743(x-1.3)^2 \\
+ 0.066366(x-1.3)^2(x-1.6) + 0.002667(x-1.3)^2(x-1.6)^2 \\
- 0.002775(x-1.3)^2(x-1.6)^2(x-1.9)
\end{multline}
$$

Hay que evaluar el polinomio $H_5(1.5)$ para obtener la aproximación de $f(1.5)$.

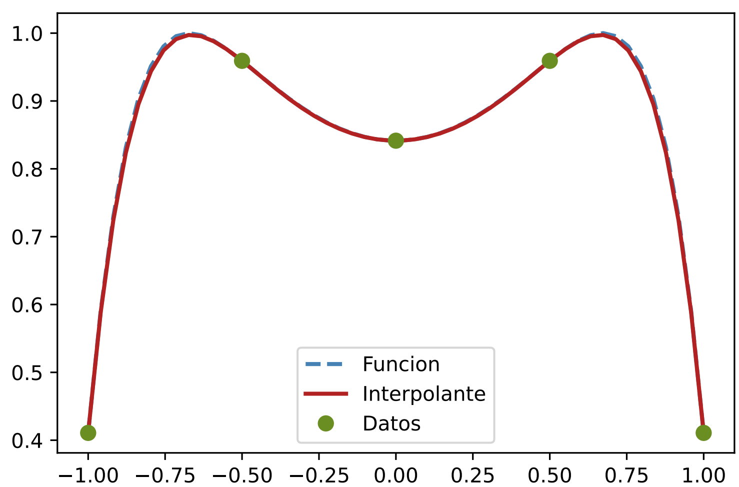
[12]:
```python
p = 1.5
z = Q[:,0]
Q = Q.diagonal(1)
fp = Q[0]
for i in range(1,z.size):
    fac = np.prod(p-z[:i])
    fp += Q[i]*fac
print(f"El valor aproximado de f({p}) = {fp:.6f}")
```

```
El valor aproximado de f(1.5) = 0.511828
```

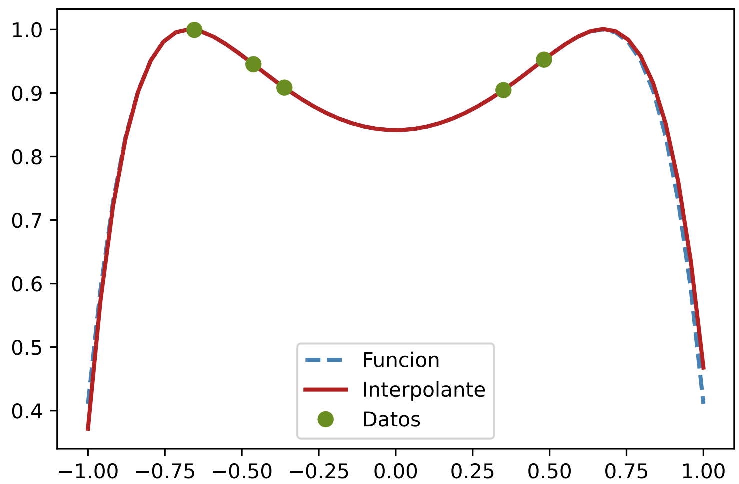
Ejemplo 2

[13]:
```python
fun = f1 #Funcion
inter = (-1,1) # Intervalo
npts = 5 #No. de puntos
```

[14]:
```python
x = np.linspace(inter[0],inter[1],npts)
fx = fun(x)
dfx = np.array(list(map(lambda x:derivada(fun,x),x)))
p = np.linspace(inter[0],inter[1])
interpHermite(x,fx,dfx,p,fun)
```



[15]:
```python
x = inter[0] + (inter[1] - inter[0])*np.random.rand(npts)
x.sort()
fx = fun(x)
dfx = np.array(list(map(lambda x:derivada(fun,x),x)))
p = np.linspace(inter[0],inter[1])
interpHermite(x,fx,dfx,p,fun)
```


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00
Funcion
Interpolante
Datos

Spline cúbico natural

Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ un **interpolante de spline cúbico natural** S para f es una función que cumple con las siguientes condiciones:

1. $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$, en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$;
2. $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$;
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$;
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$;
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$;
6. $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$

Si se quiere construir el interpolante del spline cúbico natural de determinada función f se aplicn las condiciones a los polinomios cúbicos:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Utilizando las condiciones que definen el spline natural se tiene que

$$\begin{aligned}
a_j &= f(x_j) \quad j = 0, 1, \ldots, n \\
d_j &= \frac{(c_{j+1} - c_j)}{3h_j} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \\
b_j &= \frac{(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{h_j(2c_j + c_{j+1})}{3} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

con $h_j = x_{j+1} - x_j$. Al final, utilizando otras expresiones (vae los detalles en el libro de Burden), se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3(a_{j+1} - a_j)}{h_j} - \frac{3(a_j - a_{j-1})}{h_{j-1}}$$

para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Dicho sistema sólo contiene $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ como incógnitas ya que los valores $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ y $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ son conocidos ya que dependen de $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ y $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n}$.

Dado que se tienen $n-1$ ecuaciones y $n+1$, se usan las condiciones del spline natural dadas en el punto 6, lo cual nos da las ecuaciones adicionales $c_0 = c_n = 0$, que da el sistema tirdiagonal $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ de $(n+1) \times (n+1)$

$$
A\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-1}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3(a_2-a_1)}{h_1} - \dfrac{3(a_1-a_0)}{h_0} \\ \dfrac{3(a_3-a_2)}{h_2} - \dfrac{3(a_2-a_1)}{h_1} \\ \vdots \\ \dfrac{3(a_n-a_{n-1})}{h_{n-1}} - \dfrac{3(a_{n-1}-a_{n-2})}{h_{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}
$$

donde la matriz A es diagonal dominante y por tanto el vector $\boldsymbol{c}$ es único. Una vez obtenido $\boldsymbol{c}$ se pueden calcular $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ y $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$.

Algoritmo (Spline cúbico natural)

Algoritmo 1: Spline cúbico natural

Entrada: $\{x_j\}_{j=0}^{n+1}$ en $[a,b]$, con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ y $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n+1}$ sus evaluaciones en una función f.

Salida: $\{a_j\}_{j=0}^{n}$, $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$, $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$, coeficientes de los polinomios cúbicos $S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definir $a_j = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$
Calcular $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$
Construir A y $\boldsymbol{y}$
Resolver $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$
Calcular b_j y d_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$
Regresar $\{a_j\}_{j=0}^{n}$, $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$, $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$.

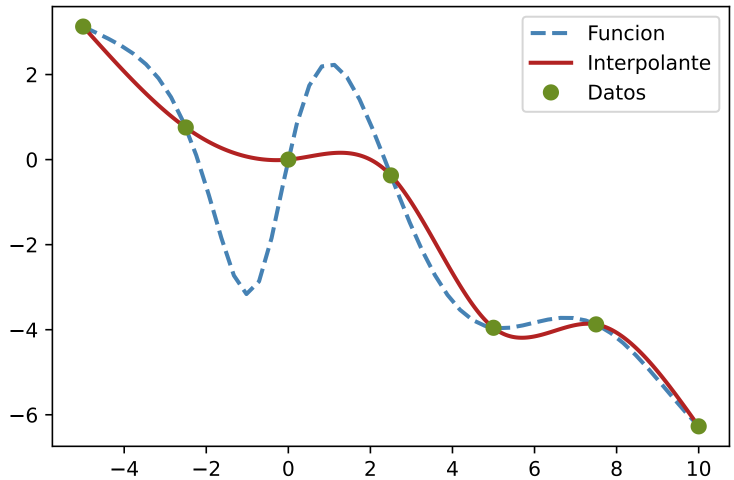
[16]:
```
def splinecub_N(x,fx):
    """ Calcula los coeficientes a_{j}, b_{j}, c_{j} y d_{j} de los polinomios cubicos S_{j} de un
    spline natural.

    - Entrada >
      x (1D ndarray)  - Vector con los puntos que definen las abscisas x_{j}.
                        Se supone que son distintos y estan ordenados.
      fx (1D ndarray) - Vector con los puntos que definen las ordenadas f(x_{j}).

    - Salida >
      a (1D ndarray) - Coeficientes a_{j} del polinomio cúbico S_{j} en el intervalo [x_{j},x_{j+1}].
```

```
      b (1D ndarray) - Coeficientes b_{j} del polinomio cúbico S_{j} en el intervalo␣
↪[x_{j},x_{j+1}].
      c (1D ndarray) - Coeficientes c_{j} del polinomio cúbico S_{j} en el intervalo␣
↪[x_{j},x_{j+1}].
      d (1D ndarray) - Coeficientes d_{j} del polinomio cúbico S_{j} en el intervalo␣
↪[x_{j},x_{j+1}].
    """
    # Se asigna a_{j} y se calcula h_{j}
    a = fx
    h = x[1:] - x[:-1]

    # Se construye A y el lado derecho y. Se resuelve el sistema Ac = y
    dp,rhs = np.ones((x.size,)),np.zeros((x.size,))
    dp[1:-1] = 2.0*(h[:-1] + h[1:])
    rhs[1:-1] = 3.0*(a[2:]-a[1:-1])/h[1:] - 3*(a[1:-1]-a[:-2])/h[:-1]
    c = triDiagluSol(dp,np.append(h[:-1],0),np.append(0,h[1:]),rhs)

    # Se calcula b_{j} y d_{j}
    b = (a[1:]-a[:-1])/h - h*(2.0*c[:-1] + c[1:])/3.0
    d = (c[1:] - c[:-1])/(3.0*h)
    return a,b,c,d

def plotSC_N(x,fx,coef,fun = None):
    """ Hace la gráfica del spline natural

    - Entrada >
      x (1D ndarray)  - Vector con los puntos que definen las abscisas x_{j}.
                        Se supone que son distintos y estan ordenados.
      fx (1D ndarray) - Vector con los puntos que definen las ordenadas f(x_{j}).
      coef (tupla)    - Es una tupla de tamaño 4 donde cada una de sus entradas␣
↪corresponden
                        a los coeficientes a_{j}, b_{j}, c_{j}, d_{j} del spline␣
↪natural S.
                        Vease la función splinecub_N para más detalles.
    """
    if fun is not None:
        p = np.linspace(x[0],x[-1])
        plt.plot(p,fun(p),'--',color = 'steelblue',label = 'Funcion',lw=2)
    for i in range(x.size-1):
        p = np.linspace(x[i],x[i+1])
        Sp = coef[0][i] + coef[1][i]*(p-x[i]) \
             + coef[2][i]*(p-x[i])**2 + coef[3][i]*(p-x[i])**3
        if i == 0:
            plt.plot(p,Sp,color='firebrick',lw=2,label = 'Interpolante')
        else:
            plt.plot(p,Sp,color='firebrick',lw=2)
    plt.plot(x,fx,'o',markersize = 7,color = 'olivedrab',label = 'Datos')
    ax = plt.gca()
    ax.legend()
    plt.show()
```

Ejemplos

[17]:
```
# Datos
fun = f2 #Funcion
inter = (-5,10) # Intervalo
npts = 7 #No. de puntos
```

[18]:
```
x = np.linspace(inter[0],inter[1],npts)
fx = fun(x)
plotSC_N(x,fx,splinecub_N(x,fx),fun)
```



[19]:
```
x = inter[0] + (inter[1] - inter[0])*np.random.rand(npts)
x.sort()
fx = fun(x)
plotSC_N(x,fx,splinecub_N(x,fx),fun)
```