Facultad de Ciencias, UNAM
Semestre 2022-1

Análisis Numérico

Tarea Examen V: Interpolación

Nombre:____

1. Dados los puntos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ y $f(x) = \exp(x)$ construir explícitamente los polinomios de Lagrange $L_j(x)$.

2. Dados los puntos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ y $f(x) = \exp(x)$ construir explícitamente el interpolante de Hermite,

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)H_j(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_j(x)$$

donde

$$H_j(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_j(x_j)]L_j^2(x)$$

y

$$\hat{H}_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x)$$

con $L_j(x)$ es el j-ésimo polinomio de Lagrange.

3. Dada la siguiente definición:

Definición. *Dada una función f definida en $[a, b]$ y el conjunto de puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, el* **Interpolante Spline Cúbico** *S para f es una función que satisface:*

$S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado por $S_j(x)$ en el intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para $j = 0, 1, \cdots, n - 1$.

(a) $S_j(x_j) = f(x_j)$ *para* $j = 0, 1, \cdots, n$
(b) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$
(c) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ *para* $j = 0, 1, \cdots, n - 2$
(d) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$

Con condiciones de frontera dadas por:

(a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ *Llamado Spline Natural.*

(b) *$S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ Llamado Spline Completo.*

Completar el sistema de ecuaciones dado por:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

para $1 \leq i \leq n-1$.

En forma matricial expresado:

$$\begin{bmatrix} h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$
$$b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$
$$v_i = b_i - b_{i-1}$$

para $1 \leq i \leq n-1$.

Con las condiciones de frontera dadas por el spline completo.

4. En papel milimétrico escribir la primer letra de su nombre, en letra manuscrita y mayúscula, de forma continua para crear una curva, capturar los puntos necesarios[1] en un lista, con los datos obtenidos construir el Spline Cúbico (completo) para reproducir la curva.

   Graficar el resultado, entregar la curva dibujada así como la gráfica de la misma.

[1] Necesarios según el criterio de cada uno.