**Universidad Nacional Autónoma de México**

Facultad de Ciencias

# Solución a Sistemas de Ecuaciones No Lineales

*Práctica No. 4*

Integrantes:
López Espíndola Luis Enrique
Mucio Alvarez Santos
Muñiz Lescale Marco Aurelio
Reynoso Sánchez Arturo Yitzack

17 de enero de 2022

3. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$, ¿para qué cero de $f$ el Método de Bisección converge cuando se aplican los intervalos siguientes para su búsqueda?,

a) $[-1.5, 2.5]$ b) $[-0.5, 2.4]$ c) $[-0.5, 3]$ d) $[-3, -0.5]$

[Ejercicio].

Solución.

a) $[a,b] = [-1.5, 2.5]$

$f(a) = f(-1.5) = -10.2539 < 0$

$f(b) = f(2.5) = 232.5586 > 0$

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{-1.5+2.5}{2} = 0.5$

$f(m) = f(0.5) = 0.5273 > 0 \Rightarrow b_1 = m$

$m_1 = \frac{a+b_1}{2} = \frac{-1.5+0.5}{2} = -0.5$

$f(m_1) = f(-0.5) = -1.5820 < 0 \Rightarrow a_1 = m_1$

$m_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 0$

$f(m_2) = f(0) = 0$

$\therefore x^* = m_2 = 0$

b) $[a,b] = [-0.5, 2.4]$

$f(a) = f(-0.5) = -1.5820 < 0$

$f(b) = f(2.4) = 133.9879 > 0$

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.5+2.4}{2} = 0.95$

$f(m) = f(0.95) = 0.0014 > 0 \Rightarrow b_1 = m$

$m_1 = \frac{a+b_1}{2} = \frac{-0.5+0.95}{2} = 0.225$

$f(m_1) = f(0.225) = 0.6207 > 0 \Rightarrow b_2 = m_1$

$m_2 = \frac{a+b_2}{2} = \frac{-0.5+0.225}{2} = -0.1375$

$f(m_2) = f(-0.1375) = -0.5993 < 0 \Rightarrow a_1 = m_2$

$m_3 = \frac{a_1+b_2}{2} = \frac{-0.1375+0.225}{2} = 0.04375$

$f(m_3) = f(0.04375) = 0.1666 > \Rightarrow b_3 = m_3$

$m_4 = \frac{a_1+b_3}{2} = \frac{-0.1375+0.04375}{2} = -0.046875$

$f(m_4) = f(-0.046875) = -0.1953 < 0 \Rightarrow a_2 = m_4$

$m_5 = \frac{a_2+b_3}{2} = \frac{-0.046875+0.04375}{2} = 0.0015625$

$f(m_5) = f(0.0015625) = 0.0062 \approx 0$

$\therefore m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$f(0) = 0$

$\therefore x^* = 0$

c) $[a,b] = [-0.5, 3]$

$f(a) = f(-0.5) = -1.5820 < 0$

$f(b) = f(3) = 1920 > 0$

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{-0.5+3}{2} = 1.25$

$f(m) = f(1.25) = -0.2410 < 0 \Rightarrow a_1 = m$

$m_1 = \frac{a_1+b}{2} = \frac{1.25+3}{2} = 2.125$

$f(m_1) = 15.2353 > 0 \Rightarrow b_1 = m_1$

$m_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{1.25+2.125}{2} = 1.6875$

$f(m_2) = f(1.6875) = -4.564 < 0 \Rightarrow a_2 = m_2$

$m_3 = \frac{a_2+b_1}{2} = \frac{1.6875+2.125}{2} = 1.90625$

$f(m_3) = -4.3886 < 0 \Rightarrow a_3 = m_3$

$m_4 = \frac{a_3+b_1}{2} = \frac{1.90625+2.125}{2} = 2.015625$

$f(m_4) = f(2.015625) = 1.2049 > 0 \Rightarrow b_2 = m_4$

$m_5 = \frac{a_3+b_2}{2} = \frac{1.90625+2.15625}{2} = 2.03125$

$\therefore m_k \xrightarrow{k\to\infty} 2$

$f(2) = 0$

$\therefore x^* = 2$

d) $[a,b] = [-3, -0.5]$

$f(a) = f(-3) = 3840 > 0$

$f(b) = f(-0.5) = -1.582 < 0$

$m = \frac{a+b}{2} = \frac{-3-0.5}{2} = -1.75$

$f(m) = f(-1.75) = -19.1924 < 0 \Rightarrow b_1 = m$

$m_1 = \frac{a+b_1}{2} = \frac{-3-1.75}{2} = -2.375$

$f(m_1) = f(-2.375) = 283.2042 > 0 \Rightarrow a_1 = m_1$

$m_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{-2.375-1.75}{2} = -2.0625$

$f(m_2) = f(-2.0625) = 16.9806 > 0 \Rightarrow a_2 = m_2$

$m_3 = \frac{a_2+b_1}{2} = \frac{-2.0625-1.75}{2} = -1.90625$

$f(m_3) = f(-1.90625) = -14.0736 < 0 \Rightarrow b_2 = m_3$

$m_4 = \frac{a_2+b_2}{2} = \frac{-2.0625-1.90625}{2} = -1.984375$

$f(m_4) = f(-1.984375) = -3.1819 < 0 \Rightarrow b_3 = m_4$

$m_5 = \frac{a_2+b_3}{2} = \frac{-2.0625-1.984375}{2} = -2.0234375$

$\therefore m_k \xrightarrow{k\to\infty} -2$

$f(-2) = 0$

$\therefore x^* = -2$

# Ejercicios Práctica 4

A) Hallar una aproximación a $\sqrt{3}$ con una tolerancia de $10^{-4}$ usando el algoritmo de Bisección [Hint: Considerar $f(x) = x^2 - 3$]

a) Escribir las primeras 5 iteraciones.

Tomaremos la función del hint y el intervalo $[-1, 3]$ donde la función $f(x)$ es continua. Además. $f(a)\cdot f(b) < 0$ con $a = -1$ y $b = 3$

Así podemos estar seguros de aplicar el método de la bisección. tomando $tol = 10^{-4}$ empezamos el algoritmo, hasta 5 iteraciones

Iteración 1 $|(3-(-1))| = 4 > 10^{-4}$

$$m_1 = \frac{(3+(-1))}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\rightarrow f(3)\cdot f(1) = (6)(-2) < 0$$

$$\rightarrow a = 1$$

Iteración 2. $|(3-1)| = 2 > 10^{-4}$

$$m_2 = \frac{(3+1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\rightarrow f(3)\cdot f(2) = (6)(1) = 6 > 0$$

$$\rightarrow b = 2$$

Iteración 3 $|b-a| = |2-1| = 1 > 10^{-4}$

$$m_3 = \frac{(2+1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$f(2)\cdot f(1)=(1)(-2)=-2<0$

$\rightarrow a=\frac{3}{2}$

Iteración 4

$|2-\frac{3}{2}|=|\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

$m=(2+\frac{3}{2})/2=\frac{7/2}{2}=\frac{7}{4}$

$f(2)\,f(\frac{7}{4})=(1)(1/16)=1/16>0$

$\rightarrow b=7/4$

Iteración 5

$|7/4-\frac{6}{4}|=|\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}$

$m=\frac{(7/4+\frac{6}{4})}{2}=\frac{13/4}{2}=\frac{13}{8}$

$f(7/4)\,f(\frac{13}{8})=(1/16)(-\frac{23}{64})=-\frac{23}{1024}<0$

$\rightarrow a=-\frac{23}{1024}$

$1 \times 10^{-5} = .00001$

(5) La función definida por $f(x) = \sin(\pi x)$ tiene ceros en todos los enteros. Muestre que cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$, el método de bisección converge a...

a) 0, si $a+b < 2$.

Tenemos que $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -1 < a < 0 \\ 2 < b < 3 \\ \hline 1 < a+b < 3 \end{array}$$

Pero nosotros necesitamos $a+b < 2 \Rightarrow -1 < a+b < 2$

Así $m_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < m_1 < 1$

Se cumple que $f(a) < 0 \wedge f(m_1) > 0$

$\Rightarrow$ Sea $b = m_1$, $m_2 = \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -1 < a < 0 \\ 1/2 < b < 1 \\ \hline -1/2 < a+b < 1 \end{array} \Rightarrow -.25 < m_2 < 1/2$$

Se sigue cumpliendo que $f(a) < 0$ y $f(m_2) > 0$

$\rightarrow$ Sea $b = m_2 \wedge m_3 = \frac{a+b}{2}$

$$\rightarrow \begin{array}{r} -1 < a < 0 \\ -.25 < b < .5 \\ \hline -5/4 < a+b < 1/2 \end{array} \rightarrow .62 < m_3 < .25$$

Seguimos teniendo $f(a)<0$ y $f(m_3)>0$

$\rightarrow$ Se toma $b=m_3 \wedge m_4=\frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -1<a<0 \\ -5/8<b<1/4 \\ \hline -9/8<a+b<1/4 \end{array} \Rightarrow -\frac{9}{16}<\frac{a+b}{2}<1/8.$$

Se sigue cumpliendo

$\Rightarrow b=m_4 \wedge m_5=\frac{a+b}{2}$

$$\rightarrow \begin{array}{r} -1<a<0 \\ -9/16<b<1/8 \\ \hline -\frac{25}{16}<a+b<1/8 \end{array} \Rightarrow -\frac{25}{32}<\frac{a+b}{2}<1/16$$

Se sigue cumpliendo que $f(a)<0$ y $f(m_4)>0$

Es claro que $m_6 \rightarrow 0$

$\therefore$ El método de bisección converge a 0 cuando $a+b<2$

b) $2$, si $a+b>2$

Se tiene que $2<a+b<3$

$\Rightarrow$ Para $m_1=\frac{a+b}{2} \wedge 1<m_1<3/2$

$\Rightarrow$ Tomando $a=m_1 \wedge m_2=\frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 1<a<3/2 \\ 2<b<3 \\ \hline 3<a+b<9/2 \end{array} \Rightarrow 3/2<m_2<9/4$$

Tomando $a = m_2 \wedge m_3 = \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} 3/2 < a < 9/4 \\ 2 < b < 3 \\ \hline 7/2 < a+b < 21/4 \end{array} \Rightarrow 7/4 < m_3 < \frac{21}{8}$$

Tomando $a = m_3 \wedge m_4 = \frac{a+b}{2}$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 7/4 < a < 21/8 \\ 2 < b < 3 \\ \hline 15/4 < a+b < 45/8 \end{array} \Rightarrow \frac{15}{8} < m_4 < \frac{45}{16}.$$

Es evidente que $m_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 2$

$\therefore$ El metodo de la bisección converge a 2 cuando $a+b>2$

c) 1, si $a+b=2$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow f(1) = 0.$

$\therefore$ El método de la bisección converge a 1 cuando $a+b=2$.

6. Definiendo $e_k = x_k - x^*$, para la iteración de Secante, demostrar la siguiente igualdad:

$$e_{k+1} = \frac{f(x_k)/e_k - f(x_{k-1})/e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(e_k e_{k-1})$$

[Ejercicio]

Demostración.

Sabemos que la iteración de Secante es:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad \ldots (1)$$

Por hipótesis, tenemos que:

$$e_k = x_k - x^* \implies \left.\begin{aligned} x_{k-1} &= e_{k-1} + x^* \\ x_k &= e_k + x^* \\ x_{k+1} &= e_{k+1} + x^* \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) en la (1), obtenemos:

$$e_{k+1} + \cancel{x^*} = e_k + \cancel{x^*} - f(x_k)\frac{e_k + \cancel{x^*} - e_{k-1} - \cancel{x^*}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$\implies e_{k+1} = e_k - f(x_k)\frac{e_k - e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$= \frac{e_k[f(x_k) - f(x_{k-1})] - f(x_k)[e_k - e_{k-1}]}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$= \frac{\cancel{e_k f(x_k)} - e_k f(x_{k-1}) - \cancel{e_k f(x_k)} + e_{k-1} f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$= \frac{\frac{e_k e_{k-1} f(x_k)}{e_k} - \frac{e_k e_{k-1} f(x_{k-1})}{e_{k-1}}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$= \frac{\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(e_k e_{k-1}) \quad \blacksquare$$

# EJERCICIO 7.

Sean $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots [a_n, b_n]$ sucesión de intervalos generados por el método de la bisección. Si

$$r = \lim_{n\to\infty} C_n$$

con $$C_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

demostrar $$|r - C_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

Demostración.

Notamos que la sucesión de intervalos cumple con lo siguiente:

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_0 \qquad (1)$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq a_0 \qquad (2)$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad (n \geq 0) \qquad (3)$$

Como la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ es creciente y acotada superiormente, converge. De la misma manera $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge. Si aplicamos (3) repetidamente, encontramos que

$$b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}(b_0 - a_0) = 0$$

De modo que $r = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$.

$\Rightarrow a_n \leq r \leq b_n$

Notemos que $c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ y $b_n - c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$.

Ahora comparamos $r$ con $C_n$.

Caso 1. $r \leq c_n$

Como $a_n \leq r \leq c_n \Rightarrow -r \leq -a_n$

$$\Rightarrow 0 \leq c_n - r \leq c_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{2^{-n}(b_0 - a_0)}{2}$$

$$= 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

$$\Rightarrow |r - C_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

Caso 2. $c_n < r$

Tenemos que $c_n < r \leq b_n$

$$\Rightarrow 0 \leq r - c_n \leq b_n - c = \frac{b_n - a_n}{2} = 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

$$\Rightarrow |r - c_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

Por lo tano $|r - C_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$.

8. Sea la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

a) manipulando la función f da 4 variantes de ella, de tal forma que se puede ver como una función $f(x) = g_i(x) - x$ de punto fijo para $i = 1, 2, 3, 4$

primero hagamos $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = x$$

$$\therefore \boxed{g_1(x) = x^4 + 2x^2 - 3}$$

Con $(x^4 + 2x^2 - 3 - x = 0)\left(\frac{1}{x}\right)$

$$x^3 + 2x - \frac{3}{x} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{x^3}{2}$$

$$\therefore \boxed{g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{x^3}{2}}$$

Ahora para $x^4 + 2x^2 - 3 - x = 0$

$$2x^2 = x + 3 - x^4$$

$$x = \sqrt{\frac{x + 3 - x^4}{2}}$$

$$\therefore \boxed{g_3(x) = \sqrt{\frac{x + 3 - x^4}{2}}}$$

y la última variación es.

$$x^4 + 2x^2 - 3 - x = 0$$

$$x^4 + x^2 + x^2 - 3 - x = 0$$

$$x = \sqrt{x - x^2 - x^4 + 3}$$

$$\therefore \boxed{g_4(x) = \sqrt{x - x^2 - x^4 + 3}}$$

c) Determinar si el método converge para $x_0 = 1$

$\Leftrightarrow \quad |g'(x)| < 1$

para

$$g_1(x) = x^4 + 2x^2 - 3$$

$$g_1'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$\Rightarrow \quad |4x^3 + 2x| < 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 < 4x^3 + 2x < 1$$

$$\frac{-1 - 4x^3}{2} < x < \frac{1 - 4x^3}{3}$$

veamos que si $x = 1$

$$1 < \frac{1-4}{3}$$

$$1 < -1 \; !$$

$\therefore$ no converge

para

$$g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{x^3}{2}$$

$$-1 < \frac{1}{2} + \frac{3}{2x} - \frac{x^3}{2} < 1$$

$$-\frac{3}{2} < \frac{3}{2x} - \frac{x^3}{2} < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2} < \frac{6 - 2x^4}{4x} < \frac{1}{2}$$

$$-6 < \frac{3 - x^4}{2x} < 2$$

$$-\frac{1}{6} < \frac{2x}{3 - x^4} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^4 - 3}{12} < x < \frac{3 - x^4}{4}$$

si $x = 1$

$$-\frac{2}{12} < 1 < \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Sí converge

para

$$g_3(x) = \sqrt{\frac{x+3-x^4}{2}}$$

$$g_3'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{-1/2}(1-4x^3)$$

$$-1 < \frac{1}{2}\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{-1/2}(1-4x^3) < 1$$

$$-\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}} < 1-4x^3 < \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}}+1}{+4}} > x > \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}}-1}{-4}} \;!$$

no converge.

10. Para cada una de las siguientes funciones hallar el intervalo $[a, b]$ donde el método de Punto Fijo converge.

*a)*

$$x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$$

*b)*

$$x = \frac{5}{x^2} + 2$$

*c)*

$$x = 6^{-x}$$

*d)*

$$x = 0.5(\sin(x) + \cos(x))$$

[Ejercicio]

Solución.

Una condición suficiente que garantiza la convergencia es que si $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en un intervalo al rededor de una raiz de la ecuación $x = g(x)$ y si se cumple que $|g'(x)| \leqslant 1$ para todo el intervalo, entonces $x_k$ convergerá hacia la raiz $x^*$.

a) $x = \frac{2 - e^x + x^2}{3} = g(x)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| \leqslant 1 &\iff \left|\frac{d}{dx} \frac{2 - e^x + x^2}{3}\right| \leqslant 1 \\
&\iff \left|\frac{1}{3}(-e^x + 2x)\right| = \left|\frac{1}{3}\right| |2x - e^x| \leqslant 1 \\
&\iff |2x - e^x| \leqslant 3 \\
&\iff |2x - e^x| \leqslant |2x| + |-e^x| \\
&\qquad = |2x| + |e^x| \\
&\qquad = |2x| + e^x \leqslant 3 \qquad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&\iff |2||x| \leqslant 3 - e^x < 3 \\
&\iff |x| < \frac{3}{2} \\
&\iff -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \\
&\iff x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

b) $x = \frac{5}{x^2} + 2 = g(x)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| \leqslant 1 &\iff \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2} + 2\right)\right| \leqslant 1 \\
&\iff \left|-\frac{10}{x^3}\right| \leqslant 1 \\
&\iff \left|\frac{10}{x^3}\right| \leqslant 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 \leq |x^3|$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 \geq 10 \ \cup \ x^3 \leq -10$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq \sqrt[3]{10} \ \cup \ x \leq -\sqrt[3]{10}$$

c) $x = 6^{-x}$

$$\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{d}{dx} 6^{-x}\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |-\ln(6) 6^{-x}| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\ln(6) 6^{-x}| = |\ln(6)||6^{-x}| \leq 1$$

$\ln(6) \approx 1.79 > 0$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{6^x}\right| \leq \frac{1}{\ln(6)}$$

$6^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 6^x \geq \ln(6)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \log_6(\ln(6)) \approx 0.3255$$

d) $x = 0.5(\operatorname{sen} x + \cos x)$

$$\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{d}{dx} \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x)\right| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |\cos x - \operatorname{sen} x| \leq 2$$

pero esto se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$ pues

$$|\cos x - \operatorname{sen} x| \leq |\cos x| + |-\operatorname{sen} x|$$

$$= |\cos x| + |\operatorname{sen} x|$$

$$\leq 1 + 1 = 2 \checkmark$$

$$\therefore x \in \mathbb{R}$$

Mostrar las primeras 5 interacciones del Método de Newton para hallar el cero de $f(x) = x^2 - 6$ con $x_0 = 1$

Veamos que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{(1)^2 - 6}{2(1)} = \frac{7}{2}$$

$$x_2 - x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{7}{2} - \frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 6}{2\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{73}{28}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \frac{73}{28} - \frac{(73/28)^2 - 6}{2(73/28)} = 2.4542$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2.4542 - \frac{(2.4542)^2 - 6}{2(2.4542)}$$

$$= 2.4495$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = 2.4495 - \frac{(2.4495)^2 - 6}{2(2.4495)}$$

$$= 2.4494897$$

comparando con $f(x) = x^2 - 6$ si $f(x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{6}$ , $x_2 = -\sqrt{6}$

donde $\sqrt{6} = 2.449489743$

(12) Sea $f(x) = x^2 - 6$ con $x_0 = 3$ y $x_1 = 2$ hallar $x_4$ para

a) El método de Secante

Notemos que $x_0 > x_1 \wedge f(x_0) f(x_1) < 0$.

$\rightarrow f(x_0) = 3 \wedge f(x_1) = -2$

$$\rightarrow x_2 = x_1 - f(x_1)\left(\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}\right) = \frac{12}{5}$$

$$\rightarrow x_3 = x_2 - f(x_2)\left(\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}\right) =$$

$$= \frac{12}{5} - \left(-\frac{6}{25}\right)\left(\frac{12/5 - \frac{10}{5}}{(-6/25) - (-2)}\right) = \frac{27}{11}$$

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\left(\frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)}\right) =$$

$$= \frac{27}{11} - \left(\frac{3}{121}\right)\left(\frac{\frac{27}{11} - \frac{12}{5}}{(3/121) - (-6/25)}\right) = \frac{218}{89}.$$

$\therefore$ Método de Secante $x_4 = \frac{218}{89}$

b) Método Regla falsa.

Notemos que $f(x_0) f(x_1) < 0$

$$\rightarrow x_2 = \left(\frac{x_0 \cdot f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}\right)$$

$$= \left(\frac{3(-2) - (2)(3)}{-2 - (3)}\right) = \frac{12}{5}$$

Ojo $f(x_0)f(x_2) < 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= \frac{3(-6/25) - (\frac{12}{5})(3)}{(-6/25) - (3)} = \frac{22}{9}$$

Ojo $f(x_0)f(x_3) < 0 \Rightarrow x_1 = x_3$

$$\Rightarrow x_4 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= \frac{3(-2/81) - \frac{22}{9}(3)}{(-2/81) - (3)} = \frac{120}{49}$$

$\therefore$ Método Regla falsa $x_4 = \frac{120}{49}$.

c) ¿Cual de los dos métodos se acerca más a $\sqrt{6}$?

El método de la secante.

23. Dado el teorema de Sherman - Morrison.

Teorema Sea $A$ una matriz no singular y $\bar{x}, \bar{y}$ vectores con $\bar{y}^t A^t \bar{x} \neq -1$ ent $A + x y^t$ es no singular y

$$(A + \bar{x}\bar{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1} \bar{x}}$$

Demostrar que

$$\left( A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1}\bar{x}} \right)(A + \bar{x}\bar{y}^t) = I$$

Como

$$(A + \bar{x}\bar{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1}\bar{x}}$$

$$\Rightarrow (A + \bar{x}\bar{y}^t)^{-1}(A + \bar{x}\bar{y}^t) = \left( A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1}\bar{x}} \right)(A + \bar{x}\bar{y}^t)$$

y como $(A + \bar{x}\bar{y}^t)$ es no singular $\Rightarrow$

$$(A + \bar{x}\bar{y}^t)^{-1}(A + \bar{x}\bar{y}^t) = I$$

$$\therefore \left( A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1}\bar{x}} \right)(A + \bar{x}\bar{y}^t) = I$$