Análisis Numérico

Examen IV: Solución a Sistemas de Ecuaciones No Lineales

10

Nombre: Arturo Yitzack Reynoso Sánchez

1. Sea $f(x)=\overset{-2}{(x+2)}\overset{-1}{(x+1)^2}\overset{0}{x}\overset{1}{(x-1)^3}\overset{2}{(x-2)}$. ¿A qué raíz converge el método de bisección en los siguientes intervalos? Justificar.

(a) $[-0.5, 2.4]$

(b) $[-3, -0.5]$

(a) $f(a_0)=f(-0.5)=-\frac{405}{256}\approx -1.58203<0$

$f(b_0)=f(2.4)=133.9879>0$

$m_0=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{-0.5+2.4}{2}=\frac{1.9}{2}=0.95$

$f(m_0)=f(0.95)=0.0013986>0 \Rightarrow a_0=\overset{-0.5}{a_1},\ b_1=\overset{0.95}{m_0}$

$m_1=\frac{-0.5+0.95}{2}=0.225$

$f(m_1)=f(0.225)=0.62670>0 \Rightarrow a_2=\overset{-0.5}{a_1},\ b_2=\overset{0.225}{m_1}$

$m_2=\frac{-0.5+0.225}{2}=-0.1375$

$f(m_2)=f(-0.1375)=-0.59934<0 \Rightarrow \overset{-0.1375}{a_3}=m_2,\ b_3=\overset{0.225}{b_2}$

$$m_3 = \frac{-0.1375 + 0.225}{2} = 0.04375$$

$$f(m_3) = f(0.04375) = 0.1666239 > 0$$

$$\Rightarrow -0.1375 = a_4, \quad 0.04375 = b_4 = m_3$$

$$m_4 = \frac{-0.1375 + 0.04375}{2} = -0.046875$$

$$f(m_4) = -0.1953200 < 0$$

$$\Rightarrow -0.046875 = m_4 = a_5, \quad 0.04375 = b_5 = b_4$$

Hasta este punto, el intervalo $[a_5, b_5]$ es $[-0.046875, 0.04375]$.

La función tiene como raíces a los puntos $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 2$.

La única raíz contenida en el intervalo $[a_5, b_5]$ es $x_3 = 0$. Los intervalos, como $a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq b_0$ y $b_0 \geq b_1 \geq \ldots \geq a_0$, los intervalos sucesivos estarán contenidos en $[a_5, b_5]$. Por lo tanto, el método de bisección convergerá a la raíz $x_3 = 0$.

1 b). $f(a_0) = f(-3) = 3840 > 0$

$f(b_0) = f(-0.5) = -1.5820 < 0$

$$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-3 - 0.5}{2} = -1.75$$

$f(m_0) = f(-1.75) = -19.1924 < 0$

$\Rightarrow a_1 = a_0 = -3, \quad b_1 = m_0 = -1.75.$

Tenemos el intervalo $[a_1, b_1]$ igual a $[-3, -1.75]$, los intervalos sucesivos estarán contenidos en este, y la única raíz contenida en $[-3, -1.75]$ es $x_1 = -2$. Por lo tanto el método de la bisección convergerá a la raíz $x_1 = -2$.

2. Para la siguiente función, dar el intervalo donde el método de punto fijo converge.

$$g(x) = \frac{x^2-1}{3}$$

Una condición suficiente que garantiza la convergencia es que si $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en un intervalo alrededor de una raíz de la ecuación $x = g(x)$ y si se cumple que $|g'(x)| \leq 1$ para todo el intervalo, entonces x_k convergerá hacia la raíz x^*.

$$x = \frac{x^2-1}{3} = g(x)$$

$$\left|\frac{d}{dx} g(x)\right| \leq 1 \iff \left|\frac{d}{dx} \frac{x^2-1}{3}\right| \leq 1$$

$$\iff \left|\frac{2x}{3}\right| \leq 1$$

$$\iff |2x| \leq 3$$

$$\iff -3 \leq 2x \leq 3$$

$$\iff -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

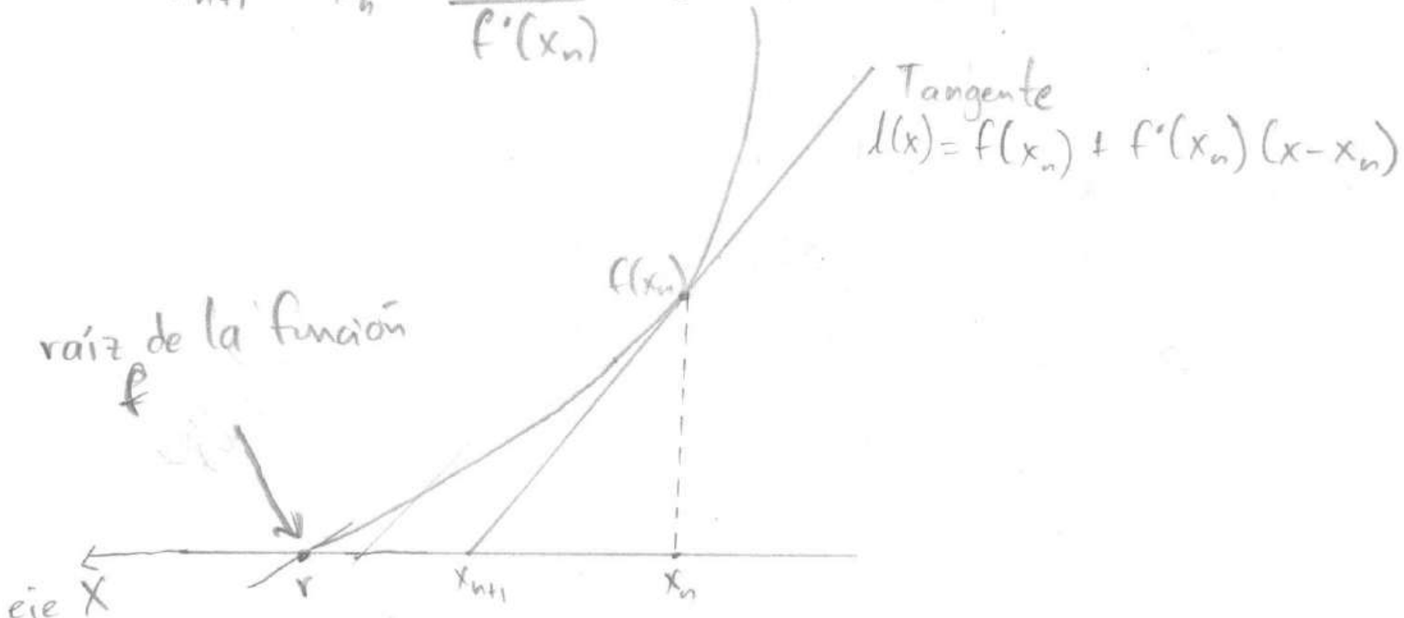
$$\iff x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

El intervalo donde el método de punto fijo converge es $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

3. Explicar geométricamente el método de Newton (o de forma equivalente, la iteración de Newton) para hallar ceros de funciones reales.

Tenemos està ecuación en el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \geq 0)$$



Linearizamos la función $f(\cdot)$ usando aproximación por polinomio lineal de Taylor alrededor del punto x_n, donde

$l(x_n) = f(x_n)$ y $l'(x_n) = f'(x_n)$.

En el método de Newton estamos construyendo la tangente a la curva f en el punto x_n, cercano a r, y encontramos el punto donde la linea tangente intersecta al eje x. A este punto lo llamamos x_{n+1}.

Entonces $l(x_n)$ lo igualamos a cero y despejamos x:

$$0 = l(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$\Rightarrow -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x - x_n$$

$$\Rightarrow x^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

A este valor de x^* lo llamamos x_{n+1}, y así sucesivamente se van encontrando los puntos. hasta que la distancia $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que la tolerancia.