Facultad de Ciencias, UNAM
Noviembre 2022-1

ANÁLISIS NUMÉRICO

Práctica No. 2

Solución a Sistemas de Ecuaciones Lineales

Prof. César Carreón Otañez
Ayud: Jorge Zavaleta Sánchez
Ayud: Isaí López Servín

Ciudad Universitaria
2021

1. Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) $\text{Rango}(A) = n$.
   (b) $\det(A) \neq 0$.
   (c) A tiene inversa.
2. Dada la siguiente norma
$$\|A\| = \sup\{\|A\bar{u}\| : \bar{u} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{u}\| = 1\}$$
   probar que $\|\cdot\|$ es norma consistente para $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$.
3. Demostrar:
   (a) Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, una norma es Inducida o Subordinada si se tiene:
$$\|A\| = \max_{\bar{x}\neq 0} \frac{\|A\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$$
   Con la definición anterior para norma matricial, demostrar:
$$\text{Cond}(AB) \leq \text{Cond}(A)\,\text{Cond}(B)$$
   con $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}$.
   (b) Dar un ejemplo donde la afirmación anterior no se cumpla para alguna norma matricial.
4. Propiedades de $\text{Cond}(A)$.
   Demostrar:
   (a) Para $I_n \in \mathbb{M}_{n\times n}$, $\text{Cond}(I_n) = 1$.
   (b) Para $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$, $\text{Cond}(A) \geq 1$.
   (c) Para $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ y $\alpha \neq 0$, $\text{Cond}(\alpha A) = \text{Cond}(A)$.

   Suponer una norma consistente.
5. Dada $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ con A no singular, ¿se cumple $\|A\| \neq 0$?, en caso afirmativo demostrar, en caso contrario mostrar un ejemplo.

   Sea
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 14 & 16 \\ -6 & -6 & -10 \end{bmatrix} \tag{1}$$
6. Para la matriz en (1) realizar el procedimiento completo de la factorización LU.
7. Para la matriz en (1) realizar el procedimiento completo de la factorización LU con pivoteo parcial.
8. Para la matriz en (1) realizar el procedimiento completo de la factorización LU con pivoteo total.
9. Suponga que se tiene la factorización LU de A una matriz no singular, ¿con dicha factorización cómo se puede resolver el sistema $A^T\bar{x} = \bar{b}$

10. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ "perfectamente bien condicionada", es decir, $\text{Cond}(A) = 1$, ¿cuáles de las siguientes matrices conservan la misma propiedad?.
    (a) cA, $c \in \mathbb{R}$
    (b) DA, donde D es una matriz diagonal y no singular.
    (c) PA, donde P es una matriz de permutación.
    (d) BA, donde B es una matriz cualquiera no singular.
    (e) A^{-1}, la inversa de A.
    (f) A^T, la transpuesta de A.
11. Clasificar las siguientes matrices como bien condicionadas y mal condicionadas, calculando las condición para cada una,
$$A = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
12. ¿Cuáles son las dos propiedades que una matriz A debe tener para aceptar la factorización de Cholesky?, dar un ejemplo de una matriz 3×3 y su factorización explícita.
13. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ tal que la suma de los elementos de cada columna es cero, demostrar que A es singular.
14. Sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ tal que $A^2 = 0$ (matriz cero). Demostrar que A debe ser singular.
15. Sea
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\epsilon \\ 1-\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$
    (a) ¿Cuál es el determinante de A?.
    (b) En aritmética de punto flotante con precisión simple, ¿cuál es rango de valores de ϵ para que el determinante sea cero?.
    (c) ¿Cuál es la factorización LU de A?.
    (d) En aritmética de punto flotante con precisión simple, ¿cuál es el rango de valores para ϵ tal que U se vuelve singular?.
16. Dado el sistema lineal
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$
con solución $\bar{x} = (1, 1)^t$. Transforme A ligeramente en
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$
y considere el nuevo sistema lineal
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$
Calcular la nueva solución mediante la aritmética de redondeo a cinco dígitos:

(a) ¿Cómo difiere de la solución real?.

(b) ¿Es A una matriz mal condicionada?.

(c) ¿Es A' una matriz mal condicionada?.

17. Demostrar:

(a) El producto de matrices triangulares inferior es triangular inferior.

(b) La inversa de una matriz triangular inferior no singular, es triangular inferior.

18. Demostrar que las matrices en (2) y (3) son definidas positivas con el criterio visto en clase.

19. Sea A dada como:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

escribir el procedimiento completo para factorizar A en $A = LDL^t$, donde D es una matriz diagonal y L una matriz triangular inferior.

20. Sea A dada como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \tag{3}$$

escribir el procedimiento completo para factorizar A en $A = LL^t$ con L una matriz triangular inferior.

21. Sea A una matriz definida positiva,

(a) Mostrar que A es no singular.

(b) Mostrar que A^{-1} es definida positiva.

(c) Los elementos de la diagonal de A son positivos.

22. Determina cuales de las siguientes matrices son, simétricas, singulares, diagonal dominante y/o definida positiva.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

23. Obtener α de modo que A sea definida positiva para

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

24. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Calcular los valores de α para los cuales

(a) A es singular.

(b) A es estrictamente diagonal dominante.

(c) A es simétrica.

(d) A es definida positiva.

Computer Problems

25. Dado el sistema $Ax = b$:

 (a) Resolver con eliminación Gaussiana para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

 (b) Usar Factorización LU de A para resolver el sistema $Ay = c$, donde:

$$c = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

26. Sean A y b dados como sigue:

 (a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -8 & 4 & -7 \\ 12 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 19 \\ -19 \end{bmatrix}$$

 (b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & 16 & -17 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & -3 \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ -2.5 \\ 15 \\ 10.5 \end{bmatrix}$$

 (c)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 & 2 & 3 \\ 12 & 13 & 0 & 10 & 3 \\ -8 & -8 & 5 & -11 & 4 \\ 16 & 18 & -7 & 20 & 4 \\ -4 & -9 & 31 & -31 & -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 34 \\ 93 \\ -33 \\ 131 \\ -58 \end{bmatrix}$$

 Resolver cada sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ con las rutinas:

 - Factorización LU.
 - Factorización LU con pivoteo parcial.
 - Factorización LU con pivoteo total.

 Comparar los resultados.

27. Escribir una rutina para la estimación de la Condición de A. Se puede usar la norma 1 o la norma infinito para el cálculo. Se deberá calcular $\|A\|$ y estimar $\|A^{-1}\|$. Como se comento en clase, una forma de estimar $\|A^{-1}\|$ es elegir un vector $\bar{y}$ tal que el cociente $\|\bar{z}\|/\|\bar{y}\|$ es grande, donde $\bar{z}$ es la solución de $A\bar{z} = \bar{y}$.

 Elegir $\bar{y}$ como la solución del sistema $A^T\bar{y} = \bar{c}$, donde $\bar{c}$ es el vector que tiene por componentes ± 1, donde el procedimiento para elegir el signo de dicha componente sea de forma aleatoria. Usando la factorización $A = LU$, el sistema $A^T\bar{y} = \bar{c}$ es resuelto a su vez por el sistema $U^T\bar{v} = \bar{c}$ y $L^T\bar{y} = \bar{v}$.

28. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Qué sucede cuando se usa Eliminación Gaussina con pivoteo parcial?.

(b) Usar Eliminación Gaussina con pivoteo parcial para resolver sistemas de varios tamaños (al menos 5) con vectores b elegidos por cualquier criterio. Describir como se comporta la condición de la matriz.

(c) Escribir una rutina que factorice la matriz (LU) con pivoteo total.

29. Usar Eliminación Gaussiana sin pivoteo para resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\epsilon \\ 2 \end{bmatrix}$$

para $\epsilon = 10^{-2k}$, con $k = 1, \cdots, 10$. La solución exacta es $x = [1\ 1]^T$, ¿cómo se comporta la solución conforme ϵ decrece?.

30. Sea el sistema $A\bar{x} = \bar{b}$ dado por A igual a

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

tomando $\bar{b} = [1, 1, \cdots, 1]^T$. Para $n = 100$ resolver por:

(a) Factorización LU.

(b) Crear una rutina (tipo banda) para la estructura de la matriz y resolver. Comparar y comentar 30a y 30b.

(c) Verificar que la matriz A tiene una factización de la forma $A = RR^T$ donde R es una matriz triangular superior de la forma

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Crear una rutina con la factorización RR^T. Para $n = 1000$ resolver el sistema. Comparar y resolver 30a,30b y 30c.

31. Programar la Factorización de Cholesky dada por:

    (a) $A = LL^T$, L triangular inferior.

    (b) $A = \hat{L}\hat{D}\hat{L}^T$, $\hat{L}$ triangular inferior y $\hat{D}$ diagonal.

32. Encontrar la factorización de Cholesky de A para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

    Utilizando:

    (a) $A = LL^T$

    (b) $A = \hat{L}\hat{D}\hat{L}^T$

Número de integrantes: a lo más 4.

Formato de Entrega:

- Los ejercicios correspondientes a la primera parte, deberán ser escaneados o fotografiados y anexar todo en un archivo pdf con imágenes nítidas. Cualquier hoja que no tenga una vista nítida no será calificada.
- Cada programa realizado debe llevar comentarios, estar indentados y tener los nombres del/los creador/es, el nombre del archivo debe coincidir con el número del ejercicio (p.e: ejercicio22.***).
- **Si se llegan a encontrar códigos iguales se anulara la calificacin de todos lo integrantes en el tema correspondiente**.

Fecha de Entrega: **24 Noviembre**.