$\boxed{4}$ Solución a Sistemas de Ecuaciones No-Lineales

② $A\bar{x}=\bar{b}$ $\quad A\in M_{n\times n}$ $\quad\cdots\quad$ LU, LL^t

③ $\underbrace{A\bar{x}=\bar{b} \quad A\in M_{m\times n}}_{\text{linealidad}}$ $\quad\cdots\quad$ QR ec. norm.

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=1\\ -x_1+x_2&=-1 \end{aligned}$$

$$\cos(y^3)e^x + \ln(x+1) = 0$$

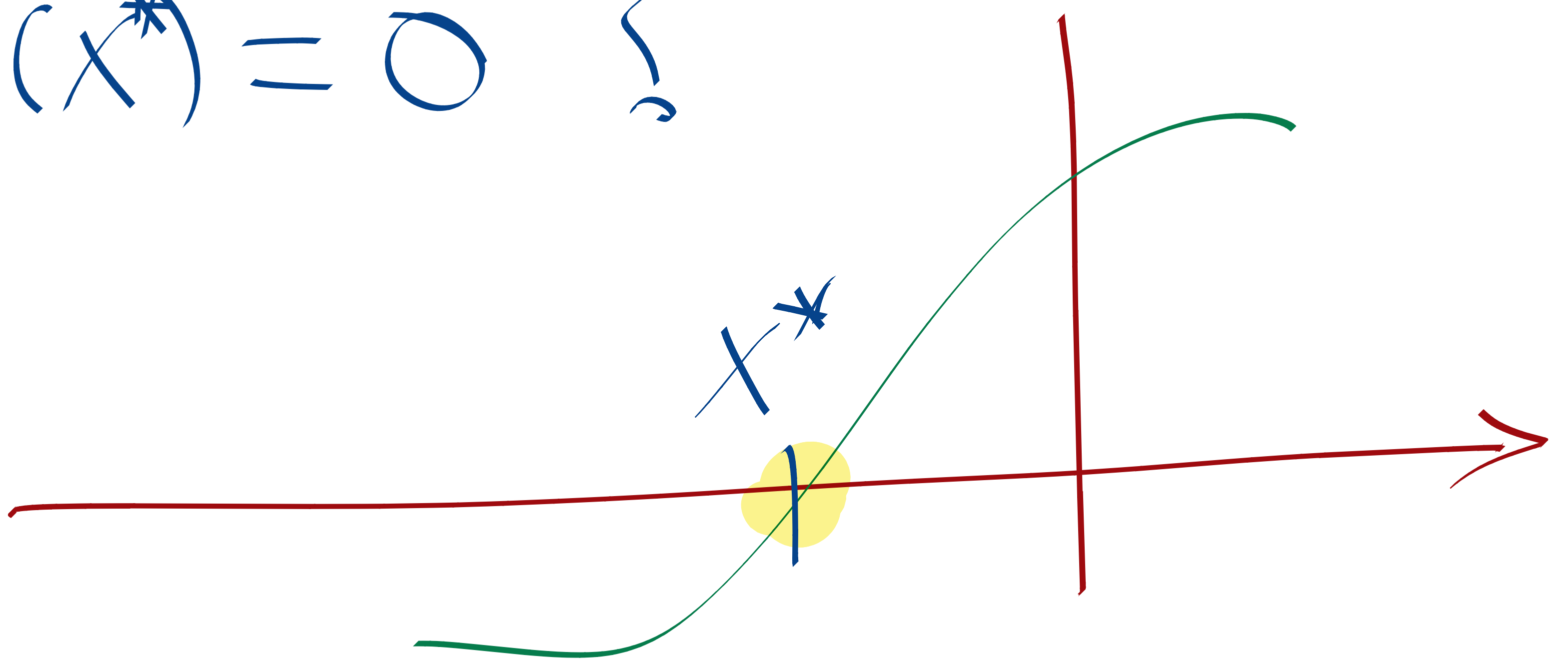
$$x^2 + y - 1 = 0$$

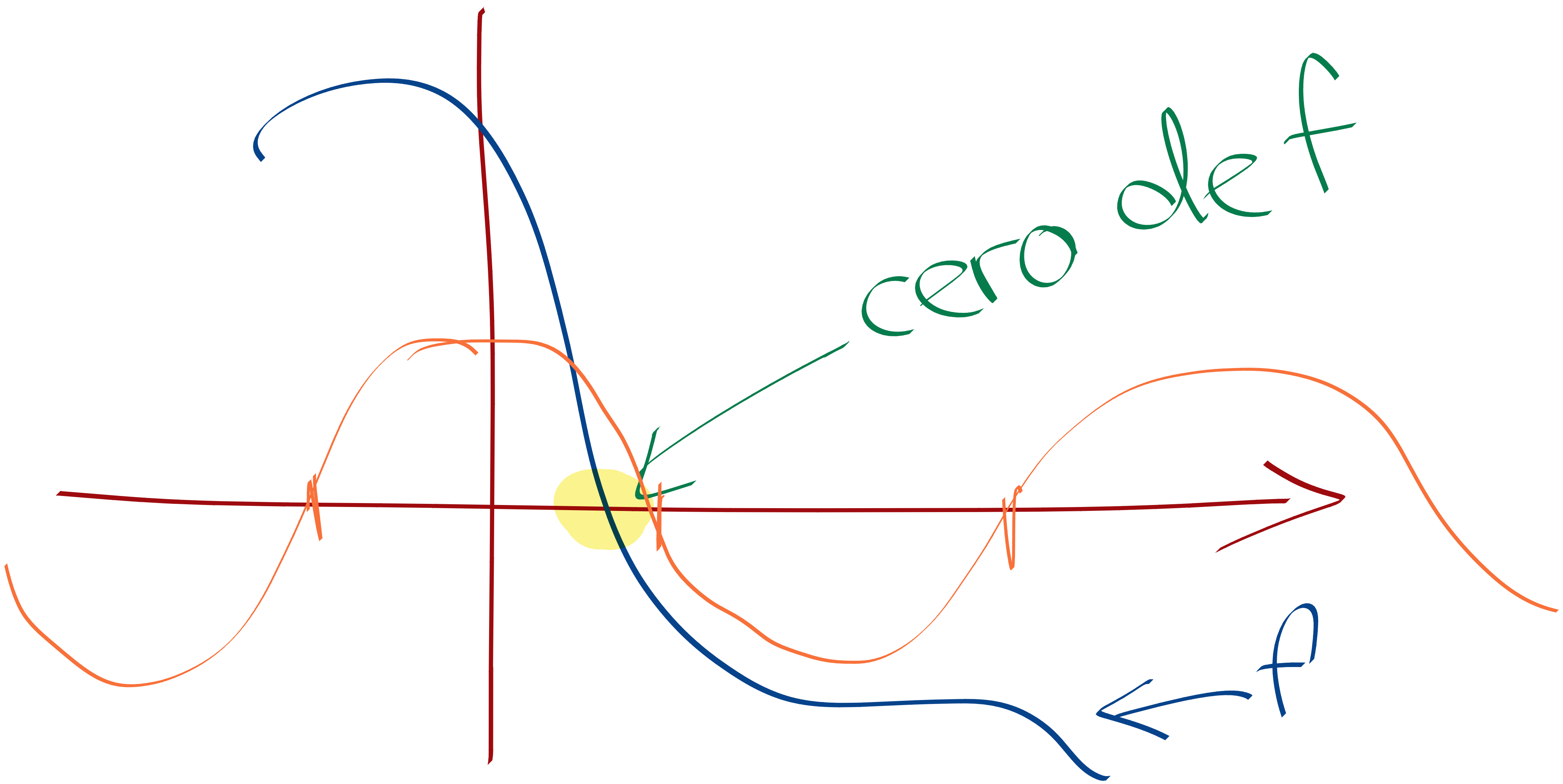
i) Real: una variable

ii) Multivaluado: varias variables

Resolver ecuaciones no lineales en una variable, es hallar cero de funciones reales.

Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ¿existe x^* tal que $f(x^*) = 0$?

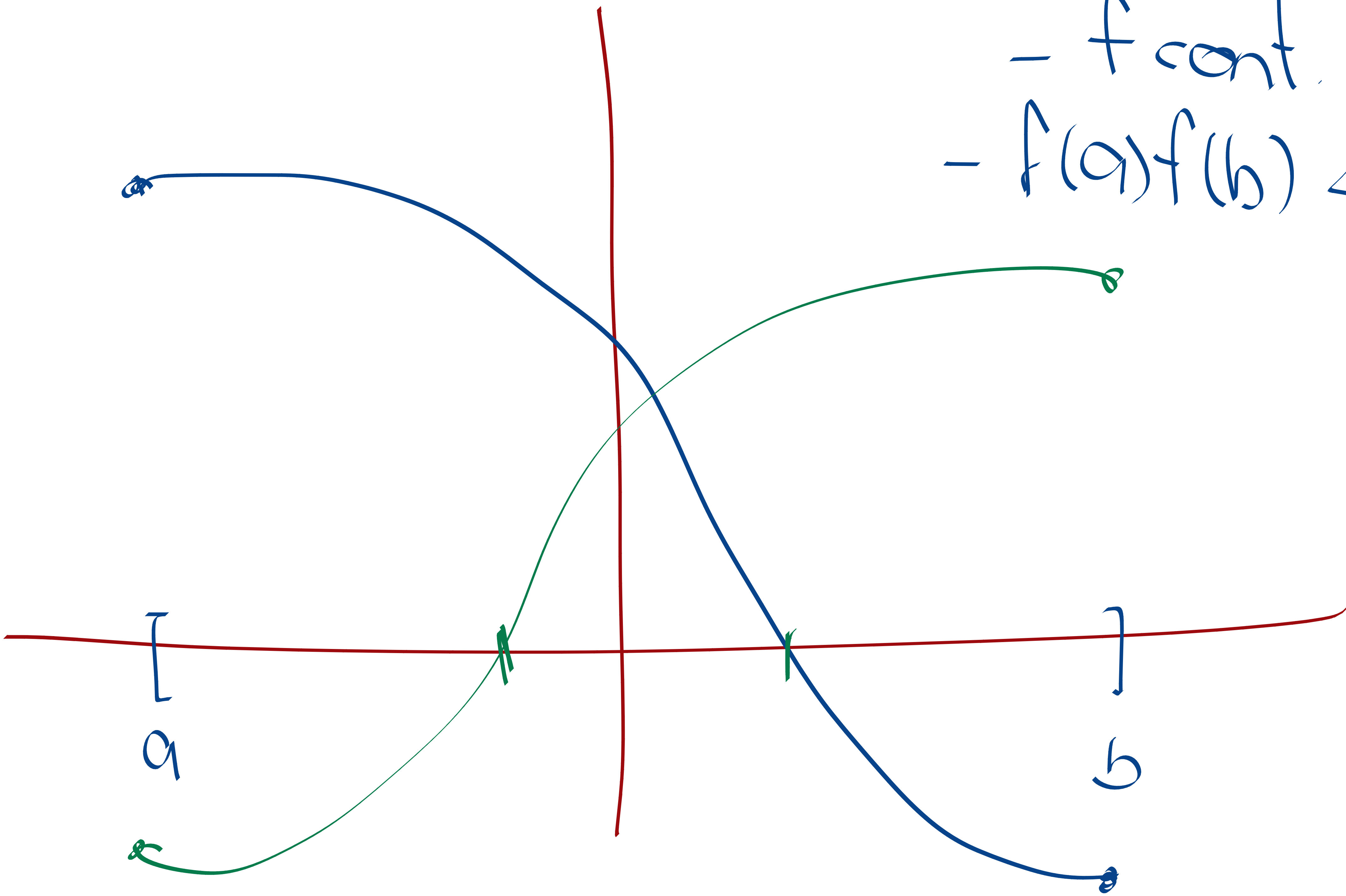




Si $f(x) = x^2 - 2 = 0$ $\quad x = \pm\sqrt{2}$

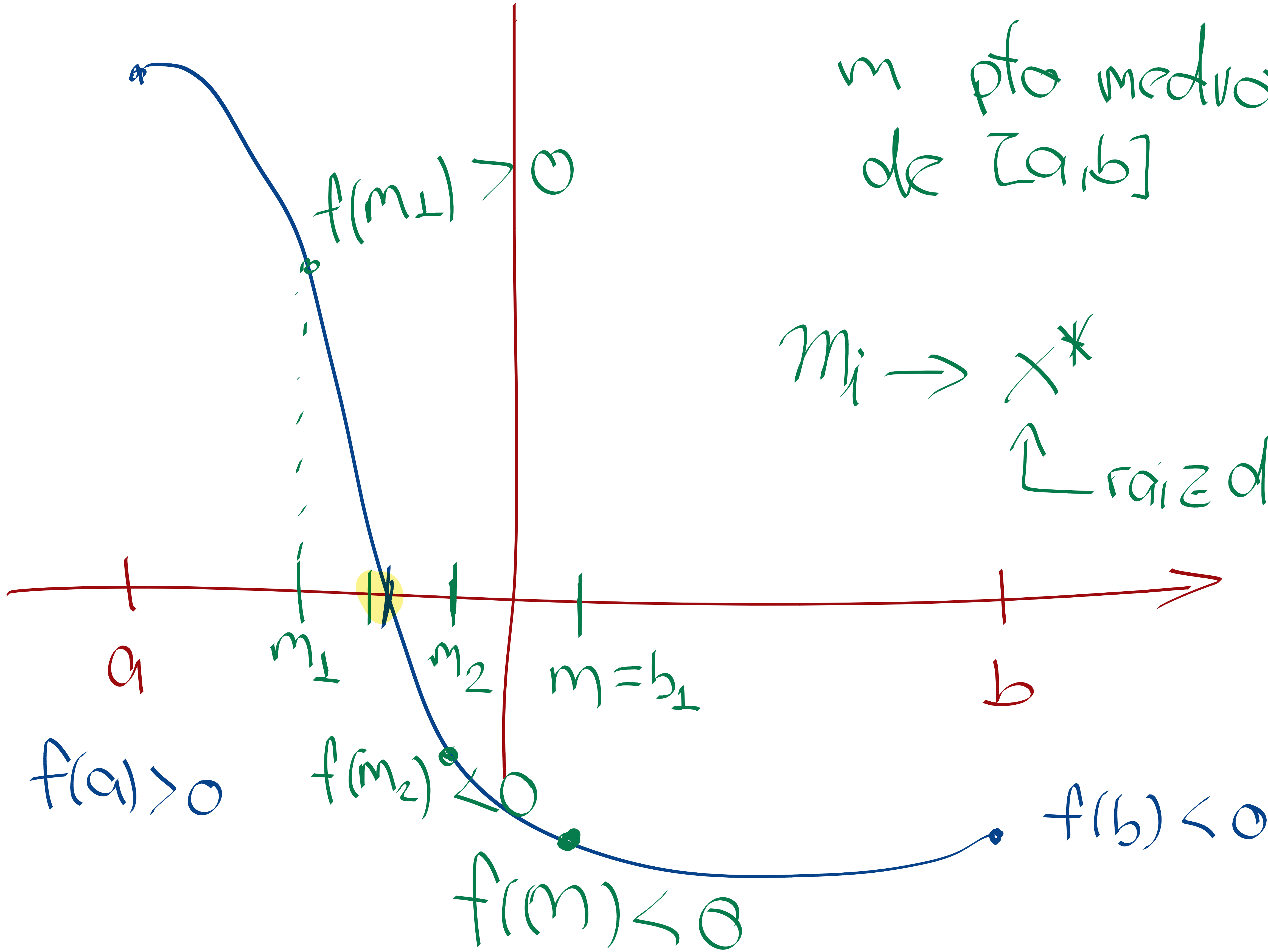
Método de Bisección

- f cont.
- $f(a)f(b) < 0$



m pto medio de [a,b]

$m_i \to x^*$ ← raiz de f



Punto medio en $[a,b]$:

$$m = a + \frac{b-a}{2}$$

Criterio de paro para el método:

longitud de $[a,b]$

$$b - a < tol$$

tolerancia

$$= 10^{-8} - 10^{-6}$$

$$\Rightarrow a \approx b \approx x^* \text{ raíz}$$

Pseudo Código:

Input: f continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b)<0$

while $(b-a) > tol = 10^{-8}$

$$m = a + \frac{b-a}{2}$$

If $\text{signo}(f(a)) == \text{signo}(f(m))$

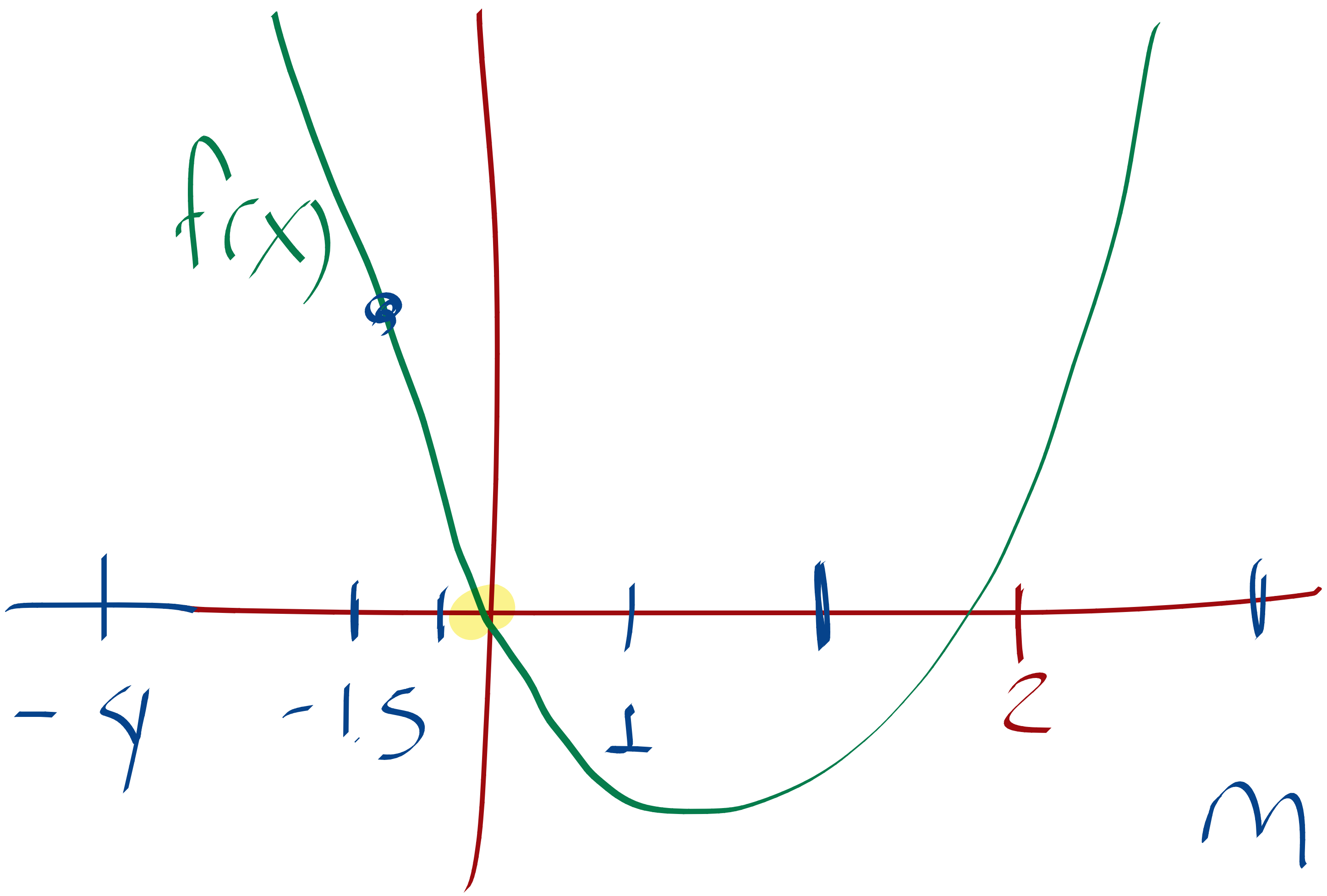
$a = m$

else

$b = m$

Output: m (último $m \approx x^*$ aproximación a la raíz)

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 4\,\text{sen}(x)$



$a = -4$

$b = 1$

$f(-4) = 12.97 > 0$

$f(1) = -2.36 < 0$

$m = -1.5$

$f(m) = f(-1.5) = 6.23 > 0 \Rightarrow$

Nuevo intervalo: $a = m = -1.5$

$b = 1$

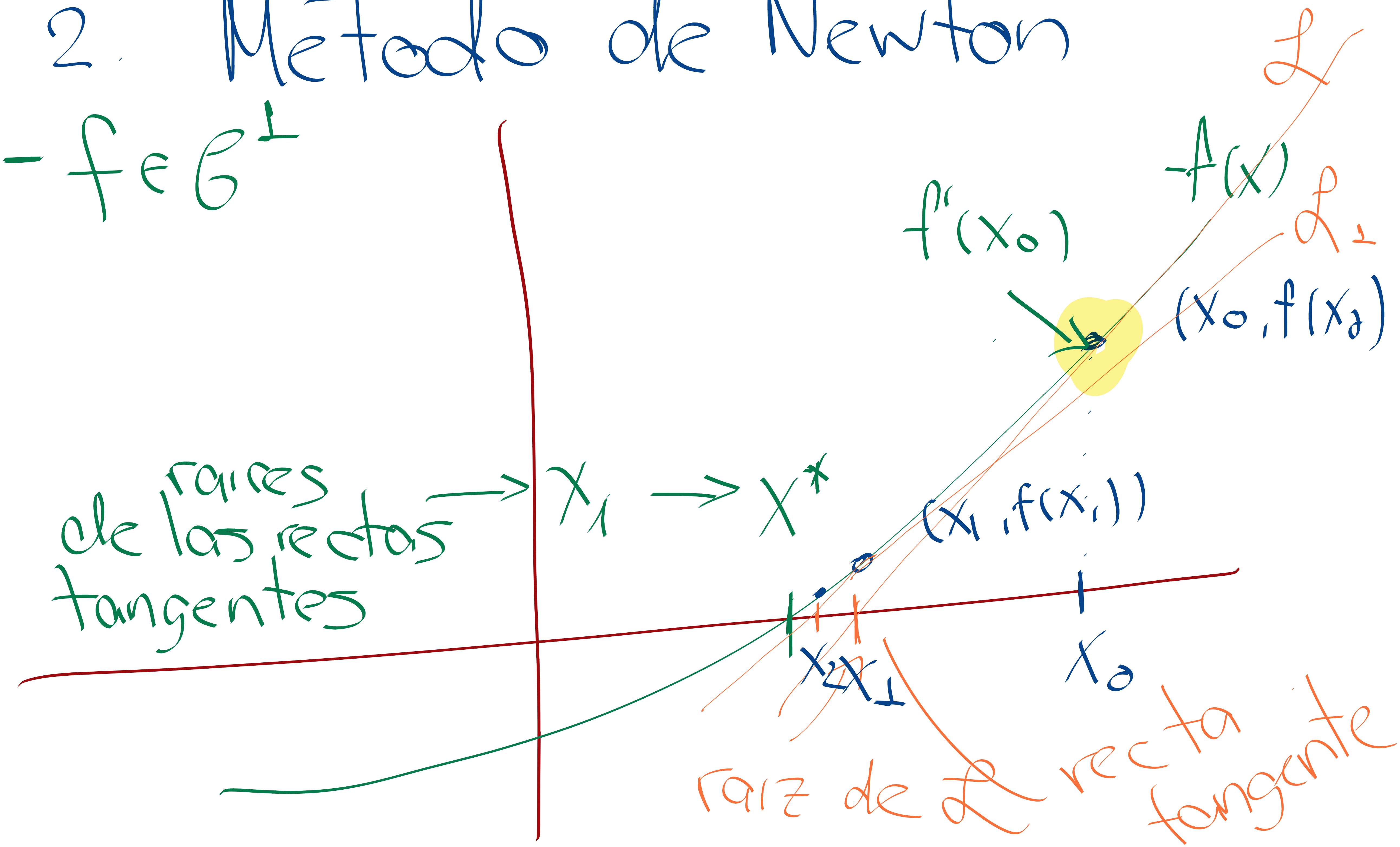
$m = -0.25 \qquad f(m) = 1.05 > 0$

$\Rightarrow \quad a = m = -0.25$

$b = 1$

2. Método de Newton

- $f \in C^1$



Sea $f \in C^1$, x_0 punto inicial.
Construir la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ recordando $m = f'(x_0)$ es la pendiente de dicha recta.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Ec. Recta con pendiente m y que pasa por (x_0, y_0)

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Raíz de la recta

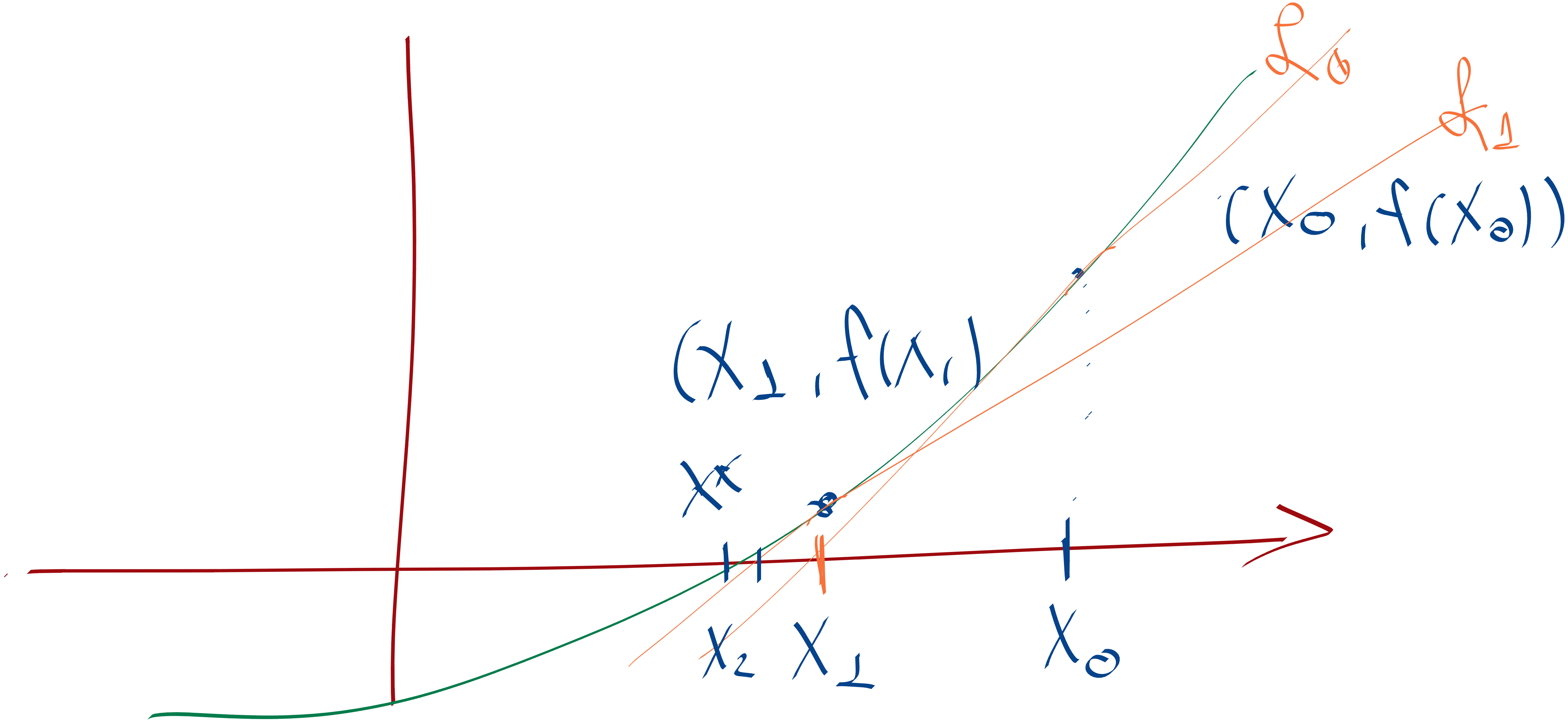
$$\Rightarrow 0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

raíz de la recta tangente $\Rightarrow$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$



Repetimos el proceso en el punto $(x_1, f(x_1))$

Para la iteración k-ésima

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Iteración de Newton

Donde, si x_k converge, entonces

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$$ raíz de f.

Pseudo Código Newton

Input: $f \in C^1$, x_0, $tol = 10^{-8}$, $k = 0$

while $|x_{k+1} - x_k| > tol$

If $f'(x_k) == 0$

Detener

Else

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$k = k+1$

Output: x_k (aproximación a raíz de f)

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 4\,\text{sen}(x)$

$$f'(x) = 2x - 4\cos(x)$$

Sea $x_0 = -3$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -3 - \frac{9.56}{-2.04} = 1.68$$

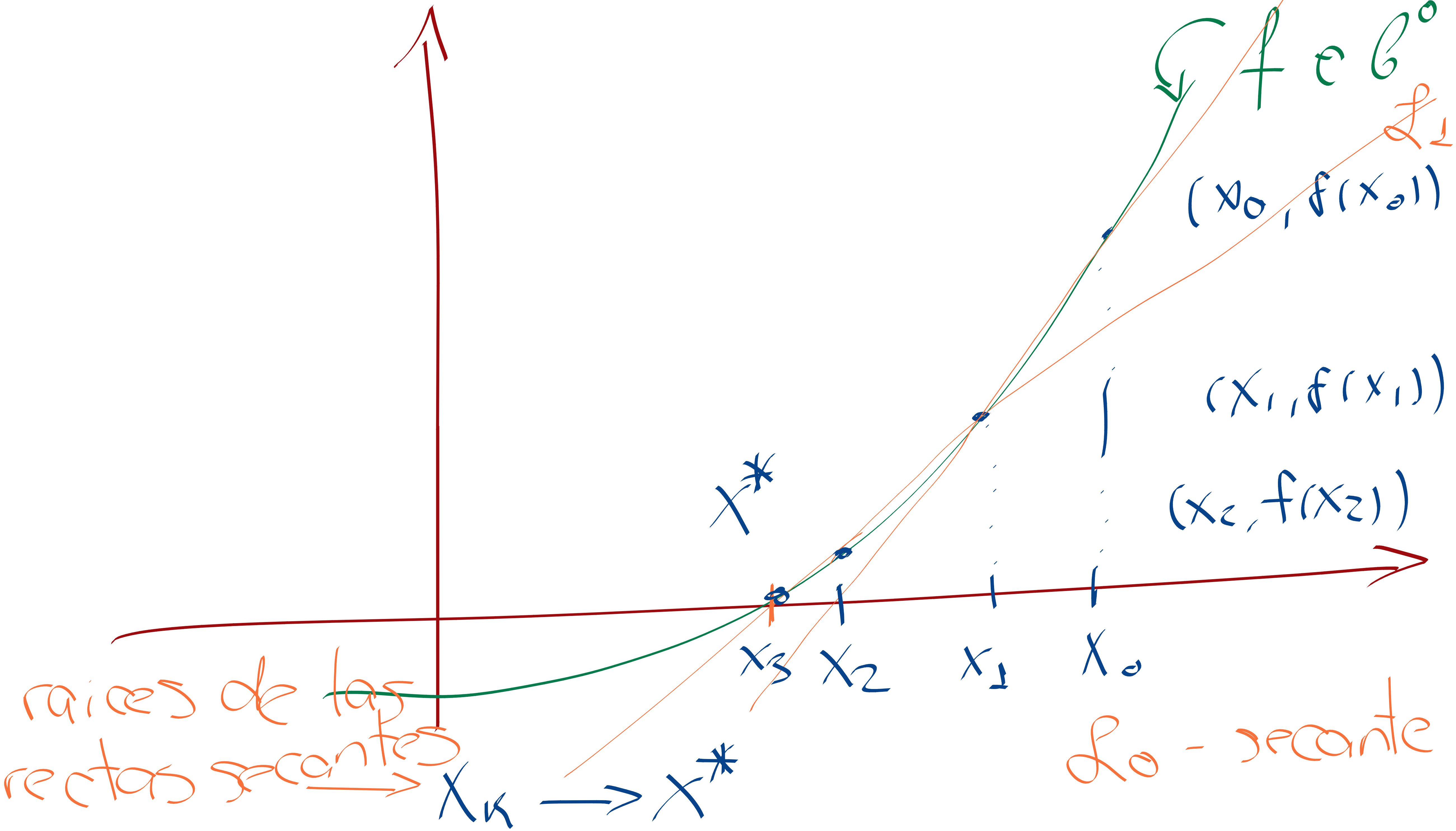
$$x_1 = 1.68$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.68 - \frac{-1.12}{3.79} = 1.98003$$

$$\ldots \quad x_4 = 1.9337544 \approx x^*$$

$$f(x_4) = 0.0000035 \approx 0$$

3. Método de la Secante



$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{Newton}$$

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_1)}$$

secante

Ec. de una recta, que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1)

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1)$$

$$y = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_1) + y_1$$

el cero de la recta:

$$0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) + y_1$$

despejamos x

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_1) = -y_1$$

$$x = x_1 - y_1 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$$

$$\boxed{x_2 = x_1 - f(x_1)\,\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}}$$

Repitiendo para los puntos:

$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Pseudo Código:

Input: f continua, x_0, x_1 puntos iniciale

While $|x_k - x_{k+1}| > tol = 10^{-8}$

If $f(x_k) - f(x_{k-1}) = 0$

DETENER

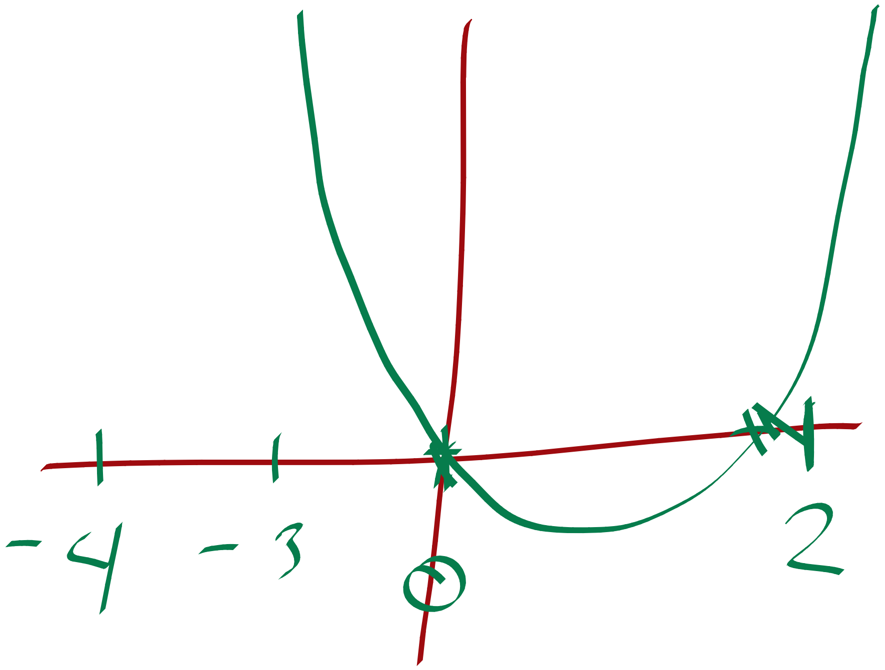
Else

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$k = k+1$

Output: x_k (aproximación a raíz de f)

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 4\,\text{sen}(x)$



$x_0 = -4 \qquad x_0 < x_1$

$x_1 = -3$

$f(x_0) = 12.97$

$f(x_1) = 9.56$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) * \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = -0.1937$$

Actualizamos datos

$$x_0 = x_1, \qquad x_1 = x_2$$

$x_1 = -0.1937$, $f(x_1) = 0.8078$

$x_0 = -3$, $f(x_0) = 9.56$

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = 0.0651$$

$f(x_3) = -0.255$

$x_k = 0.065$

$x_{k-1} = 0.0028$

$x_{k+1} = -0.0000485 \to 0$

$f(x_{k+1}) = 0.000194 \to 0$

5. Punto Fijo

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g tiene un punto fijo x^*, si x^* cumple con:

$$\boxed{g(x^*)} = \boxed{x^*}$$

Ejemplos:

a) $g(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

a.) $g(x) = x^2$ $\begin{cases} g(1) = 1^2 = 1 \\ g(0) = 0^2 = 0 \end{cases}$

i.) $g(x) = x^{2n}$ $\longrightarrow$ $x^* = 1$, $x^* = 0$ ptos fijos

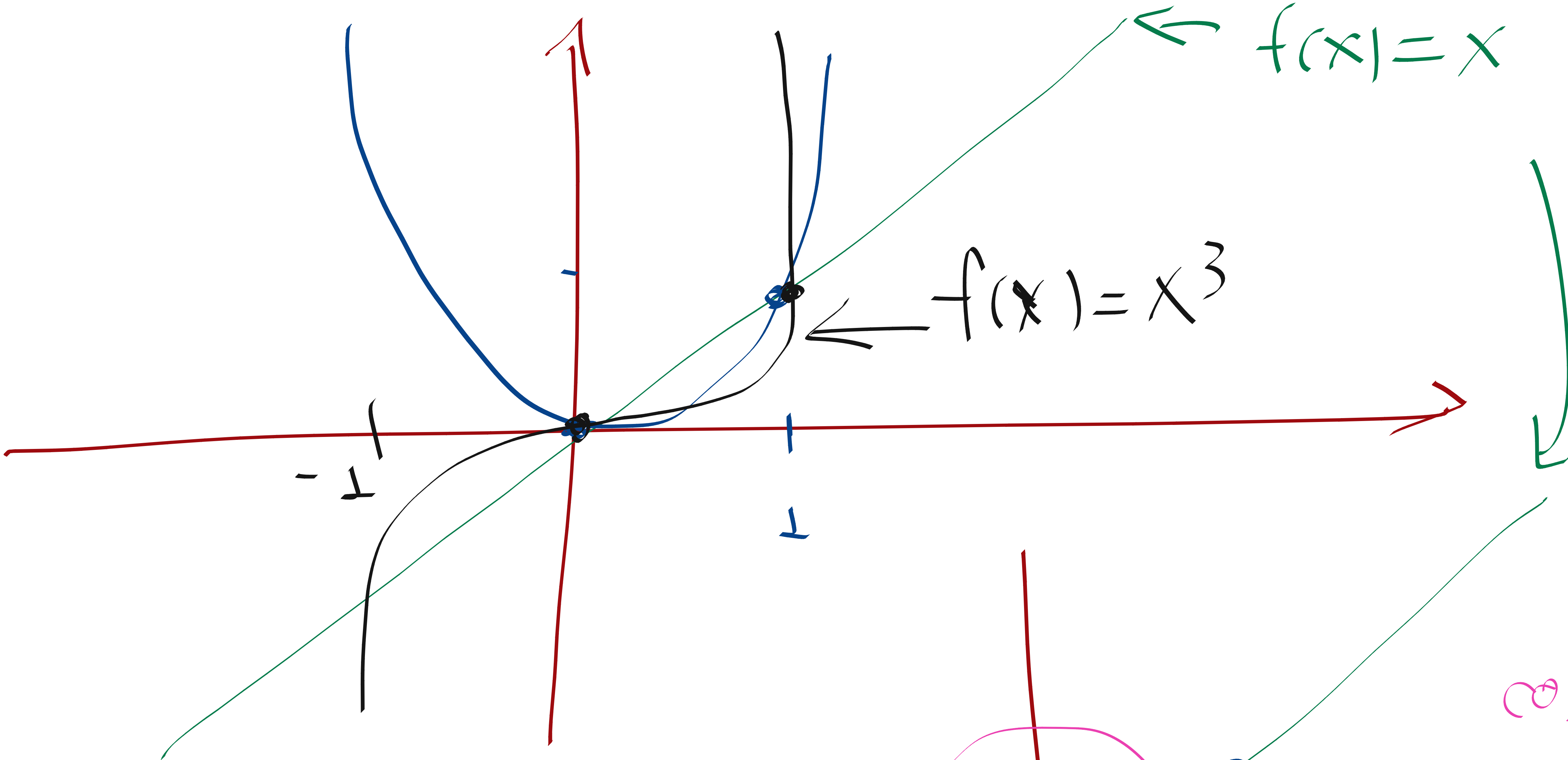
$$g(x) = x^{2n+1}$$

$g(x) = x^3 \longrightarrow$ $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$

$1^3 = 1$

$g(x) = 0^3 = 0$

$(-1)^3 = -1$

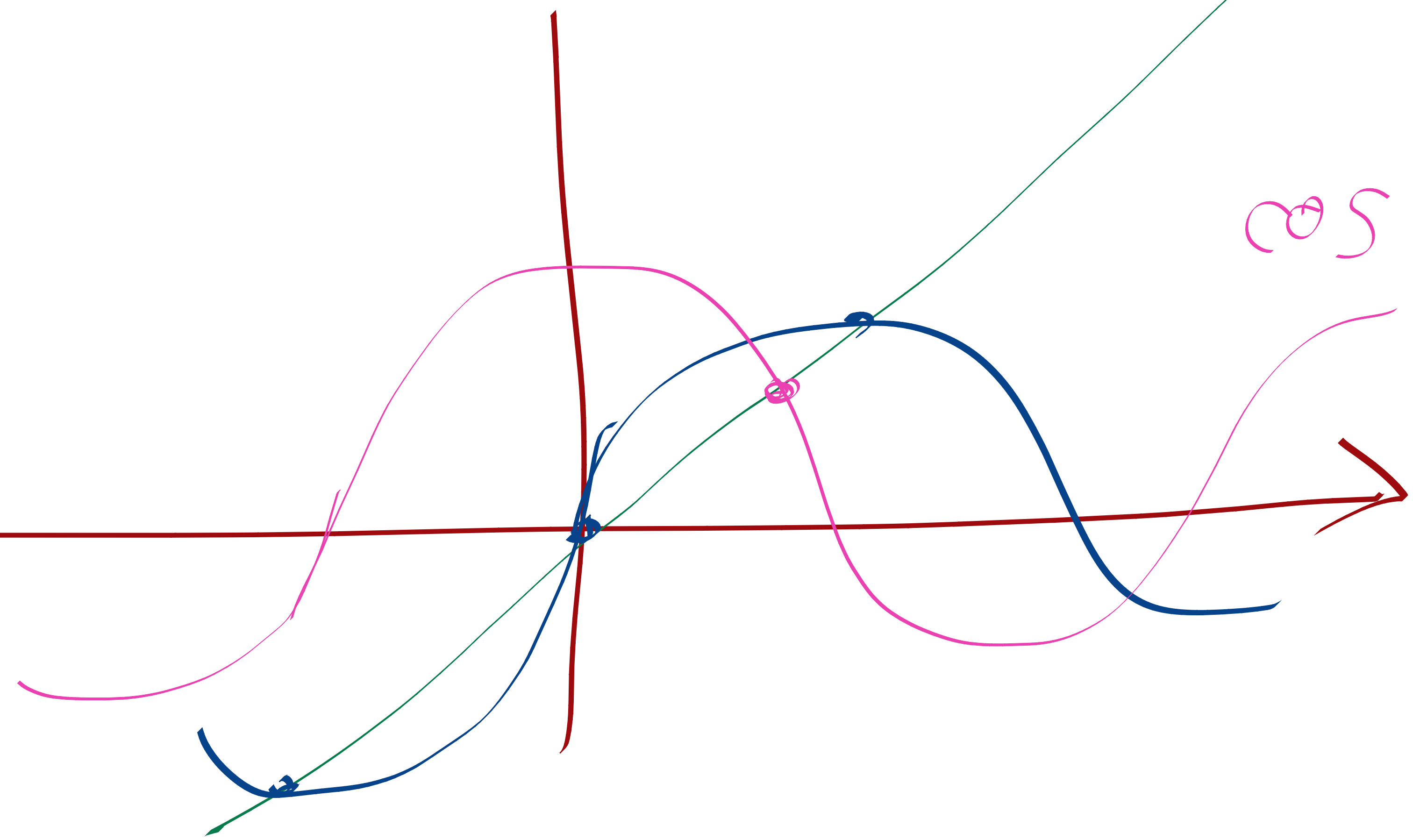


$\cos(x) = x$

$\text{sen}(x) = x$

$\boxed{\text{sen}(x) - x} = 0$

$f(x) = 0$



Problema: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hallar x^* tal que $f(x^*) = 0$

Si podemos "descomponer" a f como: $\boxed{f(x) = g(x) - x}$ p.a. función g, entonces el cero de f x^* es un punto fijo de g.

$$f(x^*) = 0 \Rightarrow g(x^*) - x^* = 0$$

x^* pto. fijo de g $\Leftarrow$ $g(x^*) = x^*$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - x - 2$, con $x^* = 2$, $x^* = -1$.

$$\boxed{f(x) = g(x) - x}$$

Para encontrar g, igualamos a cero y "despejamos" a x.

$$f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - x - 2 = 0}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{g(x) = x^2 - 2} \qquad g(x) - x = 0$$

Punto de g

Para $\boxed{x^* = 2}$

$$g(2) = 4 - 2 = 2$$

Para $\boxed{x^* = -1,}$ $g(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2$

$$= -1$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \implies x^2 = x + 2$$

$$\implies \underline{x} = \pm\sqrt{x+2}$$ podemos tomar

g como $g_1(x) = \sqrt{x+2}$

$x^* = 2 \implies g_1(2) = \sqrt{4} = 2$ ✓

$x^* = -1 \implies g_1(-1) = \sqrt{1} = 1$ ✗

$g_2(x) = -\sqrt{x+2}$ $\quad g_2(4) = -4$ ✗

$g_2(-1) = -1$ ✓

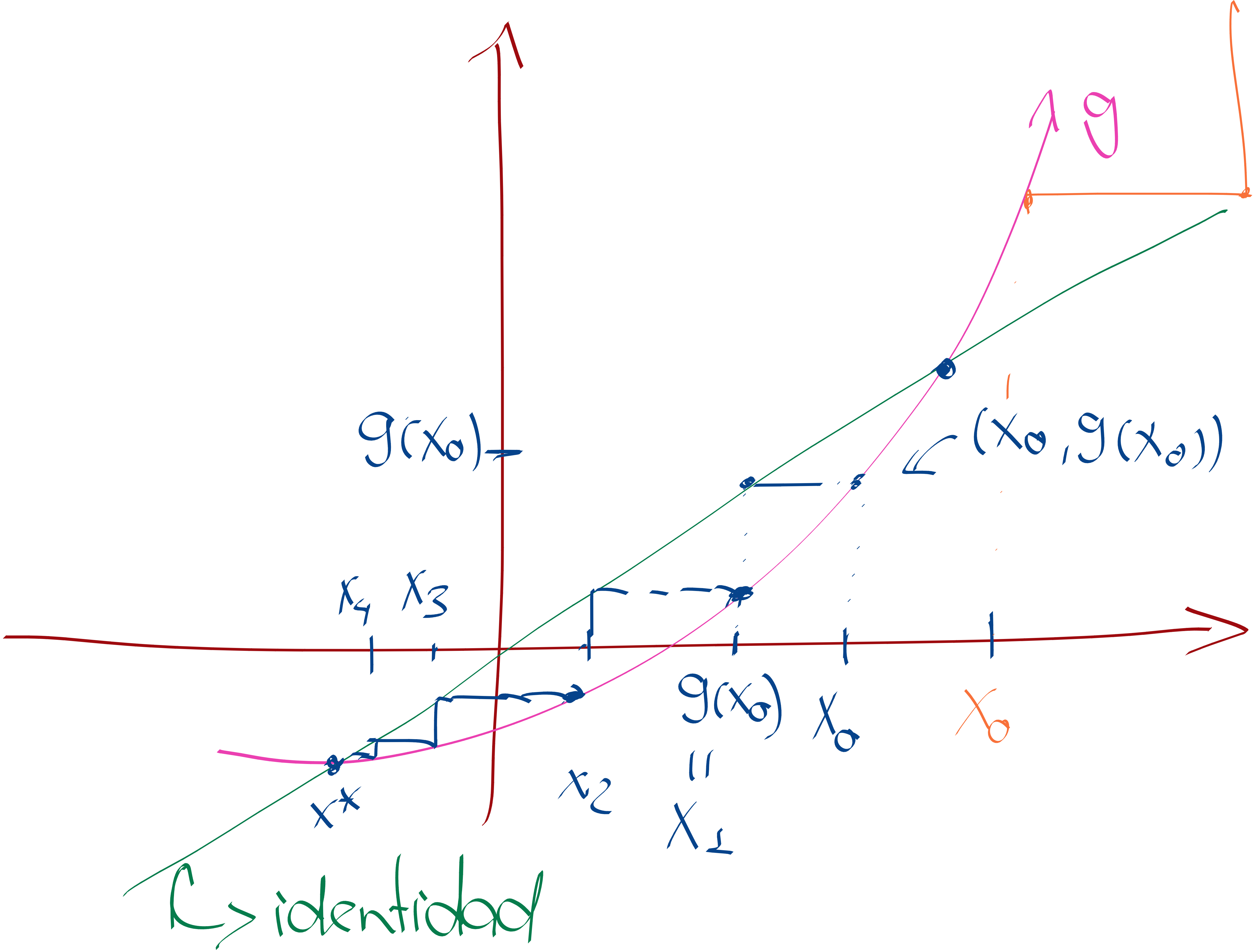
$x^2 - x - 2 = 0, \quad x^2 = x + 2$

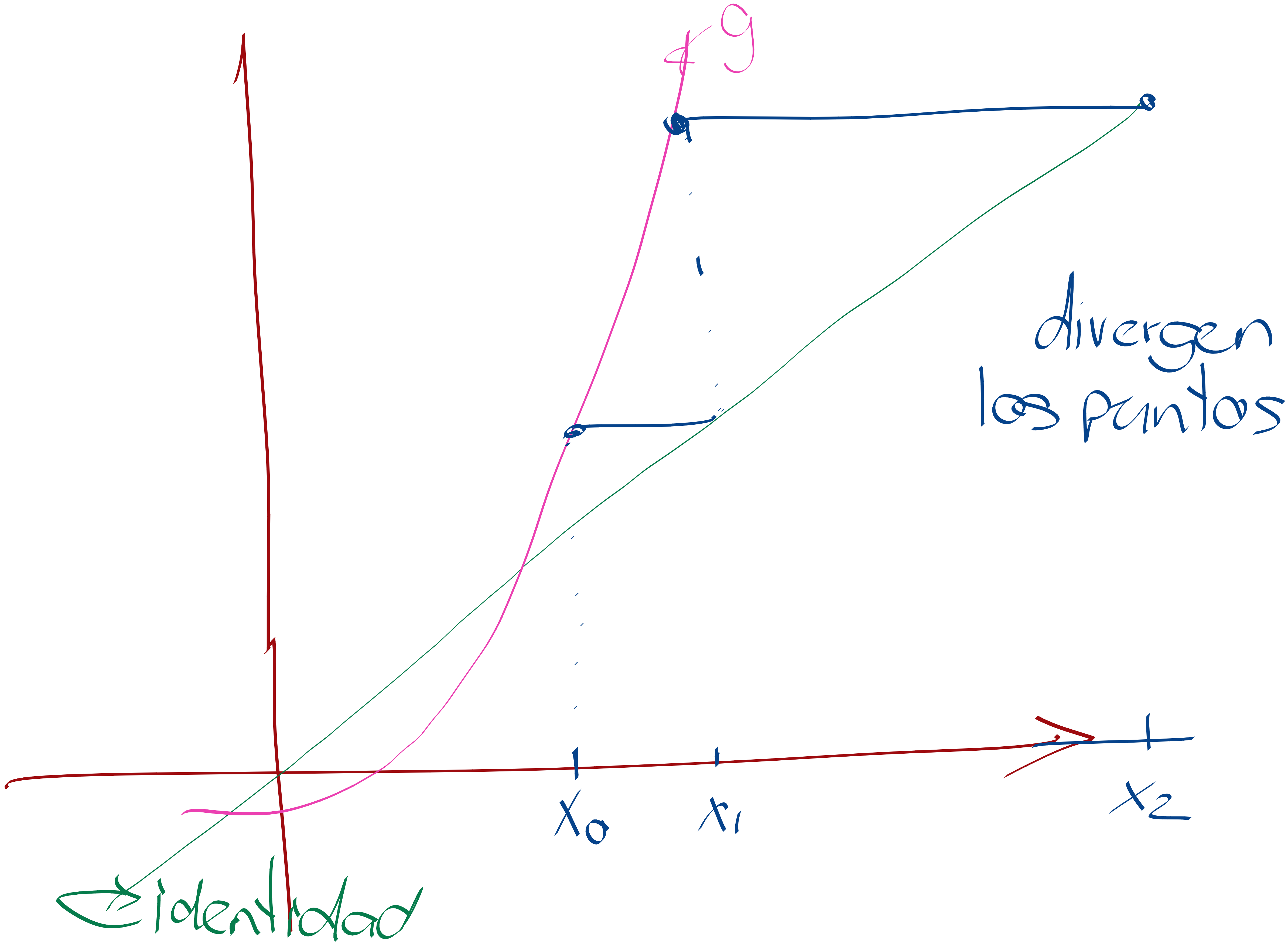
$\Rightarrow \quad \underline{x} = 1 + \frac{2}{x} \qquad \boxed{x \neq 0}$

$g_3(x) = 1 + \frac{2}{x}$

$g_3(2) = 2$ ✓

$g_3(-1) = 1 - 2 = -1$ ✓


g
$(x_0, g(x_0))$
$g(x_0)$
x_4 x_3
$g(x_0)$
$\shortparallel$
x_1
x_0
x_0
x_2
x^*
↳ identidad


g
divergen
los puntos
x0
x1
x2
identidad

Método de Punto Fijo

$$\boxed{x_{k+1} = g(x_k)}$$

Pseudo Código:

Input: g función cont. y x_0 pto inic.

while $|x_k - x_{k+1}| > tol$

If $|g'(x_k)| \geq 1$

DETENER

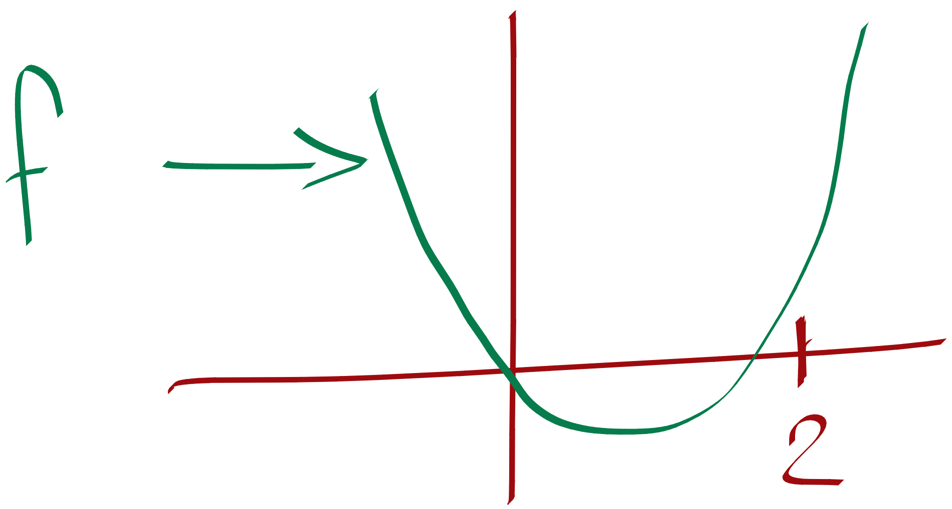
Else

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

$k = k+1$

Output: x_k (punto fijo de g)

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 4\,\mathrm{sen}(x)$

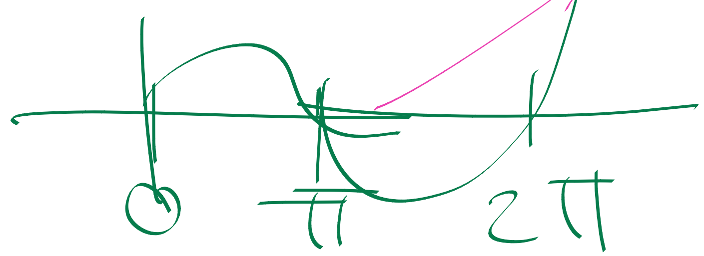


$$x^2 - 4\,\mathrm{sen}(x) = 0$$

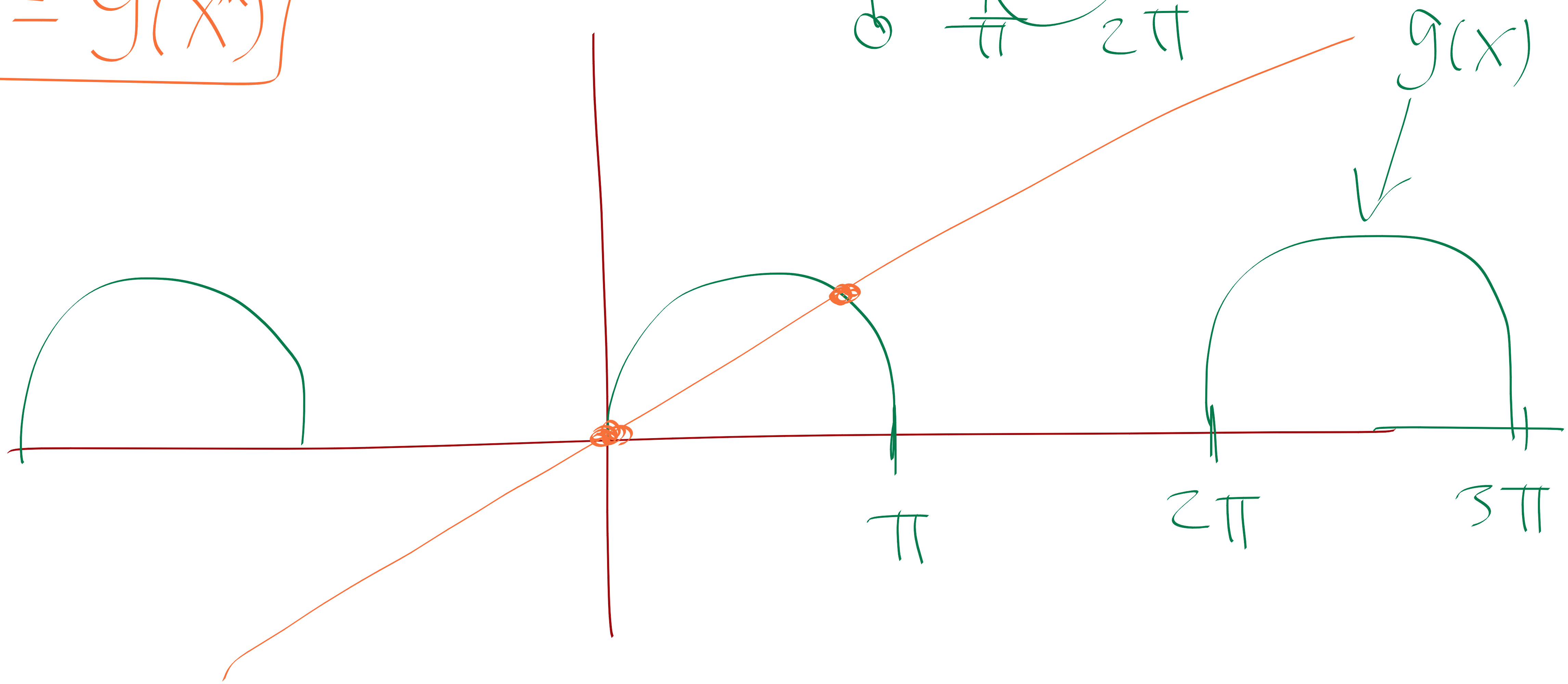
"despejar"

$$\Rightarrow x^2 = 4\,\mathrm{sen}(x) \Rightarrow x = \pm\sqrt{4\,\mathrm{sen}(x)}$$

$$x = 2\sqrt{\mathrm{sen}(x)} \qquad g(x) = 2\sqrt{\mathrm{sen}(x)}$$



$$\boxed{x^* = g(x^*)}$$



$$x_0 = \pi/2 \Rightarrow g(x_0) = 2\sqrt{\operatorname{sen}(\pi/2)}$$

$$g(x_0) = 2 = x_1$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow g(2) = 2\sqrt{\operatorname{sen}(2)}$$

$$= 1.9071 = x_2$$

$$x_2 = 1.9071 \Rightarrow g(1.9071) = 1.9431$$

$$= x_3$$

$$x_3 = 1.9431 \Rightarrow g(x_3) = 1.9302 = x_4$$

$$x_4 = 1.9302 \Rightarrow g(x_4) = 1.9350 = x_5$$

Bisección, Newton, Secante, Pto Fijo

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x^* \in \mathrm{Dom}(f)$$

$$f(x^*) = 0$$

Análisis Error y convergencia

Si denotamos por $\boxed{e_k}$ el error cometido en la k-ésima iteración, lo denotamos como:

$$\boxed{e_k = x_k - x^*} \longrightarrow 0$$

x_k = iteración k-ésima del método

x^* = raíz de f.

Diremos que el método converge con tasa de convergencia $\boxed{r}$ si

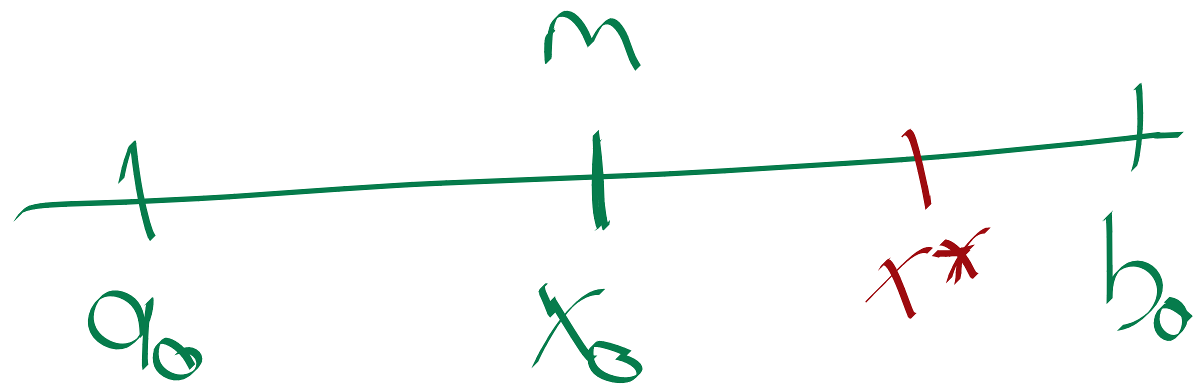
$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = c, \qquad c \neq 0.$$

Casos especiales:

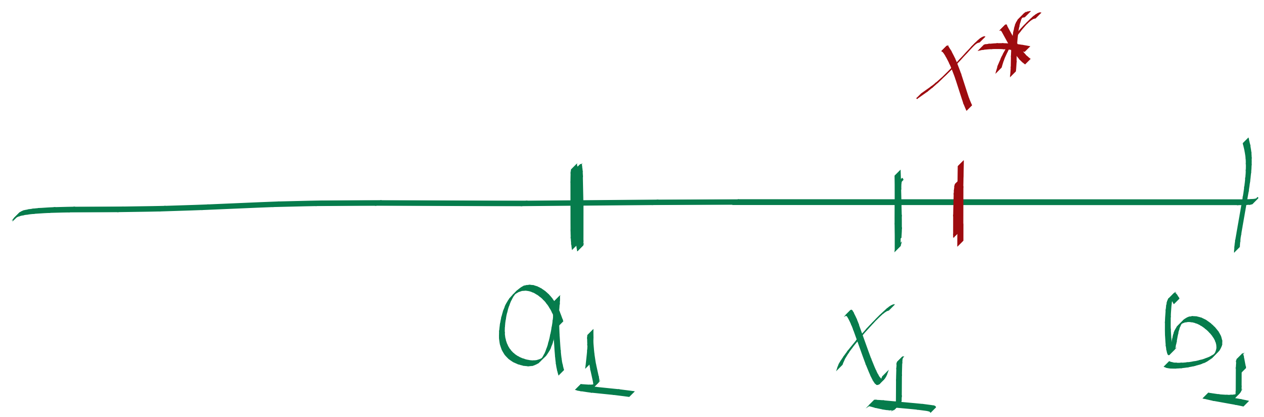
-) Si $r=1$ y $0<c<1$, la convergencia del método es lineal.
-) Si $1<r<2$, la convergecià del método es superlineal
-) Si $r=2$, la convergencia del método es cuadrática.

Bisección

$$|e_0| = |x_0 - x^*|$$



$$|e_1| = |x_1 - x^*|$$



$$\vdots$$

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$$

$$|e_k| = |x_k - x^*|$$

$$|e_1| = |x_1 - x^*| \leq b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$$

$$|e_0| = |x_0 - x^*| \leq b_0 - a_0$$

$$\Rightarrow \quad |e_1| \leq \frac{1}{2}(\underbrace{b_0 - a_0}_{\text{VI}})$$

$$\Rightarrow \quad |e_1| \approx \frac{1}{2}|e_0|$$

$$|e_{k+1}| \approx \frac{1}{2}|e_k| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \approx \frac{1}{2}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^1} = \frac{1}{2}$$

$r = 1$

$c = 1/2$

es decir, el método de bisección tiene convergencia lineal!

Newton

Recordatorio: Expansión en Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función real, infinitamente diferenciable alrededor de un número a, está dada como:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

En el método de Newton, el error está dado por:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$$

tomando $a = x^*$, $x = x_k$ y usando el sumando cuadrático:

$$f(x_k) = \underbrace{f(x^*)}_{0} + f'(x^*)\underbrace{(x_k - x^*)}_{e_k} + \frac{f''(x^*)}{2}\underbrace{(x_k - x^*)^2}_{e_k}$$

x^* es raiz de f

$$f(x_k) = f'(x^*)\, e_k + \frac{f''(x^*)}{2} e_k^2$$

$$f(x_k) - f'(x^*)e_k = \frac{f''(x^*)}{2}e_k^2 \quad \dots (*)$$

Por otro lado: iteración Newton

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$$

$$e_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x^*$$

e_k

$$e_{k+1} = e_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

$$f'(x_k)e_{k+1} = \underline{f'(x_k)e_k - f(x_k)}$$

modificando $(*)$

$$f(x_k) - f'(x^*)e_k = \frac{f''(x^*)}{2}e_k^2 \quad **$$

Suponiendo $x_k \to x^*$, entonces:

$$f(x_k) - f'(x^*)e_k = -f'(x^*)e_{k+1} \quad ***$$

x^* es la raíz de f, $f(x^*) = 0$

Igualando $(**)$ y $(***)$

$$\frac{f''(x^*)}{2} e_k^2 = -f'(x^*)\, e_{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} = C$$

$$\Rightarrow \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = |C| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = |C|$$

con $r=2$ $\Rightarrow$ Newton, cuadraticamente

Secante

Tenemos: $e_{k+1} = \underline{x_{k+1}} - x^*$

$$e_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} - x^*$$

$\vdots$

$$e_{k+1} = \frac{f(x_k)/e_k - f(x_{k-1})/e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\, e_k e_{k-1}$$

$\cdots (1)$

Usando la expansión en serie de Taylor para f alrededor de x^*

$$f(x_k) = \underbrace{f(x^*)}_{0} + f'(x^*)\underbrace{(x_k - x^*)}_{e_k} + \frac{f''(x^*)}{2}\underbrace{(x_k - x^*)^2}_{e_k^2}$$

$$f(x_k) = f'(x^*)\, e_k + \frac{f''(x^*)}{2} e_k^2$$

$$\frac{f(x_k)}{e_k} = f'(x^*) + \frac{f''(x^*)}{2} e_k \quad \ldots (2)$$

tomando en el paso $k-1$ en (2)

$$\frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}} = f'(x^*) + \frac{f''(x^*)}{2} e_{k-1} \quad \cdots (3)$$

restar $(2) - (3)$

$$\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}} = \frac{f''(x^*)}{2} \underline{(e_k - e_{k-1})}$$

$$e_k - e_{k-1} = x_k - x^* - (x_{k-1} - x^*)$$

$$= x_k - x_{k-1}$$

$$\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}} = \frac{f''(x^*)}{2}(x_k - x_{k-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\left[\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}}\right] = \frac{f''(x^*)}{2} \quad \ldots (4)$$

multiplicando la ec. (1) por uno

$$e_{k+1} = \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)\left|\frac{f(x_k)/e_k - f(x_{k-1})/e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right| e_k e_{k-1}$$

$$= \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \left[\frac{1}{x_k - x_{k-1}} \right] \frac{\left[\frac{f(x_k)}{e_k} - \frac{f(x_{k-1})}{e_{k-1}} \right]}{e_k e_{k-1}}$$

Recordando para x^* entre x_k, x_{k-1}

f' se puede aproximar como:

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \quad \left(\lim_{x_k \to x_{k-1}} \right)$$

Sustituyendo la ec. 4 y la derivada de f,

$$e_{k+1} = \frac{1}{f'(x^*)}\frac{1}{2}f''(x^*)\,e_k\,e_{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k\,e_{k-1}} = \frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \quad \ldots (9)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k||e_{k-1}|} = \left|\frac{1}{2}\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right| = C$$

de la definición de convergencia:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^r} = c \quad \cdots (b)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_k|}{|e_{k-1}|^r} = c$$

elevando a la r

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_k|^r}{|e_{k-1}|^{r^2}} = c^r$$

multiplicando tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}||e_k|^r}{|e_k|^r|e_{k-1}|^{r^2}} = c\,c^r$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_{k-1}|^{r^2}} = C^{1+r} \quad \ldots (c)$$

Multipicando (b) con (a)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k||e_{k-1}|} \frac{|e_k|}{|e_{k-1}|^r} = C\,C$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_{k-1}|^{r+1}} = C^2 \quad \ldots (d)$$

Por unidad del límite en (c) y (d) necesitamos que los exponentes en el denominador sean iguales, es decir,

$$r^2 = r + 1 \Rightarrow r^2 - r + 1 = 0$$

la cual tiene como solución positiva

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \underline{1.618} \ldots$$

como $1 < r < 2$, entonces el método

de secante tiene convergencia superlineal

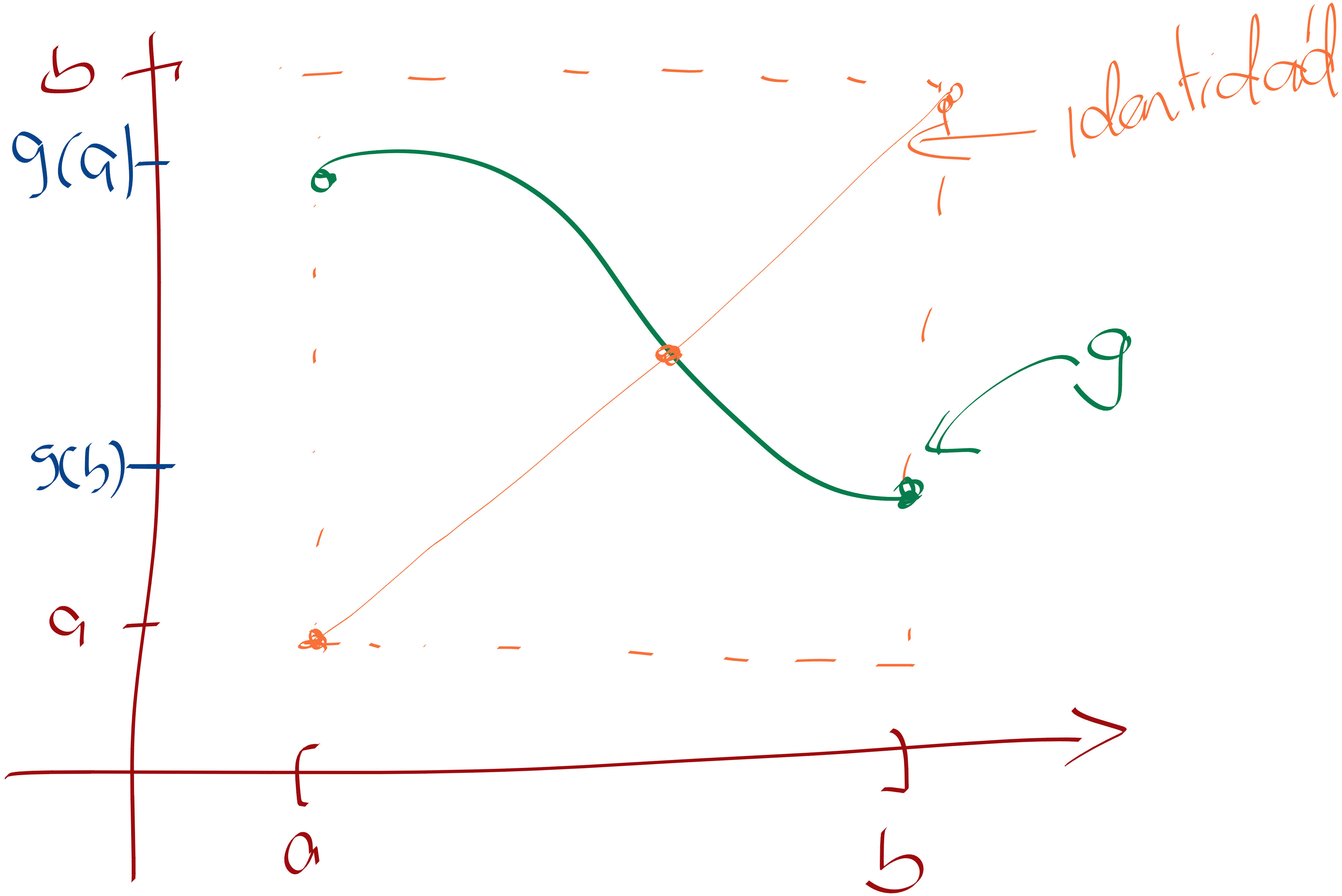
Punto Fijo

Teorema. Si $g \in \mathcal{C}([a,b])$ y $g(x) \in [a,b]$ para toda $x \in [a,b]$, entonces g tiene un punto fijo en $[a,b]$.

(1)

Si $g'(x)$ existe en (a,b) y $0 < c < 1$, $|g'(x)| \leq C \ \forall \ x \in (a,b)$ entonces el punto fijo en $[a,b]$ es único.

(2)


b
g(a)
g(b)
a
identidad
g
a
b

Demostración:

i) Si $g(a)=a$ ó $g(b)=b$ entonces tenemos un punto fijo en a o en b.

ii) Supongamos $g(a)\neq a$ y $g(b)\neq b$

Se define f como:

$$f(x)=g(x)-x$$

f es continua $=g$ cont $+$ id cont.

en $[a,b]$.

$$f(a) = g(a) - a$$

Ya que $g(a) \neq a \Rightarrow a < g(a)$

$$\Rightarrow \quad g(a) - a > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a) > 0} \quad \ldots (1)$$

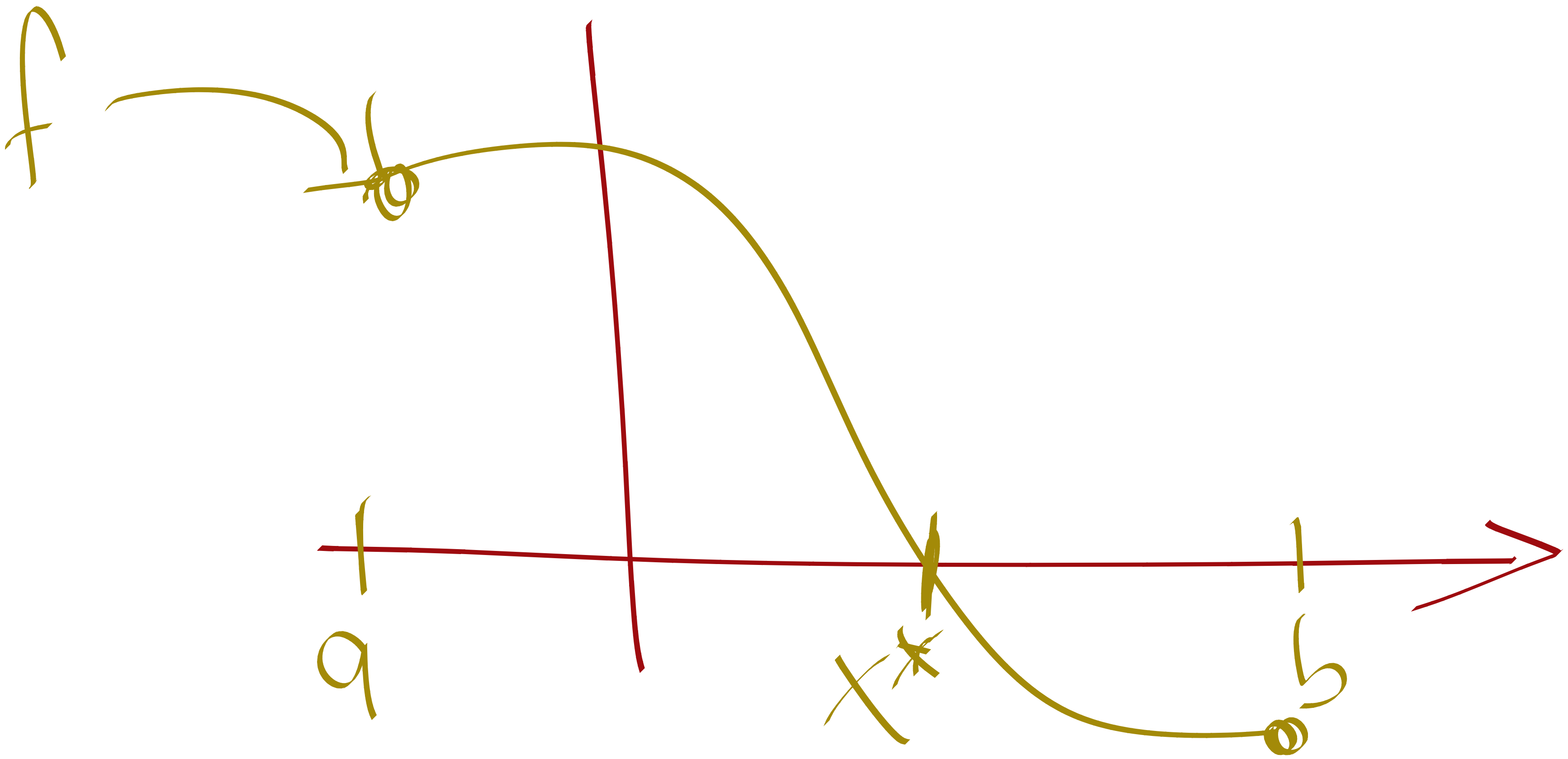
$$f(b) = g(b) - b$$

Ya que $g(b) \neq b \Rightarrow b > g(b)$

$$\Rightarrow \quad 0 > g(b) - b$$

$$\boxed{f(b) < 0} \quad \ldots (2)$$

f continua con $f(a)f(b) < 0$



$f(a) > 0$
$f(b) < 0$
f cont.

$\Rightarrow x^* \in (a,b)$ t.q. $f(x^*) = 0$

$\Rightarrow g(x^*) - x^* = 0 \Rightarrow$

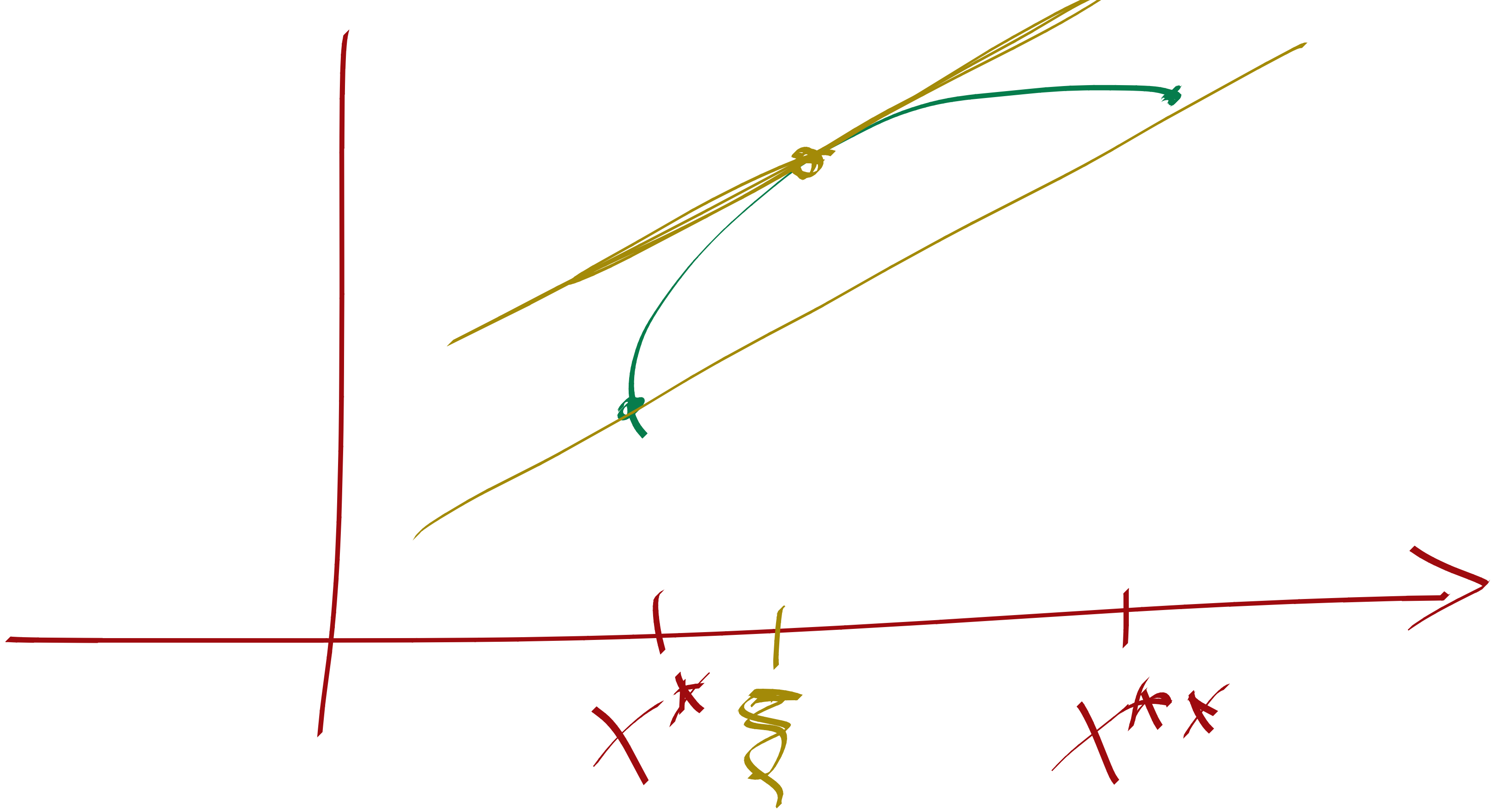
$g(x^*) = x^*$ g tiene un punto fijo en x^*.

Unicidad de x^*

Supongamos existen x^*, x^{**} diferentes en $[a,b]$

Ya $x^* \neq x^{**}$ el teorema del valor medio $\Rightarrow \exists\, \xi$ en x^* y x^{**} t.q.

$$g'(\xi) = \frac{g(x^*) - g(x^{**})}{x^* - x^{**}}$$



Por otra lado

$$|x^* - x^{**}| = |g(x^*) - g(x^{**})|$$

ya que son puntos fijos de g

$$\underline{g(x^*) = x^*}, \quad \underline{g(x^{**}) = x^{**}}$$

$$|x^* - x^{**}| = |g'(\xi)|\,|x^* - x^{**}|$$

por hipótesis $|g'(\xi)| < C < 1$

$$\Rightarrow |x^* - x^{**}| \leq C\,|x^* - x^{**}| \qquad C<1$$

$$\Rightarrow |x^* - x^{**}| < |x^* - x^{**}| \quad ¡$$

$\therefore$ x^* es único.

Análisis de error en Pto. Fijo

Recordando:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$$

pto fijo

$$\Rightarrow \quad |e_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*|$$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

iteración

Punto fijo

$$|e_{k+1}| = |g(x_k) - g(x^*)|$$

usando el hecho: para θ_k entre x_k y x^*

$$g'(\theta_k) = \frac{g(x_k) - g(x^*)}{x_k - x^*}$$

$$|e_{k+1}| = |g'(\theta_k)||x_k - x^*|$$

$$|e_{k+1}| = |g'(\theta_k)||e_k|$$

Si $|g'(\theta_k)| \leq C < 1 \quad \theta_k \in (a,b)$

$$\Rightarrow |e_{k+1}| \leq C|e_k|$$

$$|e_k| \leq C|e_{k-1}|$$

$$|e_{k+1}| \leq C(C|e_{k-1}|)$$

$$|e_{k+1}| \leq c^2 |e_{k-1}|$$

$$\vdots$$

$$|e_{k+1}| \leq c^{k+1} |e_0|$$

$$\lim_{k\to\infty} |e_{k+1}| \leq \boxed{\lim_{k\to\infty} c^{k+1}} |e_0|$$

Si $0 < c < 1$ $\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} |e_{k+1}| = 0$$

$\therefore$ el método de punto fijo converge.

While $|x_{k+1} - x_k| > tol$

if $\boxed{|g'(x_k)| > 1}$

Detener

else

...

Solución a Sistemas de ecuaciones no lineales

$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x^* \text{ ceros de } f \end{array}}$ $\quad F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

real $\quad \bar{x}^* \text{ de } F$

Donde $F(x_1, \ldots, x_n) =$

$$\left(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n) \right)$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Cuando buscamos $\bar{X}^*$, tal que

$$F(\bar{x}^*) = \bar{0} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

f_i no lineal

Ejemplo: Sea $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

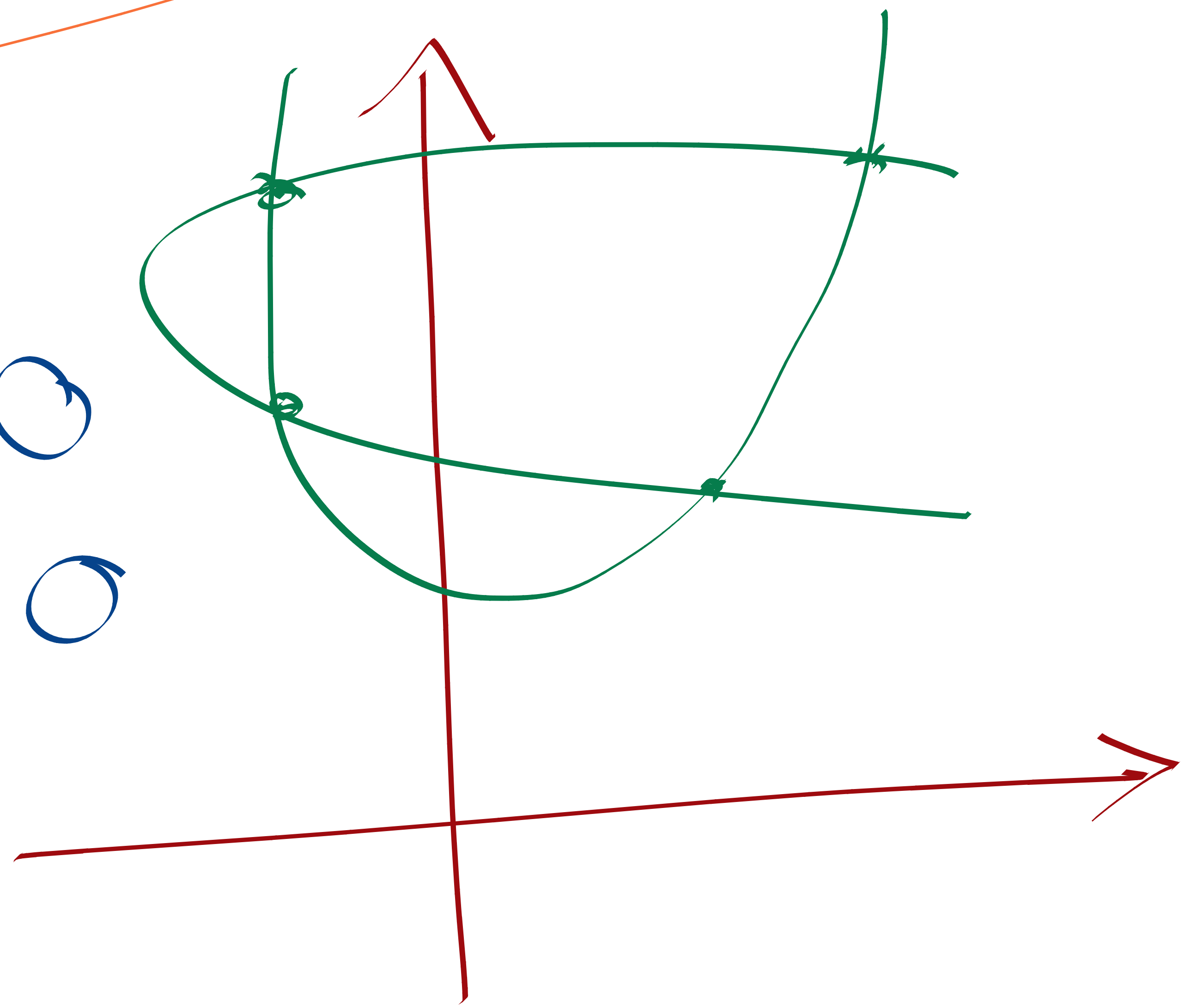
$$F(x,y,z) = \left(\cos(xyz),\ x^2+y^2+z^2,\ e^{x+y+z}\right)$$

$$\cos(xyz) = 0$$
$$x^2+y^2+z^2 = 0$$
$$e^{x+y+z} = 0$$

Ejemplo: Sea $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x,y) = (x^2 - y + \gamma_1, -x + y^2 + \gamma_2)$$

parabolas



$$x^2 - y + \gamma_1 = 0$$

$$-x + y^2 + \gamma_2 = 0$$

Punto Fijo Generalizado

Real $(\mathbb{R})$

$$f(x) = g(x) - x$$

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

$$\downarrow$$

$$|g'(x)| < C < 1$$

convergencia

Multivaluado $(\mathbb{R}^n)$

$$\bar{F}(\bar{x}) = G(\bar{x}) - \bar{x}$$

$$\bar{x}_{k+1} = G(\bar{x}_k)$$

$$\uparrow$$

$$G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\| < tol$$

Ejemplo: Sea F dada por:

$$F(x,y) = (x + y^2 - 2y + 1,\ x^2 - 1 + y)$$

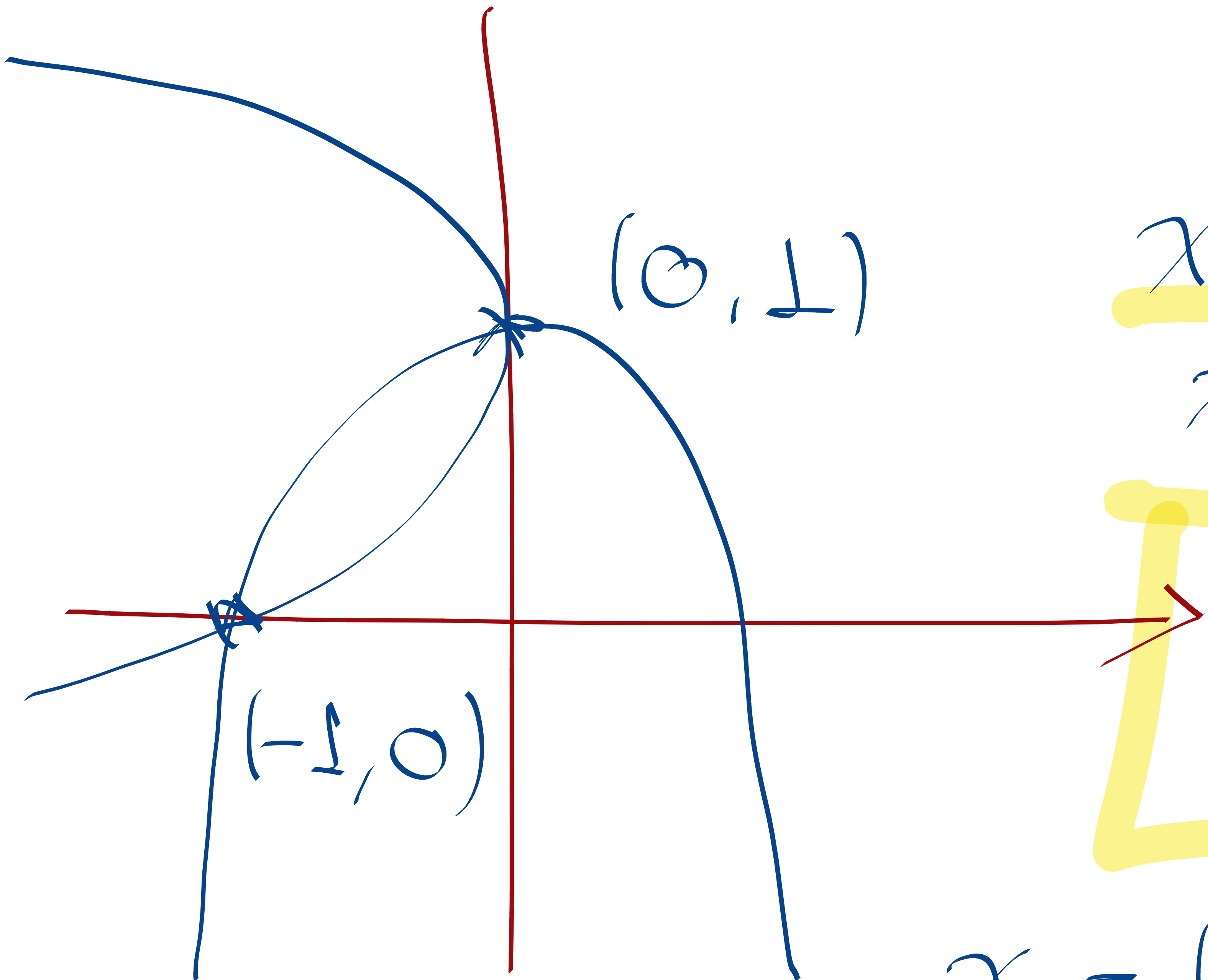
$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f_1(x,y) = x + y^2 - 2y + 1$$

$$f_2(x,y) = x^2 - 1 + y$$

$$F(x^*, y^*) = 0$$

$(0,1), (-1,0)$



$$F(\bar{x}) = G(\bar{x}) - \bar{x}$$

$$x + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 - 1 + y = 0$$

$$x + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$y + x^2 - 1 = 0$$

$$x - (-y^2 + 2y - 1) = 0$$

$$y - (-x^2 + 1) = 0$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad G(x,y) = \begin{bmatrix} -y^2+2y-1 \\ -x^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} - G(\bar{x}) = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = G(\bar{x})}$$

Sea $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$$\bar{x}_1 = G\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(0.5)^2+2(0.5)-1 \\ -(0.5)^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = G(x_1) = G\begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{-0.0625} \\ \underline{0.9375} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_4 = \begin{bmatrix} \underline{-0.0000153} \\ \underline{0.999847} \end{bmatrix}; \quad \bar{x}_5 = \begin{bmatrix} \underline{-2.32 \times 10^{-10}} \\ \underline{1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_6 = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{1} \end{bmatrix}$$

El método de punto fijo en varias variables converge, si

$$\rho\left(J_G(\bar{x}^*)\right) < 1,$$ donde J_G es la matriz Jacobiana de G, ρ el radio espectral, si λ_i son los valores propios de $J_G(\bar{x}^*)$

$$\rho = \max\{|\lambda_i|\}$$

Newton Generalizado

Caso en $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \left[f'(x_k) \right]^{-1} f(x_k)$$

Caso en $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \left[J_f(\bar{x}_k)\right]^{-1} F(\bar{x}_k)$$

inversa de la matriz jacobiana

Evitar calcular matrices inversas, tomemos la siguiente iteración:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + \bar{s}_k \qquad \text{donde}$$

$\bar{s}_k$ es la solución al sistema lineal

$$\boxed{J_F(\bar{x}_k)\,\bar{s}_k = -F(\bar{x}_k)}$$

¡!

matriz de $n \times n$

vector variable

$\bar{b}$

$$\boxed{A\bar{x} = \bar{b}}$$

Ejemplo: Sea $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con

$$F(x,y) = (x+y^2-2y+1, x^2-1+y)$$

Calculando:

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2y-2 \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

Iteración $k=0$

sea $\bar{x}_0 = (0.5, 0.5)^t$

$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \bar{s}_0$ donde

$$J_F(\bar{x}_0)\bar{s}_0 = -F(\bar{x}_0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

resolviendo (LU)

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 + \bar{s}_0$$

$$\begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Iteración $k=1$

$$\bar{x}_1 = (-0.25, 0.5)^t$$

$$J_F(\bar{x}_1)\,\bar{s}_1 = -F(x_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.0625 \end{bmatrix}$$

resolviendo para $\bar{S}_1 = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$

$$\bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \bar{S}_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1.0625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.25 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_5 = \begin{bmatrix} 2.328 \times 10^{-10} \approx 0 \\ 1.0 \end{bmatrix} ; \quad \bar{X}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$