Análisis Numérico

Examen III: Ajuste por Mínimos cuadrados Factorización QR

10

Nombre: Arturo Yitzack Reynoso Sánchez

1. Sea el sistema $A\bar{x} = b$ con:

$$\cancel{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Plantear el sistema de ecuaciones normales y resolver el problema.

El sistema lineal $A^TAx = A^Tb$ es conocido como el sistema de ecuaciones normales.

Tenemos que

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{2\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{4\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ✓

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 4 \qquad 4 \times 1$

$$A^T A x = A^T b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3} \qquad \therefore \bar{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$$

2. Dado el vector $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

hallar de manera explícita la matriz H (Householder) que cumpla $H\bar{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$$

$$\alpha e_1 = Ha = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right)a = a - 2v\frac{v^T a}{v^T v}$$

$$\Rightarrow v = (a - \alpha e_1)\frac{v^T v}{2v^T a}$$

El escalar es irrelevante para determinar v,

$$\Rightarrow v = a - \alpha e_1 \,, \quad \text{con } \alpha = -\text{sing}(a_1)\|\bar{a}\|_2.$$

$$\Rightarrow \alpha = -\sqrt{1+1} = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$vv^T = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2}+2 & -(1+\sqrt{2}) & 0 \\ -(1+\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v^Tv = \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2}+2+1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3+2\sqrt{2} & -(1+\sqrt{2}) & 0 \\ -(1+\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H\bar{a} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Dada $Q_i \in M_{m \times m}$ con Q_i matriz ortogonal. Demostrar

$$Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$$

es una matriz ortogonal.

Dem: $QQ^t = (Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} Q_n)(Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1} Q_n)^t$

$$= \underbrace{Q_1 \underbrace{Q_2 \dots \underbrace{Q_{n-1} \underbrace{Q_n Q_n^t}_{I_m} Q_{n-1}^t}_{I_m} \dots Q_2^t}_{I_m} Q_1^t}_{I_m}.$$

Como Q_i es ortogonal, $Q_i Q_i^t = I_m \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
Por lo tanto

$$QQ^t = I_m \blacksquare$$