Facultad de Ciencias, UNAM
Semestre 2022-1

ANÁLISIS NUMÉRICO

Práctica No. 4

Solución a Sistemas de Ecuaciones No Lineales -Ceros de Funciones-

Prof. César Carreón Otañez
Ayud2: Jorge Zavaleta Sánchez
Ayud: Isaí López Servín

Ciudad Universitaria

1. Programar los métodos de:

   a) Bisección.

   b) Secante.

   c) Newton.

   d) Regla Falsa.

   Para cada caso, pedir los datos entrada correspondientes: función punto(s) inicial(es), tolerancia, etc. Devolver la raíz si la encuentra, si no desplegar el mensaje donde se diga qué ocurrió. Entregar los códigos de cada método.

   [Computacional].

2. Usar el Método de Bisección (programado) para encontrar la solución de las siguientes funciones con una tolerancia de 10^{-5}.

   a) $f(x) = x - 2^{-x}$, para $0 \leq x \leq 1$.

   b) $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$, para $0 \leq x \leq 1$.

   c) $f(x) = 2x\cos(2x) - (x+1)^2$, para $-3 \leq x \leq -2$ y $-1 \leq x \leq 0$.

   d) $f(x) = x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1$, para $0.2 \leq x \leq 0.3$ y $1.2 \leq x \leq 1.3$.

   [Computacional].

3. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2 x(x-1)^3(x-2)$, ¿para qué cero de f el Método de Bisección converge cuando se aplican los intervalos siguientes para su búsqueda?,

   $$\text{a) } [-1.5, 2.5] \quad \text{b) } [-0.5, 2.4] \quad \text{c) } [-0.5, 3] \quad \text{d) } [-3, -0.5]$$

   [Ejercicio].

4. Hallar una aproximación a $\sqrt{3}$ con una tolerancia de 10^{-4} usando el algoritmo de Bisección. [*Hint:* considerar $f(x) = x^2 - 3$.]

   a) Escribir las primeras 5 iteraciones del método. [Ejercicio].

   b) Implementando el programa. [Computacional].

5. La función definida por $f(x) = \sin(\pi x)$ tiene ceros en todos los enteros. Muestre que cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$, el método de bisección converge a

   a) 0, si $a + b < 2$.

   b) 2, si $a + b > 2$.

   c) 1, si $a + b = 2$.

   [Ejercicio].

6. Definiendo $e_k = x_k - x^*$, para la iteración de Secante, demostrar la siguiente igualdad:

   $$e_{k+1} = \frac{f(x_k)/e_k - f(x_{k-1})/e_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(e_k e_{k-1})$$

   [Ejercicio]

7. Sean $[a_0, b_0], [a_1, b_1] \cdots [a_n, b_n]$ sucesión de intervalos generados por el método de bisección. Si

   $$r = \lim_{n\to\infty} Cn$$

   con

   $$C_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

   demostrar

   $$|r - C_n| \leq 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$$

   [Ejercicio]

8. Sea la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

   a) Manipulando la función f da cuatro variantes de ella, de tal forma que se puede ver como una función $f(x) = g_i(x) - x$ de punto fijo para $i = 1, 2, 3, 4$.

   b) De cada una de las funciones realizar 4 iteraciones del método de Punto Fijo con $x_0 = 1$.

   c) Calcular la derivada de $g_i(x)$ y decir si el método eventualmente converge para éstas funciones.

   [Ejercicio]

9. Usar la iteración de Punto Fijo para mostrar que la función $g(x) = \pi + 0.5\sin(x/2)$ tiene un punto fijo en el intervalo $[0, 2\pi]$ con una tolerancia de 10^{-2}. (Programar el ejemplo en específico con una gráfica de la función).

   [Computacional]

10. Para cada una de las siguientes funciones hallar el intervalo $[a, b]$ donde el método de Punto Fijo converge.

    a)
    $$x = \frac{2 - e^x + x^2}{3}$$

    b)
    $$x = \frac{5}{x^2} + 2$$

    c)
    $$x = 6^{-x}$$

    d)
    $$x = 0.5(\sin(x) + \cos(x))$$

    [Ejercicio]

11. Mostrar las primeras 5 iteraciones del Método de Newton para hallar el cero de $f(x) = x^2 - 6$ con $x_0 = 1$.

    [Ejercicio]

12. Sea $f(x) = x^2 - 6$ con $x_0 = 3$ y $x_1 = 2$, hallar x_4 para

    a) El método de Secante.

    b) El método de Regla Falsa.

    c) ¿Cuál de los dos métodos se acerca más a $\sqrt{6}$?.

    [Ejercicio]

13. Usar Newton para hallar la solución de las siguientes funciones con una tolerancia de 10^{-5}:

    a) $f(x) = e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$.

    b) $f(x) = \ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0$ para $1.3 \leq x \leq 2$.

    c) $f(x) = 2x\cos(2x) - (x - 2)^2 = 0$ para $2 \leq x \leq 3$ y $3 \leq x \leq 4$.

    d) $f(x) = (x - 2)^2 - \ln(x) = 0$ para $1 \leq x \leq 2$ y $e \leq x \leq 4$.

    e) $f(x) = e^x - 3x^2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$ y $3 \leq x \leq 5$.

    f) $f(x) = \sin(x) - e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$, $3 \leq x \leq 4$ y $6 \leq x \leq 7$.

    [Computacional]

14. Calcular las raíces del ejercicio 13 con el método de Secante. [Computacional].

15. Calcular las raíces del ejercicio 13 con el método de Regla Falsa. [Computacional].

16. El siguiente polinomio

$$P(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

tiene dos ceros, uno en $[-1, 0]$ y otro en $[0, 1]$, hallarlos con una tolerancia de 10^{-6} para

a) Método de Regla Falsa.

b) Método de Secante.

c) Método de Newton.

Usando los programas de cada método. [Computacional]

17. Supongamos que se desea desarrollar un método iterativo para calcular la raíz cuadrada de un número positivo y, de manera equivalente, resolver la ecuación no lineal $f(x) = x^2 - y = 0$ dado y. Dadas las funciones g_1, g_2 listadas a continuación, dan un problema equivalente de punto fijo a $f(x) = 0$. Para cada función determinar si la iteración de punto fijo correspondiente dado por $x_{k+1} = g_i(x_k)$ es convergente localmente a $\sqrt{y}$ si $y = 3$. Explicar la razón en cada caso.

a) $g_1(x) = y + x - x^2$

b) $g_2(x) = 1 + x - x^2/y$

c) ¿Cuál es la función de la iteración de punto dada por el método de Newton para este problema en particular?.

[Ejercicio]

18. Escribir un programa usando el método de Newton para resolver el problema de hallar la raíz n-ésima de un número y, o de manera equivalente, resolver $f(x) = x^n - y = 0$. La rutina debe devolver tanto valores reales como complejos.

[Computacional]

19. El control de un determinado sistema eléctrico conduce a la resolución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} I * \cos(\phi) &= 2/3 \\ \cos(\delta) + 0.91 * I * \sin(\phi + \delta) &= 1.22 \\ 0.76 * I * \cos(\phi + \delta) &= \sin(\delta) \end{aligned}$$

sabiendo que por consideraciones técnicas los ángulos ϕ y δ deben estar comprendidos entre 0 y $\pi/2$ y que la densidad de corriente I debe ser positiva, se pide resolver mediante el método de Newton el sistema partiendo de los datos iniciales siguientes:

a) $I = 1$, $\phi = 0.1$ y $\delta = 0.1$.

b) $I = \phi = \delta = 1$.

Comentar la admisibilidad de las soluciones encontradas.

[Computacional]

20. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales por el Método de Newton:

$$\begin{aligned} U + \frac{0.27}{U} - 1.31 * \cos(\phi) &= 0 \\ \frac{0.405}{U} - 1.31 * \sin(\phi) &= 0 \end{aligned}$$

dar al menos 3 condiciones iniciales distintas y comentar los resultados. [Computacional]

21. Resolver los siguientes sistemas programando el Método de Newton para varias variables.

a) Puntos iniciales $x_1 = 15$ y $x_2 = -2$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2(x_2(5 - x_2) - 2) &= 13 \\ x_1 + x_2(x_2(1 + x_2) + 14) &= 29 \end{aligned}$$

b) Puntos iniciales $x_1 = (1+\sqrt{3})/2$, $x_2 = (1-\sqrt{3})/2$ y $x_3 = \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 =& 5 \\ x_1 + x_2 =& 1 \\ x_1 + x_3 =& 3 \end{aligned}$$

c) Puntos inciales $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 =& 0 \\ \sqrt{5}(x_3 - x_4) =& 0 \\ (x_2 - x_3)^2 =& 0 \\ \sqrt{10}(x_1 - x_4)^2 = 0 \end{aligned}$$

[Computacional]

22. Para la función del ejercicio 21*b* resolverlo por la iteración de punto fijo.

[Computacional]

23. Dado el teorema de Sherman-Morrison

Teorema. *Sea A una matriz no singular y $\bar{x}$, $\bar{y}$ vectores con $\bar{y}^t A^{-1}\bar{x} \neq -1$. Entonces $A + \bar{x}\bar{y}^t$ es no singular y*

$$(A + \bar{x}\bar{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1}\bar{x}}$$

Demostrar

$$\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}\bar{x}\bar{y}^t A^{-1}}{1 + \bar{y}^t A^{-1}\bar{x}}\right)(A + \bar{x}\bar{y}^t) = I$$

[Ejercicio]

Número de integrantes: a lo más 4.

Formato de Entrega:

- Los ejercicios correspondientes a la primera parte, deberán ser escaneados o fotografiados y anexar todo en un archivo pdf con imágenes nítidas. Cualquier hoja que no tenga una vista nítida no será calificada.
- Cada programa realizado debe llevar comentarios, estar indentados y tener los nombres del/los creador/es, el nombre del archivo debe coincidir con el número del ejercicio (p.e: ejercicio22.***).
- **Si se llegan a encontrar códigos iguales se anulara la calificación de todos lo integrantes en el tema correspondiente**.

Fecha de Entrega: **12 de Enero**.