UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Engenharia de Sistemas
Técnicas de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Tarefa 3 - Modelagem Fenomenológica de um Sistema de Abastecimento de Água

Artur Soares Bezerra de Mello (2013030392)

1 Sistema de Abastecimento de Água - Física do Processo

O sistema analisado neste trabalho é um sistema de abastecimento de água. Consiste de 2 reservatórios de água em desnível, para escoamento de água por meio de uma tubulação conectora. A água escoa do tanque 1 para o tanque 2, quando a saída W_2 está aberta. O escoamento é turbulento, portanto há distúrbios no fluxo de água, o que faz com que a resposta do sistema não se comporta suavemente. a Figura 1 mostra o sistema de abastecimento a ser estudado.

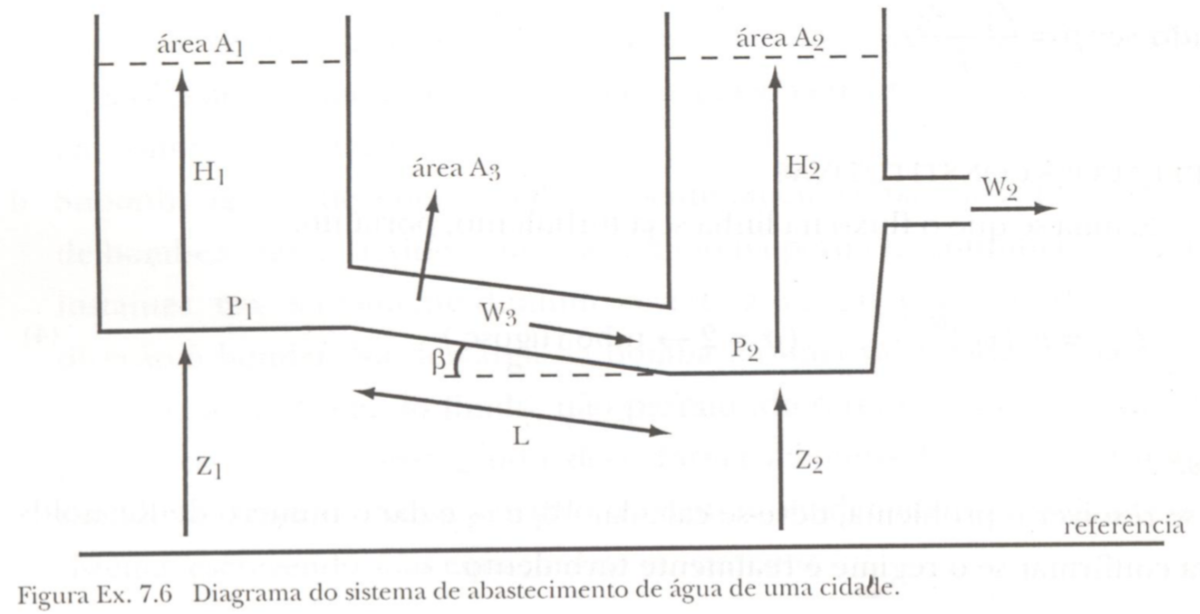


Figura 1: Diagrama de um sistema de abastecimento de água, retirado do livro.

O funcionamento do sistema consiste da diferença de altura entre os tanques, o que faz com que a água escoe pela tubulação conectora, quando há vazão pela saída do Tanque 2. Como o tubo conector é mais fino, o escoamento é mais rápido, pois este tubo se comporta como se fosse um capilar, dadas as dimensões maiores dos dois tanques. Assim, a diferença de pressão entre os dois lados, causada pela diferença de altura entre os tanques, e a vazão da saída do Tanque 2, geram o escoamento turbulento do Tanque 1 para o Tanque 2.

As grandezas utilizadas para o experimento foram:

- $\rho = 1g/cm^3$;
- $A1 = 20m^2$;
- $A2 = 15m^2$;
- $g = 9.8m/s$;
- $L = 10m$;
- $A3 = 2m^2$;

1.1 Equação de Espaço de Estados e Função de Transferência

A equação no Espaço de Estados foi calculada ao considerar a situação de equilíbrio, ou seja, quando a entrada do sistema (conhecida) W_2 é fechada, ou seja, é nula. Sendo assim, o escoamento $W_3 = 0$, e as equações ficarão em função das alturas H_1 e H_2, ambas incógnitas do sistema. As equações no espaço de estaods são:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \tag{1}$$
$$y(t) = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \tag{2}$$

Fazendo as manipulações matemáticas, encontra-se as matrizes de espaço de estados:

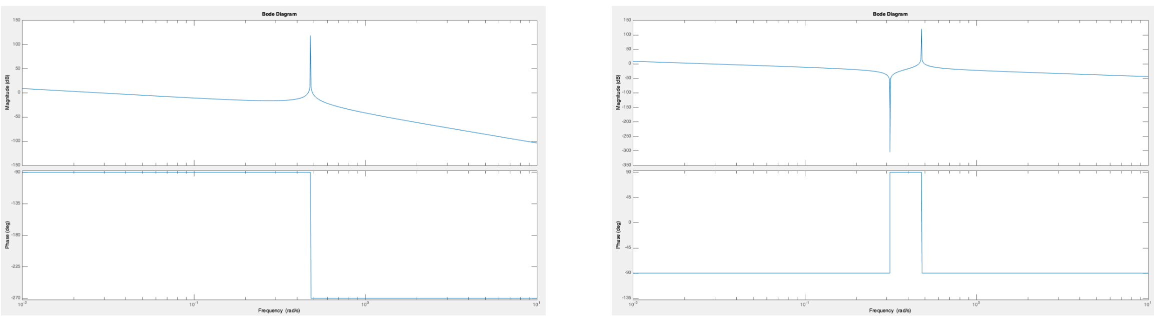
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & -0.06667 \\ -1.96 & 1.96 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.06667 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo as transformações utilizando o MATLAB, foi realizada a identificação das funções de transferência para H_1 e H_2, que podem ser vistas a seguir:

$$H_1 = \frac{0.006533}{s^3 + 1.11e-18s^2 + 0.2287s - 6.419e-18} \tag{3}$$

$$H_2 = \frac{0.06667s^2 + 0.006533}{s^3 + 1.11e-18s^2 + 0.2287s - 6.419e-18} \tag{4}$$

O diagrama de Bode do sistema podem ser demonstrados abaixo. Nota-se que, para o tanque 2, o sistema apresenta comportamento não linear, que pode ser explicado pela forma como a água se distribui nele quando há escoamento na tubulaçao do tanque 1 para o tanque 2, e há vazão pela saída W_2.



(a) Tanque 1 (b) Tanque 2

Figura 2: Diagramas de Bode do Sistema.

2 Simulando Resposta do sistema

Utilizando mais uma vez o MATLAB, foi feita a simulação do sistema utilizando a função *lsim*. A resposta do sistema a um degrau unitário ficou linearmente decrescente, como mostra a Figura 3, o que é coerente de se pensar, pois o sistema é composto por tanques de altura virtualmente infinitas. Assim, quanto mais tempo houver vazão de água por W_2, mais o tanque 2 estará esvaziando, e sempre de forma turbulenta.

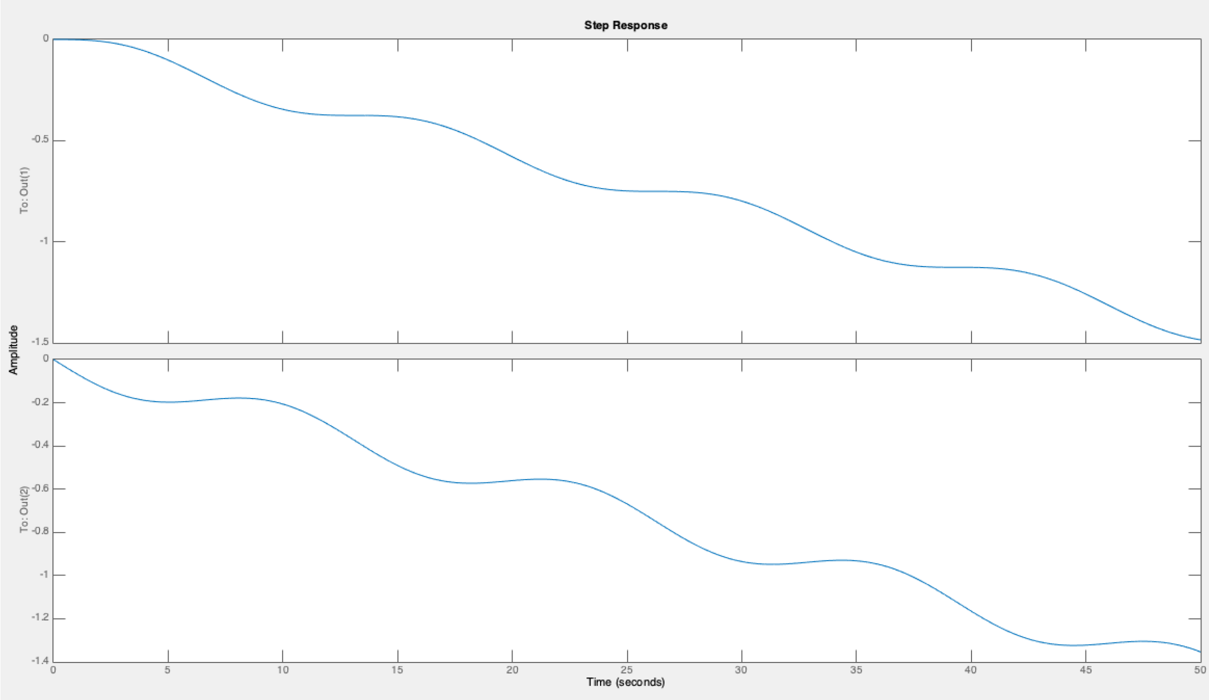


Figura 3: Escoamento de água pelo Tanque 2 com uma vazão constante em W_2

Agora, simulando para uma entrada do tipo PRBS, pode-se perceber comportamento semelhante ao mencionado anteriormente. No caso do sinal abaixo, e para os próximos experimentos, a entrada do sistema foi invertida, apenas para que as demonstrações tenham aspecto mais familiar em relação aos sistemas usualmente identificados.

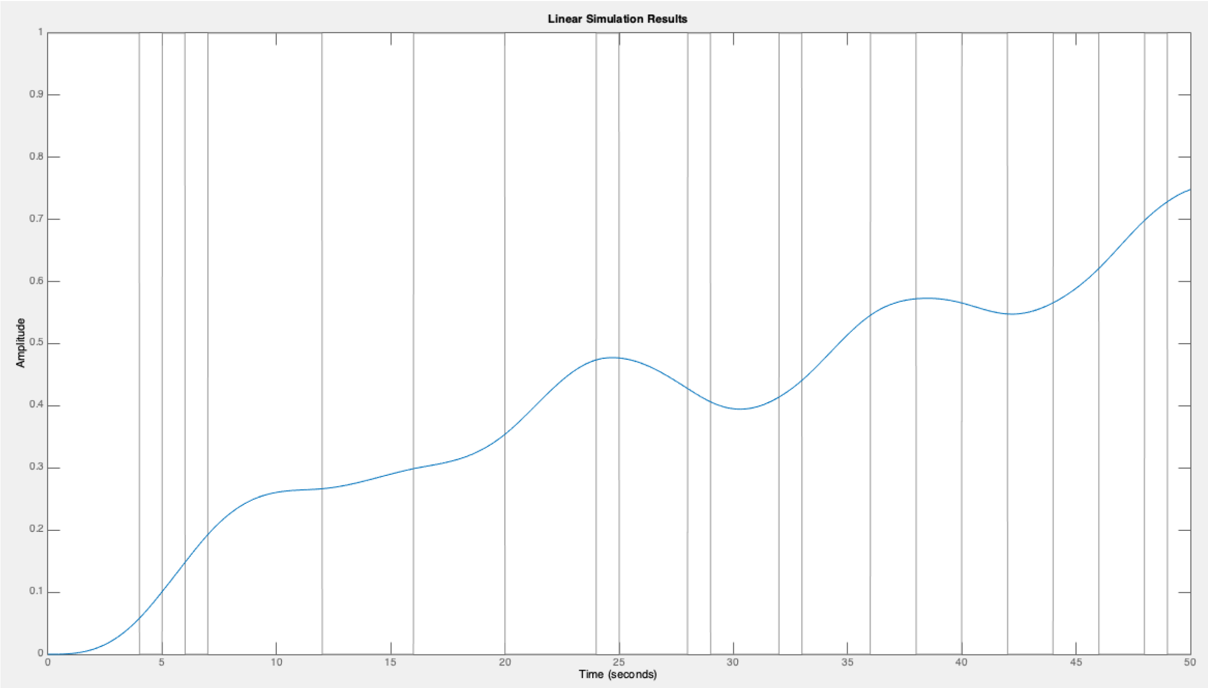


Figura 4: Entrada do tipo PRBS e resposta do sistema para o Tanque 1.

Percebendo o comportamento acumulador do sistema, foi aplicado ao mesmo uma entrada do tipo pulso retangular com duração de 50 segundos. O resultado pode ser visto na Figura 5.

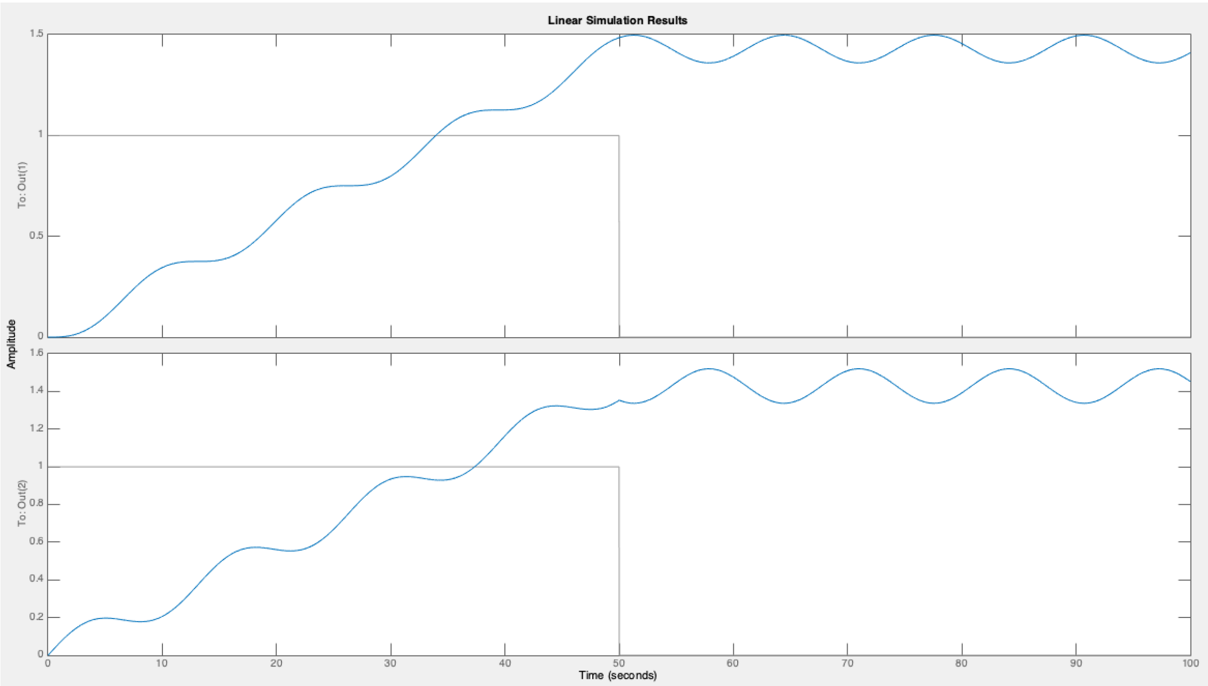


Figura 5: Resposta do sistema para uma entrada do tipo pulso retangular de duração 50s.

Pode-se perceber que a acumulação de água, ou, se considerarmos o sistema real, a perda de água por vazão, cessa quando cessamos o sinal de entrada. O comportamento do sistema revela uma aparência integradora. Isso significa que, enquanto houver entrada aplicada, haverá um escoamento ou acúmulo de líquido no tanque. Além disso, como não há restrições no problema para tratar o tamanho total dos tanques, eles serão virtualmente infinitos, e também serão as vazões deles.

Há também uma descontinuidade apresentada no Tanque 2, que pode ser explicada pelo exato momento em que a entrada é cessada, ou seja, o tanque perde sua vazão. Apesar disso, ainda há um escoamento ocorrendo pela tubulação de conexão. Isso torna o sistema do Tanque 2 não linear, e portanto, a identificação do sistema foi feita apenas para o Tanque 1.

3 Identificação do Sistema

Primeiramente, tentou-se modelar o sistema como sendo de primeira ordem, pois ele tem aparência de um sistema deste tipo, quando é feita inspeção gráfica inicial. Os resultados abaixo são para a identificação do sistema como sendo de primeira ordem:

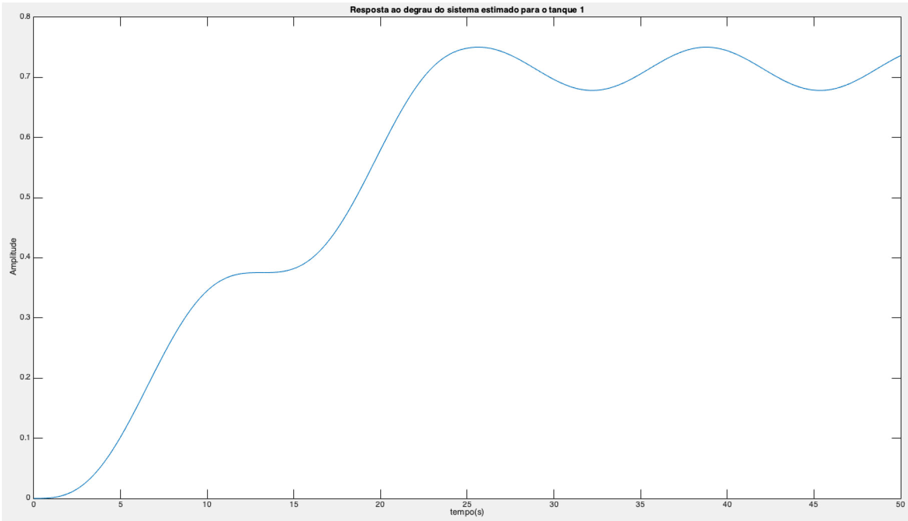


Figura 6: Resposta ao degrau do sistema estimado para o tanque 1.

Um ruído branco de SNR 20dB foi aplicado ao sinal acima, e resultou na figura abaixo:

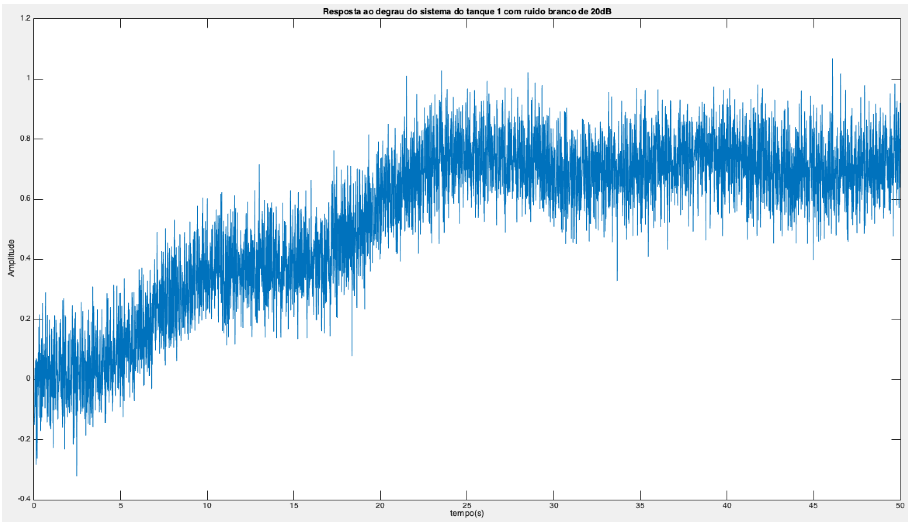


Figura 7: Resposta ao degrau do sistema estimado para o tanque 1 com ruído de SNR 20dB.

A partir de inspeção gráfica, a função de transferência do modelo estimado de primeira ordem para o sistema do tanque 1 foi:

$$H_{est} = \frac{K}{\tau s + 1} = \frac{0.7112}{11.72s + 1}$$

Porém, ao comparar o modelo estimado com a resposta ao sistema adquirida pela modelagem física, percebeu-se que o caráter integrador do sistema não foi bem ajustado pelo modelo. Sendo assim, nova estimativa deve ser feita, dessa fez considerando o sistema como sendo um integrador. A Figura 8 mostra o comparativo entre o modelo estimado e a saída do sistema físico.

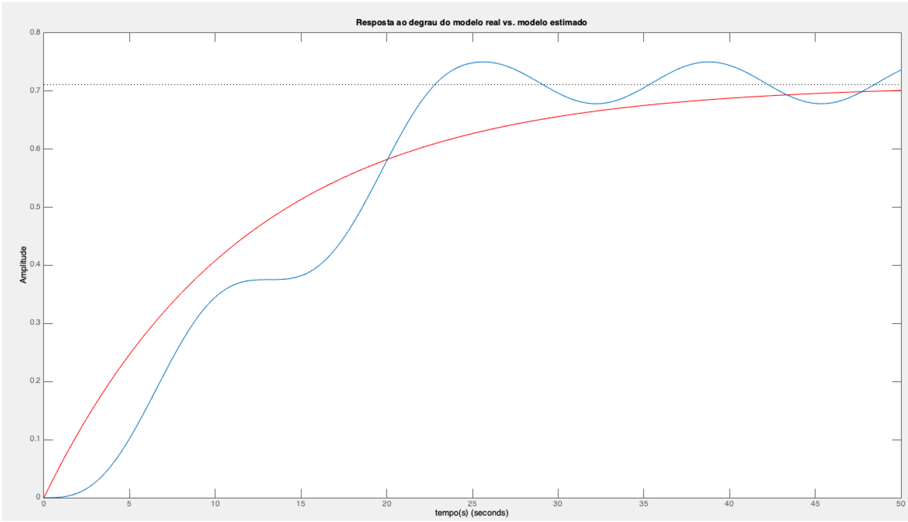


Figura 8: Comparativo entre resposta estimada e resposta do sistema.

3.1 Sistema Integrador

Um sistema integrador tem a seguinte definição:

$$y(t) = \begin{cases} \Delta u K(t-\theta), & \theta < t < \theta + \Delta t_u, \\ \Delta u K \Delta t_u & t > \theta + \Delta t_u, \end{cases}$$

onde u é o sinal de entrada, Δt_u é a duração do pulso e Δy a amplitude do sinal de saída Por definição, θ é o atraso puro de tempo, e pode ser adquirido por inspeção gráfica. Para o caso do Tanque 1, $\theta = 3$. Fazendo os cálculos a partir da relação para K, e estimando Δy como a média dos valores da saída acima da duração do pulso, tem-se:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t_u \Delta u} \tag{5}$$

$$K = \frac{0.7151}{25 \times 1} \tag{6}$$

$$K = 0.0286 \tag{7}$$

Construindo o integrador graficamente, é possível ver o resultado abaixo:

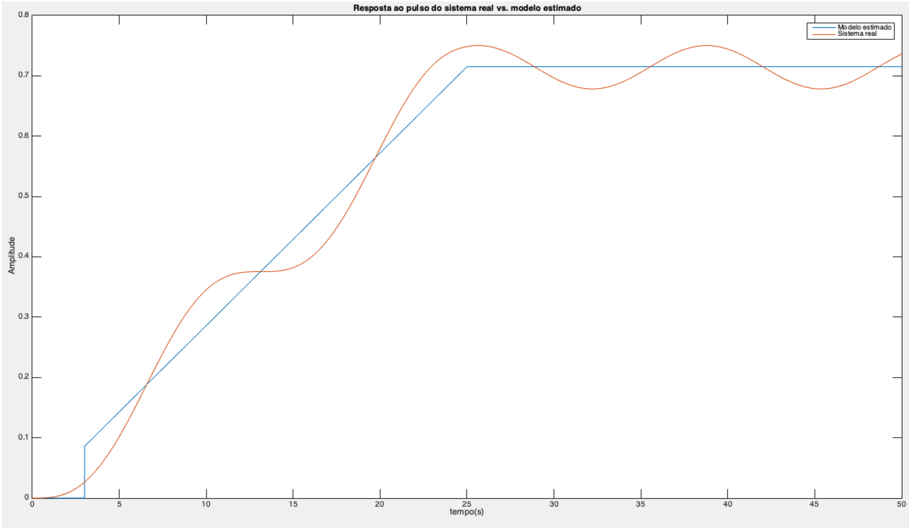


Figura 9: Validação do modelo estimado.

Pode-se perceber uma sensível melhora na estimação do modelo, o que permite afirmar que, para o Tanque 1, o sistema é um integrador. É possível afirmar isso fisicamente também, como já foi explicado.