UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Engenharia de Sistemas
Técnicas de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Tarefa 5 - Método de Mínimos Quadrados para a estimação de Parâmetros

Artur Soares Bezerra de Mello (2013030392)

1 Análise do método de Mínimos Quadrados

O Método de Míninmos Quadrados (MMQ) consiste em uma função que busca aproximar uma função por meio de um algoritmo de otimização que minimiza a distância entre os pontos experimentais e os pontos estimados a partir de cálculos matriciais. O método garante a ortogonalidade entre os valores estimados e valores experimentais, o mostra que este é um bom método para a estimação de parâmetros de um sistema a partir de dados experimentais, mesmo que com algum ruído.

Neste exercício, pretende-se validar a estimação de parâmetros a partir de um sistema de primeira ordem cujo modelo é previamente conhecido. Fazer isso é importante para a validação pois, com os dados previamente conhecidos, utilizar o método e comparar os resultados permite analisar quão bom é o método para o dado propósito.

1.1 Sistema de Primeira Ordem

O sistema gerado para análise foi definido com ganho K=2 e constante de tempo $\tau = 20$ e um atraso de 10 unidades de tempo. Utilizando o matlab, foi gerado o sistema linear abaixo:

$$G(s) = \frac{2 \times e^{-10s}}{20s + 1}$$

Utilizando um sinal de entrada do tipo PRBS com 500 amostras, 9 bits de resolução e o intervalo de amostragem do PRBS $T_b = 1$, a resposta do sistema foi calculada no MATLAB e o resultado pode ser visto na figura abaixo. Foi utilizado um tempo de amostragem $T_s = 2$.

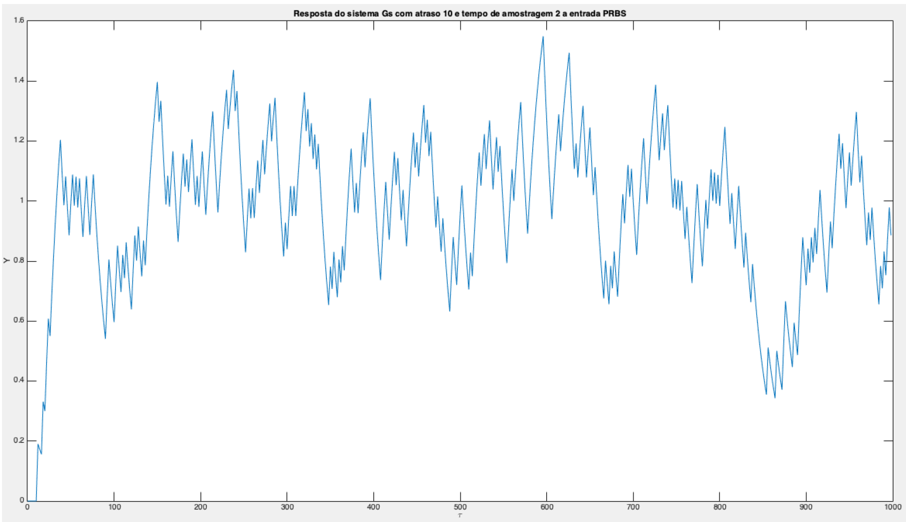

Figura 1: Resposta do sistema à entrada PRBS com N=500 e $T_b = 1$.

1.2 Estimação do atraso puro de tempo

A partir da função de correlação cruzada entre a entrada - um PRBS de 500 amostras - e a saída do sistema, definida pela simulação mostrada na figura acima, é possível estimar o atraso puro de tempo do sistema, que foi definido como 10 unidades de tempo, já que o sistema é previamente conhecido.

A figura abaixo mostra a função de correlação cruzada entre entrada e saída citada acima. Como o tempo de amostragem é $T_s = 2$, é esperado que o ponto $k = \frac{}{T_s} = 5$ demonstre o atraso puro de tempo.

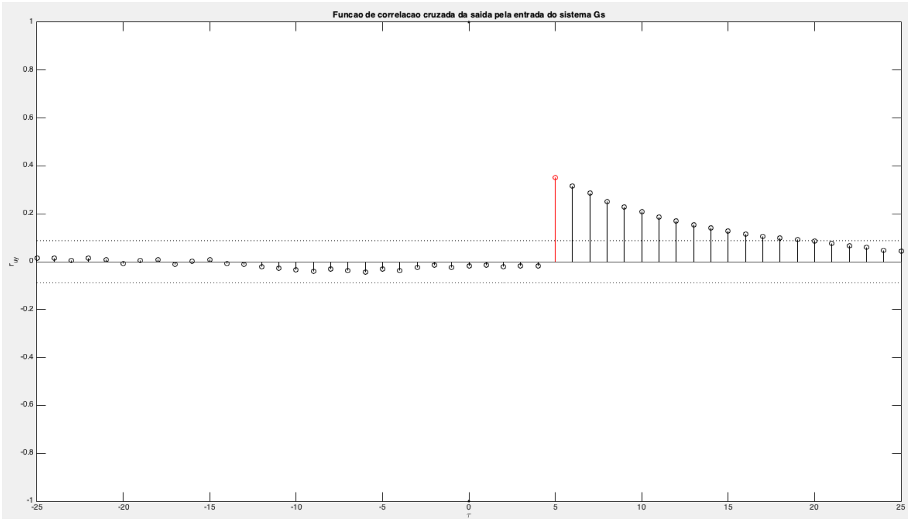

Figura 2: Correlação cruzada entre entrada e saída do sistema modelado.

Como é possível observar no gráfico, a maior correlação cruzada, destacada em vermelho, demonstra o atraso puro de tempo, pois é quando os valores de entrada e saída mais se coincidem. É possível mostrar, portanto, que o atraso puro de tempo é 10 unidades temporais.

1.3 Estimação dos parâmetros do sistema

Agora, utilizando o método dos Mínimos Quadrados, pretende-se estimar os parâmetros do sistema, que no caso de um sistema de primeira ordem, pode se resumir aos parâmetros constante de tempo τ e ganho do sistema $\mathbf{K}$. O cálculo dos parâmetros se dá utilizando a metodologia mostrada no exemplo 8.5.1 do livro-texto. O exemplo mostra um sistema representado a partir de um modelo recursivo, como visto na equação abaixo:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1)$$

A relação entre os parâmetros a_1 e b_1 são determinadas como:

$$a_1 = 1 - \frac{T_s}{\tau}; \quad b_1 = \frac{T_s K}{\tau}$$

Então, pelo método de Mínimos Quadrados, a matriz de regressores é definida como:

$$\Psi = [y_0(k-1)\ u(k-1)]^T \tag{1}$$

$$\hat{\Theta} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{y} = [a_1 b_1]^T \tag{2}$$

A partir dessa configuração, os valores de $\hat{\Theta}$ encontrados foram $[0.90480.1903]^t$. Assim, os parâmetros do sistema de primeira ordem estimados são:

- $\hat{\tau} = 21.0167$
- $\hat{K} = 2.0$

Os resultados acima demonstram que o Método de Mínimos Quadrados estimou muito bem os parâmetros do sistema de primeira ordem definido.

1.4 Estimação na presença de ruído

Para esta seção, deseja-se analisar o uso do Método de Mínimos Quadrados para alguns exemplos de sistemas com pouco ruído e com muito ruído presentes. Para simular o ruído, uma função geradora de ruído branco gaussiano (White Gaussian Noise) foi utilizada. O sistema G(s) recebeu então como entrada o ruído branco mencionado.

1.4.1 Ruído Branco Baixo

Gerando um ruído de baixa potência - $power = 0.15$, o sistema foi testado e os parâmetros estimados resultantes estão abaixo:

- $\hat{\tau} = 16.2922$
- $\hat{K} = 1.8133$

A imagem abaixo mostra o sistema resultante, e correlação cruzada entre entrada e saída do sistema com ruído branco de baixa potência inserido.

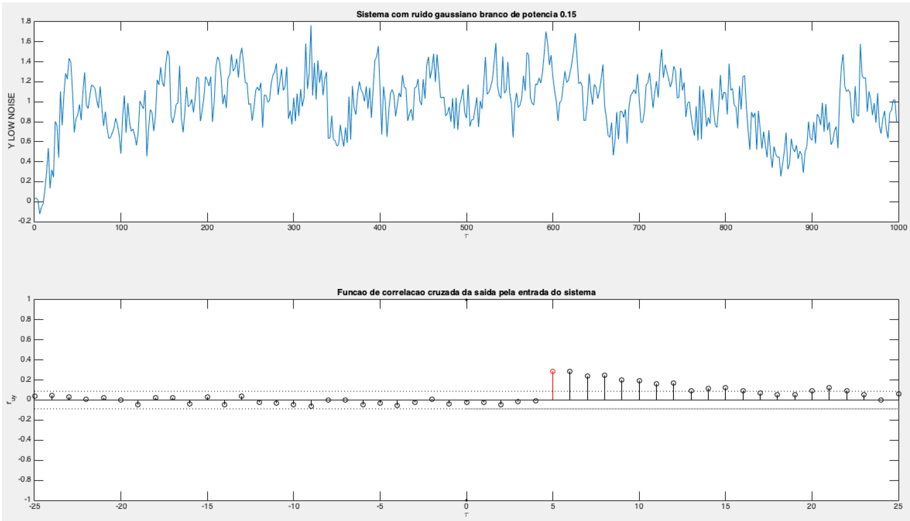

Figura 3: Análise do sistema com ruído de **baixa** potência inserido.

Apesar de os valores serem próximos aos valores originais, é possível perceber que a presença de ruído na planta (algo que na prática é bastante comum), mesmo que com potência baixa, afeta na identificação do sistema real.

1.4.2 Ruído Branco Alto

Gerando um ruído de potência mais alta - $power = 5$, o sistema foi testado e os parâmetros estimados resultantes estão abaixo:

- $\hat{\tau} = 2.0419$
- $\hat{K} = 1.0711$

A imagem abaixo mostra o sistema resultante, e correlação cruzada entre entrada e saída do sistema com ruído branco de baixa potência inserido.

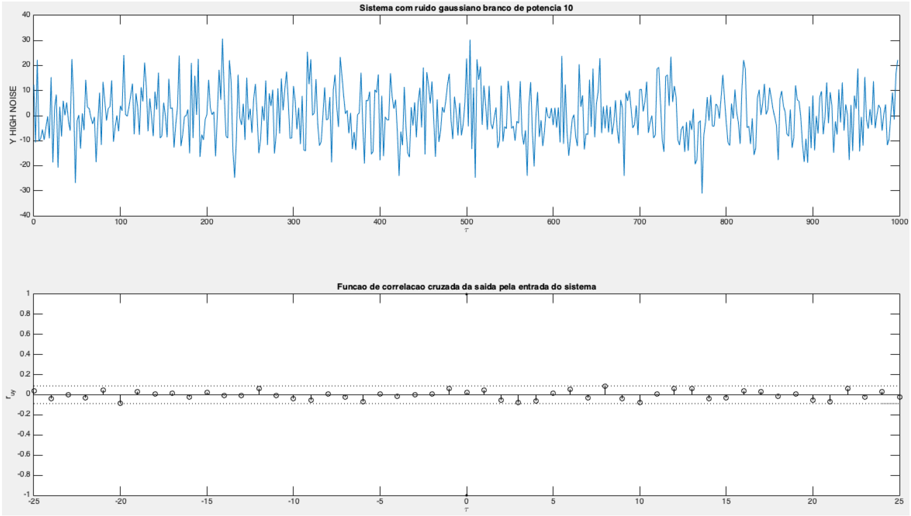

Figura 4: Análise do sistema com ruído de **alta** potência inserido.

Neste caso, como a potência do ruído é muito alta, a influência que o ruído exerce no sistema é tão grande, que é possível dizer, tanto graficamente quanto pelos valores estimados acima, que o sistema ficou descaracterizado. É possível dizer portanto que, apesar de robusto a uma certa quantidade de ruído no sistema, o MMQ não consegue estimar com toda precisão sistemas altamente ruidosos.

2 Aplicação do MMQ para identificação de sistemas

O exercício a seguir tem como objetivo utilizar o MMQ na estimação de parâmetros de um sistema a partir de uma massa de dados experimentais (*prbsa02*). Os dados foram carregados, e plotados da forma "crua". Observando as características destes dados, foram realizados alguns tratamentos antes de tentar a identificação do sistema.

Primeiramente, foi aplicado um filtro de média móvel para reduzir o ruído dos dados de saída do sistema. Após a filtragem inicial, os dados de entrada (um sinal PRBS) e de saída foram normalizados para melhorar a precisão das análises do sistema.

A resposta do sistema resultante é mostrada no gráfico abaixo:

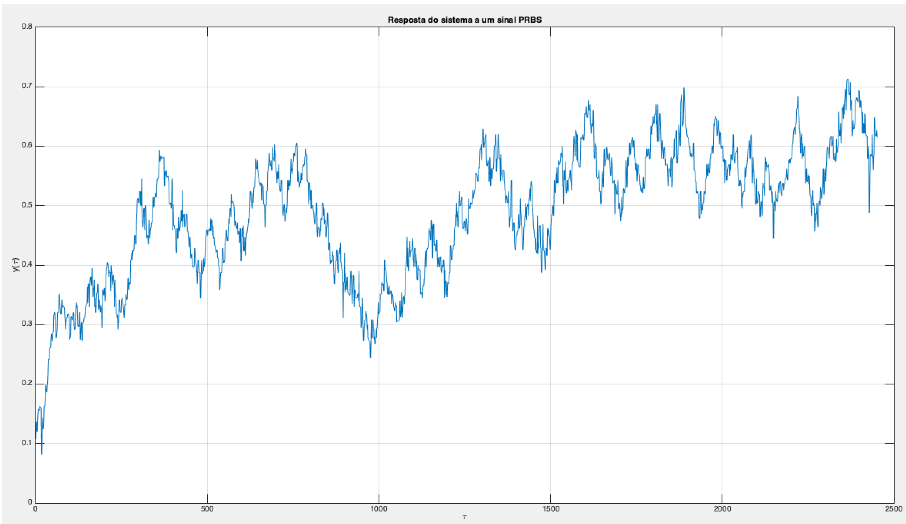

Figura 5: Resposta do sistema tratada por filtro e normalização.

Foi observado um pequeno atraso puro de tempo por inspeção do gráfico, além de que as últimas amostras (com $t > 6000$) mostram um comportamento que não auxilia na identificação do sistema, e é causada pelo fim da entrada PRBS (a resposta passa a se assemelhar a uma resposta ao degrau).

Analisando a correlação cruzada entre a entrada e saída, devido à quantidade de ruído inserido nos dados, é difícil estimar o atraso puro de tempo do sistema, pois a FCC teve muitos valores altos de correlação concentrados em um intervalo de tempo.

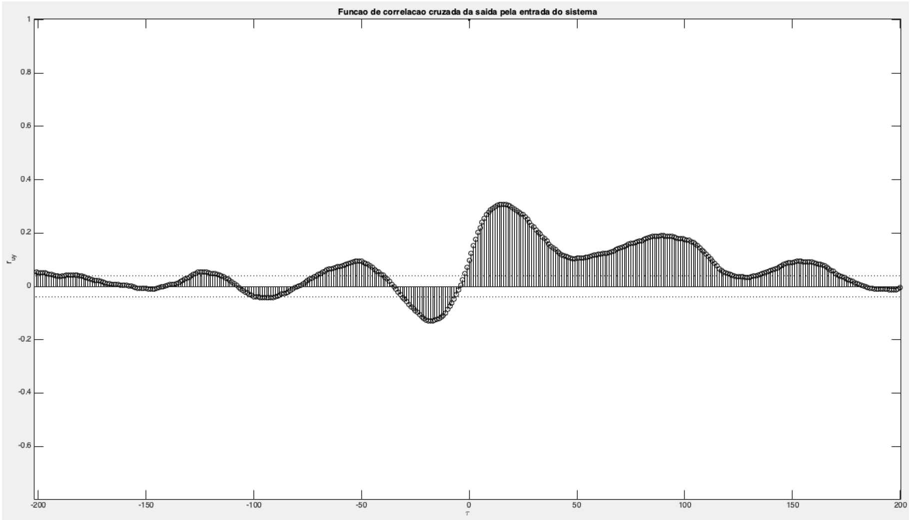

Figura 6: FCC de entrada e saída do sistema.

Assim, a partir das análises acima, os dados foram amostrados, para que a análise de identificação do sistema seja feita no intervalo temporal $50 \leq \tau \leq 2500$. O sistema foi considerado como de primeira ordem, pelas características da resposta mostrada na figura.

Além disso, analisando a autocorrelação do PRBS, mostrada na figura abaixo podemos dizer que o sinal é estatisticamente aleatório.

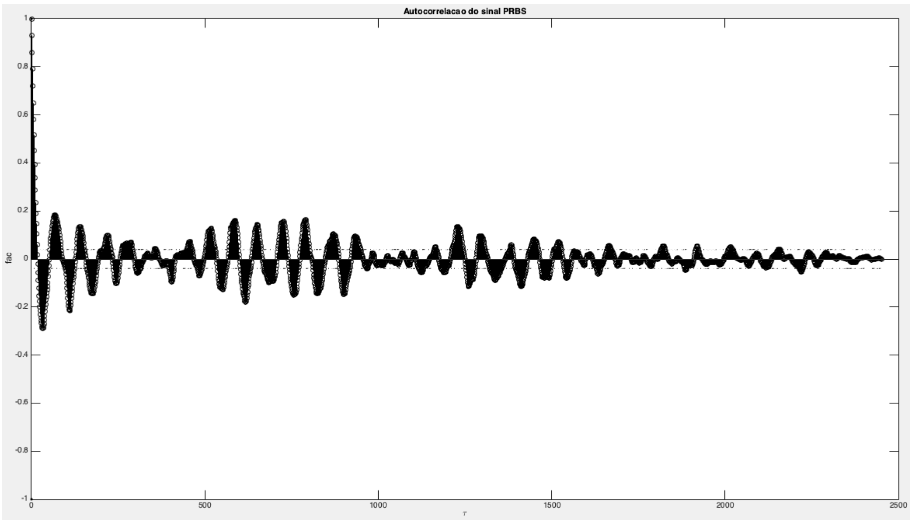

Figura 7: Validação do modelo demonstrado na figura acima.

Utilizando essa amostra e aplicando o MMQ, os parâmetros estimados foram

- $\hat{\tau} = 269.9071$
- $\hat{K} = 1.0110$

2.1 Análise dos resultados

O sistema estimado acima tem resposta ao degrau como mostrada abaixo:

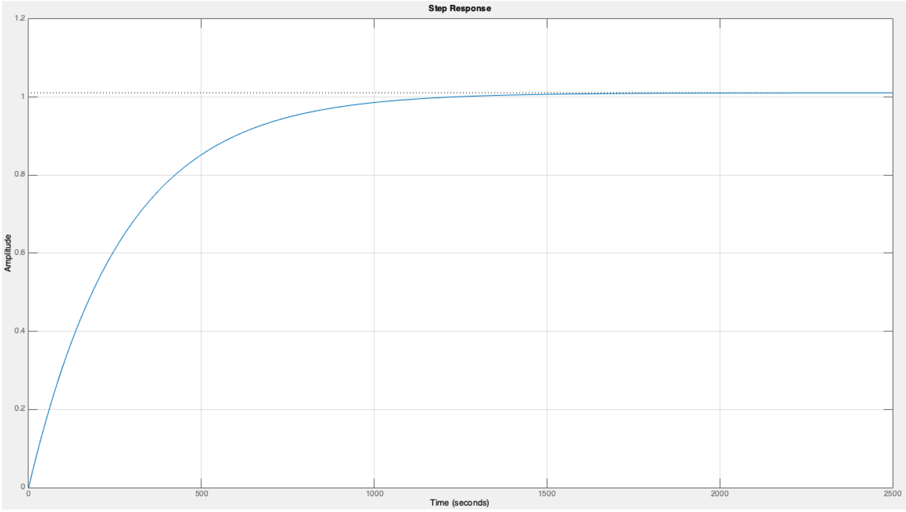

Figura 8: Resposta ao degrau do sistema estimado.

Os dados estimados acima mostram que o sistema tem constante de tempo estimada em 269.9 segundos, e ganho próximo ao ganho unitário. Para testar o sistema identificado, foi aplicada a mesma entrada PRBS à função de transferência do sistema estimado. O resultado pode ser visto abaixo, comparando aos dados experimentais usados:

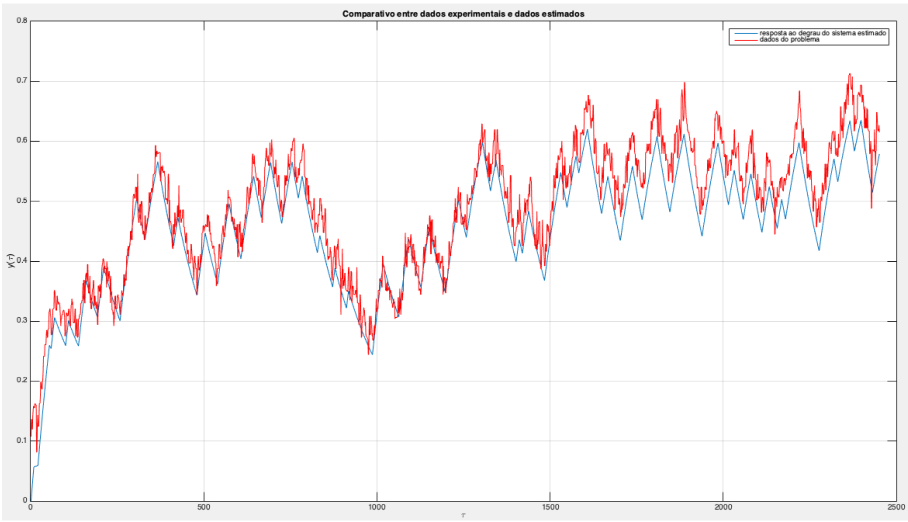

Figura 9: Validação do modelo estimado comparado a dados experimentais.

Pode-se observar uma boa qualidade na estimação dos parâmetros do sistema identificado a partir dos dados experimentais. A título de comparação, os dados resultantes desta análise, ao serem analisados em relação aos dados do exemplo 4.6.1, mostram que a constante de tempo dos dois sistemas se equiparam. Porém, no exemplo, o eixo vertical do gráfico mostra o valor de nível em metros. No caso deste exercício, a amplitude do sinal é diferente, o que pode indicar que a unidade de medida é diferente.

Portanto, o os dados dos dois problemas são incomparáveis, apesar de dizerem respeito à mesma planta. A imagem abaixo mostra o resultado obtido no exercício com os dados da tarefa 2

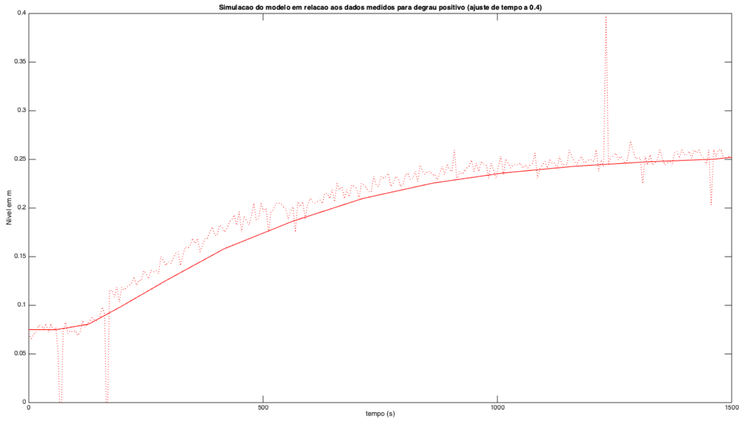

Figura 10: Validação do modelo demonstrado na figura acima.

Com isso, foi possível mostrar uma boa qualidade na identificação do sistema ARX do exercício, mesmo com os dados apresentarem uma quantidade razoável de ruído presente. O método de Mínimos Quadrados apresentou bom comportamento ao estimar os parâmetros do sistema.