UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
Técnicas de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Tarefa 4 - Métodos Não Paramétricos

Artur Soares Bezerra de Mello (2013030392)

1 Exercício 4.8 - Autocorrelação

O exercício 4.8 pede para que seja calculada a autocorrelação do sinal u(k), dado pela combinação de valores do ruído branco com distribuição gaussiana, média nula e variância 0 (gerado pela função implementada, *@wgn*):

$$u(k) = 0.9e(k-1) + 0.8e(k-2) + 0.7e(k-3) + e(k)$$

O resultado numérico foi obtido utilizando a função *@myccf2* disponibilizada pelo autor do livro da disciplina (Aguirre, 2004). Abaixo, o gráfico mostrando os valores de autocorrelação $r_u(k)$:

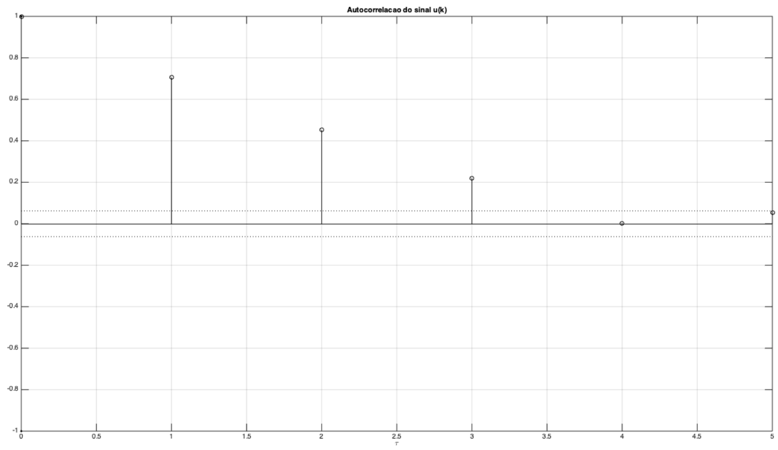

Figura 1: Autocorrelação do sinal u(k).

A imagem demonstra que a correlação do sinal até $\tau = 3$ é maior que o intervalo de confiança que considera $r_u(k) > 0$. Para $\tau > 3$, o resultado é como esperado, ou seja, a correlação é estatisticamente 0. Isso pois o sinal é de ordem 3, ou seja, tende a se repetir em um intervalo de período 3.

O resultado analítico é obtido utilizando o exemplo 4.2.2 do livro da disciplina como referência:

$$\begin{aligned}
r_u(0) &= E[(0.9e(k-1) + 0.8e(k-2) + 0.7e(k-3) + e(k))^2] && (1)\\
&= 0.9^2E[e(k-1)^2] + 0.8^2E[e(k-2)^2] + 0.7^2E[e(k-3)^2] + E[e(k)^2] && (2)\\
&= 1 && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_u(1) &= E[(0.9e(k-1) + 0.8e(k-2) + 0.7e(k-3) + e(k))^2] && (4)\\
&= 0.9^2E[e(k-1)^2] + 0.8^2E[e(k-2)^2] + 0.7^2E[e(k-3)^2] + E[e(k)^2] && (5)\\
&= 0.74 && (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_u(2) &= E[(0.9e(k-1) + 0.8e(k-2) + 0.7e(k-3) + e(k))^2] && (7)\\
&= 0.9^2E[e(k-1)^2] + 0.8^2E[e(k-2)^2] + 0.7^2E[e(k-3)^2] + E[e(k)^2] && (8)\\
&= 0.45 && (9)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_u(3) &= E[(0.9e(k-1) + 0.8e(k-2) + 0.7e(k-3) + e(k))^2] &(10)\\
&= 0.9^2 E[e(k-1)^2] + 0.8^2 E[e(k-2)^2] + 0.7^2 E[e(k-3)^2] + E[e(k)^2] &(11)\\
&= 0.22 &(12)
\end{aligned}
$$

Os valores são coerentes com o resultado alcançados.

2 Exercício 4.15 - Sinais pseudoaleatórios

Deseja-se agora gerar o mesmo sinal pseudoaleatório PRBS mostrado na figura 4.10 do livro. Os valores designados para a função PRBS foram:

$$
\begin{aligned}
&b = 6 &(13)\\
&N = (2^b - 1) * 3 = 189 &(14)\\
&T_b = 1 &(15)
\end{aligned}
$$

Utilizando a função *@prbs*, é possível ver o sinal gerado, assim como está exposto no livro texto. Além disso, utilizando a função *@myccf2*, foi possível calcular a autocorrelação do PRBS de sequência m definido. A figura abaixo mostra os resultados:

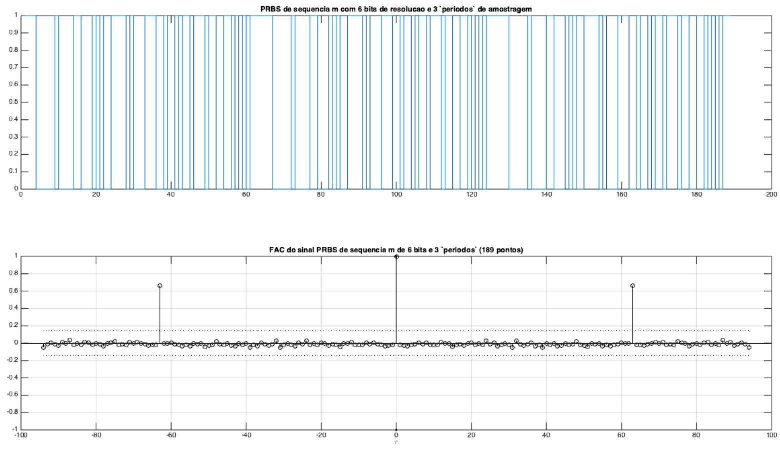

Figura 2: PRBS de sequência m com 6 bits de resolução e 3 'períodos' amostrados.

É possível perceber que a autocorrelação se mantém estatisticamente nula em quase toda a duração do sinal, e é alta quando o sinal começa a se repetir, o que acontece nos valores de $\tau = 0, \tau = -63e\tau = 63$. Como a função foi calculada no intervalo $-N/2 \leq \tau \leq N/2$, os valores de autocorrelação foram redistribuídos de acordo.

2.1 Exercício 4.16 - Variando T_b

Agora, pretende-se variar o período T_b, que indica o período necessário para que o valor do sinal PRBS possa vir a mudar aleatoriamente ou não. Sendo assim, é esperado que, para altos valores de T_b, o sinal se comporte quase como uma sequência de pulsos mais largos. Fazendo a variação de T_b, foram obtidos os resultados abaixo:

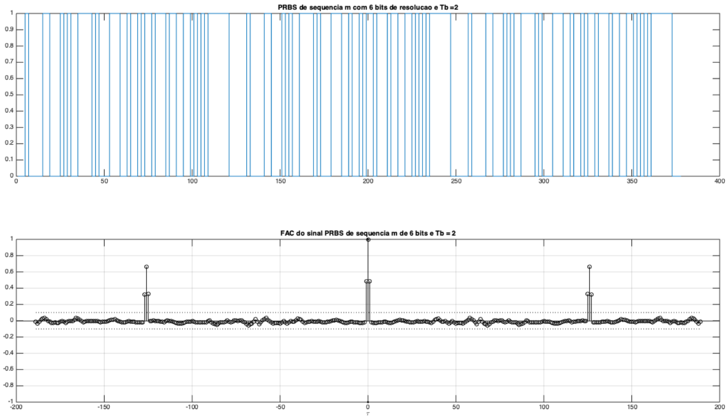

Figura 3: PRBS para $T_b = 2$.

Dobrar o período de permanência T_b faz com que o período do sinal PRBS dobre, ou seja, T=126, comparado com T=63 para $T_b = 1$. Essa análise é perceptível na figura acima. Além disso, também é possível notar que os valores de autocorrelação do sinal aumentaram em 2 momentos de amostragem. Isso é explicado pelo fato de que a aleatoriedade do sinal diminuiu, e, em 2τ o sinal irá repetir seu valor.

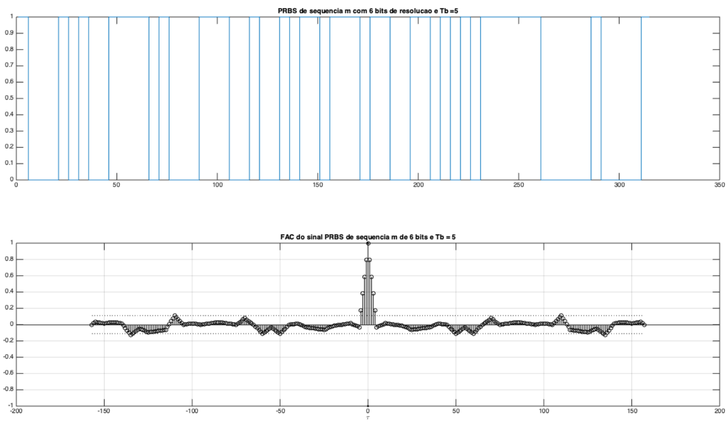

Figura 4: PRBS para $T_b = 5$.

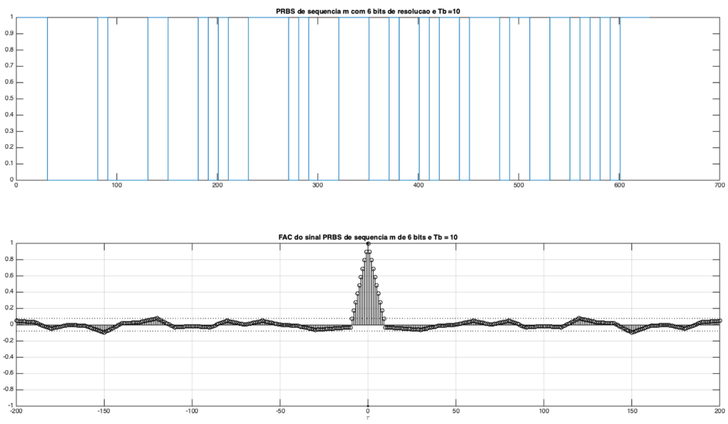

Figura 5: PRBS para $T_b = 10$.

As mesmas análises feitas para $T_b = 2$ podem ser transportadas para os outros valores de T_b. É importante notar também que, como esperado, quando $T_b = 10$, o sinal PRBS terá uma duração de igual valor relativamente muito longa, o que reduz sua capacidade de aleatoriedade na análise de sistemas utilizando este como entrada.

Para o cálculo de autocorrelação, levando em conta o valor de T_b, é esperado que a autocorrelação do sinal portanto seja alta para um intervalo de tempo igual ao valor especificado por T_b.

3 Exercício 4.20 - Simulação da resposta do sistema

Para este exercício, o objetivo é testar o sistema dado pela equação abaixo. Para o teste, é importante conseguir tentar verificar a resposta do sistema a oscilações aleatórias. O sistema H(s) é representado pela função de transferência:

$$H(s) = \frac{1}{1000s + 1}$$

Este sistema possui ganho unitário e uma constante de tempo $\tau = 1000$. Para testar o sistema utilizando o sinal PRBS, foram propostos 4 experimentos, variando o valor de T_b no intervalo [1, 100, 1000, 10000].

Como $\tau = 1000$ para o sistema, é possível dizer que o sistema de primeira ordem descrito alcança aproximadamente 98% de seu estado final (regime permanente) em 4τ. Assim, para ser possível testar o sistema com um PRBS, a escolha do número de bits do registrador deve ser suficiente para se ter um sinal aleatório que acompanhe o regime transitório do sistema. Escolheu-se, portanto, 12 bits para o PRBS de sequência m. Com isso, é possível obter uma resolução do PRBS de até 4095, o que está acima do período de acomodação do sistema calculado acima.

Os resultados estão mostrados a seguir, em azul a resposta à entrada PRBS, e em cinza, a entrada PRBS propriamente dita, variando-se T_b:

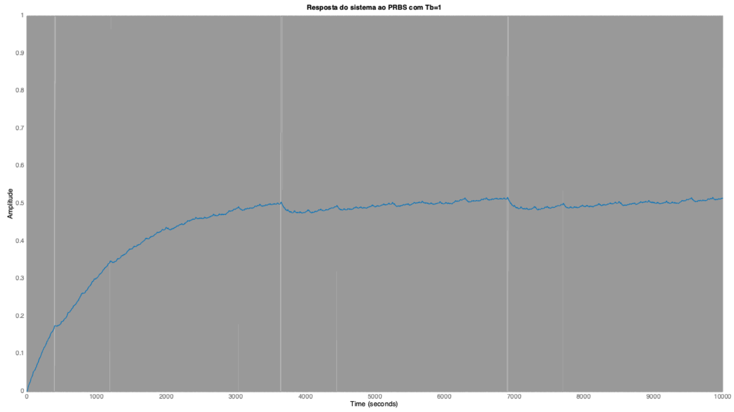

Figura 6: Resposta do sistema para PRBS com $T_b = 1$.

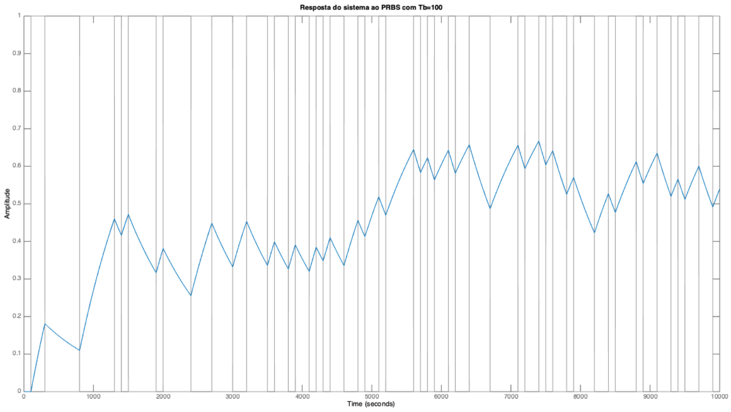

Figura 7: Resposta do sistema para PRBS com $T_b = 100$.

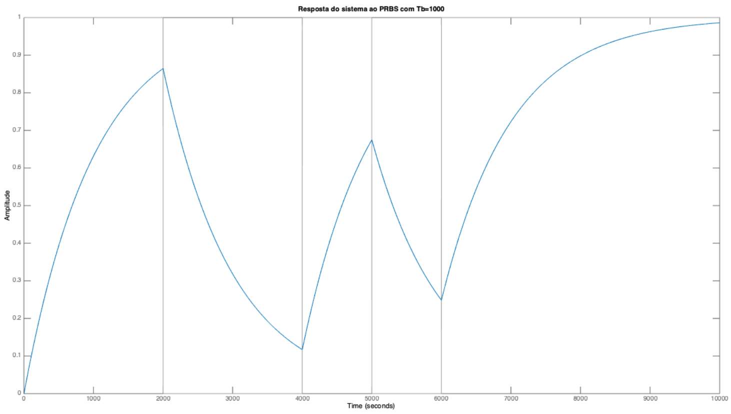

Figura 8: Resposta do sistema para PRBS com $T_b = 1000$.

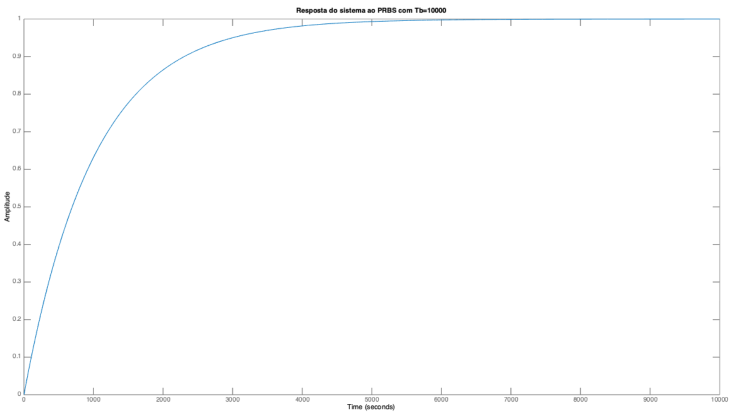

Figura 9: Resposta do sistema para PRBS com $T_b = 10000$.

É possível ver que, para $T_b = 1$, a oscilação do PRBS é tão rápida que o sistema não consegue reagir e excursionar suficiente quantidade de energia do sinal para gerar oscilações suficientes para ser testado, e nem se carregar completamente, ficando com amplitude aproximadamente igual a 0.5. Para $T_b = 10000$, a variação do sinal do PRBS é tão lenta que, como já dito antes, o sinal se comportará como um degrau unitário, gerando a resposta ao degrau obtida na figura acima.

Já para os valores intermediários de $T_b = 100$ e $T_b = 1000$, é possível observar melhor oscilação na amplitude da resposta do sistema ao PRBS. Porém, para $T_b = 1000$, ainda há uma lentidão, que gera quase uma sequência de respostas a pulsos maiores, o que também torna esse sinal PRBS ineficiente para o teste do sistema.

Pode-se concluir, portanto, que o PRBS com valor de $T_b = 100$ é o mais adequado para a realização dos testes do sistema H(s) descrito, pois causa oscilações que permitem uma melhor análise do comportamento do sistema a diferentes tipos de entradas (um maior espectro de frequência de sinais de entrada é testado).