Artūrs Nelsons Rīgas Valsts 3. ģimnāzija

Bruto algas pieaugums no 1995. līdz 2023. gadam.

Algas un to pieaugums ir viens no vissvarīgākajām ekonomiskajiem rādītājiem jebkurā valstī. Bruto algas pieaugums atspoguļo gan valsts ekonomisko attīstīšanos, gan darba tirgus dinamiku un uzņēmumu spēju nodrošināt konkurētspējīgu atalgojumu saviem darbiniekiem. Latvijā bruto algu ietekmē vairākas lietas, tai skaitā ekonomiskā izaugsme, inflācija un minimālās algas paaugstināšana.

Šajā darbā es pētīšu bruto algas pieaugumu Latvijā no 1995. gada līdz 2023. gadam un atradīšu vispiemērotāko matemātisko modeli, kā arī izsecināšu, vai ar šo matemātisko modeli ir iespējams prognozēt nākotnes algas.

Iemesls, kādēļ es izvēlējos pētīt tieši algas ir tas, ka man nākotnē arī vajadzēs strādāt, un ir svarīgi noteikt, vai alga, ko es saņemšu, ir atbilstoša citiem darbiniekiem sektorā un valsts līmenī. Šī informācija būs īpaši noderīga, ja nolemšu dibināt savu uzņēmumu, jo, lai piesaistītu labus darbiniekus, būs jānodrošina pievilcīgs atalgojums, kas pārsniedz vidējo algu valstī. Turklāt man ļoti patīk analizēt dažādu valstu ekonomiskos rādītājus un salīdzināt to ekonomisko attīstību.

Datu ieguvei tika izmantota vietne stat.gov.lv.

Vidējās algas Latvijas Republikā no 1995. gada līdz 2023. gadam (Bruto) (stat.gov.lv)

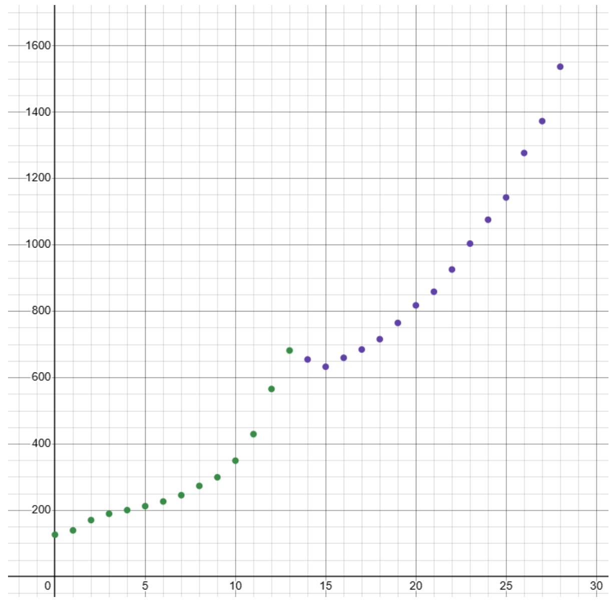
1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
127	140	171	190	201	213	227	246	274	300	350	430	566	682	655

2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
633	660	685	716	765	818	859	926	1004	1076	1143	1277	1373	1537

Tabula 1 – Vidējās algas Latvijas Republikā no 1995. gada līdz 2023. gadam (Bruto)

Ievadīto datu apstrāde

Lai atvieglotu punktu atlikšanu, es x vērtības samazināju par tieši 1995 vienībām, lai 1995. gada punkts krustotu y asi (1995. gads ir 0. gads).



Ilustrācija 1 - Atliktie punkti uz koordinātu ass pēc x ass datu apstrādes.

Pēc punktu attēlošanas vietnē “Desmos.com”, es sapratu, ka nebūs īsti iespējams aprakstīt visu ar vienu funkciju, jo ap 2009. gadu Latvija un citas valstis sastapās ar finanšu krīzi, kas izraisīja pēkšņu algu samazinājumu. Ja tiktu izmantota viena funkcija, tad tai vajadzētu būt lielākas pakāpes, un tādas aprēķināt ir grūti. Šī iemesla dēļ, pēc krīzes vajadzēs izmantot citu funkciju.

Lai vizualizētu šos datus ar funkciju, vispirms vajag izsecināt, ko atliktie punkti atgādina. Šajā gadījumā, pirmskrīzes (14 punkti) datus varētu attēlot ar kuba funkciju (1. vienādojums):

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

1. vienādojums – kuba pamatfunkcija

taču pēckrīzes (15 punkti) datus – ar kvadrātfunkciju (2. vienādojums):

$$y = ax^2 + bx + c$$

2. vienādojums – kvadrāta pamatfunkcija.

Funkciju noteikšana

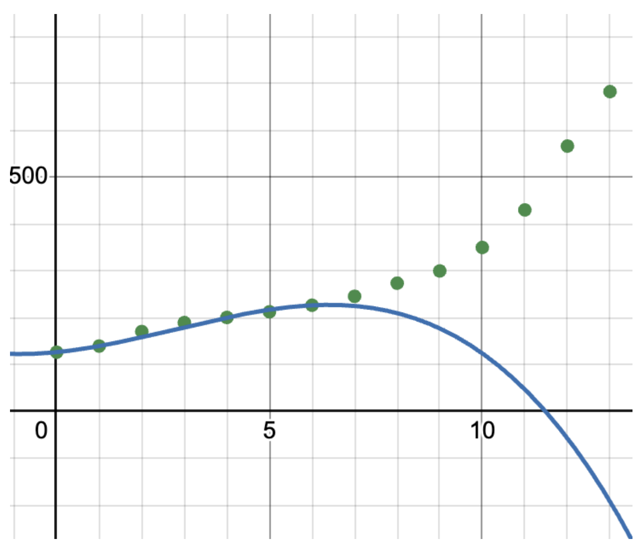
Lai noteiktu Funkciju, nepieciešamas vismaz tik punktu koordinātas, cik pamatvienādojumā ir nezināmie. Tātad kuba vienādojumā vajadzēs izmantot 3 punktus (nav 4, jo d no 1. vienādojuma ir jau zināms – tas krusto y asi un tā vērtība ir 127).

Kvadrātfunkcijai arī nepieciešams zināt vismaz 3 vērtības, jo šoreiz pirmā vērtība nekrusto y asi.

Kuba funkcijai ir $C_3^{13} = 286$ veidi un kvadrātfunkcijai ir $C_3^{15} = 455$ veidi, kā izvēlēties punktus, no kuriem veidot funkciju. Ar šādu punktu skaitu, vidējs cilvēks nespēj atrast vispiemērotāko funkciju un būtu nepieciešams atrast efektīvāku veidu, kā noteikt funkciju.

Pamazām es sāku aizdomāties, vai ir kāds ātrāks veids kā šo atrisināt. Sākotnēji domāju par to, ka dators no dotajiem punktiem izskaitļo visas iespējamās polinomu funkcijas, no kurām katram koeficientam tiek atrasta vidējā vērtība. Šī metode datus precīzi neaprakstīja, jo daudzas funkcijas akurāti attēlo tikai dažus no datu punktiem, pirms tās strauji pieaug vai dilst.

Ejot mājās no skolas, es iebļāvos: "STANDARTNOVIRZE!" Kaut gan tā parasti tiek izmantota statistikā, es sapratu, ka to var izmantot arī šeit. Standartnovirze mēra, cik cieši dati atrodas ap vidējo aritmētisko (Cuemath, skat. 17.03.2025). Tāpēc es izstrādāju programmatūru, kas nosaka visas iespējamās funkcijas no dotajiem datu punktiem. Programma katrai x vērtībai nosaka novirzi no faktiskās vērtības un pievieno tās sarakstam. Visbeidzot, no šī saraksta tiek aprēķināta standartnovirze. Mazāka standarta novirze norāda, ka funkcija ir labāk piemērota datu attēlošanai. Skat. 2. attēlu piemēram, kur standartnovirze ir liela un tādēļ datus pārāk labi neattēlo.



Ilustrācija 2 - Grafiks, kam standartnovirze ir liela (tātad pārāk labi datus neattēlo)

Pēc programmas ieskatiem es noteicu 3 labākos punktus, ar kuriem varēs aprēķināt pirmskrīzes datus un 3 punktus, lai aprēķinātu pēckrīzes funkciju. Mana programma atrada, ka mazākā standartnovirze kuba funkcijai (no dotajiem punktiem) būs, ja es ņemšu punktus:

$$x_1 = 3;\ y_1 = 190$$
$$x_2 = 9;\ y_2 = 300$$
$$x_3 = 13;\ y_3 = 682$$

Tā izveido vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a(3)^3 + b(3)^2 + 3c + 127 = 190 \\ a(9)^3 + b(9)^2 + 9c + 127 = 300 \\ a(13)^3 + b(13)^2 + 13c + 127 = 682 \end{cases} \quad \begin{cases} 27a + 9b + 3c = 63 \\ 729a + 81b + 9c = 173 \\ 2197a + 169b + 13c = 555 \end{cases}$$

Izsaka c: $c = \frac{63-9b-27a}{3} = 21 - 3b - 9a$

Ievieto c izteikto vērtību pārējos vienādojumos:

$$\begin{cases} 729a + 81b + 9(21 - 3b - 9a) = 173 \\ 2197a + 169b + 13(21 - 3b - 9a) = 555 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 648a + 54b = -16 \\ 2080a + 130b = 282 \end{cases}$$

Augšējo vienādojumu reizina ar $-\frac{130}{54}$: $\begin{cases} -1560a - 130b = 38\frac{11}{27} \\ 2080a + 130b = 282 \end{cases}$ Saskaita abus vienādojumus:

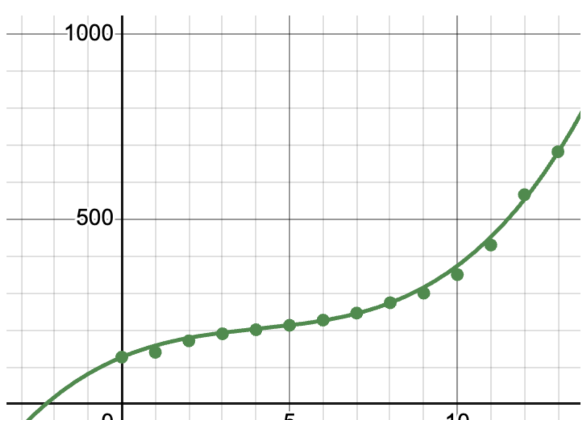
$520a = 320\frac{11}{27} \Rightarrow a = \frac{\left(320\frac{11}{27}\right)}{520} \approx 0.616$ Izsaka un aprēķina b: $b = \frac{-16-648a}{54} = \frac{-16-648(0.616)}{54} \approx -7.69$, aprēķina c: $c = 21 - 3b - 9a = 21 - 3(7.69) - 9(0.616) \approx 38.5$

Tātad:

$a \approx 0.616 \quad b \approx -7.69 \quad c \approx 38.5\ d = 127$

$$\boldsymbol{f(x) = 0.616x^3 - 7.69x^2 + 38.5x + 127, x \in [0; 13]}$$

Šī funkcija aptuveni apraksta vidējo algu dinamiku pirms ekonomiskās krīzes (3. attēls).



Ilustrācija 3 - pirmskrīzes izrēķinātā kuba funkcija

Taču 3 labākie punkti kvadrātfunkcijai (pēckrīzes dati), pēc programmas domām, ir:

$$x_1 = 16; y_1 = 660$$
$$x_2 = 24; y_2 = 1076$$
$$x_3 = 26; y_3 = 1277$$

Tā izveido vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} a(16)^2 + 16b + c = 660 \\ a(24)^2 + 24b + c = 1076 \\ a(26)^2 + 26b + c = 1277 \end{cases} => \begin{cases} 256a + 16b + c = 660 \\ 576a + 24b + c = 1076 \\ 676a + 26b + c = 1277 \end{cases}$$

Izsaka c: $c = 660 - 256a - 16b$

Ievieto c pārējos vienādojumos: $\begin{cases} 576a + 24b + (660 - 256a - 16b) = 1076 \\ 676a + 26b + (660 - 256a - 16b) = 1277 \end{cases}$

$\begin{cases} 320a + 8b = 416 \\ 420a + 10b = 617 \end{cases}$, reizina augšējo vienādojumu ar -5 un apakšējo vienādojumu ar 4

$\begin{cases} -1600a - 40b = -2080 \\ 1680a + 40b = 2468 \end{cases}$ saskaita abus vienādojumus: $80a = 388$

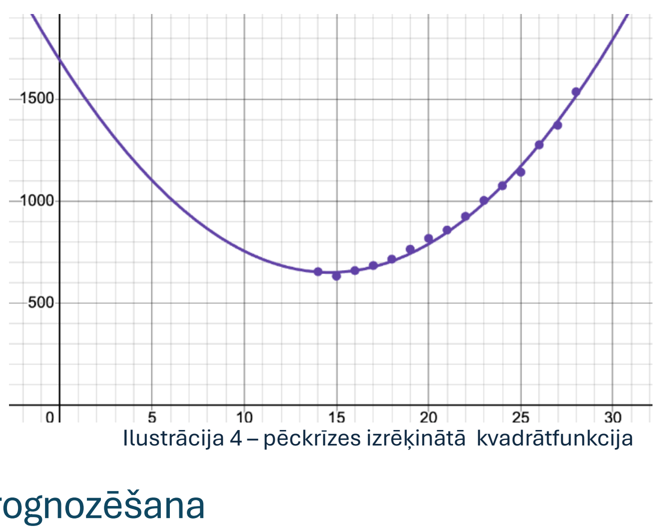
$a = \frac{388}{80} = 4.85$ Izsaka un aprēķina b: $b = \frac{416-320a}{8} = \frac{416-4.8(320)}{8} = -142$

Aprēķina c: $c = 660 - 256a - 16b = 660 - 256(4.85) - 16(-142) = 660 - 1241.6 + 2272 = 1690.4$

Tātad, kvadrātvienādojuma koeficienti ir:

$a = 4.85$ $b = -142$ $c = 1690.4$, beigu vienādojums:

$$\boldsymbol{g(x) = 4.85x^2 - 142x + 1690.4; x \in [14; 28]}, \text{(4. att)}$$



Ilustrācija 4 – pēckrīzes izrēķinātā kvadrātfunkcija

Nākotnes algu prognozēšana

Vietne stat.gov.lv ļauj skatīt bruto algas līdz 2024. gadam, taču šajā darbā tika attēloti dati tikai līdz 2023. gadam. Tas dod iespēju noteikt, cik akurāti matemātiskais modelis nosaka nākamā

(2024.) gada algu. Pēc mājaslapas datiem, 2024. gada vidējā alga ir 1685 eiro. Aplūkosim, cik tuvu mana izveidotā funkcija ir oficiālajai statistikai.

$$g(2024-1995) = g(29) = 4.85(29)^2 - 142(29) + 1690.4 = 4078.85 - 4118 + 1690.4 = 1651.25\ (EUR)$$

Aprēķināsim relatīvo kļūdu:

$$r = \frac{1685 - 1651.25}{1651.25} \times 100\% \approx 2.04\%$$

2.04% kļūda ir ļoti pieņemama un bieži sastopama kļūda, kas nozīmē to, ka 2024. gadu šī funkcija prognozē diezgan labi.

Secinājumi un diskusija

Pētījumā aplūkots algu pieaugums no 1995. gada līdz 2023. gadam, kā arī izstrādāts matemātiskais modelis algu attēlošanai un iespējamai prognozēšanai, kas sastāv no divām funkcijām – pirms un pēc 2008. gada ekonomiskās krīzes. Nākamā (2024.) gada vidējā alga tika prognozēta ar aptuveni 2.04% relatīvo kļūdu.

Ir svarīgi pieminēt, ka, veidojot šo prognozi, ekonomiskie apstākļi netika ņemti vērā un prognozēt turpmākās algas, neņemot vērā ekonomisko stāvokli, dos arvien lielāku un lielāku kļūdu nākamo gadu prognozēs.

Metode, kas tika izmantota, lai atrastu labāko funkciju priekš datiem, ir saistīta ar standartnovirzi. Kaut gan šī metode ir jauna un interesanta, tās efektivitāte nav optimāla, jo tas aizņem daudz resursus, lai aprēķinātu visas iespējamās funkcijas. Labāka metode, ko var izmantot, ir "mazākā kvadrātu metode", kas minimizē novēroto un prognozēto vērtību starpības kvadrātus, nodrošinot precīzāku un efektīvāku risinājumu (Cuemath, skat. 17.03.2025).

Izmantotā literatūra

Standard deviation - formula | How to calculate standard deviation? (n.d.). Cuemath. https://www.cuemath.com/data/standard-deviation/

Strādājošo mēneša vidējā darba samaksa un mediāna (eiro; pārmaiņas pret iepriekšējo periodu (procentos)) 1990 - 2024-Oficiālās statistikas portāls. (n.d.). Oficiālās Statistikas Portāls. https://data.stat.gov.lv/pxweb/lv/OSP_PUB/START__EMP__DS__DSV/DSV010

Least square Method - formula, definition, examples. (n.d.). Cuemath. https://www.cuemath.com/data/least-squares/