№2

Нужно доказать, что

$$\|X-\tilde{X}\|_F^2 = \sum_{i=\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i, \text{ где}$$

λ_i – сингулярные значения X,

$\tilde{F}$ – размерность редуцированной матрицы $\sqrt{\tilde{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \sqrt{\lambda_{\tilde{F}}} & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

(точнее кол-во ненулевых значений),

а $\sqrt{\Lambda} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_F} \end{pmatrix}$

Воспользуемся тем, что

$$\forall A \in Matrix \hookrightarrow \|A\|_F^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = tr(A^T A), \text{ тогда}$$

т.к. $X = V\sqrt{\Lambda}U^T$; $\tilde{X} = V\sqrt{\tilde{\Lambda}}U^T$, то

$$(X-\tilde{X})^T(X-X) = \left(V(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\right)^T \left(V(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T\right) =$$

$$= U(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})V^T V(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})U^T$$

т.к. $V^T V = \mathbb{1}$ и $\sqrt{\Lambda}\sqrt{\tilde{\Lambda}} = \sqrt{\tilde{\Lambda}}\sqrt{\Lambda}$

$$(\sqrt{\Lambda}-\sqrt{\tilde{\Lambda}})^2 = \Lambda + \tilde{\Lambda} - 2\sqrt{\Lambda}\sqrt{\tilde{\Lambda}} =$$

$= \Lambda + \tilde{\Lambda} - 2\hat{\Lambda} = R$, где

$$R = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & \lambda_{\tilde{F}+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_F \end{pmatrix}$$

Итого:

$$(X-\tilde{X})^T(X-\tilde{X}) = URU^T.$$

$$tr(URU^T) = \delta_{ij} U_{ik} R_{kl} U_{jl} =$$

$= U_{jk} R_{kl} U_{jl}$, т.к. $U^{-1} = U^T$, то

$U_{jk} U_{jl} = \delta_{kl}$ и

$$U_{jk} R_{kl} U_{jl} = \delta_{kl} R_{kl} = R_{kk} =$$

$$= tr\, R = \sum_{i=\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i,$$

и можно было и сразу: $tr(URU^T) = tr(RU^TU) = tr(R)\ldots$

Итак,

$$\|X-\tilde{X}\|_F^2 = \sum_{i=\tilde{F}+1}^{F} \lambda_i$$

№3.

$\exists u$ — ~~собствен~~ сингулярный ~~собствен~~ный ~~вектор~~ вектор ~~матрицы~~ X с наибольшим ~~собственным~~ сингул. числом ~~λ_1~~, тогда он ~~такого~~ ~~вектор~~ доставляет максимум $(Xu)^2$ среди всех u: $\|u\|=1$:

~~Доказательно~~ Д-во: Действительно,

$$\cancel{X} \quad X = V\sqrt{\Lambda}\, U^T \qquad U^T U = \mathbb{1}$$

$$V = [\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_m]$$

$$XU = V\sqrt{\Lambda}$$

$$U = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m]$$

$$\cancel{Xu} =$$

$$X\vec{u} = \vec{v}\sqrt{\lambda_{max}} \qquad V^T V = \mathbb{1}$$

$$(X\vec{u})^T(Xu) = \underbrace{\vec{v}^T\vec{v}}_{1}\,\lambda_{max} =$$

$= \lambda_{max}$. Т.к. $\|\vec{u}\|=1$ $(X\vec{u})^T(X\vec{u}) = (X\vec{u})^2$, то максимум $(X\vec{u})^2 = \lambda_{max}$, ~~т.к.~~ значит,

$$\vec{u} = \cancel{(Xu)^2} \operatorname*{argmax}_{\|\vec{u}\|=1} (Xu)^2$$

№4. $\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i = 0.$

$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$. Матрица объект-приз ~~так~~:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \dots & \dots \\ x_N & y_N \end{pmatrix}$$, тогда если ~~$Xa = \lambda_{max}$~~

~~$Xa =$~~ $Xa = \lambda_{max} a$, где λ_{max} — максимальное собственное число, то

$$L = \sum_{i=1}^{N} \rho((x_i, y_i), \vec{a}) \to$$

$\to \min a$, где ~~$\vec{a}$~~ $\rho((x_i, y_i); \vec{a})$ —

— расстояние от ~~вектора $\vec{a}$~~ точки до прямой, задаваемой вектором $\vec{a}$, проходящей через начало к-т.

Заметим, что т.к. $\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i = 0$, то центр масс системы находится в начале к-т, значит прямая, доставляющая минимум ~~фун~~

Ф-ия ∠ доп. нити проходит через начало к-т. (Это и так понятно, но можно убедится с помощью н-ва треугольника), тогда вспомним 1 семестр:

$$\vec{b_a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a x \\ a y \end{pmatrix},$$

$$\cancel{\exists(\vec{b}, a)}$$

$$\vec{b} = \vec{b_\parallel} + \vec{b_\perp} \qquad \vec{b_\perp} = b - \frac{(b, \vec{a})}{\|a\|}\vec{a}$$

$$\vec{b_\parallel} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$$

$$\vec{b} \ \cancel{\Leftrightarrow}\ b.$$

$$\delta(b, a)^2 = \left\| \vec{b} - \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \right\|^2 = \|b\|^2 - 2(\vec{b}, \vec{a})^2 + (\vec{b}, \vec{a})^2 = \|b\|^2 - (\vec{b}, \vec{a})^2.$$

Рассмотрим ~~а~~ сингулярный а:

$$Xa = \cancel{a}\ \lambda_{max}\, a$$

$$X_a = \begin{pmatrix} x_1 a_x + y_1 a_y \\ x_2 a_x + y_2 a_y \\ \ldots \\ x_N a_x + y_N a_y \end{pmatrix}$$

$$L = \sum_{i=1}^{N} \|b_i\|^2 - \sum_{i=1}^{N} (\vec{b_i}, \vec{a})^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \|b_i\|^2 - (Xa)^2$$

По предыдущей задаче

$$a = \arg\max_{\|a\|=1} (Xa)^2 \text{, значит, -}$$

в этой задаче

$$a = \arg\min_{\|a\|=1} L(X, a)$$

$$\text{и } L_{min} = \sum_{i=1}^{N} \|b_i\|^2 - \lambda^2_{max}$$

№5.

Нужно показать, что нахождение ~~сво~~ сингулярных чисел матрицы

$$X = [\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i]$$ экв-но ~~тако~~

нахождению главных моментов инерции твёрдого ~~тв~~ тела в точках (x_i, y_i, z_i)

Действительно, нахождение сингулярных векторов $X \Leftrightarrow$ нахождение собственных векторов

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i z_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & y_i z_i \\ \sum x_i z_i & \sum y_i z_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix},$$

в то же время, тензор инерции для точек с единичными ~~ма~~ массами:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \sum y_i^2 + z_i^2 & \sum_i x_i y_i & -\sum x_i z_i \\ -\sum y_i x_i & \sum x_i^2 + z_i^2 & -\sum y_i z_i \\ -\sum x_i z_i & -\sum y_i z_i & \sum y_i^2 + x_i^2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что ~~$X^TX+\mathbb{I}$~~ =

$$X^TX+\mathbb{I} = \underbrace{\left(\sum x_i^2+y_i^2+z_i^2\right)}_{C}\cdot \mathbb{1}$$

Тогда в базисе, где X^TX диагональная:

$$U^TX^TXU + U^T\mathbb{I}U = C\cdot U^TU$$

$$\left(\tilde{\mathbb{I}}=\right) U^T\mathbb{I}U = C\cdot\mathbb{1} - \Lambda$$

Справа стоит диагональная матрица, значит, слева — тоже

Обратно: Аналогично для X^TX

Итак, нахождение сингулярных значений $X \longleftrightarrow$ нахождение собственных значений $X^TX \longleftrightarrow$ нахождение собственных значений $U^T\mathbb{I}U \longleftrightarrow$ нахождение собственных векторов ~~$\mathbb{I}$~~ $U^T\mathbb{I}U \longleftrightarrow$ нахождение сингулярных векторов X. Т.е. эти задачи решаются одновременно.