

№1

Распределение Пуассона имеет вид

$$P_{\lambda}(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Априорное распределение вероятностей примем постоянным: $P_{\lambda} = \text{const}$, тогда по теореме Байеса апостериорное распределение будет

$$P(\lambda|m) = p(\lambda) \frac{P(m|\lambda)}{\int_0^{\infty} p(a)P(m|a)da} = \frac{P(m|\lambda)}{\int_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} da} = \frac{P(m|\lambda)m!}{\Gamma(m+1)} = P(m|\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Перед вторым экспериментом априорная вероятность стала равна $p(\lambda) = P(\lambda|m)$. После второго эксперимента с учётом новых данных будет

$$P(\lambda|n) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{\frac{\lambda^n}{n!}}{\int_0^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} \cdot \frac{a^n}{n!} e^{-a} da} = \frac{(2\lambda)^{n+m}}{m!n!} e^{-2\lambda} \cdot \frac{2m!n!}{(m+n)!} = \frac{2^{m+n+1} \lambda^{n+m}}{(m+n)!} e^{-2\lambda}$$

№2 Пусть событие А – Петя получил положительный тест на коронавирус, В – что он болен. С – что он не болен. Тогда по теореме Байеса:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|C)P(C) + P(A|B)P(B)} = \frac{0.99 \cdot 10^{-5}}{0.99 \cdot 10^{-5} + 0.01(1 - 10^{-5})} \approx 10^{-3}$$

№5

$$\mathcal{L} = ||Xw - y||^2 \rightarrow \min_w \sum_{\alpha} |w_{\alpha}| < C$$

Постановка задачи Каруша-Куна-Таккера: найти $\min_{w \in W} f(w)$, причём заданы ограничения на w в виде неравенств $g_i(w) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

Тогда достаточные условия решения этой задачи: \tilde{w} доставляет минимум исходной функции, если

- 1) на \tilde{w} достигается минимум функции лагранжа $L(w) = \mathcal{L}(w) + \mu (\sum_{\alpha} |w_{\alpha}| - C)$
- 2) $\mu (\sum_{\alpha} |\tilde{w}_{\alpha}| - C) = 0$
- 3) $\mu > 0$.

В задаче же L_1 регуляризации требуется доставить минимум функции

$$\mathcal{M} = ||Xw - y||^2 + \mu \sum_{\alpha} |w_{\alpha}|$$

Что автоматически выполнено, если \tilde{w} – решение задачи ККТ. Но в другую сторону тоже очевидно, потому что для решения задачи L_1 – регуляризации w^* , достаточно просто подкрутить C так, чтобы выполнилось условие ККТ 2), остальные выполнены автоматически.