Численное интегрирование

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

19 марта 2021 г.

Содержание

Постановка задачи

Представим определённый интеграл на промежутке $[a, b]$ функции $F(x)$ в виде

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx. \qquad (1)$$

Формулы вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (2)$$

называются квадратурными формулами.
A_k и $x_k \in [a, b]$ - коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Если $F(x)$ имеет интегрируемые особенности, то за счет $p(x)$ их можно выделить.

Как строить квадратурные формулы?

$$n, p(x), [a, b] \to A_k, x_k, k = 1, \dots, n$$

Нужно сформулировать критерий для нахождения узлов x_k и коэффиентов A_k.

Определение

Число m называется алгебраическим порядком точности квадратурной формулы (31), если

1. квадратурная формула точна для всех полиномов степени m и ниже
2. существует хотя бы один полином степени $m + 1$, для которого она не точна.

Утверждение (доказать самостоятельно!)

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности m, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для полиномов $x^j, j = 0, \dots, m$.

Система определяющих уравнений

Условия на весовую функцию $p(x)$

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$
2. $c_k = \int\limits_a^b p(x)x^k dx < \infty$

Если алгебраический порядок точночти равен m, то

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_n = c_0 \\ A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = c_1 \\ \ldots = \ldots \\ A_1x_1^m + A_2x_2^m + \ldots + A_nx_n^m = c_m \end{cases} \tag{3}$$

1. классификация квадратурных формул
2. построение квадратурных формул

Классификация квадратурных формул

1. Узлы и коэффициенты не фиксируются $\Rightarrow$ алгебраический порядок точности $2n-1$.
   Квадратурные формулы наивысшего порядка точности, или квадратурные формулы Гаусса.
2. Если все узлы x_i заданы (и разные), т.е. n параметров зафиксировано $\Rightarrow$ гарантированный алгебраический порядок точности $n-1$.
   Квадратурные формулы интерполяционного типа.
3. Зафиксировано r параметров, $0 < r < n$ $\Rightarrow$ гарантированный алгебраический порядок точности $2n-1-r$.
   Квадратурные формулы смешанного типа.

Пример. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$

$n = 2 \Rightarrow m = 2n-1 = 3$

$\displaystyle C_k = \int_{-1}^{1} x^k\,dx, \quad k = 0, \dots, 3$

$\displaystyle c_0 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{2}{3}, \quad c_3 = 0.$

$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + a_1 x + a_2$

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 + A_2 = 2 \\ A_1 x_1 + A_2 x_2 = 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3 = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \times a_2 \\ \times a_1 \\ \times 1 \\ \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \times a_2 \\ \times a_1 \\ \times 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2a_2 + 0 \cdot a_1 + 1 \cdot \frac{2}{3} = A_1 \cdot \omega(x_1) + A_2 \omega(x_2) = 0 \\ 0 \cdot a_2 + \frac{2}{3} a_1 + 1 \cdot 0 = A_1 x_1 \omega(x_1) + A_2 x_2 \omega(x_2) = 0 \end{cases}$$

$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \omega(x) = x^2 - \frac{1}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$A_1 = A_2 \Rightarrow A_1 = A_2 = 1$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Квадратурные формулы с постоянной весовой функцией

Пусть $p(x) \equiv 1$.

$n, [-1,1] \to A_k, x_k, k = 1, \ldots, n$

1. $[-1,1] \to [a,b]$, $t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x$

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_k\right) \tag{4}$$

2. Обобщенные формулы.

   Разобьем $[a,b]$ на N равных частей: $H = \frac{b-a}{N}$ и $T_i = a + iH, i = 0, \ldots, N$.

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{N}\int_{T_{i-1}}^{T_i} f(t)dt \approx \sum_{i=1}^{N}\frac{H}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{T_{i-1}+T_i}{2} + \frac{T_i - T_{i-1}}{2}x_k\right) = \frac{H}{2}\sum_{j=1}^{M}\overline{A_j} f(\overline{x_j}), \tag{5}$$

$M = nN$.

Чем больше узлов и коэффициентов, тем точнее результат.

Устойчивость квадратурных формул

Пусть для вычисления $\int\limits_a^b p(x)f(x)dx$ используется квадратурная формула

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{6}$$

Пусть A_k, x_k вычислены точно, но $f(x)$ вычисляется с погрешностью

$$f(x_k) \approx \tilde{f}(x_k), |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \leq \epsilon \tag{7}$$

$$|S_n(f) - S_n(\tilde{f})| = |\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} A_k \tilde{f}(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |A_k||f(x_k) - \tilde{f}(x_k)| \leq \epsilon \sum_{k=1}^{n} |A_k|. \tag{8}$$

1. $A_k > 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} |A_k| = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k = c_0 = \int\limits_a^b p(x)dx$ - ограничено для $\forall n$.
2. $A_1 < 0, |A_1| < c, \forall n$ и $A_k > 0, k = 2, \dots, n \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} |A_k| = \sum\limits_{k=2}^{n} A_k - A_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k - 2A_1$

Содержание

Квадратурные формулы интерполяционного типа

Заданы n параметров. Если x_i заданы и различны, то коэффициенты A_i можно найти из системы определяющих уравнений (3).

$x_i \in [a, b]$. Построим табличную функцию $(x_i, f(x_i)), i = 1, \ldots, n \to$ построим интерполяционный полином $L_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi_k(x)$.

$$f(x) = L_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) \Rightarrow$$

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)dx = \int\limits_a^b p(x)L_{n-1}(x)dx + \int\limits_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx =$$

$$\int\limits_a^b p(x) \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi_k(x)dx + \int\limits_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx}_{A_k} + \underbrace{\int_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx}_{R_n(f)}$$

Коэффициенты и узлы квадратурной формулы связаны

$$A_k = \int_a^b p(x)\Phi_k(x)dx, \tag{9}$$

где $\Phi_k(x) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$.

Остаточный член квадратурной формулы

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)R_{n-1}(x)dx = \frac{1}{n!}\int_a^b p(x)f^{(n)}(\xi(x))\omega(x)dx, \tag{10}$$

где $\omega(x) = \prod\limits_{j=1}^{n}(x-x_j)$.

Определение

Квадратурная формула, узлы и коэффициенты которой связаны формулой (9), называются интерполяционной.

Теорема (о порядке точности $n-1$ или выше)

Для того чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности $n-1$ или выше, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

Доказательство

Необходимость.

Пусть алгебраический порядок точности $n-1$ или выше.

$\Phi_k(x)$ - полином степени $n-1 \Rightarrow \int\limits_a^b p(x)\Phi_k(x)dx = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j\Phi_k(x_j) = A_k.$

Достаточность.

$P_{n-1}(x) \to (x_i, P_{n-1}(x_i)), i = 1, \ldots, n.$

$L_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{n-1}(x_k)\Phi_k(x)$

$L_{n-1}(x) \equiv P_{n-1}(x)$

$\int\limits_a^b p(x)P_{n-1}(x)dx \equiv \int\limits_a^b p(x)L_{n-1}(x)dx = \int\limits_a^b p(x) \sum\limits_{k=1}^{n} P_{n-1}(x_k)\Phi_k(x)dx =$

$\sum\limits_{k=1}^{n} P_{n-1}(x_k) \int\limits_a^b p(x)\Phi_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k P_{n-1}(x_k)$

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса (Newton-Cotes Formulae)

Квадратурные формулы интерполяционного типа, для которых выполнено 2 дополнительных условия:

1. $p(x) \equiv 1$
2. $x_k = a + h(k-1), h = \frac{b-a}{n-1}$

$A_k = \int\limits_a^b \Phi_k(x)dx$, где $\Phi_k(x) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$

$x = a + ht, t \in [0, n-1] \Rightarrow$

$x - x_j = a + ht - (a + h(j-1)) = h(t-j+1), x_k - x_j = h(k-j)$

$A_k = h \int\limits_0^{n-1} \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{t-j+1}{k-j} dt$

$\bar{\omega}(t) = \prod\limits_{j=0}^{n-1} (t-j)$

$$A_k = h\int\limits_0^{n-1} \frac{\bar\omega(t)}{t-k+1}\frac{dt}{(k-1)(k-2)...(1)(-1)...(-(n-k))} = h\frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}\int\limits_0^{n-1} \frac{\bar\omega(t)}{t-k+1}dt = hH_n^{(k)}$$

$H_n^{(k)}$ - коэффициенты Ньютона-Котеса. Не зависят от интервала!

$$R_n(f) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n)}(\xi(x))\omega(x)dx$$

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j) = h^n t(t-1)\dots(t-n+1) = h^n\bar\omega(t)$$

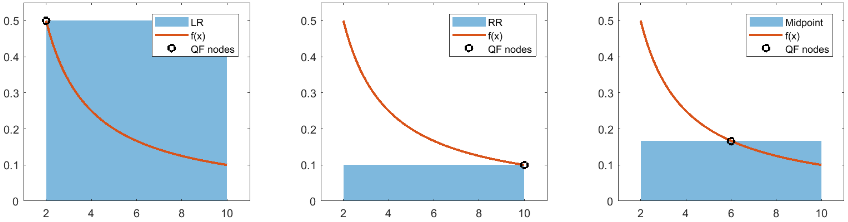
$$R_n(f) = \frac{h^{n+1}}{n!}\int\limits_0^{n-1} f^{(n)}(\xi(x(t)))\bar\omega(t)dt$$

Формулы прямоугольников, $n = 1$

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx A_1 f(x_1)$, $L_0(x) = f(x_1) \Rightarrow$ формулы прямоугольников

$$S_0(f) = (b-a)f(x_1). \tag{11}$$

1. $x_1 = a$ - формула левых прямоугольников (the left rectangle rule).
2. $x_1 = b$ - формула правых прямоугольников (the right rectangle rule).
3. $x_1 = \frac{a+b}{2}$ - формула средних прямоугольников (the midpoint formulae).



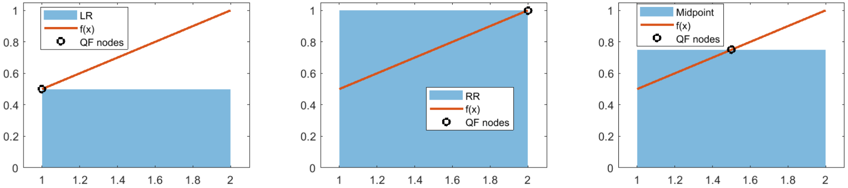
$f \in C([a,b]) \Rightarrow$ для формулы левых и правых прямоугольников

$$R_1^L(f) = \frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2, \xi \in (a,b). \tag{12}$$

$$R_1^R(f) = -\frac{f'(\xi)}{2}(b-a)^2, \xi \in (a,b). \tag{13}$$

$f \in C^2([a,b]) \Rightarrow$ для формулы средних прямоугольников

$$R_1^M(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \xi \in (a,b). \tag{14}$$

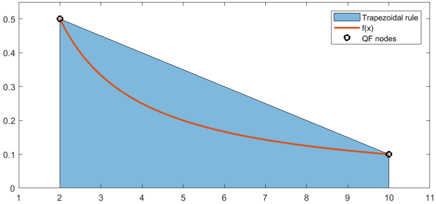


Формула трапеций (the trapezoidal rule), $n = 2$

$x_1 = a, x_2 = b, h = b - a$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right). \tag{15}$$

$H_2^{(1)} = H_2^{(2)} = \frac{1}{2}.$



Остаточный член квадратурной формулы трапеций

$$R_2(f) = \frac{h^3}{2!}\int\limits_0^1 f''(\xi(x(t)))\underbrace{t(t-1)}_{\text{не меняет знак}}dt = \frac{h^3}{2!}f''(\eta)\int\limits_0^1 t(t-1)dt = -\frac{h^3}{12}f''(\eta), \eta \in (a,b)$$

Замечания

1. Формула трапеций точна для постоянных и линейных функций, т.е. алгебраический порядок точности равен 1.
2. Если f'' знакопостоянна на $[a,b]$, то квадратурная формула трапеций дает значение с избытком/недостатком для выпуклых/вогнутых функций.

Формула Симпсона (the Cavalieri-Simpson Formula), $n = 3$

$x_1 = a, x_2 = a + h = \frac{a+b}{2}, x_3 = a + 2h = b, h = \frac{b-a}{2}$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\left(H_3^{(1)} f(a) + H_3^{(2)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + H_3^{(3)} f(b)\right). \tag{16}$$

$H_3^{(2)} = \frac{(-1)^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} \int\limits_0^{n-1} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-k+1} dt = \frac{(-1)^1}{1!1!} \int\limits_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{t-1} dt = -\left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$

$H_3^{(1)} = H_3^{(3)} = \frac{1}{3}$ (получить самостоятельно)

$$S_3(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)\right) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{17}$$

Формула Симпсона. Алгебраический порядок точности

Гарантированный алгебраический порядок точности равен 2.

$Q_3(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3.$

$\int\limits_a^b Q_3(x)dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^4 \Big|_a^b = 0.$

$S_3(Q_3) = \frac{b-a}{6}\left(Q_3(a) + 4Q_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + Q_3(b)\right) = 0.$

$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = a_0Q_3(x) + P_2(x)$

Формула Симпсона (17) точна для любого полинома третьей степени $\Rightarrow$ алгебраический порядок точности равен 3.

Остаточный член квадратурной формулы Симпсона

Возьмем сетку $x^h = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$. Построим сеточную функцию $y_i = f(x_i), i = 1, \ldots, 3$.
Дополним значением производной функции в точке $x = \frac{a+b}{2}$.
Построим интерполяционный полином $H_3(x)$.

$$f(x) = H_3(x) + R_3(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b H_3(x)dx + \int_a^b R_3(x)dx = S_3(f) + R_3(f)$$

$$R_3(f) = \int_a^b R_3(x)dx = \frac{1}{4!}\int_a^b f^{(IV)}(\xi(x))\Omega(x)dx, \quad (18)$$

где $\Omega(x) = (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$.

$$R_3(f) = \frac{f^{(IV)}(\eta)}{4!}\int_a^b \Omega(x)dx = -\frac{h^5}{90}f^{(IV)}(\eta) = -\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(IV)}(\eta) \quad (19)$$

Формула 3/8, $n = 4$

$h = \frac{b-a}{3}, x_1 = a, x_2 = a + h, x_3 = a + 2h, x_4 = a + 3h$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)\right) = S_4(f). \tag{20}$$

Остаточный член

$$R_4(f) = ch^5 f^{(IV)}(\eta) \tag{21}$$

Алгебраический порядок точности формулы $S_4(f)$ такой же, что и у формулы $S_3(f)$, но число вычислений функции на 1 больше.

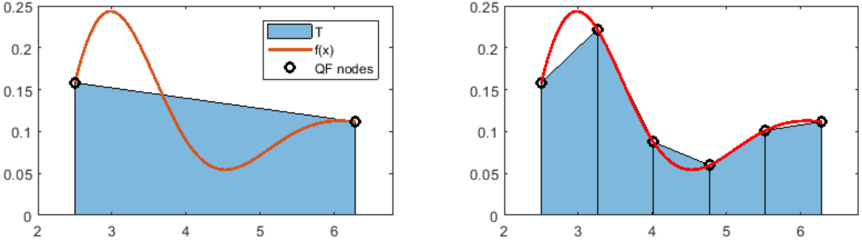
Замечания

1. Формулы Ньютона-Котеса для нечетных n имеют алгебраический порядок точности на 1 больше, чем ожидаемый.
2. При $n > 8$ появляются отрицательные коэффициенты $\Rightarrow$ неустойчивость $\Rightarrow$ использование больших n для повышения точности нецелесообразно.

Обобщённая формула трапеций (the composite trapezoidal formula)

Разобьем отрезок $[a, b]$ на N интервалов длиной $H = \frac{b-a}{N}$.

$$\bar{x}_k = a + kH, k = 0, \ldots, N.$$



Обобщённая формула трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\bar{x}_{k-1}}^{\bar{x}_k} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} \tfrac{H}{2}(f(\bar{x}_{k-1}) + f(\bar{x}_k)).$$

Обобщённая формула трапеций

$$S_{2,N}(f) = \frac{H}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(\bar{x}_k)\right). \tag{22}$$

H

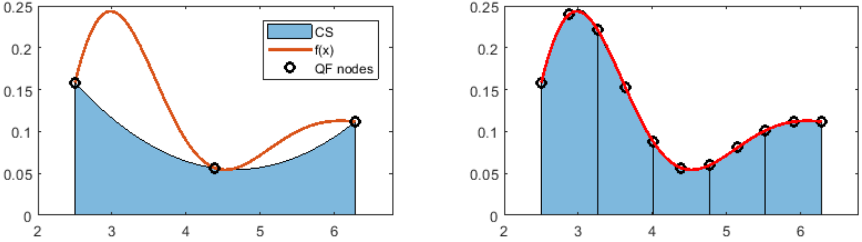
$R_2(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi) \Rightarrow$ остаточный член обобщённой формулы

$$R_{2,N}(f) = \sum_{k=1}^{N} -\frac{h^3}{12}f''(\xi_k) = -\frac{h^3}{12}N\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f''(\xi_k)}_{\text{среднее}} = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\eta). \tag{23}$$

Обобщённая формула Симпсона

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2N$ интервалов длиной $h = \frac{b-a}{2N}$, $H = 2h$.

$$\bar{x}_k = a + kh, k = 0, \ldots, 2N.$$



Обобщённая формула Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\bar{x}_{2k-2}}^{\bar{x}_{2k}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} \frac{h}{3}\left(f(\bar{x}_{2k-2}) + 4f(\bar{x}_{2k-1}) + f(\bar{x}_{2k})\right).$$

Обобщённая формула Симпсона

$$S_{3,N}(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{N} f(\bar{x}_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(\bar{x}_{2k})\right). \tag{24}$$

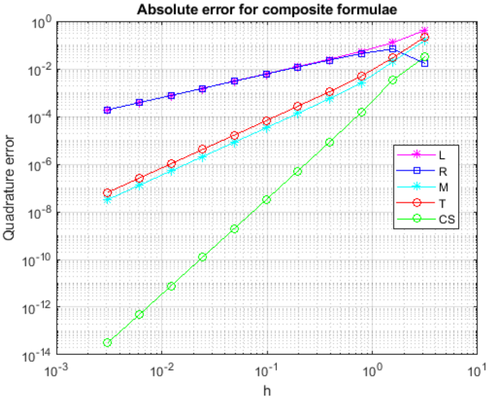
$R_3(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi) \Rightarrow$ остаточный член обобщённой формулы

$$R_{3,N}(f) = \sum_{k=1}^{N} -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi_k) = -\frac{h^5}{90} N \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f^{(IV)}(\xi_k)} = -\frac{h^4}{180}(b-a) f^{(IV)}(\eta). \tag{25}$$

Пример

$$\int_{\pi}^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx$$

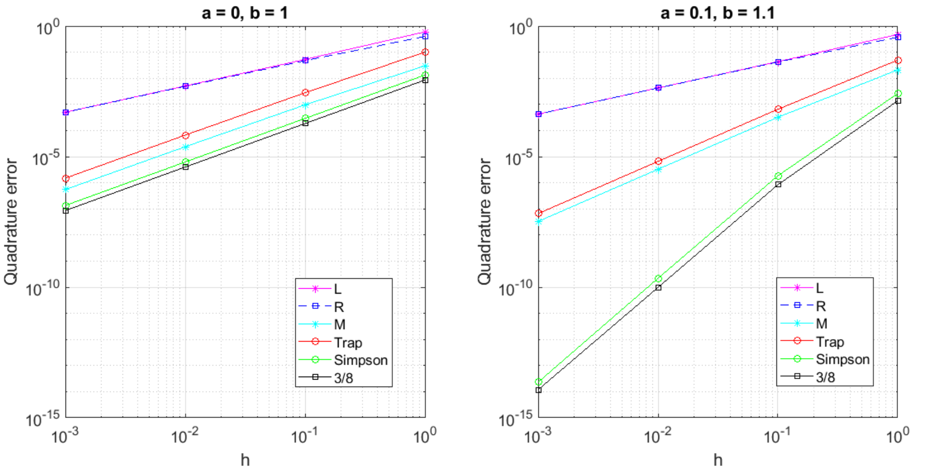
$$h = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots$$



m	L	R	M	T	CS
1	0.4067	0.0170	0.1528	0.2118	0.0313
2	0.1269	0.0679	0.0198	0.0295	0.0034
4	0.0535	0.0439	0.0026	0.0048	1.4814e-04
8	0.0254	0.0233	5.6072e-04	0.0011	8.4451e-06
16	0.0124	0.0119	1.3462e-04	2.6769e-04	5.1594e-07
32	0.0062	0.0060	3.3316e-05	6.6536e-05	3.2064e-08
64	0.0031	0.0030	8.3080e-06	1.6610e-05	2.0012e-09
128	0.0015	0.0015	2.0757e-06	4.1510e-06	1.2503e-10
256	7.6206e-04	7.5998e-04	5.1884e-07	1.0377e-06	7.8137e-12
512	3.8077e-04	3.8025e-04	1.2971e-07	2.5941e-07	4.8774e-13
1024	1.9032e-04	1.9019e-04	3.2426e-08	6.4852e-08	3.1333e-14

Случай недостаточно гладкой функции

$$\int_a^b x^{\frac{2}{3}}\,dx$$



Содержание

Правило Рунге для оценки погрешности интеграла

Как вычислить интеграл с наперёд заданной точностью?

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - S_{n,N}(f) \right| < \epsilon. \qquad (26)$$

Структура остаточного члена обобщённой квадратурной формулы Ньютона-Котеса

$$R_{n,N}(f) = \alpha_m h^m f^{(m_1)}(\eta) = c_m h^m. \qquad (27)$$

Пусть N_1, N_2 - два разбиения отрезка $[a,b]$, k -количество внутренних точек

$$H_i = \frac{b-a}{N_i}, h_i = \frac{H_i}{k+1}, i = 1, 2. \qquad (28)$$

$$\int_a^b f(x)dx = S_{n,N_1}(f) + c_m^{(1)} h_1^m$$
$$\int_a^b f(x)dx = S_{n,N_2}(f) + c_m^{(2)} h_2^m$$

Пусть $N_2 > N_1 \gg 1 \Rightarrow f^{(m_1)}(\eta)$ - ”среднее” значение производной $\Rightarrow c_m^{(1)} = c_m^{(2)} = c_m$.

$0 = S_{n,N_1}(f) - S_{n,N_2}(f) + c_m(h_1^m - h_2^m) \Rightarrow c_m h_2^m \left[\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^m - 1\right] = S_{n,N_2}(f) - S_{n,N_1}(f)$

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow$

$$c_m h_2^m = \frac{S_{n,N_2}(f) - S_{n,N_1}(f)}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^m - 1}. \qquad (29)$$

На практике: $N_2 = 2N_1 = N$.
Условие достижения требуемой точности ϵ

$$\frac{|S_{n,2N}(f) - S_{n,N}(f)|}{2^m - 1} \leq \epsilon. \tag{30}$$

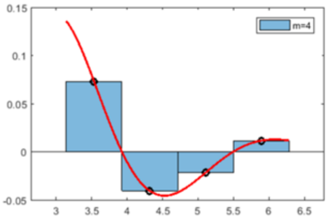
Для формулы трапеций $m = 2$, для формулы Симпсона $m = 4$.

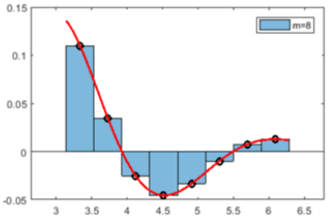
Пример

$$\int_{\pi}^{2\pi} x e^{-x} \cos(2x)\, dx$$

The composite midpoint formula with $h = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots$

m	I_M	I	QE	QE_estimate
1	-0.1330	0.0198	0.1528	0
2	2.2049e-17	0.0198	0.0198	0.0443
4	0.0172	0.0198	0.0026	0.0057
8	0.0193	0.0198	5.6072e-04	6.9197e-04
16	0.0197	0.0198	1.3462e-04	1.4203e-04
32	0.0198	0.0198	3.3316e-05	3.3768e-05
64	0.0198	0.0198	8.3080e-06	8.3361e-06
128	0.0198	0.0198	2.0757e-06	2.0774e-06
256	0.0198	0.0198	5.1884e-07	5.1895e-07
512	0.0198	0.0198	1.2971e-07	1.2971e-07
1024	0.0198	0.0198	3.2426e-08	3.2426e-08





Содержание

Квадратурные формулы Гаусса-Кристоффеля

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = S_n(f) \tag{31}$$

За счет выбора узлов и коэффициентов можно ожидать алгебраический порядок точности $2n-1$.

Определим корневой полином $\omega(x)$ степени n

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j) = x^n + a_0 x^{n-1} + \ldots + a_n = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j \tag{32}$$

Теорема

Не существует квадратурной формулы, алгебраический порядок точности которой выше $2n-1$.

Доказательство

От противного.
Рассмотрим $Q_{2n}(x) = \omega^2(x) \Rightarrow S_n(Q_{2n}(x)) = S_n(\omega^2(x)) = 0$.
$\int\limits_a^b p(x)\omega^2(x)dx \neq 0$. Противоречие.

Определение

$f(x)$ и $g(x)$ ортогональны на $[a,b]$ с весом $p(x) \geq 0$, если

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx = (f,g)_p = 0. \qquad (33)$$

Теорема (о порядке точности $2n-1$)

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности $2n-1$, необходимо и достаточно, чтобы

1. $A_k = \int\limits_a^b p(x)\Phi_k(x)dx$
2. $\int\limits_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x).$

Доказательство

Необходимость. Пусть $S_n(f)$ имеет алгебраический порядок точности $2n-1$.
Условие на коэффициенты A_k выполнено в силу теоремы о порядке точности $n-1$.
$\forall P_{n-1}(x) \to Q_{2n-1}(x) = P_{n-1}(x)\omega(x)$ ω имеет ст. n

$$\int\limits_a^b p(x)Q_{2n-1}(x)dx = S_n(Q_{2n-1}(x)) = 0. \qquad (34)$$

Достаточность.

Пусть условия на коэффициенты и узлы выполнены.

$$\forall Q_{2n-1}(x) = P_{n-1}(x)\omega(x) + R_m(x),\, m < n.$$

в силу 1 $(m < n)$

$$Q_{2n-1}(x_k) = R_m(x_k),\, k = 1, \ldots, n$$

$$\int_a^b p(x)Q_{2n-1}(x)dx = \cancel{\int_a^b p(x)P_{n-1}(x)\omega(x)dx} + \overbrace{\int_a^b p(x)R_m(x)dx = S_n(R_m(x))} = \sum_{k=1}^{n} A_k Q_{2n-1}(x_k).$$

в силу усл. 2

Замечание

Теорема ничего не говорит о существовании $\omega(x)$.

Теорема

$\exists!\, \omega(x)$: $\int\limits_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x)$.

Доказательство

Будем искать корневой полином в виде $\omega(x) = x^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j x^j$.

$(\omega, P_{n-1})_p = 0 \Leftrightarrow (\omega, x^k)_p = 0, k = 0, \ldots, n-1$.

$\int\limits_a^b p(x) \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j x^j x^k dx = -\int\limits_a^b p(x) x^n x^k dx, k = 0, \ldots, n-1$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j \int_a^b p(x) x^j x^k dx = -\int_a^b p(x) x^n x^k dx, k = 0, \ldots, n-1. \qquad (35)$$

(35) - СЛАУ относительно $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

Покажем, что однородная СЛАУ имеет только нулевое решение.
От противного. Пусть $\exists (b_0^\star, \ldots, b_{n-1}^\star)^\top \neq 0$.
$Q_{n-1}(x) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j^\star x^j$

$$\int\limits_a^b p(x) x^k Q_{n-1}(x) dx = 0, k = 0, \ldots, n-1 \tag{36}$$

Домножим (36) на $b_k^\star$ и вычислим сумму по всем k

$$\int\limits_a^b p(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k^\star x^k \right) Q_{n-1}(x) dx = 0 \tag{37}$$

$\int\limits_a^b p(x) Q_{n-1}^2(x) dx = 0$. Противоречие.

Теорема

Все корни $\omega(x)$:

$$\int\limits_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x) \qquad (38)$$

вещественны, различны и принадлежат отрезку $[a, b]$.

Доказательство

Покажем, что $\omega(x)$ имеет по крайней мере 1 вещественный нечетной кратности, который принадлежит $[a, b]$.

От противного.

$\int\limits_a^b p(x)x^0\omega(x)dx \neq 0$. Противоречие.

НЕ МЕНЯЛ БЫ ЗНАК
НА ОТРЕЗКЕ

$x_1, x_2, \dots, x_m$ - все различные вещественные корни нечетной кратности, принадлежащие $[a, b]$.
Нужно показать, что $m = n$.

От противного. Пусть $m < n$.
$P_m(x) = \prod\limits_{i=1}^{m} (x - x_i)$.
$Q_{n+m}(x) = P_m(x)\omega(x)$ - не меняет знак на $[a, b] \Rightarrow$

$$\int\limits_a^b p(x)P_m(x)\omega(x)dx \neq 0. \tag{39}$$

Противоречие.

Замечание

Квадратурные формулы Гаусса существуют для $\forall n$.

Теорема

Все A_k квадратурных формул Гаусса положительны.

Доказательство

$A_k = \int\limits_a^b p(x)\Phi_k(x)dx$, где $\Phi_k(x)$ - базисный полином Лагранжа степени $n-1$.

$(\Phi_k(x))^2 = Q_{2n-2}^{(k)}(x) \Rightarrow$

$$\int\limits_a^b p(x)Q_{2n-2}^{(k)}(x)dx = \sum_{j=1}^{n} A_j Q_{2n-2}^{(k)}(x_j) = \sum_{j=1}^{n} A_j \left(\Phi_k(x_j)\right)^2 = A_k. \qquad (40)$$

$p(x)Q_{2n-2}^{(k)}(x)$ не меняет знак на $[a, b] \Rightarrow A_k > 0$.

Замечание

Получили еще одно выражение для $A_k = \int\limits_a^b p(x)\left(\Phi_k(x)\right)^2 dx$.

Оценка погрешности квадратурных формул Гаусса

Предположим, что $f(x) \in C^{(2n)}([a,b])$.
Построим табличную функцию $(x_k, f(x_k), f'(x_k)) \to H_{2n-1}(x)$ - интерполяционный полином Эрмита.
$f(x) = H_{2n-1}(x) + R_{2n-1}(x)$

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)dx = \underbrace{\int\limits_a^b p(x)H_{2n-1}(x)dx}_{=S_n(H_{2n-1})=S_n(f)} + \int\limits_a^b p(x)R_{2n-1}(x)dx. \tag{41}$$

Остаточный член квадратурной формулы Гаусса

$$R_n(f) = \int\limits_a^b p(x)R_{2n-1}(x)dx = \int\limits_a^b p(x)\frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}\omega^2(x)dx = \frac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(\eta)\int\limits_a^b p(x)\omega^2(x)dx \tag{42}$$

Системы ортогональных полиномов

П, $[a,b], p(x) \geq 0 \rightarrow \omega(x) = x^n + \ldots, \forall n.$

$\{P_n(x)\}$, $(P_n, Q_{n-1})_p$, $\forall Q_{n-1}$ - система ортогональных полиномов.

$$\int_a^b p(x)P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{43}$$

$P_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$, a_n - подбирается из условия ортонормированности.

Любые три соседних ортогональных полинома связаны рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(x) = q_1^{(n)}(x)P_n(x) + q_2^{(n)}(x)P_{n-1}(x), \tag{44}$$

где $q_1^{(n)}, q_2^{(n)}$ - известные полиномы 1й и 2й степени степени соответственно.

Формула Родрига

$P_n(x) = \frac{c_n}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n} [p(x)Y(x)]$, $Y(x) \in C^{(n)}([a,b])$ - производящая функция.

1. $[a,b], p(x) = (x-a)^\alpha (b-x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$.
   $Y(x) = (x-a)^n (b-x)^n \Rightarrow$ полином Якоби

$$I_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{c_n}{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^{\alpha+n} (b-x)^{\beta+n} \right] \quad (45)$$

2. $[a,b] = [-1,1]$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   $I_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x) = c_n T_n(x)$ - полином Чебышева.
3. $\alpha = \beta = 0$, $p(x) \equiv 1 \Rightarrow$ полином Лежандра

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} \left[(x-a)^n (b-x)^n \right]. \quad (46)$$

$[a,b] = [-1,1] \Rightarrow P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x^2)^n \right]$

Методика построения квадратурных формул Гауссовского типа

1. выбор $[a,b]$, $p(x)$, n
2. найти $\omega(x)$: $\int\limits_a^b p(x)\omega(x)P_{n-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-1}(x)$
   - формула Родрига
   - формула (35)
   - $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, ортогонализировать по Граму-Шмидту.
   - формула (44)
3. решить $\omega(x) = 0 \Rightarrow x_k, k = 1, \dots, n$
4. найти A_k
   - система определяющих уравнений (3)
   - $A_k = \int\limits_a^b p(x)\Phi_k(x)dx$
   - $A_k^{(n)} = \frac{a_n}{a_{n-1}P_n'(x_k)P_{n-1}(x_k)}$, a_n - старший коэффициент P_n.

I. (1) $p(x) \equiv 1$, $[-1,1]$, $n=3$

(2) $P_3(x) = c_3 \frac{d^3}{dx^3}\left[(1-x^2)^3\right] = c_3 \frac{d^3}{dx^3}\left[1 - 3\cdot 1^2 \cdot x^2 + 3\cdot 1\cdot x^4 - x^6\right] = c_3 \cdot \left[3\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot x - 6\cdot 5\cdot 4\cdot x^3\right]$

(3) $\omega(x) = \alpha P_3(x) = 0 \Rightarrow 3x - 5x^3 = x(3-5x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

(4)
$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = \int_{-1}^{+1} x^0 dx = 2 \\ A_1 x_1 + \cancel{A_2 x_2} + A_3 x_3 = 0 \\ A_1 x_1^2 + \cancel{A_2 x_2^2} + A_3 x_3^2 = \int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$\longrightarrow A_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow A_1 = A_3$

$\Rightarrow 2A_1 x_1^2 = \cancel{2}A_1 \frac{3}{5} = \frac{\cancel{2}}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{5}{9} = A_3$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f(0) + 5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

$$\text{II}\quad ①\ p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ [-1,1],\ n-\forall$$

$$②\quad \omega(x)=\alpha T_n(x)=\alpha\cos(n\arccos(x))$$

$$③\quad x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\ k=\overline{1,n}$$

$$④\quad A_k=\frac{a_n}{a_{n-1}P_n'(x_k)P_{n-1}(x_k)}$$

$$P_n(x)=\beta T_n(x)$$

$x=\cos\varphi$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_k(x)\,dx \quad \int_{\pi}^{0}\frac{1}{\cancel{\sin\varphi}}\cos(n\varphi)\cos(k\varphi)(-\cancel{\sin\varphi})\,d\varphi=\langle\ldots\rangle=\begin{cases}0, & n\neq k\\ \pi, & n=k=0\\ \frac{\pi}{2}, & n=k\neq 0\end{cases}$$

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n(x)=\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(2^{n-1}\right.}_{a_n}\left.x^n+\ldots\right)$$

$$A_k=2\,\frac{1}{\frac{2}{\pi}T_{n-1}(x_k)T_n'(x_k)}=\frac{\pi}{T_{n-1}(x_k)T_n'(x_k)}=\frac{\pi}{n}$$

Упражнение!

$$\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)\,dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$$ — формула Эрмита.

Гаусса с чеб. сеткой

Содержание

Квадратурные формулы смешанного типа

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (47)$$

узлы + коэфф.

Пусть r - количество зафиксированных параметров. Тогда

- $r = n$ - квадратурные формулы интерполяционного типа
- $r = 0$ - квадратурные формулы наивысшего порядка точности
- $0 < r < n$ - квадратурные формулы смешанного типа

$x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_1}}$ - зафиксированные узлы
$A_{l_1}, \ldots, A_{l_{r_2}}$ - зафиксированные коэффициенты
$r = r_1 + r_2 \Rightarrow 2n - r$ неизвестных
$\Rightarrow 2n - r - 1$ - ожидаемый алгебраический порядок точности.

гарантированный

Теорема (о порядке точности $2n-1-r$)

Для того, чтобы квадратурная формула имела алгебраический порядок точности $2n-1-r$, необходимо и достаточно, чтобы

1. $A_k = \int\limits_a^b p(x)\Phi_k(x)dx$

   $\sim (x_i)$

2. $\int\limits_a^b p(x)\omega(x)P_{n-r-1}(x)dx = 0, \forall P_{n-r-1}(x).$

Доказательство

Аналогично теореме о порядке точности $2n-1$. Самостоятельно.

Квадратурные формулы с фиксированными узлами

$r_2 = 0, r = r_1.$

$x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ - зафиксированные узлы. Тогда корневой полином

$$\omega(x) = q(x)\tilde{\omega}(x), \tag{48}$$

Ст. r Ст. n

где $q(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - x_{k_j})$ - известный полином, $\tilde{\omega}(x)$ - полином степени $n - r$.

$$\int_a^b p(x)\omega(x)P_{n-r-1}(x)dx = \int_a^b \underbrace{p(x)q(x)}_{\tilde{p}(x)}\tilde{\omega}(x)P_{n-r-1}(x)dx \tag{49}$$

Если $\tilde{p}(x)$ не меняет знак на $[a, b]$, то такая квадратурная формула всегда существует.

чтобы ф-ла $\exists$

Квадратурные формулы Маркова

$\tilde{p}(x)$ не будет менять знак на $[a, b]$, если

1. фиксируется левый конец или правый конец отрезка $[a, b]$
2. фиксируется левый и правый конец отрезка $[a, b]$

α, β

На практике: $p(x) \equiv 1$.

1. Формулы Радо — ф-ла Родрига
   - $\tilde{p}(x) = x - a \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \alpha I_{n-1}^{(1,0)}(x)$ — полином Якоби
   - $\tilde{p}(x) = b - x \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \alpha I_{n-1}^{(0,1)}(x)$
2. Формулы Лобатто: $\tilde{p}(x) = (x-a)(b-x) \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \alpha I_{n-2}^{(1,1)}(x)$

Формула Радо. $n=2,\ [-1,1],\ x=-1$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx A_1 \cdot f(-1) + A_2 \cdot f(x_2)$$

$$\tilde{p}(x) = p(x)\,q(x) = (x-(-1)) \Rightarrow \tilde{\omega}(x) = \frac{C_1}{x+1} \cdot \frac{d}{dx}\left[(1+x)^2(1-x)\right] = \cancel{\frac{C_1}{x+1}}\left[2\cancel{(1+x)}(1-x) - (1+x)^{\cancel{2}}\right] =$$

$$= C_1(1-3x) \Rightarrow x_2 = 1/3$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ A_1 \cdot (-1) + A_2 \cdot \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f(-1) + 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

Квадратурные формулы с фиксированными коэффициентами

Зафиксируем $n-1$ коэффициент: $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$
$\Rightarrow$ ожидаемый алгебраический порядок точности - n.

$$\int\limits_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = A\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (50)$$

Система (3) примет вид

$$\begin{cases} A + A + \ldots + A = c_0 \\ Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_n = c_1 \\ Ax_1^2 + Ax_2^2 + \ldots + Ax_n^2 = c_2 \\ \ldots = \ldots \\ Ax_1^n + Ax_2^n + \ldots + Ax_n^n = c_n \end{cases} \qquad (51)$$

$\Rightarrow A = \dfrac{c_0}{n}$

Квадратурные формулы Чебышева

Из первого уравнения системы (56)

$$nA = c_0 \Rightarrow A = \frac{c_0}{n} \tag{52}$$

$s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = \frac{c_k}{A}, k = 1, \ldots, n$

Корневой полином будем искать в виде

$$\omega(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{53}$$

$\omega(x_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(x_i) = s_n + a_1 s_{n-1} + \ldots + a_{n-1}s_1 + na_n = 0 \tag{54}$$

$$a_n = -\frac{1}{n}[s_n + a_1 s_{n-1} + \ldots + a_{n-1}s_1] \tag{55}$$

(55) верно для любого $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 = -s_1 \\ a_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + a_1 s_1) \\ a_3 = -\frac{1}{3}(s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1) \\ \ldots = \ldots \end{cases} \tag{56}$$

Замечания

1. Нет гарантии, что корни x_i вещественны, различны и принадлежат $[a, b]$.
2. Если $p(x) \equiv 1$, то квадратурная формула существует и устойчива для $n = 1, \ldots, 7, 9$.
3. $p(x) \equiv 1$ позволяет строить обобщенные формулы $\Rightarrow$ можно повысить точность.

Формула Чебышева. $p(x)\equiv 1$, $[-1,1]$, $n=3$

$$A = \frac{c_0}{n} = \frac{2}{3}$$

$$S_1 = \frac{c_1}{A} = \int_{-1}^{+1} x\,dx \,/A = 0$$

$$S_2 = \frac{c_2}{A} = \int_{-1}^{+1} x^2 dx \,/A = {}^{2/3}/_{2/3} = 1$$

$$S_3 = \frac{c_3}{A} = \frac{0}{2/3} = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}(1 + 0\cdot 0) = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}\left(0 + 0\cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0\right) = 0$$

$$\omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x = x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Квадратурные формулы с фиксированными узлами и коэффициентами

Пусть $p(x) \equiv 1$, $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{57}$$

$x_1 = -1, x_n = 1 \Rightarrow r_1 = 2$

$A_1 = -A_n = B \Rightarrow r_2 = 1$

$r = 3 \Rightarrow$ ожидаемый алгебраический порядок точности равен

$2n - 1 - r = 2n - 4 = 2(n - 2) = 2m.$

Квадратурные формулы Ралстона

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx B[f(-1) - f(1)] + \sum_{k=1}^{m} B_k f(x_k) \tag{58}$$

Доказано, что квадратурные формулы Ралстона существуют всегда, причем парами.

Формула Радстона. $m=1$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx B\cdot\left[f(-1)-f(1)\right] + B_1 f(x_1)$$

$$\begin{cases} B\left[\cancel{(-1)^0-(1)^0}\right]+B_1 x_1^0 = c_0 = 2 & \Rightarrow \quad B_1 = 2 \\ B\cdot\left[(-1)^1-(1)^1\right]+B_1\cdot x_1^1 = c_1 = 0 & \Rightarrow \quad -2B + 2\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Rightarrow B = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ B\cdot\left[\cancel{(-1)^2-(1)^2}\right]+B_1\cdot x_1^2 = c_2 = 2/3 & \Rightarrow \quad x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \approx \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left[f(-1)-f(1)\right] + 2\cdot f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Обобщённые формулы Ралстона

Пусть отрезок разбит на N частей.

Квадратурная формула	Количество вычислений функции	Алгебраический порядок точности
Формула трапеций	$N+1$	1
Формула Ралстона, 1 узел	$N+2$	2
Формула Симпсона	$2N+1$	3
Формула Ралстона, 2 узла	$2N+2$	4
Формула Гаусса, 2 узла	$2N$	3
Формула Гаусса, 3 узла	$3N$	5
Формула Ралстона, 3 узла	$3N+2$	6

При одном и том же объеме вычислений квадратурные формулы Ралстона дают наибольший алгебраический порядок точности.

Упражнения

1. Вывести формулы остаточного члена для обощённых формул прямоугольников.
2. Показать, что A_k в квадратурной формуле Эрмита равно $\frac{\pi}{n}$.
3. Доказать теорему о порядке точности $2n - 1 - r$.
4. Построить квадратурную формулу Лобатто для случая $n = 3$ и интервала $[-1, 1]$.