Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

14 мая 2021 г.

Содержание

Постановка задачи

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $y(x)$ - неизвестная функция.

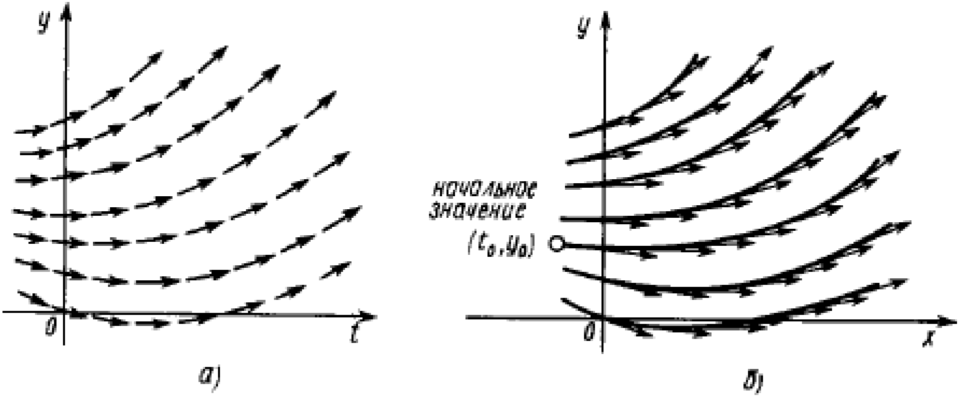
Уравнение (1), разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Общее решение: $y(x) = y(c_1, \dots, c_n)$ - n-параметрическое семейство.

Пусть через любую точку проходит единственная интегральная кривая.
Чтобы выделить единственное решение, нужно задать n условий.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 1-го порядка: $y' = f(x, y)$
$f(x, y)$ задаёт поле направлений.



Пусть задача решается на конечном отрезке $[a, b]$.

1. Все условия заданы в одной точке $[a, b] \to$ задача Коши, или задача с начальными условиями.
2. Условия заданы в разных точках $[a, b] \to$ краевая задача.

Пример

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b]. \tag{3}$$

1. $y(b) = \alpha_1, y'(b) = \alpha_2$ - задача Коши.
2. $y'(a) = \alpha_1, y(b) + y'(b) = \alpha_2$ - краевая задача.

Задача Коши (the Cauchy problem, or the initial value problem)

Будем рассматривать такую задачу Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{4}$$

Для единственности решения задачи Коши (4) достаточно потребовать

1. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M, \forall x \in [a, b], y$ - допустимых.
2. условие Липшица по y

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \tag{5}$$

где $x \in [a, b], y_1, y_2$ - допустимые, L - константа Липшица.

$y^{\star}(x)$ - точное решение задачи (4).

Численные методы решения задачи Коши

$x^h = \{x_k\}_{k=0}^n$, $x_k = a + kh$ - равномерная сетка.

Определение

Приближенное решение с точностью ϵ - табличная функция $y^h = \{y_k\}_{k=0}^n$, определенная на сетке $x^h \subset [a, b]$

$$|y_k - y^\star(x_k)| \leq \epsilon. \tag{6}$$

Определение

Вычислительную формулу для нахождения y_k

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-r}). \tag{7}$$

будем называть вычислительной схемой, или методом решения.

Классификационные признаки

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-r}).$$

1. $r = 1$ - одношаговая схема.
   $r > 1$ - многошаговая, или r-шаговая схема - нужны значения в $r-1$ точке.
2. Φ_f НЕ содержит y_k - явная схема.
   y_k ~~не~~ входит в Φ_f - неявная схема. На каждом шаге нужно решать уравнение.
3. $\Phi_f = h\sum\limits_{j=0}^{r} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j})$ - конечно-разностная схема.

Приведение уравнения n-го порядка к системе уравнений 1-го порядка

$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$
Введем новые переменные

$$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x), \ldots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x) \tag{8}$$

Тогда

$$\begin{cases} y_1' = y_2 & // \quad f_1 \\ y_2' = y_3 & // \quad f_2 \\ \ldots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & // \quad f_n \end{cases} \tag{9}$$

Задача Коши

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y), x \in [a, b] \\ Y(a) = Y_0 \end{cases} \tag{10}$$

$Y = [y_1, \ldots, y_n]^\top, F = [f_1, \ldots, f_n]^\top.$

Пример

Осциллятор Ван дер Поля

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \mu(1 - y^2)\frac{dy}{dx} + y = 0, \tag{11}$$

где $y = y(x)$ - координата точки.

$y_1(x) = y(x), y_2(x) = y'(x) \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \mu(1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases} \tag{12}$$

Начальные условия

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y_1(0) = 2 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Содержание

- $y^{\star}(x)$ - точное решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{14}$$

- $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ - точное решение по вычислительной схеме

$$y_k = \Phi_f(h, x_k, y_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-r}). \tag{15}$$

- $\{\tilde{y}_k\}_{k=0}^{n}$ - решение с учётом ошибок вычислений.

1. ошибка дискретизации = погрешность метода

$$\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k). \tag{16}$$

2. вычислительная ошибка

$$\delta_k = \tilde{y}_k - y_k. \tag{17}$$

3. полная ошибка

$$\Delta_k = \tilde{y}_k - y^\star(x_k). \tag{18}$$

Цель - получить решение с заданной точностью ϵ: $|\Delta_k| \leq \epsilon$.

$$|\Delta_k| = |\tilde{y}_k - y^\star(x_k) \pm y_k| \leq |\epsilon_k| + |\delta_k|. \tag{19}$$

При уменьшении h

- ошибка дискретизации ϵ_k уменьшается
- вычислительная ошибка δ_k растет, т.к. увеличивается количество вычислений.

Сходимость и устойчивость

Сходимость схемы определяется поведением ошибки дискретизации ϵ_k.

Определение

Вычислительная схема сходится, если $\epsilon_k \xrightarrow[\substack{h\to 0\\ kh=const}]{} 0$

Устойчивость схемы определяется поведением вычислительной ошибки δ_k.

Определение

Вычислительная схема называется устойчивой, если

$$|\delta_k| \leq C|\delta_{k_0}|, \tag{20}$$

где C не зависит от h, k_0 и $k = k_0 + m, m > 0$.
$k_0 h = const, kh = const$.

(20) - скорость роста вычислительной погрешности ограничена.

Замечания

1. Ошибка аппроксимации
$$e_k = y^\star(x_k) - \Phi_f(h, x_k, y^\star(x_k), y^\star(x_{k-1}), \dots, y^\star(x_{k-r})) \tag{21}$$
показывает, насколько точное решение не удовлетворяет вычислительной схеме. Если $e_k = \mathcal{O}(h^{q+1})$, то вычислительная схема аппроксимирует ОДУ с порядком q.
2. Ошибка аппроксимации e_k и ошибка дискретизации ϵ_k связаны между собой. $y^\star(x_k) = y_k - \epsilon_k$ подставить в (21)...
3. Следует различать устойчивость схемы и устойчивость решения ОДУ.

Пример неустойчивой задачи

$$\begin{cases} y' = 2y - 2x + 1 - 2\sqrt{3}, x \in [0, 10] \\ y(0) = y_0 = \sqrt{3} \end{cases} \tag{22}$$

Общее решение: $y(x) = ce^{2x} + x + \sqrt{3}$.
Искомое частное решение: $y^\star(x) = x + \sqrt{3}$ и $y^\star(10) = 10 + \sqrt{3} = 11.73205081$.

Пусть $\tilde{y}_0 = y_0 + \delta$, $\delta \ll 1 \Rightarrow$ по любой схеме будет вычисляться
$\tilde{y}(x) = \delta e^{2x} + x + \sqrt{3} = \delta e^{2x} + y^\star(x)$
$\tilde{y}(10) = \delta e^{20} + 10 + \sqrt{3}$.

Если $\delta = 10^{-8}$, то $\Delta y(10) = 4.85165195$.
Ошибка, связанная с округлением исходных данных, более 40%.

Содержание

Метод Эйлера (the Euler method)

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{23}$$

Равномерная сетка: $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.
$x, x+h \in [a,b]$
Разложим в ряд Тейлора $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2)$.

Пусть $x = x_k \Rightarrow y(x_k + h) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)$.
Отбросим $\mathcal{O}(h^2)$ и заменим $y(x_k)$ на y_k

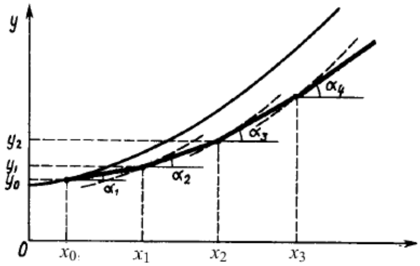
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \tag{24}$$

Геометрическая интерпретация

1. в точке x_0 строится касательная к интегральной кривой

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \qquad (25)$$

2. y_1 - значение $y(x)$ в точке x_1



На каждом шаге переходим на новую интегральную кривую.

Метод Эйлера - явный, одношаговый метод.

Устойчивость метода Эйлера

Вычисленное значение по схеме Эйлера (24)

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k). \tag{26}$$

Ошибка вычислений

$$\begin{aligned} |\delta_{k+1}| &= |\tilde{y}_{k+1} - y_{k+1}| = |\tilde{y}_k + hf(x_k, \tilde{y}_k) - y_k - hf(x_k, y_k)| \\ &\leq |\delta_k| + h|f(x_k, \tilde{y}_k) - f(x_k, y_k)| \leq |\delta_k| + hL|\delta_k| = (1 + hL)|\delta_k| \end{aligned} \tag{27}$$

Условие Липшица

Для любых допустимых k и m

$$\begin{aligned} |\delta_{k+m}| &\leq (1 + hL)|\delta_{k+m-1}| \leq (1 + hL)^2|\delta_{k+m-2}| \leq \dots \\ &\leq (1 + hL)^m|\delta_k| \leq e^{hLm}|\delta_k| = e^{(x_{k+m} - x_k)L}|\delta_k| \leq e^{(b-a)L}|\delta_k| \end{aligned} \tag{28}$$

Константа $C = e^{(b-a)L}$ не зависит от k и m.

Идея методов Рунге-Кутты

Задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$x, x+h \in [a,b]$

$$y(x+h) = y(x) + \underbrace{\frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \ldots + \frac{h^s}{s!}y^{(s)}(x)}_{\Delta_s y(x)} + \mathcal{O}(h^{s+1}) \tag{29}$$

$$\Delta_s y(x) = \tfrac{h}{1!}f(x,y) + \tfrac{h^2}{2!}\tfrac{d}{dx}f(x,y) + \ldots + \tfrac{h^s}{s!}\tfrac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}f(x,y)$$

Заменим $\Delta_s y(x)$ некоторой функцией $\delta_s y(x,h)$, которая удовлетворяет условию

$$\Delta_s y(x) = \delta_s y(x,h) + \mathcal{O}(h^{s+1}). \tag{30}$$

Будем искать $\delta_s y(x, h)$ в виде линейной комбинации значений f

$$\delta_s y(x, h) = h \sum_{i=1}^{l} \rho_i f(x + \delta x_i, y + \delta y_i). \tag{31}$$

Подберем $l, \rho_i, \delta x_i, \delta y_i$ так, чтобы (30) выполнялось.

В (29) отбросим $\mathcal{O}(h^{s+1}), x \to x_k, x + h \to x_{k+1}$

$$y_{k+1} = y_k + \delta_s y(x, h). \tag{32}$$

s - порядок метода, l - шаговость, или стадийность метода.

Как строить $\delta_s y(x,h)$?

Выбираем l. Будем искать $\delta_s y(x,h)$ в виде

$$\delta_s^l y(x,h) = h\sum_{i=1}^{l} \rho_i K_i, \tag{33}$$

где

$$\begin{cases} K_1 = f(x,y) \\ K_2 = f(x+\alpha_2 h, y + h\beta_{21}K_1) \\ \dots \\ K_l = f\left(x+\alpha_l h, y + h\sum\limits_{j=1}^{l-1}\beta_{lj}K_j\right) \end{cases} \tag{34}$$

Тогда $y_{k+1} = y_k + h\sum\limits_{i=1}^{l}\rho_i K_i$.

Коэффициенты $\rho_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ выбираются из условия (30): обеспечение порядка s.
Их часто записывают в виде таблицы Бутчера

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
\alpha_2 & \beta_{21} & & & & \\
\alpha_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & \\
\alpha_l & \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{l,l-1} & \\
\hline
 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{l-1} & \rho_l
\end{array}
$$

1. Метод Эйлера - одностадийный метод Рунге-Кутты 1-го порядка.
2. Классический 4-х стадийный метод Рунге-Кутты 4-го порядка

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= f(x_k, y_k) \\
K_2 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} K_1) \\
K_3 &= f(x_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} K_2) \\
K_4 &= f(x_k + h, y_k + h K_3)
\end{aligned}
$$

$$
y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
$$

Замечание

Метод Рунге-Кутты s-го порядка на каждом шаге совершает погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$. Стадийность l - количество вычислений функции f для расчета нового узлового значения y_k.

Методы Рунге-Кутты 2-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{35}$$

Разложим в ряд Тейлора $y(x+h) = y(x) + \underbrace{\frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x)}_{\Delta_2 y(x)} + \mathcal{O}(h^3)$

$y'(x) = f(x, y)$
$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f'_x + ff'_y$

$$\Delta_2 y(x) = hf + \frac{h^2}{2}(f'_x + ff'_y) \tag{36}$$

Будем строить 2-х стадийный метод Рунге-Кутты ($l = 2$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \\ \hline & \rho_1 & \rho_2 \end{array} \qquad \begin{cases} K_1 = f(x, y) \\ K_2 = f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} K_1) \end{cases} \tag{37}$$

$$\delta_2^2 y(x, h) = h[\rho_1 K_1 + \rho_2 K_2] = h[\rho_1 f(x, y) + \rho_2 f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} f(x, y))]$$
$$f(x + \alpha_2 h, y + h\beta_{21} f(x, y)) = f + \alpha_2 h \frac{\partial f}{\partial x} + h\beta_{21} f \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\delta_2^2 y(x, h) = h(\rho_1 + \rho_2) f + h^2 \alpha_2 \rho_2 f'_x + h^2 \beta_{21} \rho_2 f f'_y + \mathcal{O}(h^3) \tag{38}$$

Коэффициенты выбираются из условия

$$\Delta_2 y(x) = \delta_2^2 y(x, h) + \mathcal{O}(h^3) \tag{39}$$

(36), (38) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 = 1 \quad //hf \\ \alpha_2 \rho_2 = \dfrac{1}{2} \quad //h^2 f'_x \\ \beta_{21} \rho_2 = \dfrac{1}{2} \quad //h^2 f f'_y \end{cases} \tag{40}$$

Число уравнений меньше числа неизвестных.
Пусть $\rho_2 = p \Rightarrow \rho_1 = 1 - p$ и $\alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2p}$

$x \to x_k, x + h \to x_{k+1} \Rightarrow$ общая формула методов Рунге-Кутты 2-го порядка

$$y_{k+1} = y_k + h(1-p)f(x_k, y_k) + hpf\left(x_k + \frac{h}{2p}, y_k + \frac{h}{2p} f(x_k, y_k)\right) \tag{41}$$

p может быть любым (отличным от 0), однако...

- $x_k + \frac{h}{2p}$ лежит внутри $[x_k, x_k + h] \Rightarrow p \geq \frac{1}{2}$
- если $f(x, y) = f(x)$, то $y'(x) = f(x) \Rightarrow$

$$y(x_k + h) - y(x_k) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx h(1-p)f(x_k) + hpf\left(x_k + \frac{h}{2p}\right) \qquad (42)$$

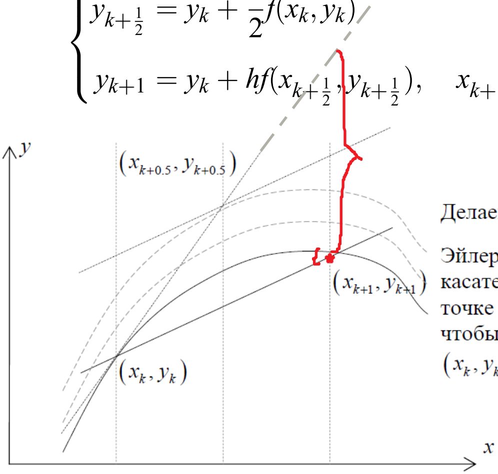
Получили квадратурную формулу.
$hp \geq 0,\ h(1-p) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq p \leq 1.$

В итоге

$$\frac{1}{2} \leq p \leq 1. \qquad (43)$$

Модифицированный метод Эйлера, или метод средней точки ($p = 1$)

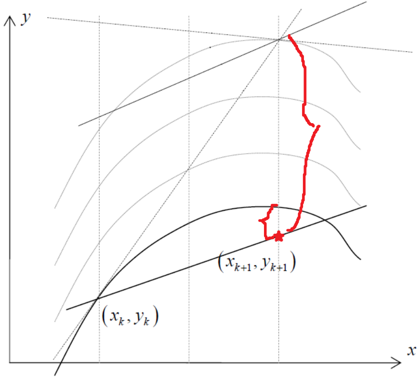
$$\begin{cases} y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \dfrac{h}{2} f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}), \quad x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \dfrac{h}{2} \end{cases} \tag{44}$$



Делаем шаг $\dfrac{h}{2}$ по методу Эйлера. Затем строим касательную в полученной точке и сдвигаем ее так, чтобы она проходила через (x_k, y_k).

Метод Эйлера-Коши, или метод Хойна ($p = \frac{1}{2}$)

$$\begin{cases} \tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + h\dfrac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2} \end{cases} \tag{45}$$



Практическое использование методов Рунге-Кутты

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$H = \frac{b-a}{N}$. Нужно получить сеточную функцию в узлах $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_N$.

Пусть используется метод Рунге-Кутты s-го порядка. Шаг H как правило большой $\Rightarrow$ локальная ошибка $\mathcal{O}(H^{s+1})$ будет большой.

Каждый шаг делят на m частей $\Rightarrow$ шаг интегрирования $h = \frac{H}{m}$ и локальная погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$.

Контроль локальной погрешности. Правило Рунге.

Если y_k взять как точное, то $y^\star_{k+2}$ - точное значение, лежащее на интегральной кривой, которая проходит через (x_k, y_k).

$$y^{(2h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + \epsilon^{(2h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + c^{(2h)}_k (2h)^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$
$$y^{(h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + \epsilon^{(h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + 2c^{(h)}_k h^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

Если h мало, то $c^{(2h)}_k \approx c^{(h)}_k \approx c$

$$y^{(2h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + 2ch^{s+1}2^s + \mathcal{O}(h^{s+2})$$
$$y^{(h)}_{k+2} = y^\star_{k+2} + 2ch^{s+1} + \mathcal{O}(h^{s+2})$$

$y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)} = 2ch^{s+1}(2^s - 1) + \mathcal{O}(h^{s+2})$ Оценка локальной погрешности метода

$$\epsilon_{k+2}^{(h)} \approx 2ch^{s+1} \approx \frac{y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)}}{2^s - 1} \tag{46}$$

- Если (46) меньше ϵ, то метод дает желаемый результат.
- Если (46) сильно меньше ϵ, то шаг можно увеличить.

Можно сделать уточнение

$$\bar{y}_{k+2} = y_{k+2}^{(h)} - \frac{y_{k+2}^{(2h)} - y_{k+2}^{(h)}}{2^s - 1} \tag{47}$$

Поправка Ричардсона повышает порядок локальной погрешности на 1, т.е. $\mathcal{O}(h^{s+2})$.

$$\begin{cases} y' = 2x - 3y & x \in [0, 0.2] \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad y^*(x) = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}e^{-3x}$$

М. Эйлера.

0 h 0.1 h 0.2

$a = x_0$ x_1 $b = x_2$

$h = 0.1$

$y^*(0.2) \approx 0.58$

$$y_2^{(0.2)} = y_0 + 2h \cdot (2x_0 - 3y_0) = 1 + 2 \cdot 0.1 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) = 0.4 \qquad \varepsilon_2^{(0.2)} = y_2^{(0.2)} - y^*(0.2) = -0.18$$

$$y_1^{(0.1)} = y_0 + h\,(2x_0 - 3y_0) = 0.7$$

$$y_2^{(0.1)} = y_1^{(0.1)} + h \cdot (2x_1 - 3y_1^{(0.1)}) = 0.7 + 0.1 \cdot (2 \cdot 0.1 - 3 \cdot 0.7) = 0.51 \qquad \varepsilon_2^{(0.1)} = y_2^{(0.1)} - y^*(0.2) = -0.07$$

$$\frac{y_2^{(0.2)} - y_2^{(0.1)}}{2^1 - 1} = 0.4 - 0.51 = \boxed{-0.11}$$

$$\overline{y}_2 = y_2^{(0.1)} - \frac{y_2^{(0.2)} - y_2^{(0.1)}}{2^1 - 1} = 0.62 \qquad \overline{y}_2 - y^*(0.2) = 0.04$$

Оценка погрешности и сходимость методов Рунге-Кутты

Пусть задача Коши

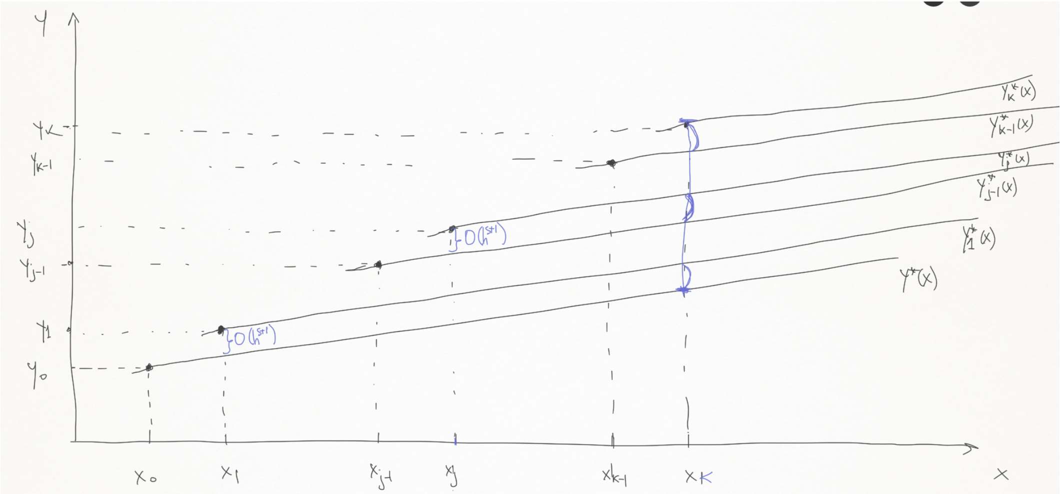
$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

решается l-стадийным методов Рунге-Кутты порядка s

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^{l} \rho_i K_i, h = \frac{b-a}{n}. \tag{48}$$

Шаговая погрешность $\mathcal{O}(h^{s+1})$. – локальная $O(h^5)$ – глобальная
Оценим погрешность метода

$$\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k). \tag{49}$$



y
y_K
y_{K-1}
y_j
y_{j-1}
y_1
y_0
$y_K^*(x)$
$y_{K-1}^*(x)$
$y_j^*(x)$
$y_{j-1}^*(x)$
$y_1^*(x)$
$y^*(x)$
$O(h^{s+1})$
$O(h^{s+1})$
x_0
x_1
x_{j-1}
x_j
x_{K-1}
x_K
x

$y_j^\star(x)$ - точное решение задачи Коши с начальным условием $y(x_j) = y_j$.

$$\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k) = y_k^\star(x_k) - y_0^\star(x_k) \pm \sum_{j=1}^{k-1} y_j^\star(x_k) =$$

$$y_k^\star(x_k) - y_{k-1}^\star(x_k) + y_{k-1}^\star(x_k) - y_{k-2}^\star(x_k) + \ldots + y_1^\star(x_k) - y_0^\star(x_k) = \sum_{j=1}^{k}(y_j^\star(x_k) - y_{j-1}^\star(x_k))$$

Оценим результирующую погрешность $y_j^\star(x_k) - y_{j-1}^\star(x_k)$ через начальную погрешность $y_j^\star(x_j) - y_{j-1}^\star(x_j)$.

$[t, T] \subset [a, b]$.

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - не пересекаются.

Пусть $y_2(t) > y_1(t)$ (для определенности). Тогда $y_2(x) > y_1(x)$, $\forall x$

$y_2' = f(x, y_2)$ и $y_1' = f(x, y_1)$

$(y_2 - y_1)' = f(x, y_2) - f(x, y_1) = f_y'(x, \tilde{y})(y_2 - y_1)$ и $y_1(x) \le \tilde{y}(x) \le y_2(x)$

т. Лагранжа

$\frac{d(y_2 - y_1)}{y_2 - y_1} = f_y'(x, \tilde{y})dx$

$\ln(y_2 - y_1)|_t^T = \int\limits_t^T f_y'(x, \tilde{y})dx$

$y_2(T) - y_1(T) = (y_2(t) - y_1(t))e^{\int\limits_t^T f_y'(x, \tilde{y})dx}$

конст. Липшица

$$|y_2(T) - y_1(T)| \le |y_2(t) - y_1(t)|e^{\int\limits_t^T |f_y'(x, \tilde{y})|dx} \le |y_2(t) - y_1(t)|e^{L(T-t)}. \qquad (50)$$

$$|\epsilon_k| \leq \sum_{j=1}^{k} |y_j^\star(x_k) - y_{j-1}^\star(x_k)| \leq \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|y_j^\star(x_j) - y_{j-1}^\star(x_j)|}_{\text{локальная погрешность}} e^{L(x_k - x_j)} = \sum_{j=1}^{k} |c_j| h^{s+1} e^{L(x_k - x_j)} \quad (51)$$

$\forall j \ |c_j| \leq \bar{c} \Rightarrow$

$$|\epsilon_k| \leq h^{s+1} \bar{c} e^{L(x_k - x_0)} k = h^s \bar{c} \overbrace{(x_k - x_0)}^{hk} e^{L(x_k - x_0)} \leq h^s D, \quad (52)$$

где $D = \bar{c}(b-a)e^{L(b-a)}$

Методы Рунге-Кутты являются сходящимися, т.к.

$$\forall k |\epsilon_k| \leq D h^s \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ kh = const}]{} 0. \quad (53)$$

Порядок глобальной погрешности на 1 меньше чем порядок локальной погрешности.

Содержание

Конечно-разностные методы решения задачи Коши для ОДУ

Общий вид

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j \underbrace{f(x_{k-j}, y_{k-j})}_{f_{k-j}}, \tag{54}$$

a_j, b_j - константы, $a_0 \neq 0$, $a_r \neq 0$.

- r - шаговость метода, $r \geq 2$
- $b_0 = 0 \Rightarrow y_k = \Phi(h, x_k, y_{k-1}, \ldots, y_{k-r})$ - явная формула
  $b_0 \neq 0$ - неявная формула
- нужны стартовые (разгонные) точки
- $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_j = 0, j \geq 2$ - методы Адамса.

Способ получения: интегрирование уравнения $y' = f(x, y)$ по промежутку $[x_{k-p}, x_k]$ ($p \geq 1$) с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса.

$p = 1$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x, y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k - y_{k-1} = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(x, y(x))}_{F(x)} \, dx \tag{55}$$

1. формула левых прямоугольников $\to$ явный метод Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \tag{56}$$

2. формула правых прямоугольников $\to$ неявный метод Эйлера

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_k, y_k) \tag{57}$$

3. формула трапеций

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{2} \left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k) \right) \tag{58}$$

МПИ

(58) - уравнение вида $x = \phi(x)$, где x - это y_k. Зададим $y_k^{(0)}$ и

$$y_k^{(j+1)} = y_{k-1} + \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(j)})\right), j = 0, 1, \ldots. \qquad (59)$$

$|\phi'(x)| < 1 \Rightarrow$

конст. Липшица

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{h}{2}f(x_k, y_k)\right)\right| = \frac{h}{2}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq \frac{h}{2}L < 1 \Rightarrow h < \frac{2}{L}. \qquad (60)$$

Сходимость можно обеспечить за счет выбора h. Меньше $h \Rightarrow$ быстрее сходимость.

$y_k^{(0)}$ - по явной формуле Эйлера

$$y_k^{(0)} = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}). \qquad (61)$$

(59), (61) - метод Эйлера с итерационной обработкой.

$p = 2$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x,y)$ по $[x_{k-2}, x_k]$

$$y_k = y_{k-2} + \int\limits_{x_{k-2}}^{x_k} f(x, y(x))dx \tag{62}$$

1. формула левых прямоугольников с шагом $2h$

$$y_k = y_{k-2} + hf(x_{k-2}, y_{k-2}) = y_{k-2} + hf_{k-2} \tag{63}$$

2. формула Симпсона

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{3}(f_{k-2} + 4f_{k-1} + f_k) \tag{64}$$

3. обобщенная формула трапеций (по двум промежуткам)

$$y_k = y_{k-2} + \frac{h}{2}(f_{k-2} + 2f_{k-1} + f_k) \tag{65}$$

Методы Адамса

Решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Проинтегрируем уравнение $y' = f(x,y)$ по $[x_{k-1}, x_k]$

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))dx = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} F(x)dx. \qquad (66)$$

Будем строить r-шаговый метод.
Идея: аппроксимируем $F(x)$ интерполяционным полиномом в форме Лагранжа.

$L_m(x)$ - интерполяйционный полином по $\{\bar{x}_j, F_j\}_{j=0}^{m}$

- $m = r - 1$ - явная, или экстраполяционная формула
- $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$F(x) = L_m(x) + R_m(x) \Rightarrow$

$$y_k = y_{k-1} + \underbrace{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} L_m(x)dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx}_{I_2 - \text{пренебрежём}} . \tag{67}$$

Замена переменной $x = \bar{x}_0 + ht$

$$I_1 = \int\limits_{\bar{x}_{r-1}}^{\bar{x}_r} L_m(x)dx = h \int\limits_{r-1}^{r} L_m(\bar{x}_0 + ht)dt. \tag{68}$$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа на равномерной сетке

$$I_1 = h \int\limits_{r-1}^{r} \sum_{j=0}^{m} F_j \frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-j} dt, \tag{69}$$

где $\bar{\omega}(t) = t(t-1)\dots(t-m) = \prod\limits_{j=0}^{m}(t-j)$.

$$I_1 = h \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\left[\frac{(-1)^{m-j}}{(m-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{\bar{\omega}(t)}{t-j} dt \right]}_{\beta_j} F_j = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j F_j.$$

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{m} \beta_j f_{k-r+j}. \tag{70}$$

- $m = r - 1$ - явная, или экстраполяционная формула

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r-1} \underline{\beta}_j^{(r)} f_{k-r+j}, \tag{71}$$

где $\underline{\beta}_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-1-j}}{(r-1-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{t(t-1)\dots(t-r+1)}{t-j} dt.$

- $m = r$ - неявная, или интерполяционная формула

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{j=0}^{r} \bar{\beta}_j^{(r)} f_{k-r+j}, \tag{72}$$

где $\bar{\beta}_j^{(r)} = \frac{(-1)^{r-j}}{(r-j)!j!} \int\limits_{r-1}^{r} \frac{t(t-1)\dots(t-r)}{t-j} dt.$

Локальная погрешность

Остаточный член формулы Лагранжа

$$R_m(x) = \frac{F^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!}\omega(x), \tag{73}$$

где $\omega(x) = \prod\limits_{j=0}^{m}(x - x_j)$

$x_j = \bar{x}_0 + hj \Rightarrow \omega(x) \to h^{m+1}\bar{\omega}(t)$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} R_m(x)dx = h^{m+2}\int\limits_{r-1}^{r} \frac{F^{(m+1)}(\xi(x(t)))}{(m+1)!}\bar{\omega}(t)dt \\ &= \frac{h^{m+2}}{(m+1)!}\int\limits_{r-1}^{r} F^{(m+1)}(\eta(t))\bar{\omega}(t)dt = c_m h^{m+2}. \end{aligned} \tag{74}$$

- явная формула, $m = r - 1 \Rightarrow |\epsilon_k| \leq \underline{c}^{(r)} h^{r+1}$
- неявная формула, $m = r \Rightarrow |\epsilon_k| \leq \bar{c}^{(r)} h^{r+2}$

Замечание

На практике неявные формулы предпочтительней (точнее, устойчивее). Но нужно решать уравнение.
Предиктор-корректор: сначала явная, затем наявная.
Для согласования локальной погрешности нужно использовать разношаговые схемы: шаговость явной схемы на 1 больше чем неявной.

Метод неопределённых коэффициентов построения конечно-разностных формул

Пусть решается задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Общий вид конечно-разностного метода

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f_{k-j}. \tag{75}$$

Идея построения - сделать погрешность аппроксимации как можно меньше.

$y(x)$ - точное решение, подставим в (75). Если разница $\mathcal{O}(h^{q+1})$, то порядок аппроксимации q

$$e_k = \sum_{j=0}^{r} a_j y(\underbrace{x_k - jh}_{x_{k-j}}) - h \sum_{j=0}^{r} b_j f(x_k - jh, y(x_k - jh)). \tag{76}$$

$$y(x_k - jh) = y(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-jh)^i + \mathcal{O}(h^{m+1})$$

$$f(x_k - jh, y(x_k - jh)) = y'(x_k - jh) = y'(x_k) + \frac{y''(x_k)}{1!}(-jh) + \ldots + \frac{y^{(m)}(x_k)}{(m-1)!}(-jh)^{m-1} + \mathcal{O}(h^m)$$

Подставим в (76)

$$e_k = \sum_{j=0}^{r} a_j \left[y(x_k) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-jh)^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \right] - h \sum_{j=0}^{r} b_j \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{y^{(i)}(x_k)}{(i-1)!}(-jh)^{i-1} + \mathcal{O}(h^m) \right]$$

$$
\begin{aligned}
e_k &= y(x_k)\sum_{j=0}^{r} a_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r} a_j \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-1)^i j^i h^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r} b_j \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!} i(-1)^i j^{i-1} h^i + \mathcal{O}(h^{m+1}) \\
&= h^0 y(x_k)\underbrace{\sum_{j=0}^{r} a_j} + \sum_{i=1}^{m} h^i \sum_{j=0}^{r} \frac{y^{(i)}(x_k)}{i!}(-1)^i \underbrace{(j^i a_j + i j^{i-1} b_j)} + \mathcal{O}(h^{m+1})
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Для порядка аппроксимации m нужно потребовать

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{j=0}^{r} a_j = 0 \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{r} (j^i a_j + i j^{i-1} b_j) = 0
\end{cases}
\tag{78}
$$

Перепишем (75), x -произвольная точка

$$\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} a_j y(x-jh) = \sum_{j=0}^{r} b_j f(x-jh, y(x-jh)). \tag{79}$$

При $h \to 0$ левая часть (79) $\to y'(x)$, а значит правая часть $\to f(x,y)$, т.к. данная конечно-разностая схема аппроксимирует ДУ.

$\frac{1}{h}\sum\limits_{j=0}^{r} a_j y(x-jh) = \frac{1}{h}\sum\limits_{j=0}^{r} a_j (y(x) - jhy'(x) + \mathcal{O}(h^2)) \xrightarrow[h\to 0]{} y'(x)$, если

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{r} a_j = 0 \\ \sum\limits_{j=0}^{r} j a_j = -1 \end{cases} \tag{80}$$

$$\sum_{j=0}^{r} b_j f(x-jh, y(x-jh)) = \sum_{j=0}^{r} b_j f(x-jh, y(x)+\mathcal{O}(h)) =$$

$$\sum_{j=0}^{r} b_j \left(f(x,y) + (-jh)f'_x + \mathcal{O}(h)f'_y + \mathcal{O}(h^2)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x,y), \text{ если}$$

$$\sum_{j=0}^{r} b_j = 1. \tag{81}$$

(80), (81) - условия согласованности.

(78) при $i=1$: $\sum_{j=0}^{r}(ja_j + b_j) = 0 \Leftrightarrow$ (80).

СЛАУ уже неоднородная

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=0}^{r} a_j = 0 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} j a_j = -1 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} b_j = 1 \\
\sum\limits_{j=0}^{r} (j^i a_j + i j^{i-1} b_j) = 0, i = 2, \ldots, m
\end{cases}
\tag{82}
$$

Локальная погрешность $\mathcal{O}(h^{m+1})$, порядок аппроксимации m.

Замечания

1. Метод неопределенных коэффициентов можно использовать и для построения методов Адамса. Нужно взять $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_j = 0, j \geq 2$ и найти b_j.
   Если взять $b_0 = 0$, то получим явную схема, иначе - неявную.
2. Для обеспечения численной устойчивости примерно половину коэффициентов необходимо зафиксировать.
3. Метод неопределённых коэффициентов не покрывает все возможные конечно-разностные схемы. Если построили какую-то схему, то с помощью (82) можно проверить/определить порядок аппроксимации.
   Второе и третье условие в (82) получены искусственно, поэтому проверяется последнее при $i = 1$.

Пример

$r = 2,\ b_0 = 0$

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} = h(b_1 f_{k-1} + b_2 f_{k-2}). \tag{83}$$

Будем строить схему с порядком аппроксимации $m = 3$. (82) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = -1 \\ b_1 + b_2 = 1 \\ a_1 + 2b_1 + 4a_2 + 4b_2 = 0 \leftarrow i = 2 \\ a_1 + 3b_1 + 8a_2 + 12b_2 = 0 \leftarrow i = 3 \end{cases} \tag{84}$$

$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{6}, a_1 = \frac{4}{6}, a_2 = -\frac{5}{6}, b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{1}{3}$

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 2h(2f_{k-1} + f_{k-2}). \tag{85}$$

Для всех ДУ, решением которых является кубический полином, схема (85) даёт точный результат.

Конечно-разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$a_0 y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_r y_{k-r} = b_k, \tag{86}$$

где $a_0 \neq 0$, $a_r \neq 0$,
$b_k = b(k)$ - известная функция целочисленного аргумента,
$y_k = y(k)$ - неизвестная функция целочисленного аргумента,
называется линейным конечно-разностным уравнением порядка r с постоянными коэффициентами.

Если $b_k \equiv 0$, то уравнение называется однородным.

Общее решение (86)

$$y_k = \bar{y}_k + \tilde{y}_k, \tag{87}$$

где $\bar{y}_k$ - частное решение (86), $\tilde{y}_k$ - общее решение однородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения

Однородное уравнение имеет r линейно независимых решений $\{\tilde{y}_k^{(j)}\}_{j=1}^r$.
Будем искать решение однородного уравнения в виде $y_k = z^k, z \neq 0$

$$a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_r z^{k-r} = 0 = z^{k-r} \underbrace{(a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \ldots + a_r)}_{P_r(z)}, \tag{88}$$

где $P_r(z)$ - характеристический полином конечно-разностного уравнения (86).

1. все корни z_j различны $\Rightarrow z_1^k, \ldots, z_r^k$
2. корень z_j имеет кратность $p \Rightarrow z_j^k, kz_j^k, \ldots, k^{p-1} z_j^k$

Частное решение неоднородного уравнения

Пусть $b_k = Q_m(k)$ - полином степени m.

Определение

Если среди корней характеристического уравнения $P_r(z) = 0$ имеется корень $z_j = 1$, то такой корень называется существенным.

- если существенных корней нет

$$\bar{y}_k = R_m(k) = \beta_0 k^m + \ldots + \beta_m. \tag{89}$$

- если $z_j = 1$ - корень кратности q

$$\bar{y}_k = k^q R_m(k). \tag{90}$$

Пример

Будем решать конечно-разностное уравнение

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = A(3k-4). \tag{91}$$

Характеристическое уравнение: $P_r(z) = z^2 + 4z - 5 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -5.$
Общее решение однородного уравнения

$$\tilde{y}_k = c_1(z_1)^k + c_2(z_2)^k = c_1 + c_2(-5)^k. \tag{92}$$

$A(3k-4)$ - полином степени 1, $z_1 = 1$ - существенный корень кратности 1

$$\bar{y}_k = k(\beta_0 k + \beta_1). \tag{93}$$

Подставим (93) в (91)

$$k(\beta_0 k + \beta_1) + 4(k-1)(\beta_0(k-1) + \beta_1) - 5(k-2)(\beta_0(k-2) + \beta_1) = A(3k-4) \quad (94)$$

$$12\beta_0 k + 6\beta_1 - 16\beta_0 = A(3k-4) \quad (95)$$

$\beta_0 = \frac{A}{4}, \beta_1 = 0.$

Общее решение уравнения (91)

$$y_k = c_1 + c_2(-5)^k + \frac{A}{4}k^2. \quad (96)$$

Оценка погрешности явного метода Адамса

$$\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Явный метод Адамса

$$y_k = y_{k-1} + h\sum_{j=1}^{r} b_j f_{k-j}, \quad f_{k-j} = f(x_{k-j}, y_{k-j}) \tag{97}$$

$y^\star(x)$ - точное решение

$$y^\star(x_k) = y^\star(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{f(x, y^\star(x))}_{L_{r-1}+R_{r-1}} dx = y^\star(x_{k-1}) + h\sum_{j=1}^{r} b_j f^\star_{k-j} + R_k, \tag{98}$$

где $f^\star_{k-j} = f(x_{k-j}, y^\star(x_{k-j}))$, $|R_k| \leq ch^{r+1} = g$.

Погрешность метода: $\epsilon_k = y_k - y^\star(x_k)$.
Вычтем (98) из (97)

$$\epsilon_k = \epsilon_{k-1} + h \sum_{j=1}^{r} b_j (f_{k-j} - f^\star_{k-j}) - R_k \tag{99}$$

$$|\epsilon_k| \leq |\epsilon_{k-1}| + h \sum_{j=1}^{r} |b_j| |(f_{k-j} - f^\star_{k-j})| + g$$
$$|f_{k-j} - f^\star_{k-j}| = |f(x_{k-j}, y_{k-j}) - f(x_{k-j}, y^\star(x_{k-j}))| \leq L|y_{k-j} - y^\star(x_{k-j})| = L|\epsilon_{k-j}|$$

$$|\epsilon_k| \leq |\epsilon_{k-1}| + hL \sum_{j=1}^{r} |b_j| |\epsilon_{k-j}| + g \tag{100}$$

На основе (100) построим конечно-разностное уравнение

$$E_k = E_{k-1} + hL \sum_{j=1}^{r} |b_j| E_{k-j} + g \tag{101}$$

Если удастся подобрать такое решение конечно-разностного уравнения (101)

$$|\epsilon_k| \leq E_k, \forall k, \tag{102}$$

то E_k будет оценкой погрешности метода Адамса.
Решение уравнения (101)

$$E_k = c_1 z_1^k + \ldots + c_r z_r^k + E_k^\star. \tag{103}$$

Стартовые точки - другой метод $\Rightarrow \epsilon_0, \ldots, \epsilon_{r-1}$ - "внешние" ошибки.

Пусть $\epsilon = \max\limits_{k=0,\ldots,r-1} |\epsilon_k|$. Выберем $c_1, \ldots, c_r$ так, чтобы

$$\epsilon \leq E_k, k = 0, \ldots, r-1 \tag{104}$$

и покажем, что в таком случае справедливо (102).

База индукции - неравенство (104).
Индукционный переход.
Пусть $|\epsilon_k| \leq E_k, k = 0, \dots, m-1$. Покажем, что $|\epsilon_m| \leq E_m$

$$E_m \pm \epsilon_m = \underbrace{(E_{m-1} \pm \epsilon_{m-1})}_{I} + h \sum_{j=1}^{r} \underbrace{(|b_j| L E_{m-j} \pm b_j (f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}))}_{II} + \underbrace{g \mp R_m}_{III} \tag{105}$$

$I \geq 0$ по индукционному предположению.
$III \geq 0$, т.к. $|R_k| \leq g, \forall k$.
$|\epsilon_{m-j}| \leq E_{m-j} \Leftrightarrow L|\epsilon_{m-j}| \leq LE_{m-j} \Rightarrow |f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}| \leq LE_{m-j}$
$\Rightarrow LE_{m-j} \pm (f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}) \geq 0 \Rightarrow |b_j| LE_{m-j} \pm b_j (f_{m-j} - f^{\star}_{m-j}) \geq 0.$

Покажем, что характеристический полином $P_r(z)$ уравнения (101) имеет корень на $(1, 1+hLB)$, где $B = \sum\limits_{j=1}^{r} |b_j|$.

$P_r(1) = 1 - 1 - hLB < 0$

$$P_r(1+hLB) = (1+hLB)^k - (1+hLB)^{k-1} - hL\sum_{j=1}^{r}|b_j|(1+hLB)^{k-j} =$$

$$(1+hLB)^{k-1}hLB - hL\sum_{j=1}^{r}|b_j|(1+hLB)^{k-j} = hL\sum_{1}[(1+hLB)^{k-1}|b_j| - |b_j|(1+hLB)^{k-j}] > 0.$$

$\exists z_1 \in (1, 1+hLB)$: $P_r(z_1) = 0$. Тогда

$$E_k = c_1 z_1^k + E_k^\star \tag{106}$$

где $E_k^\star$ - частное решение, константы $c_2, \ldots, c_r$ положили равными 0.

g - полином нулевой степени, 1 не является существенным корней $\Rightarrow E_k^{\star} = D$

$$D = D + hLBD + g \Rightarrow D = -\frac{g}{hLB} = -\frac{ch^r}{LB}. \tag{107}$$

Тогда решение уравнения (101)

$$E_k = c_1 z_1^k - \frac{ch^r}{LB}. \tag{108}$$

Выберем c_1 так, чтобы (104) было выполнено, т.е.

$$c_1 = \epsilon + \frac{ch^r}{LB}. \tag{109}$$

Подставим (109) в (108)

$$|\epsilon_k| \leq E_k = \left(\epsilon + \frac{ch^r}{LB}\right) z_1^k - \frac{ch^r}{LB} = \epsilon z_1^k + \frac{ch^r}{LB}(z_1^k - 1). \tag{110}$$

$z_1^k < (1 + hLB)^k \leq e^{khLB} = e^{(x_k - x_0)LB}$
Оценка погрешности явного метода Адамса

$$|\epsilon_k| \leq \epsilon e^{(x_k - x_0)LB} + \frac{ch^r}{LB}\left(e^{(x_k - x_0)LB} - 1\right). \tag{111}$$

1е слагаемое - вклад ошибок в стартовых точках.
2е слагаемое - накопление локальных погрешностей метода Адамса.
Если $\epsilon = \mathcal{O}(h^q)$, то q должно быть больше r, т.к. итоговый порядок погрешности - минимум из q и r.

Устойчивость конечно-разностных схем решения задачи Коши

Пусть задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y), x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

решается конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f_{k-j}. \tag{112}$$

Как накапливается вычислительная погрешность?
Как коэффициенты влияют на накопление вычислительной погрешности?

Устойчивость конечно-разностных схем решения задачи Коши

- 0-устойчивость: изучение поведения ошибки при постоянной (конечной) длине отрезка. Количество вычислений растёт за счет уменьшения шага.
- Абсолютная устойчивость: решаем на $[0, T]$, T может стремиться к бесконечности. Количество вычислений растет за счёт увеличения интервала.

0-устойчивость. Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y' = 2x, x \in [0, l] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Точное решение $y^\star(x) = x^2$.

$x_k = kh, k = 0, \ldots, n, y^\star(x_k) = x_k^2$.
Будем решать конечно-разностным методом

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 2h(2f_{k-1} + f_{k-2}), \tag{113}$$

который даёт точный результат для всех полиномов степени 3.

$$2h(2f_{k-1}+f_{k-2}) = 2h(4h(k-1)+2h(k-2)) = 4h^2(3k-4)$$

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 4h^2(3k-4) \qquad (114)$$

Согласно (96) общее решение уравнения (114)

$$y_k = c_1 + c_2(-5)^k + h^2k^2. \qquad (115)$$

Пусть y_0 и y_1 заданы точно

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + h^2 0^2 \\ h^2 = c_1 - 5c_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

$\Rightarrow y_k = h^2k^2$, т.е. совпадает с точным, если все вычисления выполняются ТОЧНО.

На практике y_1 вычисляется, т.е.

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 + \epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + h^2 0^2 \\ h^2 + \epsilon = c_1 - 5c_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow c_1 = \frac{\epsilon}{6}, c_2 = -\frac{\epsilon}{6}.$$

Если $\epsilon = \alpha h^q$, то численное решение

$$\tilde{y}_k = \frac{\alpha h^q}{6} - \frac{\alpha h^q}{6}(-5)^k + h^2 k^2. \tag{116}$$

$h^2 k^2 = x_k^2 = y^\star(x_k)$, $\frac{\alpha h^q}{6} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, $\frac{\alpha h^q}{6}(-5)^k \xrightarrow[h\to 0]{kh=const} \pm\infty$.

Чем мельче шаг h, тем больше погрешность. Схема накапливает ошибку, численно неустойчива.

Пусть y_0, y_1 заданы точно

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases}$$

НО каждое вычисление по схеме производится с ошибкой

$$y_k + 4y_{k-1} - 5y_{k-2} = 4h^2(3k-4) + \delta. \tag{117}$$

Решим уравнение (117). Частное решение, отвечающее δ, будем искать в виде βk

$$\beta k + 4\beta(k-1) - 5\beta(k-2) = \delta \Rightarrow \beta = \frac{\delta}{6}. \tag{118}$$

Тогда общее решение уравнения (117)

$$y_k = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2(-5)^k + h^2k^2 + \frac{\delta}{6}k. \tag{119}$$

Константы определим из начальных условий

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + h^2 0^2 \\ h^2 = \tilde{c}_1 - 5\tilde{c}_2 + h^2 1^2 \end{cases} \Rightarrow \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0.$$

Решение уравнения (117)

$$y_k = h^2 k^2 + \frac{\delta}{6} k. \tag{120}$$

$$y_k \xrightarrow[h \to 0]{kh = const} ?$$

Первое слагаемое стремится к $y_k^\star$, а второе стремится к бесконечности. Схема имеет тенденцию к накоплению ошибки.

Не все схемы с хорошим порядком аппроксимации пригодны для практического использования.

Рассмотрим модельную задачу: $y' = 0$. Точное решение $y^\star = const$.
Будем решать конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = 0. \tag{121}$$

$y^\star = const$ удовлетворяет (121) в силу 1го условия согласованности.
При численном решении будем получать $\tilde{y}_k$

$$\tilde{y}_k = y_k^\star + \epsilon_k. \tag{122}$$

Подставив (122) в (121), получим конечно-разностное уравнение относительно ϵ_k

$$\sum_{j=0}^{r} a_j \epsilon_{k-j} = 0. \tag{123}$$

Для поиска общего решения (123) необходимо найти корни характеристического полинома

$$P_r(z) = a_0 z^r + a_1 z^{r-1} + \ldots + a_r. \tag{124}$$

Если z_j - корень кратности p_j, то ему соответствуют решения

$$z_j^k, k z_j^k, \ldots, k^{p_j-1} z_j^k. \tag{125}$$

Корневое условие

Все корни характеристического полинома лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе единичного круга нет кратных корней.

Утверждение (условие 0-устойчивости)

Для того чтобы конечно-разностная схема была 0-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось корневое условие.

Теорема Далквиста

Конечно-разностная схема

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j f_{k-j} \tag{126}$$

с порядком аппроксимации q не может быть устойчивой, если

- $q > r$ для явной схемы,
- $q > r + 1$ для неявной схемы и нечетного r,
- $q > r + 2$ для неявной схемы и четного r.

Все коэффициенты нельзя задать так, чтобы получить максимальный порядок аппроксимации. Часть коэффициентов должна быть зафиксирована из условия достижения 0-устойчивости.

Абсолютная устойчивость

Рассмотрим модельную задачу: $y' = \lambda y$. Точное решение $y^{\star}(x) = ce^{\lambda x}$.
Если $Re(\lambda) < 0$, то $y^{\star}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.
Будем решать конечно-разностным методом

$$\sum_{j=0}^{r} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=0}^{r} b_j \lambda y_{k-j} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{r} (a_j - h\lambda b_j) y_{k-j} = 0. \tag{127}$$

Характеристический полином

$$\chi(z) = \sum_{j=0}^{r} (a_j - \lambda h b_j) z^{r-j} = 0. \tag{128}$$

Если корни (128) $z_j = z_j(\lambda h)$ удовлетворяют корневому условию, то схема (127) называется абсолютно устойчивой.

Примеры

Одношаговые методы $\Rightarrow r = 1$

$$\chi(z) = (a_0 - \lambda h b_0)z + (a_1 - \lambda h b_1) = 0. \tag{129}$$

Явный метод Эйлера

$$y_k - y_{k-1} = hf(x_{k-1}, y_{k-1}) \tag{130}$$

$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 0, b_1 = 1$

$$\chi(z) = (1 - \lambda h \cdot 0)z + (-1 - \lambda h \cdot 1) = 0 \Rightarrow z_1 = 1 + \lambda h. \tag{131}$$

$|1 + \lambda h| < 1$. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

- $\lambda > 0$ - неравенство не может быть выполнено ни для какого $h > 0$,
- $\lambda < 0 \Rightarrow 0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$.

Неявный метод Эйлера

$$y_k - y_{k-1} = hf(x_k, y_k) \tag{132}$$

$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = 1, b_1 = 0$

$$\chi(z) = (1 - \lambda h \cdot 1)z + (-1 - \lambda h \cdot 0) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{1 - \lambda h}. \tag{133}$$

$|1 - \lambda h| > 1.$

Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то

- $\lambda < 0$ - неравенство выполняется при любых $h > 0$,
- $\lambda > 0 \Rightarrow h \geq \frac{2}{\lambda}$.

Метод трапеций

$$y_k - y_{k-1} = \frac{h}{2}\left(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)\right) \tag{134}$$

$a_0 = 1, a_1 = -1, b_0 = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{2}$

$$\chi(z) = \left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) z + \left(-1 - \frac{\lambda h}{2}\right) = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{2 + \lambda h}{2 - \lambda h}. \tag{135}$$

$\lambda h = \alpha + \beta i \Rightarrow |\frac{2+\alpha+\beta i}{2-\alpha-\beta i}| < 1$
$\Rightarrow \sqrt{(2+\alpha)^2 + \beta^2} \leq \sqrt{(2-\alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow \alpha \leq 0.$

Если область абсолютной устойчивости включает в себя левую полуплоскость, то схема называется А-устойчивой.

Замечания

1. В общем случае $y' = f(x, y)$ в роли параметра λ фигурирует $f'_y(x, y)$

$$f(x, y) = f(x, y_k) + f'_y(x, y_k)(y - y_k) + \dots \tag{136}$$

2. В случае многошаговых методов характеристический полином имеет несколько корней. Для каждого корня определяется область устойчивости.
3. Анализ абсолютной устойчивости методов Рунге-Кутты более сложный.

Содержание

Постановка задачи

Рассмотрим линейное ОДУ 2го порядка с переменными коэффициентами

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{137}$$

$p(x), q(x), r(x), f(x) \in C([a, b])$.

Дифференциальный оператор $L = p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + r$. Тогда (137) $\Leftrightarrow L(y) = f$.

Общий вид граничных условий (ГУ)

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{138}$$

$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Особенности решения краевых задач

Краевая задача = ДУ (137) + ГУ (138)

- может не иметь решения
- может иметь бесконечное число решений
- может иметь единственное решение

При решении краевой задачи

- либо ставят условия на коэффициенты уравнения для обеспечения единственности решения,
- либо выявляют ситуацию, когда решение не существует или не единственно.

Будем рассматривать методы, которые сводят краевую задачу с решению задачи Коши.

Метод суперпозиции

Общее решение уравнения (137)

$$y(x) = u(x) + c_1 v(x) + c_2 w(x), \tag{139}$$

где $u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения,
$c_1 v(x) + c_2 w(x)$ - общее решение однородного уравнения.
$v(x)$ и $w(x)$ должны быть линейно независимыми.

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \\ L(w) = 0 \end{cases} \tag{140}$$

На u, v, w сформулируем НУ так, чтобы автоматически выполнились ГУ (138).
Вместо краевой задачи будем решать 3 задачи Коши.

Зададим однородные НУ для $u(x)$

$$\begin{cases} u(a) = 0 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \tag{141}$$

Если НУ линейно независимы, то и решения будут линейно независимы. Зададим такие НУ для v и w

$$\begin{cases} v(a) = 1 \\ v'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} w(a) = 0 \\ w'(a) = 1 \end{cases} \tag{142}$$

(140) + (141) + (142) $\to u^h, v^h, w^h$ - сеточные функции.
Тогда $y^h = u^h + c_1 v^h + c_2 w^h$

Определим c_1, c_2 так, чтобы удовлетворить ГУ (138)

$$\begin{cases} \alpha_0[\underbrace{u(a)}_{=0} + c_1 \underbrace{v(a)}_{=1} + c_2 \underbrace{w(a)}_{=0}] + \alpha_1[\underbrace{u'(a)}_{=0} + c_1 \underbrace{v'(a)}_{=0} + c_2 \underbrace{w'(a)}_{=1}] = A \\ \beta_0[u(b) + c_1 v(b) + c_2 w(b)] + \beta_1[u'(b) + c_1 v'(b) + c_2 w'(b)] = B \end{cases} \quad (143)$$

(143) - СЛАУ относительно c_1, c_2.

- Если нет решений, то и краевая задача не имеет решений.
- Если бесконечное число решений, то одну константу задаем произвольно и получаем параметрическое семейство.

Метод трудоёмкий, т.к. нужно решить 3 задачи Коши для ОДУ 2го порядка.

Модификация метода суперпозиции

Сократим количество решаемых задач. Решение (137) будем искать в виде

$$y(x) = u(x) + cv(x), \tag{144}$$

где $u(x)$ - частное решение неоднородного уравнения, $v(x)$ - решение однородного уравнения

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \end{cases} \tag{145}$$

Подберем НУ для u и v так, чтобы первое ГУ (138) выполнялись $\forall c$

$$\alpha_0[u(a) + cv(a)] + \alpha_1[u'(a) + cv'(a)] = A \tag{146}$$

(146) при $c = 0$: $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A$

$$\begin{cases} u(a) = \dfrac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \\ u'(a) = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} A \end{cases} \tag{147}$$

Тогда (146) с учетом (147)

$$c[\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a)] = 0 \tag{148}$$

Возьмём $\mu \neq 0$

$$\begin{cases} v(a) = \mu\alpha_1 \\ v'(a) = -\mu\alpha_0 \end{cases} \tag{149}$$

(154) + (147) + (149) $\to u^h, v^h$ - сеточные функции.
Тогда $y^h = u^h + cv^h$

Константу c определим из второго ГУ (138)

$$\beta_0[u(b) + cv(b)] + \beta_1[u'(b) + cv'(b)] = B. \tag{150}$$

$c[\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)] = B - [\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)] \Rightarrow c = \dots$

Если множитель при c равен 0, то ситуация зависит от правой части.

Метод суперпозиции имеет большую свободу выбора НУ для решения задач Коши. Модифицированный метод проще, т.к. нужно решать только 2 задачи Коши.

Метод факторизации, или метод расщепления

Предположим, что существуют такие $s(x)$ и $t(x)$, что решение ОДУ 2го порядка

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \tag{151}$$

может быть представлено как решение ОДУ 1го порядка

$$y'(x) = s(x)y(x) + t(x). \tag{152}$$

Если сконструируем функцию

$$y(x) = u(x) + cv(x), \tag{153}$$

для которой

$$\begin{cases} L(u) = f \\ L(v) = 0 \end{cases} \tag{154}$$

то эта функция будет решением (151) $\Rightarrow$ она должна быть решением (152) $\forall c$.

Подставим (153) в (152): $u' + cv' = s(u + cv) + t, \forall c$

$$\begin{cases} u' = su + t \\ v' = sv \end{cases} \tag{155}$$

v должно удовлетворять условию (154).
$v'' = s'v + sv' = s'v + s^2 v$

$$\begin{aligned} L(v) &= pv'' + qv' + rv \\ &= p(s'v + s^2 v) + q(sv) + rv \\ &= v(ps' + ps^2 + qs + r) = 0 \end{aligned} \tag{156}$$

$v \neq 0 \Rightarrow$ ОДУ 1го порядка относительно s

$$ps' + ps^2 + qs + r = 0. \tag{157}$$

u должно удовлетворять условию (154).
$u'' = s'u + su' + t' = s'u + s(su + t) + t'$

$$
\begin{aligned}
L(u) &= pu'' + qu' + ru \\
&= p(s'u + s(su + t) + t') + q(su + t) + ru \\
&= u\underbrace{(ps' + ps^2 + qs + r)}_{0\ (157)} + pst + pt' + qt = f
\end{aligned}
\tag{158}
$$

ОДУ 1го порядка относительно t

$$
pt' + pst + qt = f. \tag{159}
$$

$(152) \Rightarrow y'(a) = s(a)y(a) + t(a)$
$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$
Если $\alpha_1 \neq 0$, то $y'(a) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} y(a) + \frac{A}{\alpha_1}$

$$\begin{cases} s(a) = -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1} \\ t(a) = \dfrac{A}{\alpha_1} \end{cases} \tag{160}$$

(157) + (160) $\to s^h$
(159) + (160) $\to t^h$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 [s(b)y(b) + t(b)] = B$$

$$y(b)[\beta_0 + \beta_1 s(b)] = B - \beta_1 t(b) \Rightarrow y(b) = \dots . \tag{161}$$

Если множитель при $y(b)$ равен 0, то ситуация зависит от правой части.

Если $\alpha_1 = 0$, но $\beta_1 \neq 0$, то можем привлечь ГУ на правом конце.

Замечание

Если задачи Коши решаются численно, то получаем сеточные функции. Необходимо позаботиться, чтобы для вычисления t^h были необходимые значения s^h. Аналогично для y^h.

Если $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$

$$\begin{cases} y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \tag{162}$$

Возьмем другое ОДУ для $y(x)$

$$z(x)y'(x) = y(x) + w(x), \tag{163}$$

где $z(x), w(x)$ - неизвестные функции.

Подставим (153) в (163): $z(u' + cv') = u + cv + w, \forall c$

$$\begin{cases} zu' = u + w \\ zv' = v \end{cases} \tag{164}$$

v должно удовлетворять условию (154).
$z'v' + zv'' = v' \qquad \times z$
$z^2v'' = (1 - z')v'z = (1 - z')v$

$$
\begin{aligned}
z^2L(v) &= z^2[pv'' + qv' + rv] \\
&= p[(1 - z')v] + zqv + z^2rv \\
&= v[p(1 - z') + qz + rz^2] = 0
\end{aligned}
\tag{165}
$$

$v \neq 0 \Rightarrow$ ОДУ 1го порядка относительно z

$$
p(1 - z') + qz + rz^2 = 0. \tag{166}
$$

u должно удовлетворять условию (154).

$z'u' + zu'' = u' + w' \quad |\times z$

$z' \underbrace{zu'} + z^2u'' = \underbrace{zu'} + zw'$

$z^2u'' = (1 - z')(u + w) + w'z$

$$
\begin{aligned}
z^2L(u) &= z^2[pu'' + qu' + ru] \\
&= p[(1 - z')(u + w) + w'z] + qz(u + w) + z^2ru \\
&= u\underbrace{\left[p(1 - z') + qz + rz^2\right]} + p(1 - z')w + pw'z + qzw = z^2f
\end{aligned}
\tag{167}
$$

$(166) \Rightarrow p(1 - z') = -qz - rz^2$

$$-(qz + rz^2)w + pw'z + qzw = z^2 f \tag{168}$$

ОДУ 1го порядка относительно w

$$pw' - rzw = zf. \tag{169}$$

$(163) \Rightarrow z(a)y'(a) = y(a) + w(a)$
$y(a) = A$

$$\begin{cases} z(a) = 0 \\ w(a) = -A \end{cases} \tag{170}$$

(166) + (170) $\to z^h$, (169) + (170) $\to w^h$
$y(b) = B \to y^h$.

Метод конечных разностей (МКР) решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b] \\ y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases} \tag{171}$$

Построим равномерную сетку на $[a, b]$: $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Запишем ОДУ в узлах сетки

$$p_k y''(x_k) + q_k y'(x_k) + r_k y(x_k) = f_k, k = 0, \ldots, n \tag{172}$$

где $p_k = p(x_k)$, $q_k = q(x_k)$, $r_k = r(x_k)$, $f_k = f(x_k)$.

Аппроксимация производных конечно-разностными выражениями

$$\begin{cases} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \\ y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + \mathcal{O}(h^4) \end{cases} \tag{173}$$

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + h^2 y''(x) + \mathcal{O}(h^4) \Rightarrow$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{174}$$

$$y(x+h) - y(x-h) = 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3) \Rightarrow$$

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{175}$$

В (174), (175) заменим x на x_k и подставим в (172)

$$p_k \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + q_k \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + r_k y(x_k) + \mathcal{O}(h^2) = f_k \qquad (176)$$

В (176) отбросим $\mathcal{O}(h^2)$, заменим $y(x_k)$ на y_k

$$p_k \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + q_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + r_k y_k = f_k, k = 1, \ldots, n-1 \qquad (177)$$

ГУ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y_0 = A \\ y_n = B \end{cases} \qquad (178)$$

(177), (178) - СЛАУ $\to \{y_k\}_{k=0}^{n}$.

$$\begin{cases} \left(p_k - \dfrac{q_k}{2}h\right) y_{k-1} + (h^2 r_k - 2p_k) y_k + \left(p_k + \dfrac{q_k}{2}h\right) y_{k+1} = h^2 f_k, k = 1, \ldots, n-1 \\ y_0 = A \\ y_n = B \end{cases} \tag{179}$$

Теорема

Если $\forall x \in [a, b]$

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ p(x) \geq \dfrac{h}{2}|q(x)| \\ r(x) \leq 0 \end{cases} \tag{180}$$

то СЛАУ (179) имеет единственное решение и вычислительная погрешность $\mathcal{O}(h^2)$.

Граничные условия общего вида

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x), x \in [a, b] \\ \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \alpha_0 y(b) + \alpha_1 y'(b) = B \end{cases} \tag{181}$$

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow y'(x) = \tfrac{y(x+h)-y(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A. \tag{182}$$

Аналогично для 2го ГУ

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \tag{183}$$

(177), (182), (183) - МКР 1го порядка, ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(h)$.

$$\begin{cases} y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \dfrac{h^2}{2}y''(x) + \mathcal{O}(h^3) \\ y(x+2h) = y(x) + 2hy'(x) + 2h^2y''(x) + \mathcal{O}(h^3) \end{cases} \tag{184}$$

$4y(x+h) - y(x+2h) = 3y(x) + 2hy'(x) + \mathcal{O}(h^3)$

$$y'(x) = \frac{-3y(x) + 4y(x+h) - y(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{185}$$

$x \to x_0, x+h \to x_1, x+2h \to x_2$, отбросим $\mathcal{O}(h^2)$

$$y'_0 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} \tag{186}$$

Упражнение

Получить аналогичное соотношение для ГУ на правом конце.

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \to$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A \tag{187}$$

(177), (187), (...) - МКР 2го порядка, ошибка аппроксимации $\mathcal{O}(h^2)$.

Замечания

1. Матрица СЛАУ уже не трёхдиагональная. Для приведения к трёхдиагональному виду из 1го уравнения исключают y_2 с помощью 2го уравнения.
2. Если ДУ более высокого порядка, то нужно привлекать больше точек для аппроксимации производных.
3. Если ДУ нелинейное, то и система будет нелинейной.

ы182

Упражнения

1. Решить дифференциальное уравнение $y' = x + y^2$ неявным методом Эйлера с шагом $h = 0.2$ на интервале $[1, 2]$ при условии $y(2) = 1$.
2. Построить метод Адамса для $r = 3$ методом неопределённых коэффициентов.
3. Определить порядок аппроксимации формул (63), (64), (65) с помощью условий (82).
4. Являются ли методы Рунге-Кутты и методы Адамса 0-устойчивыми?