Алгебраическая проблема собственных значений

Курц В.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого

9 декабря 2020 г.

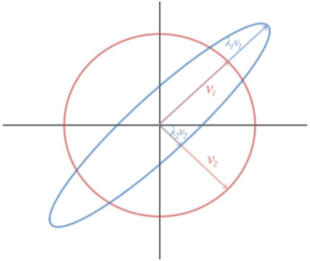
Содержание

Собственные значения и собственные векторы матрицы

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением, или собственным числом (СЧ, eigenvalue) матрицы A, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^n$:

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

где x - собственный вектор (СВ, eigenvector), отвечающий собственному числу λ.



1. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений.
2. https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-21-eigenvalues-and-eigenvectors/

Приложения:

- Задачи физики, механики, биологии...
- Метод главных компонент (PCA) - уменьшение размерности данных.
- Google's famous PageRank algorithm for presenting web search results. Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani and Terry Winograd. The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. — 1998.

Некоторые свойства СЧ и СВ

1. A - симметричная матрица $\Rightarrow$ все СЧ вещественны.
2. A - несимметричная матрица $\Rightarrow$ возможно наличие комплексных СЧ: $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.
3. λ - СЧ $A \Rightarrow \lambda^k$ - СЧ A^k. СВ A и A^k совпадают. (Доказать самостоятельно).
4. $tr(A) = \sum \lambda_i$, $\det(A) = \prod \lambda_i$.
5. СЧ A и $A^\top$ совпадают.
6. $\lambda_i \neq \lambda_j$, $w^{(i)}$ - СВ A, $u^{(j)}$ - СВ $A^\top \Rightarrow (w^{(i)}, u^{(j)}) = 0$. (Доказать самостоятельно).

Постановка задачи

1. ”Простая” задача: найти λ и x такие, что $Ax = \lambda x$.
2. Обобщенная проблема: найти λ и x такие, что $Ax = \lambda Bx$, где A, B - матрицы.

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda E)x = 0, x \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0.$
Характеристическое уравнение (characteristic equation)

$$\det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n \tag{2}$$

По основной теореме высшей алгебры матрица A имеет n собственных чисел.

1. Полная алгебраическая проблема собственных значений (АПСЗ) - найти все собственные пары λ, x.
2. Частичная АПСЗ - найти только некоторые собственные числа и векторы (максимальное/минимальное по модулю СЧ или СЧ, наиболее близкое к заданному значению).

Методы решения АПСЗ

1. Методы, основанные на построении характеристического уравнения.
2. Методы, основанные на сведении матриц к простейшим видам.

Матрицы A и B подобны (similar), если существует невырожденная матрица G

$$B = G^{-1} A G. \tag{3}$$

Преобразование подобия (similarity transformation) сохраняет собственные числа

$$B x_B = \lambda_B x_B \Leftrightarrow G^{-1} A \underbrace{G x_B}_{x_A} = \lambda_B x_B \Leftrightarrow A x_A = \lambda_B x_A. \tag{4}$$

1. Прямые методы.
2. Итерационные методы.

Простейшие задачи

1. $A = D = diag\{d_i\}$.
   Собственные числа - диагональные элементы, собственными векторы - векторы естественного базиса.
2. A - верхняя (нижняя) треугольная матрица.
   Собственные числа - диагональные элементы.
   Упражнение: как найти собственные векторы?

Содержание

Об устойчивости алгебраической проблемы собственных значений

$\{\lambda_j, w^{(j)}\}$ - собственные пары матрицы A.

Пусть матрица A получила малое возмущение δA: $A + \delta A$ ($\|\delta A\|$ мала)
$\Rightarrow$ собственные пары изменятся: $\lambda_j + \delta\lambda_j$ и $w^{(j)} + \delta w^{(j)}$.

Разложим $\delta w^{(p)}$ по базису из собственных векторов

$$\delta w^{(p)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(p)} w^{(j)}, p = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Как связаны $|\delta\lambda_p|$ и $|\alpha_j^{(p)}|$ с $\|\delta A\|$?

$$(A+\delta A)(w^{(p)}+\delta w^{(p)}) = (\lambda_p+\delta\lambda_p)(w^{(p)}+\delta w^{(p)}) \Leftrightarrow$$
$$Aw^{(p)}+\delta A w^{(p)}+A\delta w^{(p)}+\delta A\delta w^{(p)} = \lambda_p w^{(p)}+\delta\lambda_p w^{(p)}+\lambda_p\delta w^{(p)}+\delta\lambda_p\delta w^{(p)}$$

$\delta A\delta w^{(p)}$, $\delta\lambda_p\delta w^{(p)}$ - величины 2-го порядка малости, можно пренебречь.

$$\delta A w^{(p)}+A\delta w^{(p)} = \delta\lambda_p w^{(p)}+\lambda_p\delta w^{(p)} \Leftrightarrow$$
$$\delta A w^{(p)}+A\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(p)}w^{(j)} = \delta\lambda_p w^{(p)}+\lambda_p\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^{(p)}w^{(j)} \Leftrightarrow$$

$$\delta A w^{(p)}+A\sum_{j=1,j\neq p}^{n}\alpha_j^{(p)}w^{(j)} = \delta\lambda_p w^{(p)}+\lambda_p\sum_{j=1,j\neq p}^{n}\alpha_j^{(p)}w^{(j)}. \qquad (6)$$

Пусть $u^{(j)}$ - собственные векторы матрицы $A^\top$. Если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $(w^{(i)}, u^{(j)}) = 0$.
Умножим (6) скалярно на $u^{(p)}$

$$(\delta A w^{(p)}, u^{(p)}) + 0 = \delta\lambda_p (w^{(p)}, u^{(p)}) + 0. \tag{7}$$

Оценка для $\delta\lambda_p$

$$|\delta\lambda_p| = \frac{|(\delta A w^{(p)}, u^{(p)})|}{|(w^{(p)}, u^{(p)})|} \leq \frac{\|\delta A\| \left\|w^{(p)}\right\| \left\|u^{(p)}\right\|}{|(w^{(p)}, u^{(p)})|} = \mu_p \|\delta A\|, \tag{8}$$

где $\mu_p = \frac{\left\|w^{(p)}\right\| \left\|u^{(p)}\right\|}{|(w^{(p)}, u^{(p)})|}$ - коэффициент перекоса.

$\frac{1}{\mu_p} = \frac{|(w^{(p)}, u^{(p)})|}{\left\|w^{(p)}\right\| \left\|u^{(p)}\right\|} = |\cos(w^{(p)}, u^{(p)})|$ - косинус угла между векторами $w^{(p)}$ и $u^{(p)}$.

$\mu_p \geq 1$.

Умножим (6) скалярно на $u^{(i)}, i \neq p$
$(\delta A w^{(p)}, u^{(i)}) + \alpha_i^{(p)} \lambda_i (w^{(i)}, u^{(i)}) = 0 + \lambda_p \alpha_i^{(p)} (w^{(i)}, u^{(i)})$
Оценка для $|\alpha_i^{(p)}|$

$$|\alpha_i^{(p)}| = \frac{(\delta A w^{(p)}, u^{(i)})}{|\lambda_p - \lambda_i| |(w^{(i)}, u^{(i)})|} \leq \frac{\|\delta A\| \left\|w^{(p)}\right\| \left\|u^{(i)}\right\|}{|(w^{(i)}, u^{(i)})|} \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_i|}. \tag{9}$$

$$|\alpha_i^{(p)}| \leq \|\delta A\| \, \mu_i \frac{\left\|w^{(p)}\right\|}{\left\|w^{(i)}\right\|} \frac{1}{|\lambda_p - \lambda_i|} = \frac{\mu_i}{|\lambda_p - \lambda_i|} \|\delta A\| \, . \tag{10}$$

Наилучший вариант с точки зрения устойчивости: $\mu = 1$.
Например, это верно для симметричной матрицы.
Неустойчивость может возникнуть из-за плохой отделимости собственных чисел.

Пример

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b^2 & a \end{bmatrix}, A^\top = \begin{bmatrix} a & b^2 \\ 1 & a \end{bmatrix}, b > 0.$$

$$\chi_A(\lambda) = (a-\lambda)^2 - b^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = a \mp b.$$

$$(A - \lambda_1 E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} bx_1 + x_2 = 0 \\ b^2 x_1 + bx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -b \end{cases} \Rightarrow w^{(1)} = (1, -b)^\top.$$

$$(A - \lambda_2 E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -bx_1 + x_2 = 0 \\ b^2 x_1 - bx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = b \end{cases} \Rightarrow w^{(2)} = (1, b)^\top.$$

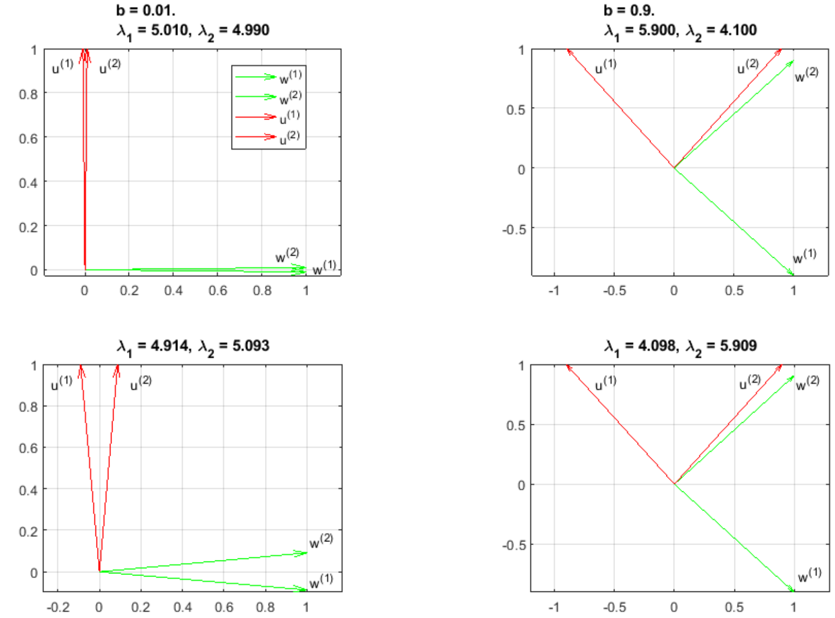
Собственные векторы $A^\top$: $u^{(1)} = (-b, 1)^\top$, $u^{(2)} = (b, 1)^\top$

Коэффициент перекоса μ_1

$$\mu_1 = \frac{\left\|w^{(1)}\right\| \left\|u^{(1)}\right\|}{\left|\left(w^{(1)}, u^{(1)}\right)\right|} = \frac{1+b^2}{2b}. \tag{11}$$

1. $b = 1 \Rightarrow \mu = 1$
2. $b \to 0 \Rightarrow \mu \to \infty$

Пусть $a = 5$, $b = 0.01$ и $b = 0.9$.
Внесем возмущение $\delta A \sim 0.01\mathrm{rand}(2,2)$.
Посмотрим как изменятся СЧ и СВ.



b = 0.01.
λ1 = 5.010, λ2 = 4.990
b = 0.9.
λ1 = 5.900, λ2 = 4.100
λ1 = 4.914, λ2 = 5.093
λ1 = 4.098, λ2 = 5.909
w(1)
w(2)
u(1)
u(2)

Содержание

Методы, основанные на решении характеристического уравнения

λ - собственное число $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \ldots - p_{n-1}\lambda - p_n) = 0.$
Собственные числа являются корнями характеристического многочлена.

1. Напрямую вычислить характеристический многочлен и найти его корни, причем известны границы корней: $-\|A\| \leq \lambda \leq \|A\|$.
2. С помощью интерполяции. Взять разные значения $\chi_A(\lambda)$ и построить интерполяционный полином, найти его корни.

Метод Леверье

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные числа A, то $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ - собственные числа A^k.

$tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$

$S_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k = tr(A^k)$

Суммы S_k степеней корней характеристического многочлена связаны с его коэффициентами формулами Ньютона

$$p_k = \frac{1}{k}(S_k - p_1 S_{k-1} - \ldots - p_{k-1} S_1), k = 1, \ldots, n \tag{12}$$

По рекурентной формуле (12) можно найти все коэффициенты характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$.

Трехдиагональная матрица

$$D_n(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 - \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} - \lambda & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} - \lambda & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2n}(b_n - \lambda)D_{n-1}(\lambda) + (-1)^{2n-1}a_n(-1)^{2n-2}c_{n-1}D_{n-2}(\lambda)$$

$D_0(\lambda) = 1, D_1(\lambda) = b_1 - \lambda$, далее вычисляются $D_2(\lambda), D_3(\lambda), \dots$

Матрица Хессенберга

Пусть $A = H$, где H - матрица Хессенберга.

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,n-2} & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ k_2 & h_{22} & \dots & h_{2,n-2} & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ 0 & k_3 & \dots & h_{3,n-2} & h_{2,n-1} & h_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2,n-2} & h_{n-2,n-1} & h_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_n & h_{n,n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$D_n(\lambda) = \det(H - \lambda E) =$$

$$\begin{vmatrix} h_{11}-\lambda & h_{12} & \dots & h_{1,n-2} & h_{1,n-1} & h_{1,n} \\ k_2 & h_{22}-\lambda & \dots & h_{2,n-2} & h_{2,n-1} & h_{2,n} \\ 0 & k_3 & \dots & h_{3,n-2} & h_{2,n-1} & h_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{n-2,n-2}-\lambda & h_{n-2,n-1} & h_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & h_{n-1,n-1}-\lambda & h_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_n & h_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{2n}(h_{n,n}-\lambda)D_{n-1}(\lambda)+$$
$$(-1)^{2n-1}h_{n-1,n}k_nD_{n-2}(\lambda)+$$
$$(-1)^{2n-2}h_{n-2,n}k_nk_{n-1}D_{n-3}(\lambda)+\ldots+$$
$$(-1)^{n+3}h_{3,n}(k_n\ldots k_4)D_2(\lambda)+$$
$$(-1)^{n+2}h_{2,n}(k_n\ldots k_3)D_1(\lambda)+$$
$$(-1)^{n+1}h_{1,n}(k_n\ldots k_2)D_0(\lambda)$$

$D_0(\lambda) = 1$, далее вычисляются $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \ldots$.

Преобразование матрицы к форме Хессенберга матрицами отражения

Матрица отражения: $P = E - 2\frac{ww^\top}{\|w\|^2}, P^{-1} = P$.
Будем строить матрицы такой структуры

$$P_i = \left[\begin{array}{c:c} E^{(i)} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & P^{(n-i)} \end{array}\right], P_i^{-1} = P_i, \tag{14}$$

где $P^{(n-i)}$ - матрица отражения порядка $(n-i)$, $E^{(i)}$ - единичная матрица порядка i.
$A = A_1 = \left[\begin{array}{c:c} H^{(1)} & u^{(1,n-1)} \\ \hdashline v^{(n-1,1)} & A^{(n-1)} \end{array}\right]$, $H^{(1)}$ - матрица Хессенберга порядка 1.
Построим матрицу $P_1 = \left[\begin{array}{c:c} E^{(1)} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & P^{(n-1)} \end{array}\right], P_1^{-1} = P_1$.
$A_2 = P_1^{-1} A_1 P_1 = \left[\begin{array}{c:c} H^{(1)} & u^{(1,n-1)} P^{(n-1)} \\ \hdashline P^{(n-1)} v^{(n-1,1)} & P^{(n-1)} A^{(n-1)} P^{(n-1)} \end{array}\right]$.

Если $v^{(n-1,1)} \neq (0, \ldots, 0)^\top$, то возьмем $P^{(n-1)}$

$$P^{(n-1)} v^{(n-1,1)} = k_2 e_1^{(n-1)}. \tag{15}$$

Тогда

$$A_2 = \left[\begin{array}{c:c} H^{(2)} & u^{(2,n-2)} \\ \hdashline v^{(n-2,2)} & A^{(n-2)} \end{array}\right], \tag{16}$$

причем первый столбец матрицы $v^{(n-2,2)}$ нулевой, т.е. $v^{(n-2,2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & v^{(2)} \end{bmatrix}$.

Построим матрицу $P_2 = \left[\begin{array}{c:c} E^{(2)} & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & P^{(n-2)} \end{array}\right], P_2^{-1} = P_2$.

$A_3 = P_2^{-1} A_2 P_2 = \left[\begin{array}{c:c} H^{(2)} & u^{(2,n-2)} P^{(n-2)} \\ \hdashline P^{(n-2)} v^{(n-2,2)} & P^{(n-2)} A^{(n-2)} P^{(n-2)} \end{array}\right]$.

Выберем $P^{(n-2)}$

$$P^{(n-2)} v^{(2)} = k_3 e_1^{(n-2)}. \tag{17}$$

Тогда

$$A_3 = \left[\begin{array}{c:c} H^{(3)} & u^{(3,n-3)} \\ \hdashline v^{(n-3,3)} & A^{(n-3)} \end{array}\right] \tag{18}$$

и $v^{(n-3,3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & v^{(3)} \end{bmatrix}$.

На k-м шаге получим

$$A_k = \left[\begin{array}{c:c} H^{(k)} & u^{(k,n-k)} \\ \hdashline v^{(n-k,k)} & A^{(n-k)} \end{array}\right] \xrightarrow{P_k A_k P_k} A_{k+1}, \tag{19}$$

где $v^{(n-k,k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & v^{(k)} \end{bmatrix}$.

На $(n-1)$-м шаге получим матрицу в форме Хессенберга

$$A_{n-1} = \left[\begin{array}{c:c} H^{(n-1)} & u^{(n-1,1)} \\ \hdashline v^{(1,n-1)} & A^{(1)} \end{array}\right] = H^{(n)} = H, \tag{20}$$

поскольку $v^{(1,n-1)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & v^{(n-1)} \end{bmatrix}$.

Перемножив последовательно все матрицы преобразования P_i, получаем матрицу преобразования матрицы A к форме Хессенберга

$$G = P_1 P_2 \dots P_{n-1}, \tag{21}$$

т.е. $H = G^{-1}AG$.

Преобразования подобия с использованием матриц вращения

Матрица вращения

$$T_{ij}(\phi) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & \dots & -s & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & s & \dots & c & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{22}$$

где $c = cos(\phi)$, $s = sin(\phi)$.
T_{ij} поворачивает вектор x в плоскости Ox_ix_j на угол ϕ.
$T_{ij}^{-1} = T_{ij}^{\top}$.

$$\tilde{A} = T_{ij}^{\top} A T_{ij} = T_{ij}^{\top} B.$$

$$B = AT_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{kl}} & i & \phantom{a_{kl}} & j & \phantom{a_{kl}} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{kl} & b_{ki} & a_{kl} & b_{kj} & a_{kl} \end{array} \right) \end{array}. \tag{23}$$

Матрица B отличается от A только i-м и j-м столбцами

$$b_{kl} = \begin{cases} a_{kl} & \forall k, l \neq i, j \\ a_{ki}c + a_{kj}s & \forall k, l = i \\ -a_{ki}s + a_{kj}c & \forall k, l = j \end{cases} \tag{24}$$

$$\tilde{A} = T_{ij}^{\top} B = \left(\begin{array}{c} b_{kl} \\ \hline \tilde{a}_{il} \\ \hline b_{kl} \\ \hline \tilde{a}_{jl} \\ \hline b_{kl} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} . \tag{25}$$

Матрица $\tilde{A}$ отличается от B только i-й и j-й строками

$$\tilde{a}_{kl} = \begin{cases} b_{kl} & \forall l, k \neq i, j \\ b_{il}c + b_{jl}s & \forall l, k = i \\ -b_{il}s + b_{jl}c & \forall l, k = j \end{cases} \tag{26}$$

Матрица вращения только поворачивает вектор, длина при этом остается неизменной $\Rightarrow$

$$\tilde{a}_{il}^2 + \tilde{a}_{jl}^2 = b_{il}^2 + b_{jl}^2 \tag{27}$$

В результате преобразования подобия с матрицей вращения T_{ij} меняется только i-я, j-я строки и i-й, j-й столбцы матрицы A.

$$\tilde{A} = T_{ij}^{\top} A T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & i & & & j & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|cc|c|c} & \star & & & \star & \\ \hline \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hline & \star & & & \star & \\ & \star & & & \star & \\ \hline \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hline & \star & & & \star & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} \tag{28}$$

Преобразование матрицы к форме Хессенберга матрицами вращения

$$\tilde{A} = T_{ij}^{\top} A T_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \phantom{\tilde{a}_{j,i-1}} & i & & j & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \tilde{a}_{j,i-1} & & & & \\ \hline & & & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{29}$$

Выберем ϕ так, чтобы $\tilde{a}_{j,i-1} = 0$

$$\tilde{a}_{j,i-1} \overset{(26)}{=} -b_{i,i-1}s + b_{j,i-1}c \overset{(24)}{=} -a_{i,i-1}s + a_{j,i-1}c = 0 \tag{30}$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) = \frac{a_{j,i-1}}{a_{i,i-1}}, \cos(\phi) = \frac{a_{i,i-1}}{\sqrt{a_{i,i-1}^2 + a_{j,i-1}^2}}, \sin(\phi) = \frac{a_{j,i-1}}{\sqrt{a_{i,i-1}^2 + a_{j,i-1}^2}}$$

С помощью T_{23} обнулим a_{31}, с помощью T_{24} - a_{41}, ..., с помощью T_{2n} - a_{n1}

$$A_2 = T_{2n}^{\top} \dots T_{23}^{\top} A T_{23} \dots T_{2n} = \left(\begin{array}{c|cccc} \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star \end{array}\right) \tag{31}$$

Обнулённые элементы не меняются при последовательном умножении на матрицы вращения.

С помощью T_{34} обнулим a_{42}, с помощью T_{35} - a_{52}, ..., с помощью T_{3n} - a_{n2}

$$A_3 = T_{3n}^{\top} \dots T_{34}^{\top} A T_{34} \dots T_{3n} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star & \star \end{array}\right) \tag{32}$$

При этом элементы первого столбца так и остаются нулевыми в силу (27):
$0^2 + 0^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a = b = 0$.

Продолжая аналогичные действия, получаем матрицу в форме Хессенберга.

Устойчивость методов, связанных с вычислением коэффициентов характеристического полинома

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда СЧ A являются корнями полинома

$$P_n(\lambda) = \lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \ldots - p_k\lambda^{n-k} - \ldots - p_n. \tag{33}$$

Предположим, что p_k вычислен неточно, т.е. $\tilde{p}_k = \alpha$. Рассмотрим $P_n(\lambda, \alpha) = 0$:

- $\alpha = p_k \Rightarrow \lambda = \lambda_j$
- $\alpha = p_k + \delta\alpha \Rightarrow \lambda = \lambda_j + \delta\lambda_j$, т.е. СЧ изменятся.

$$P_n(\lambda_j + \delta\lambda_j, \alpha + \delta\alpha) = 0 = P_n(\lambda_j, \alpha)\Big|_{(\lambda_j,p_k)} + \frac{\partial P}{\partial\lambda}\Big|_{(\lambda_j,p_k)}\delta\lambda_j + \frac{\partial P}{\partial\alpha}\Big|_{(\lambda_j,p_k)}\delta\alpha + \mathcal{O}(\alpha^2 + \delta\lambda_j{}^2).$$

$$|\delta\lambda_j| \approx \frac{|\partial P/\partial\alpha|}{|\partial P/\partial\lambda|}\Bigg|_{(\lambda_j,p_k)} |\delta\alpha| \tag{34}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 10 \end{pmatrix}, \lambda_j = j, j = 1, \ldots, 10.$$

$p_1 = \sum \lambda_j = \alpha.$

$$P_{10}(\lambda) = \lambda^{10} - \alpha\lambda^9 - p_2\lambda^8 - \ldots - p_{10} = \prod_{j=1}^{10}(\lambda - j).$$

Пусть $j = 10$, $\lambda_j = 10$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \alpha}\Big|_{(10,55)} &= -\lambda^9 = -10^9, \\ \frac{\partial P}{\partial \lambda}\Big|_{(10,55)} &= 9! \end{aligned} \tag{35}$$

$$\Rightarrow \frac{|\partial P/\partial \alpha|}{|\partial P/\partial \lambda|}\Big|_{(\lambda_j, p_k)} = \frac{10^9}{9!} \approx 2.8 \cdot 10^3.$$

Содержание

Пусть $|t| < 1$.

$\mathcal{O}(t^k)$, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\mathcal{O}(t^k)}{t^k} = const \neq 0$.

$o(t^k)$, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{o(t^k)}{t^k} = 0$.

$\mathcal{O}, o$ - ordnung (порядок, нем.).

Свойства

1. $\alpha\mathcal{O}(t^k) = \mathcal{O}(t^k)$
2. $p > 0$, $\mathcal{O}(t^k) + \mathcal{O}(t^{k+p}) = \mathcal{O}(t^k)$
3. $\left[1 + \mathcal{O}(t^k)\right]^n = 1 + \mathcal{O}(t^k)$
4. $\left[1 + \mathcal{O}(t^k)\right]^{-1} = 1 + \mathcal{O}(t^k)$
5. $u, w \in \mathbb{R}^n$, $u + \mathcal{O}(t^k)w = u\left[1 + \mathcal{O}(t^k)\right]$

Пример

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Матрица простой структуры

A - матрица простой структуры, если с помощью преобразования подобия ее можно привести с диагональному виду

$$G^{-1}AG = D = diag\{\lambda_i\}. \tag{36}$$

$AG = DG \Rightarrow j$-й столбец G - собственный вектор A, отвечающий СЧ λ_j.

Матрица простой структуры имеет n линейно независимых СВ. Эти векторы образуют базис в пространстве n-мерных векторов.

Какие матрицы могут быть приведены к диагональному виду?

Теорема (без доказательства)

Все собственные числа матрицы A различны $\Rightarrow$ A - матрица простой структуры.

Теорема (без доказательства)

A - вещественная симметричная матрица $\Rightarrow$ A - матрица простой структуры, причем G может быть выбрана ортогональной, т.е. $G^{-1} = G^{\top}$.

Основные алгоритмы степенного метода

Пусть собственные числа упорядочены по модулю

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|, \tag{37}$$

$x^{(0)}$ - произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}, k = 1, 2, \ldots \quad \text{используется на практике} \tag{38}$$

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)}, k = 1, 2, \ldots \quad \text{используется для анализа} \tag{39}$$

На основе $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ можно вычислить максимальное по модулю собственное число и соответствующий собственный вектор.

Степенной метод (the Power method)

Пусть A - матрица простой структуры, $\{w^{(j)}\}$ - базис из собственных векторов.

$$x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w^{(j)}. \tag{40}$$

A^k имеет собственные числа $\{\lambda_j^k\}$ и собственные векторы $\{w^{(j)}\}$.

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k w^{(j)} = \alpha_1 \lambda_1^k \left[w^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k w^{(j)} \right] =$$

$$\alpha_1 \lambda_1^k \left[w^{(1)} + \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \underbrace{\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_2} \right)^k \left(sign \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \right)^k w^{(j)}}_{u^{(k)}} \right]$$

$\left\| u^{(k)} \right\| \le \sum_{j=2}^{n} \left| \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \right| \left\| w^{(j)} \right\|$, причем $\left\| w^{(j)} \right\| = 1 \Rightarrow u^{(k)}$ ограничено.

$$x^{(k)} = \alpha_1\lambda_1^k\left[w^{(1)} + \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k u^{(k)}\right] = \alpha_1\lambda_1^k w^{(1)}\left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right] \tag{41}$$

k-е приближение для λ_1

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{x_j^{(k-1)}} = \frac{\alpha_1\lambda_1^k w_j^{(1)}\left[1+\mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right]}{\alpha_1\lambda_1^{k-1} w_j^{(1)}\left[1+\mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right)\right]} = \lambda_1\left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right)\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1.$$

Определение собственного вектора $w^{(1)}$ с точностью до множителя

$$\frac{x^{(k)}}{(\lambda_1^{(k)})^k} = \frac{\alpha_1\lambda_1^k w^{(1)}\left[1+\mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right]}{\lambda_1^k\left[1+\mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right)\right]^k} = \alpha_1 w^{(1)}\left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right)\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha_1 w^{(1)}.$$

Степенной метод с нормировкой

Обычный степенной метод: $x^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k \left[w^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k w^{(j)} \right]$.

Если $|\lambda_1| > 1$, то при больших k может произойти переполнение (overflow), если $|\lambda_1| < 1$ - пропадание значащих цифр (underflow).

Алгоритм степенного метода с нормировкой:

1. Берем произвольный вектор $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{y}^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\mu_0}, \mu_0 = y_s^{(0)}, |y_s^{(0)}| = \left\| y^{(0)} \right\|_\infty . \tag{42}$$

2. Итерационная последовательность строится по формулам

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= A\overline{y}^{(k-1)}, \mu_k = y_s^{(k)}, |y_s^{(k)}| = \left\| y^{(k)} \right\|_\infty \\ \overline{y}^{(k)} &= \frac{y^{(k)}}{\mu_k} \end{aligned} \tag{43}$$

$$\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1 \text{ и } \overline{y}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha w^{(1)}.$$

Сравним с обычным степенным методом.

$$y^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w^{(j)}$$

$$y^{(k)} = A\overline{y}^{(k-1)} = \frac{1}{\mu_{k-1}} A y^{(k-1)} = \frac{1}{\mu_{k-1}} A(A\overline{y}^{(k-2)}) = \frac{1}{\mu_{k-1}} \frac{1}{\mu_{k-2}} A^2 y^{(k-2)} = \frac{1}{\mu_{k-1}} \dots \frac{1}{\mu_0} A^k y^{(0)}$$

(41) $\Rightarrow$

$$y^{(k)} = \frac{1}{\mu_{k-1}} \dots \frac{1}{\mu_0} x^{(k)} = \beta_k \alpha_1 \lambda_1^k w^{(1)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right] \quad \text{по 39} \qquad (44)$$

Пусть $\gamma = w_p^{(1)}$, $|w_p^{(1)}| = \left\|w^{(1)}\right\|_\infty$. Тогда при достаточно больших k

$$\mu_k = \beta_k \alpha_1 \lambda_1^k \gamma \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right] \qquad (45)$$

$$\overline{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\mu_k} = \frac{\beta_k \alpha_1 \lambda_1^k w^{(1)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right]}{\beta_k \alpha_1 \lambda_1^k \gamma \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right]} = \frac{1}{\gamma} w^{(1)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\gamma} w^{(1)}. \tag{46}$$

$\Rightarrow$ итерационная последовательность $\{\overline{y}^{(k)}\}$ сходится к нормированному по бесконечной норме собственному вектору $w^{(1)}$.

$$y^{(k)} = A\overline{y}^{(k-1)} = \frac{1}{\gamma} \lambda_1 w^{(1)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right)\right] \tag{47}$$

$$\mu_k = \left\|y^{(k)}\right\|_\infty = \lambda_1 \left[1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{k-1}\right)\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1. \tag{48}$$

Применение сдвигов в степенном методе

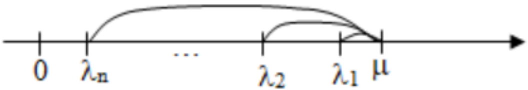
Пусть $B = A - \mu E$, μ называют сдвигом, так как при таком преобразовании матрицы происходит сдвиг спектра матрицы A на μ.
(λ_A, x_A) - собственная пара $A \Rightarrow$

$$Bx_A = (A - \mu E)x_A = \lambda_A x_A - \mu x_A = (\lambda_A - \mu)x_A. \tag{49}$$

Собственные векторы не меняются.

Сдвиг для нахождения минимального собственного числа

$A > 0 \Rightarrow \lambda_i > 0.$
Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n$.
Возьмем $\mu > \lambda_1$.

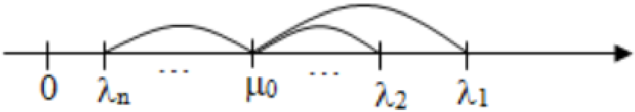


Тогда у матрицы B собственными числами будут $\lambda_i - \mu$. Из них максимальным по модулю будет $\lambda_n - \mu$.
Для его нахождения можно применить степенной метод к матрице B.

В качестве μ можно взять $\|A\|$, поскольку $|\lambda_i| \leq \|A\|$.

Сдвиги для улучшения сходимости

Величина $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ определяет скорость сходимости. Чем она меньше, тем сходится быстрее.
$\mu_0 = \frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$ является оптимальным сдвигом.



В этом случае у матрицы $B = A - \mu_0 E$ получается два одинаковых по модулю вторых собственных числа, а первое, то есть максимальное по модулю, $\lambda_1 - \mu_0$.

Упражнение

Показать, что $\mu_0 = \frac{\lambda_2+\lambda_n}{2}$ - оптимальный сдвиг.

Второе максимального по модулю СЧ и соответствующий СВ

$A = A^\top \Rightarrow (w^{(i)}, w^{(j)}) = \delta_{ij}$, где $w^{(i)}$ - собственные векторы A.

Пусть максимальное по модулю собственное число λ_1 и соответствующий собственный вектор $w^{(1)}$ уже найдены.

Возьмем произвольный вектор $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по ортонормированному базису из собственных векторов

$$x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w^{(j)}. \tag{50}$$

$y^{(0)} = x^{(0)} - \gamma w^{(1)}$ выберем так, чтобы $(y^{(0)}, w^{(1)}) = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha_1 \Rightarrow$

$$y^{(0)} = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j w^{(j)}. \tag{51}$$

Пусть собственные числа упорядочены по модулю

$$|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|. \tag{52}$$

Можно применять степенной метод

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)} = \alpha_2 \lambda_2^k w^{(2)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right|^k \right) \right] \tag{53}$$

Замечание

На практике все вычисления производятся с погрешностью $\Rightarrow$ коэффициент в разложении $y^{(0)}$ по базису при $w^{(1)}$ будет отличен от нуля (по величине достаточно маленький) $\Rightarrow$ итерационная последовательность будет сходиться к $w^{(1)}$.
Коэффициент нужно уменьшать, производя ортогонализацию (через несколько итераций).
Если ортогонализация на каждом шаге, то итерационная последовательность строится по формулам

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= A y^{(k-1)} \\ y^{(k)} &= x^{(k)} - \gamma w^{(1)} \end{aligned} \tag{54}$$

Собственные векторы, соответствующие двум максимальным по модулю, но разным по знаку, собственным числам

Пусть $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

$$x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w^{(j)}, x^{(k)} = A^k x^{(0)} \tag{55}$$

$$x^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k w^{(j)} = \alpha_1 \lambda_1^k w^{(1)} + \alpha_2 (-1)^k \lambda_1^k w^{(2)} + \sum_{j=3}^{n} \alpha_j \lambda_j^k w^{(j)} =$$

$\lambda_1^k \left(\alpha_1 w^{(1)} + (-1)^k \alpha_2 w^{(2)} + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right|^k \right) u^{(k)} \right)$, вектор $u^{(k)}$ - ограничен.

Рассмотрим подпоследовательности с чётными и нечётными индексами

$$
\begin{aligned}
x^{(2m)} &= \lambda_1^{2m} \left(\alpha_1 w^{(1)} + \alpha_2 w^{(2)} + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right|^{2m} \right) u^{(2m)} \right) \\
x^{(2m+1)} &= \lambda_1^{2m+1} \left(\alpha_1 w^{(1)} - \alpha_2 w^{(2)} + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right|^{2m+1} \right) u^{(2m+1)} \right)
\end{aligned}
\tag{56}
$$

λ_1^2 можно оценить по одной из формул

$$
\lambda_1^2 \approx \frac{x_i^{(2m+2)}}{x_i^{(2m)}} \text{ или } \lambda_1^2 \approx \frac{x_i^{(2m+1)}}{x_i^{(2m-1)}} \tag{57}
$$

Для нахождения собственных векторов

$$
\begin{aligned}
x^{(2m+1)} + \lambda_1 x^{(2m)} &\xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1^{2m+1} 2\alpha_1 w^{(1)} \\
x^{(2m+1)} - \lambda_1 x^{(2m)} &\xrightarrow[k\to\infty]{} -\lambda_1^{2m+1} 2\alpha_2 w^{(2)}
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Метод обратных итераций (Inverse Iteration)

Максимальное по модулю собственное число матрицы A^{-1} есть единица на минимальное по модулю собственное число матрицы A

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x. \tag{59}$$

Возьмем $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и будем строить итерационную последовательность

$$x^{(k)} = A^{-1}x^{(k-1)} \Leftrightarrow Ax^{(k)} = x^{(k-1)}, k = 0, 1, \ldots. \tag{60}$$

Метод обратных итераций позволяет найти минимальное по модулю собственное число и соответствующий собственный вектор.
На каждом шаге решается СЛАУ. Обычно - с помощью LU-разложения, которое нужно выполнить только один раз.

Метод обратных итераций

На практике используется алгоритм с нормировкой.

$y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ - произвольный вектор, $\overline{y}^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{\mu_0}$.

$$\begin{aligned} Ay^{(k)} &= \overline{y}^{(k-1)} \\ \overline{y}^{(k)} &= \frac{y^{(k)}}{\mu_k}, \end{aligned} \tag{61}$$

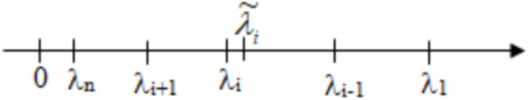
где μ_k выбираются так же, как и в степенном алгоритме с нормировкой.
В пределе при $k \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mu_k &\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\lambda_n} \\ \overline{y}^{(k)} &\xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha w^{(n)}. \end{aligned} \tag{62}$$

Метод обратных итераций со сдвигом

Применяется для нахождения собственного вектора, если собственное число уже найдено.

$\tilde{\lambda}_i$ - приближенное значение (с некоторой точностью) одного из собственных чисел матрицы A.



Применим для матрицы $A - \tilde{\lambda}_i E$ метод обратных итераций (алгоритм с нормировкой):

$$\begin{aligned} (A - \tilde{\lambda}_i E) y^{(k)} &= \bar{y}^{(k-1)} \\ \bar{y}^{(k)} &= \frac{y^{(k)}}{\mu_k}, \end{aligned} \tag{63}$$

A - матрица простой структуры $\Rightarrow$ собственные векторы $w^{(j)}$ образуют базис. Разложим векторы $y^{(k)}$ и $\overline{y}^{(k)}$ по базису из собственных векторов

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} w^{(j)} \\ \overline{y}^{(k)} &= \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha}_j^{(k)} w^{(j)} \end{aligned} \tag{64}$$

и подставим в (63)

$$(A - \tilde{\lambda}_i E) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} w^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha}_j^{(k-1)} w^{(j)} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_j^{(k)} (\lambda_j - \tilde{\lambda}_i)} w^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\overline{\alpha}_j^{(k-1)}} w^{(j)} \tag{65}$$

Получаем: $\alpha_j^{(k)} = \frac{\overline{\alpha}_j^{(k-1)}}{\lambda_j - \tilde{\lambda}_i}$

$(63) \Rightarrow \overline{\alpha}_j^{(k)} = \frac{\alpha_j^{(k)}}{\mu_k}$. Тогда

$$\alpha_j^{(k)} = \frac{\alpha_j^{(k-1)}}{\mu_{k-1}} \frac{1}{\lambda_j - \tilde{\lambda}_i} = \frac{1}{\mu_{k-1}} \dots \frac{1}{\mu_0} \frac{\alpha_j^{(0)}}{(\lambda_j - \tilde{\lambda}_i)^k} = \beta_k \frac{\alpha_j^{(0)}}{(\lambda_j - \tilde{\lambda}_i)^k} \tag{66}$$

$(64) \Rightarrow y^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(k)} w^{(j)} = \alpha_i^{(k)} \left[w^{(i)} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\alpha_j^{(k)}}{\alpha_i^{(k)}} w^{(j)} \right]$ и с учетом (66)

$$y^{(k)} = \alpha_i^{(k)} \left[w^{(i)} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\alpha_j^{(0)}}{\alpha_i^{(0)}} \left(\frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_j - \tilde{\lambda}_i} \right)^k w^{(j)} \right] = \alpha_i^{(k)} w^{(i)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^k \right) \right], \tag{67}$$

где i_0: $|\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i| = \min_{j\neq i} |\lambda_j - \tilde{\lambda}_i|$.

Выберем $\gamma = w_p^{(i)}$: $|w_p^{(i)}| = \left\| w^{(i)} \right\|_\infty$. Тогда

$$\mu_k = \alpha_i^{(k)} \gamma \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^k \right) \right]. \tag{68}$$

(67), (68) $\Rightarrow$

$$\overline{y}^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\mu_k} = \frac{\alpha_i^{(k)} w^{(i)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^k \right) \right]}{\alpha_i^{(k)} \gamma \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^k \right) \right]} = \frac{1}{\gamma} w^{(i)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^k \right) \right] \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{\gamma} w^{(i)}. \tag{69}$$

(63) $\Rightarrow y^{(k)} = (A - \tilde{\lambda}_i E)^{-1} \overline{y}^{(k-1)}$ и учитывая (69)

$$y^{(k)} = (A - \tilde{\lambda}_i E)^{-1} \frac{1}{\gamma} w^{(i)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^{k-1} \right) \right] = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i} w^{(i)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^{k-1} \right) \right]. \tag{70}$$

Тогда

$$\mu_k = \frac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i} \left[1 + \mathcal{O}\left(\left| \frac{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}{\lambda_{i_0} - \tilde{\lambda}_i} \right|^{k-1} \right) \right] \xrightarrow[k \to \infty]{} \frac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}_i}. \tag{71}$$

Замечания

1. Метод обратных итераций со сдвигом позволяет не только найти собственный вектор, но и уточнить приближенное значение собственного числа.
2. Метод обратных итераций имеет очень большую скорость сходимости по сравнению со степенным методом. Чем точнее приближенное значение собственного числа, тем больше скорость сходимости.
3. На каждом шаге мы решаем СЛАУ

   $$(A - \tilde{\lambda}_i E) y^{(k)} = \overline{y}^{(k-1)}. \tag{72}$$

   Если $\tilde{\lambda}_i$ близко к λ_i, то матрица становится близкой к вырожденной. Поэтому если известно λ_i, то его сначала нужно огрубить.
4. Метод обратных итераций идеально подходит для поиска СВ треугольных матриц.

Итерационный метод вращений Якоби для симметричных матриц

Пусть $A = A^\top$. Тогда собственные векторы $w^{(j)}$ образуют ортонормированный базис

$$G^\top A G = \Lambda = diag\{\lambda_i\}, \tag{73}$$

где матрица G составлена из собственных векторов $w^{(j)}$.

Как реализовать хотя бы приближенно равенство (73)?

Будем применять к матрице A последовательность подобных преобразований, сохраняющих спектр и приводящих в пределе данную матрицу к диагональному виду.

Норма Фробениуса: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$.

Свойство1. $\|A\|_F^2 = tr(AA^\top)$

$$B = AA^\top \Rightarrow b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}^\top = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

$$tr(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ik} = \|A\|_F^2$$

Свойство2. $C = AQ$, $Q^{-1} = Q^\top \Rightarrow \|C\|_F^2 = \|A\|_F^2$.

$$\|C\|_F^2 = tr(CC^\top) = tr((AQ)(Q^\top A^\top)) = tr(AA^\top) = \|A\|_F^2$$

Следствие.

Преобразование подобия не изменяет норму Фробениуса.

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 = S_1(A) + S_2(A)$$

Пусть $A = A^\top = A_1$.
$A_2 = T_{ij}^\top A_1 T_{ij}$, T_{ij} - матрица вращений (ортогональная матрица).
$\|A_1\|_F^2 = \|A_2\|_F^2$
$S_1(A_1) = S_1^* + \left(a_{ii}^{(1)}\right)^2 + \left(a_{jj}^{(1)}\right)^2, S_2(A_1) = S_2^* + 2\left(a_{ij}^{(1)}\right)^2$
$S_1(A_2) = S_1^* + \left(a_{ii}^{(2)}\right)^2 + \left(a_{jj}^{(2)}\right)^2, S_2(A_2) = S_2^* + 2\left(a_{ij}^{(2)}\right)^2$

Выберем i, j: $a_{ij}^{(1)} \neq 0$, а ϕ: $a_{ij}^{(2)} = 0$. Тогда $S_2(A_2) < S_2(A_1)$.

Предположим, что построили последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_k$:
$0 \leq S_2(A_k) < \ldots < S_2(A_2) < S_2(A_1)$.
Очевидно, что $S_2(A_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} diag(\lambda_i)$.

Выбор ϕ для обнуления элемента $a_{ij}^{(2)}$:

$$a_{ij}^{(2)} \overset{(26)}{=} b_{ij}c + b_{jj}s \overset{(24)}{=} \left(-a_{ii}^{(1)}s + a_{ij}^{(1)}c\right)c + \left(-a_{ji}^{(1)}s + a_{jj}^{(1)}c\right)s =$$

$$a_{ij}^{(1)}\left(c^2 - s^2\right) - \left(a_{ii}^{(1)} - a_{jj}^{(1)}\right)cs = a_{ij}^{(1)}\cos(2\phi) - \left(a_{ii}^{(1)} - a_{jj}^{(1)}\right)\frac{\sin(2\phi)}{2} = 0$$

$$\tan(2\phi) = \frac{2a_{ij}^{(1)}}{a_{ii}^{(1)} - a_{jj}^{(1)}}. \tag{74}$$

Нет гарантий, что обнулённые элементы не восстановятся при следующих итерациях $\Rightarrow$ метод итерационный.

Условие окончания итерационного процесса: $S_2(A_k) < \epsilon$ или $\max\limits_{i \neq j}|a_{ij}^{(k)}| < \epsilon$.

Алгоритм с выбором оптимального элемента

$A_2 = T_{ij}^{\top} A_1 T_{ij}.$

$r_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \left(a_{kj}^{(1)}\right)^2 \Rightarrow S_2(A_1) = \sum_k r_k.$

i_0: $r_{i_0} = \max_k r_k \Rightarrow r_{i_0} \geq \frac{S_2(A_1)}{n}.$

j_0: $|a_{i_0 j_0}^{(1)}| = \max_{j, j \neq i_0} |a_{i_0 j}^{(1)}|.$

Элемент $a_{i_0 j_0}^{(1)}$ называется оптимальным элементом

$$\left(a_{i_0 j_0}^{(1)}\right)^2 \geq \frac{r_{i_0}}{n-1} \geq \frac{S_2(A_1)}{n(n-1)}. \tag{75}$$

$$S_2(A_2) = S_2(A_1) - 2\left(a_{i_0 j_0}^{(1)}\right)^2 \overset{(75)}{\leq} \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) S_2(A_1)$$

$$\Rightarrow S_2(A_k) \le \left(1 - \tfrac{2}{n(n-1)}\right) S_2(A_{k-1}) \le \ldots \le \left(1 - \tfrac{2}{n(n-1)}\right)^{k-1} S_2(A_1) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Рассмотренный алгоритм решает полную алгебраическую проблему собственных значений:

- собственные числа в результате будут находиться на диагонали получившейся матрицы
- собственные векторы будут столбцами матрицы $G = \prod T_{ij}$.

LR- и QR-алгоритмы решения АПСЗ

Итерационные алгоритмы, позволяющие подобными преобразованиями привести матрицу A к треугольному виду.

LR-алгоритм со сдвигом. Пусть $A_1 = A$. Шаг LR-алгоритма

$$\begin{cases} A_k + \nu_k E = L_k R_k \\ \qquad A_{k+1} = R_k L_k - \nu_k E \end{cases} \tag{76}$$

Покажем, что A_{k+1} и A_1 подобны

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= R_k L_k - \nu_k E = L_k^{-1} \underbrace{L_k R_k} L_k - \nu_k E = L_k^{-1} (A_k + \nu_k E) L_k - \nu_k E = L_k^{-1} A_k L_k \\ &= \ldots = L_k^{-1} \ldots L_1^{-1} A_1 \underbrace{L_1 \ldots L_k}_{G_k} = G_k^{-1} A_1 G_k. \end{aligned} \tag{77}$$

Далее покажем, что $A_k \xrightarrow[k \to \infty]{} A^\star = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

QR-алгоритм со сдвигом

Пусть $A_1 = A$. Шаг QR-алгоритма

$$\begin{cases} A_k + \nu_k E = Q_k R_k \\ \qquad A_{k+1} = R_k Q_k - \nu_k E \end{cases} \tag{78}$$

Покажем, что A_{k+1} и A_1 подобны

$$\begin{aligned} A_{k+1} = R_k Q_k - \nu_k E = Q_k^{-1} \underbrace{Q_k R_k} Q_k - \nu_k E = Q_k^{-1}(A_k + \nu_k E) Q_k - \nu_k E = Q_k^{-1} A_k Q_k \\ = \ldots = Q_k^{-1} \ldots Q_1^{-1} A_1 \underbrace{Q_1 \ldots Q_k}_{G_k} = G_k^{-1} A_1 G_k. \end{aligned} \tag{79}$$

Можно показать, что $A_k \xrightarrow[k\to\infty]{} A^\star = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ 0 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Обоснование LR-алгоритма в простейшем случае

Пусть $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \ldots > |\lambda_n|$ и $\nu_k = 0$.

Лемма

$F^{(k)} = E + C^{(k)}$, $C^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

$F^{(k)} = L_F^{(k)} R_F^{(k)}$. Тогда $L_F^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} E$ и $R_F^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} E$.

(79) $\Rightarrow$

$$G_k A_{k+1} = A G_k. \tag{80}$$

Введем обозначение $U_k = R_k \ldots R_1$.

$G_k U_k = L_1 \ldots L_k R_k \ldots R_1 = L_1 \ldots L_{k-1} A_k U_{k-1} = G_{k-1} A_k U_{k-1} \overset{(80)}{=} A G_{k-1} U_{k-1} = \ldots = A^{k-1} G_1 U_1 = A^k$.

Нашли LU-разложение для матрицы A^k, т.к. G_k и U_k - нижняя и верхняя треугольные матрицы соответственно.

Пусть X состоит из СВ матрицы A, $Y = X^{-1}$.
(73) $\Rightarrow A = X\Lambda X^{-1} = X\Lambda Y$ и $A^k = X\Lambda^k Y$.
X и Y неособенные, будем предполагать, что $Y = L_Y R_Y$ и $X = L_X R_X$. Тогда

$$A^k = L_X R_X \Lambda^k L_Y R_Y = L_X R_X \Lambda^k L_Y (\Lambda^k)^{-1} \Lambda^k R_Y. \tag{81}$$

$$\Lambda^k L_Y (\Lambda^k)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n^k} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ \lambda_i^k l_{ij} & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n^k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k l_{ij} & & 1 \end{pmatrix}.$$

$i > j \Rightarrow \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$

Представим $\Lambda^k L_Y (\Lambda^k)^{-1} = E + C^{(k)}$, $C^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.
Перепишем (81)

$$A^k = L_X R_X (E + C^{(k)}) \Lambda^k R_Y = L_X (R_X E + R_X C^{(k)} R_X^{-1} R_X) \Lambda^k R_Y = L_X (E + R_X C^{(k)} R_X^{-1}) R_X \Lambda^k R_Y. \tag{82}$$

$R_X C^{(k)} R_X^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \overset{\text{по лемме}}{\Longrightarrow} E + R_X C^{(k)} R_X^{-1} = L_F^{(k)} R_F^{(k)}$.

$$A^k = \underbrace{L_X L_F^{(k)}}_{L} \underbrace{R_F^{(k)} R_X \Lambda^k R_Y}_{U}. \tag{83}$$

LU-разложение единственно $\Rightarrow$

$$\begin{cases} G_k = L_X L_F^{(k)} \\ U_K = R_F^{(k)} R_X \Lambda^k R_Y \end{cases} \tag{84}$$

Из леммы следует, что $L_F^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} E$, $R_F^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} E$.

$\overset{(84)}{\Rightarrow}$ $G_k \xrightarrow[k\to\infty]{} L_X$.

$$A^\star = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} G_k^{-1} A G_k = L_X^{-1} A L_X. \qquad (85)$$

$L_X = X R_X^{-1} \Rightarrow L_X^{-1} = R_X X^{-1}$.

$$A^\star = R_X X^{-1} A X R_X^{-1} = R_X \Lambda R_X^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Замечания

1. Порядок собственных чисел может не совпадать с предположенным. Тогда в матрице $\Lambda^k L_Y (\Lambda^k)^{-1}$ некоторые поддиагональные элементы не будут уменьшаться. Необходимо применить преобразование подобия с матрицей перестановок для соответствующих строк (столбцов).
2. $|\lambda_i| = |\lambda_{i+1}|$. У матрицы $A^\star$ будет блок на диагонали размерности 2×2.
3. Окончание итерационного процесса: малость поддиагональных элментов (с учетом кратности собственных чисел).
4. QR-алгоритм является более востребованным на практике. Предварительно матрица A приводится к форме Хессенберга.

Апостериорная оценка для точности вычислений собственных значений

Пусть $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{x}$ - приближенное собственное значение и приближенный собственный вектор соотстветственно.

Теорема

$\forall\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}, \forall\tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \tilde{x} \neq 0 \ \exists\lambda_A$:

$$|\lambda_A - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\left\|A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}\right\|_2}{\|\tilde{x}\|_2}. \tag{86}$$

Если вектор невязки мал, то собственное число найдено достаточно точно. Апостериорная оценка позволяет по найденным значениям определить их точность (a posteriori - «из последующего», лат.).

Доказательство

1. $\tilde{\lambda} = \lambda_A \Rightarrow$ (86) верно.
2. $\tilde{\lambda} \neq \lambda_A \Rightarrow \det(A - \tilde{\lambda}E) \neq 0 \Rightarrow \exists (A - \tilde{\lambda}E)^{-1}$.
   $\tilde{x} = (A - \tilde{\lambda}E)^{-1}(A - \tilde{\lambda}E)\tilde{x} \Rightarrow$

$$\|\tilde{x}\|_2 \leq \left\|(A - \tilde{\lambda}E)^{-1}\right\|_2 \left\|A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}\right\|_2 . \tag{87}$$

   Рассмотрим случай $A = A^\top$.
   $\left\|(A - \tilde{\lambda}E)^{-1}\right\|_2 = \max\limits_{\lambda_A} \left(\frac{1}{|\lambda_A - \tilde{\lambda}|}\right)$
   $\|\tilde{x}\|_2 \leq \max\limits_{\lambda_A} \left(\frac{1}{|\lambda_A - \tilde{\lambda}|}\right) \left\|A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}\right\|_2$
   $\min\limits_{\lambda_A} |\lambda_A - \tilde{\lambda}| \leq \frac{\left\|A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}\right\|_2}{\|\tilde{x}\|_2}$.

Алгоритмы исчерпывания для решения АПСЗ, основанные на преобразовании подобия

Пусть некоторое СЧ и СВ найдены, например, λ_1 и $w^{(1)}$.
$P^\top = P^{-1}$: $Pw^{(1)} = \alpha_1 e^{(1)}$, где $e^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0)^\top$.
Домножим $Aw^{(1)} = \lambda_1 w^{(1)}$ слева на P

$$\begin{aligned} PAP^{-1}Pw^{(1)} &= \lambda_1 Pw^{(1)} \\ \Rightarrow PAP^{-1}\alpha_1 e^{(1)} &= \lambda_1 \alpha_1 e^{(1)} \\ \Rightarrow Be^{(1)} &= \lambda_1 e^{(1)}, B = PAP^{-1}. \end{aligned} \tag{88}$$

Упражнение

Как связаны собственные векторы A и B?

Покажем, что B имеет следующую структуру

$$B = \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & g^\top \\ \hdashline \mathbf{0} & C \end{array}\right] \tag{89}$$

$$Be^{(1)} = \lambda_1 e^{(1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c:c} b_{11} & g^\top \\ \hdashline f & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hdashline \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \hdashline \mathbf{0} \end{array}\right] \Rightarrow b_{11} = \lambda_1, f = \mathbf{0}.$$

Тогда $\chi_B(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\chi_C(\lambda) \Rightarrow$ все СЧ C являются СЧ $B \Rightarrow$ можем решать задачу для матрицы C.

Пусть решили задачу для C, т.е. нашли λ_C и $u^{(C)}$.
Тогда $\lambda_C = \lambda_2$. По СВ $u^{(C)}$ можем построить СВ матрицы B, а значит и СВ матрицы A.

Пусть $v^{(2)}$ - СВ матрицы B. Будем искать его в виде $v^{(2)} = \left[\begin{array}{c} \beta \\ \hdashline u^{(C)} \end{array}\right]$.

$$Bv^{(2)} = \lambda_2 v^{(2)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & g^\top \\ \hdashline \mathbf{0} & C \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \beta \\ \hdashline u^{(C)} \end{array}\right] = \lambda_2 \left[\begin{array}{c} \beta \\ \hdashline u^{(C)} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \beta + g^\top u^{(C)} &= \lambda_2 \beta \\ C u^{(C)} &= \lambda_2 u^{(C)}. \end{aligned} \tag{90}$$

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \beta = \frac{g^\top u^{(C)}}{\lambda_2 - \lambda_1}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2$
   - $g^\top u^{(C)} = 0 \Rightarrow \beta$ - любое. Удобно взять $\beta = 0$. Находим $u^{(2)}$ по $v^{(2)}$.
   - $g^\top u^{(C)} \neq 0 \Rightarrow \beta$ найти не удается.

Для матрицы C выполняем процедуру исчерпывания и т.д.

Алгоритмы исчерпывания для решения АПСЗ, не использующие преобразования подобия

$A = A^\top$.
Пусть λ_1 и $w^{(1)}$ найдены, причем $\left\|w^{(1)}\right\| = 1$.

Построим $B = A - \lambda_1 w^{(1)} \left(w^{(1)}\right)^\top$.

$$Bw^{(1)} = Aw^{(1)} - \lambda_1 w^{(1)} \underbrace{\left(w^{(1)}\right)^\top w^{(1)}} = 0 \tag{91}$$

$\Rightarrow$ СВ остается тем же, а СЧ стало 0.

$$Bw^{(j)} = Aw^{(j)} - \lambda_1 w^{(1)} \underbrace{\left(w^{(1)}\right)^\top w^{(j)}} = \lambda_j w^{(j)}, j \neq 1 \tag{92}$$

$\Rightarrow$ остальные СВ и СЧ остались прежними.

Если для B применить степенной метод, найдем λ_2, $w^{(2)}$ и т.д.

$A \neq A^\top$.
Пусть λ_1 и $w^{(1)}$ найдены. Построим x и B:

$$x^\top w^{(1)} = \lambda_1 B \quad = A - w^{(1)} x^\top. \tag{93}$$

Тогда $Bw^{(1)} = Aw^{(1)} - w^{(1)} \underbrace{x^\top w^{(1)}} = 0 \cdot w^{(1)}$,т.е. СВ остается тем же, а СЧ стало 0.

Упражнение

Показать, что остальные СЧ $(\lambda_j, j > 1)$ остаются прежними.

Пусть $u^{(j)}$ - СВ B. Будем искать $u^{(j)}$ как линейную комбинацию $w^{(1)}$ и $w^{(j)}$

$$u^{(j)} = w^{(j)} - \alpha_j w^{(1)}. \tag{94}$$

$$Bu^{(j)} = (A - w^{(1)} x^\top)(w^{(j)} - \alpha_j w^{(1)}) = \underbrace{Aw^{(j)}}_{\lambda_j w^{(j)}} - w^{(1)} \underbrace{x^\top w^{(j)}} - \alpha_j \underbrace{Aw^{(1)}}_{\lambda_1 w^{(1)}} + \alpha_j w^{(1)} \underbrace{x^\top w^{(1)}}_{\lambda_1}$$

$$Bu^{(j)} = \lambda_j w^{(j)} - (x^\top w^{(j)}) w^{(1)} = \lambda_j \left(w^{(j)} - \frac{x^\top w^{(j)}}{\lambda_j} w^{(1)} \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{x^\top w^{(j)}}{\lambda_j} \\ u^{(j)} &= w^{(j)} - \alpha_j w^{(1)}. \end{aligned} \tag{95}$$

Пусть λ_2 и $u^{(2)}$ найдены. Тогда
$w^{(2)} = u^{(2)} + \alpha_2 w^{(1)} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{x^\top}{\lambda_2}(u^{(2)} + \alpha_2 w^{(1)}) \Rightarrow \alpha_2 \lambda_2 = x^\top u^{(2)} + \alpha_2 \underbrace{x^\top w^{(1)}}$

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{x^\top u^{(2)}}{\lambda_2 - \lambda_1}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2$
    - $x^\top u^{(2)} = 0 \Rightarrow \alpha_2$ - любое. Удобно взять $\alpha_2 = 0$. Тогда $u^{(2)}$ и $w^{(2)}$ будут совпадать.
    - $x^\top u^{(2)} \neq 0 \Rightarrow \alpha_2$ найти не удается.