
Front matter

title: "Лабораторная работа 4" subtitle: "Модель гармонических колебаний" author: "Бабенко Артём Сергеевич"

Generic otions

lang: ru-RU toc-title: "Содержание"

Bibliography

bibliography: bib/cite.bib csl: pandoc/csl/gost-r-7-0-5-2008-numeric.csl

Pdf output format

toc: true # Table of contents toc-depth: 2 lof: true # List of figures lot: true # List of tables fontsize: 12pt linestretch: 1.5 papersize: a4 documentclass: scrreprt

I18n polyglossia

polyglossia-lang: name: russian options: - spelling=modern - babelshorthands=true polyglossia-otherlangs: name: english

I18n babel

babel-lang: russian babel-otherlangs: english

Fonts

mainfont: PT Serif romanfont: PT Serif sansfont: PT Sans monofont: PT Mono mainfontoptions: Ligatures=TeX romanfontoptions: Ligatures=TeX sansfontoptions: Ligatures=TeX,Scale=MatchLowercase monofontoptions: Scale=MatchLowercase,Scale=0.9

Biblatex

biblatex: true biblio-style: "gost-numeric" biblatexoptions:

- parentracker=true
- backend=biber
- hyperref=auto
- language=auto
- autolang=other*
- citestyle=gost-numeric

Pandoc-crossref LaTeX customization

figureTitle: "Рис." tableTitle: "Таблица" listingTitle: "Листинг" lofTitle: "Список иллюстраций" lotTitle: "Список таблиц" lolTitle: "Листинги"

Misc options

indent: true header-includes:

- \usepackage{indentfirst}
- \usepackage{float} # keep figures where there are in the text
- \floatplacement{figure}{H} # keep figures where there are in the text

---

Цель работы

Научиться строить фазовый портрет гармонического осциллятора и решать уравнения гармонического осциллятора для разных случаев.

Теоретическое введение

Модель гармонических колебаний

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время. (Обозначения $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$)

Уравнение (1) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения (1.1) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2)$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \qquad (4)$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (5)$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью.

Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Выполнение лабораторной работы

Рассчитал вариант по формуле:

Вариант № 3

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x}+10x=0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x}+0.5\dot{x}+4x=0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x}+2\dot{x}+12x=\cos(12t)$

На интервале $t\in[0;\ 60]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0=0, y_0=0$

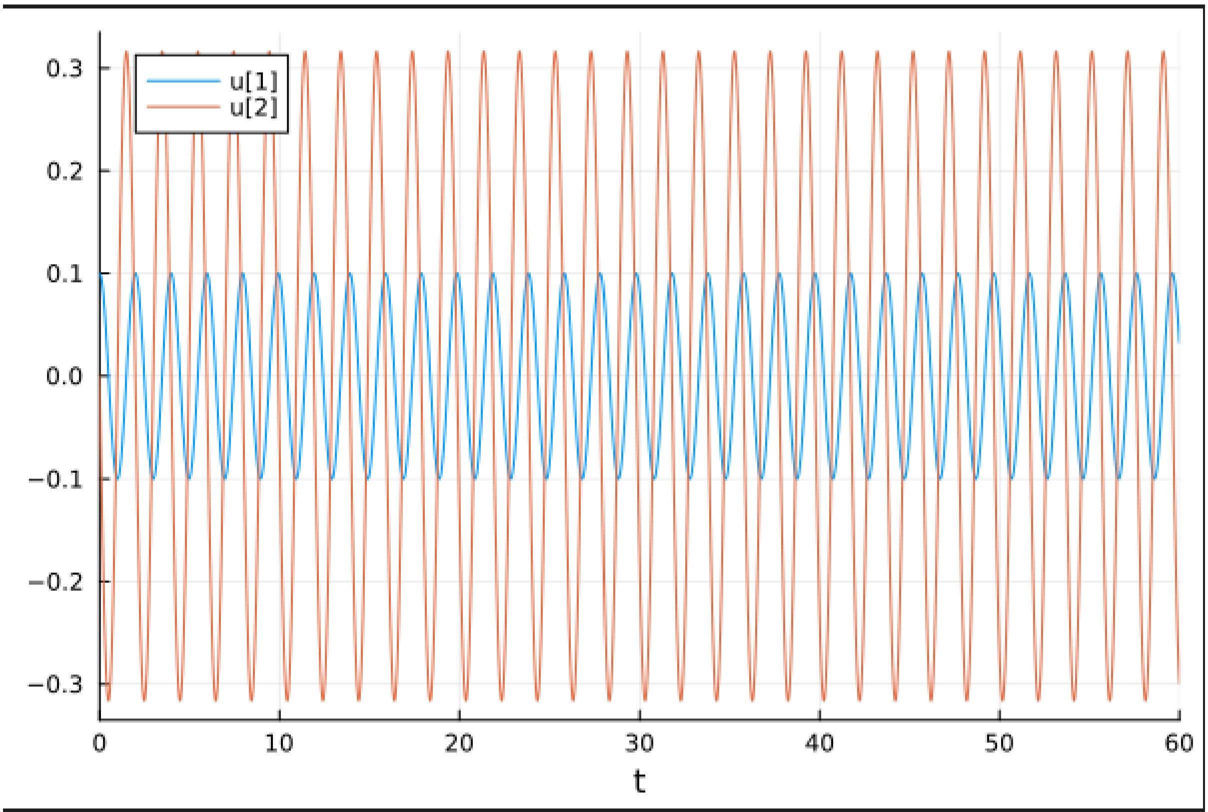
Написал код на Julia для первого случая:

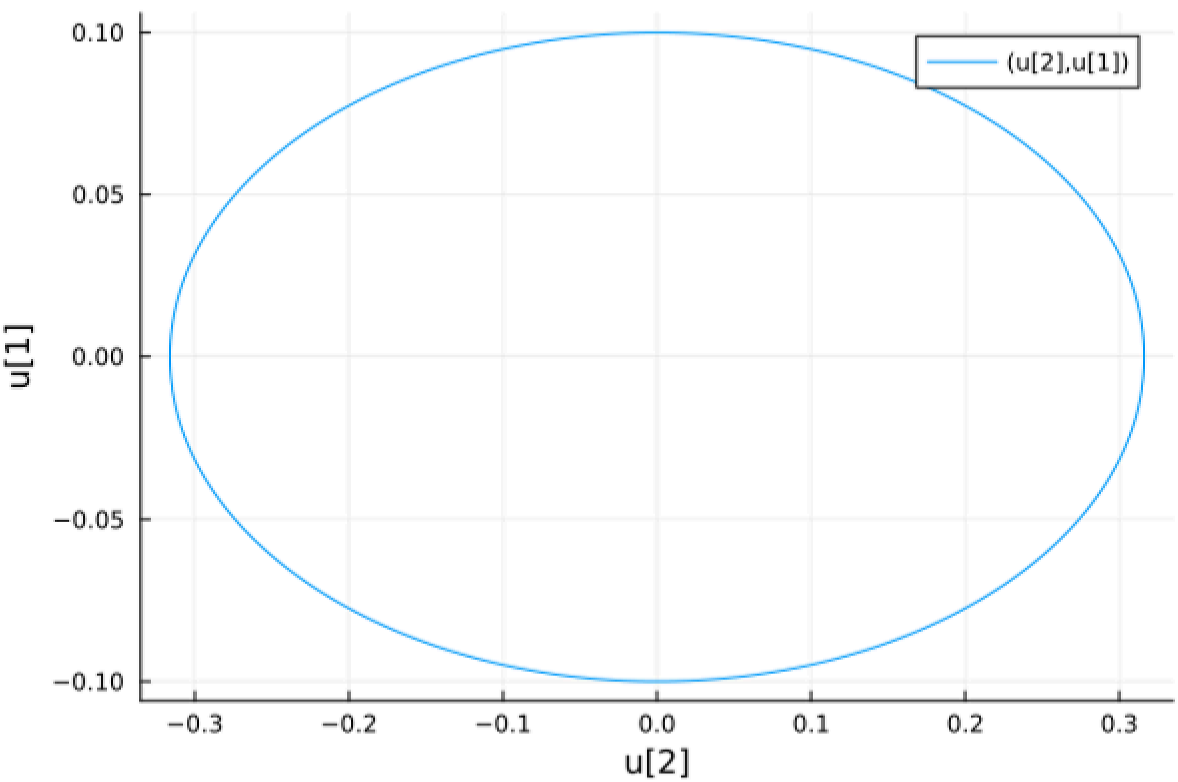
Lab04_01 – Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
#case 1
# x'' + 10x = 0
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*u[1]
end

const x = 0.1
const y = 0.0
u0 = [x, y]

p = (10.0)
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

using Plots; gr()

#решение системы уравнений
plot(sol)
savefig("lab04_julia_01.png")

#фазовый портрет
plot(sol, idxs=(2,1))
savefig("lab04_julia_01_phase.png")
```

Программа выдала следующие результаты:

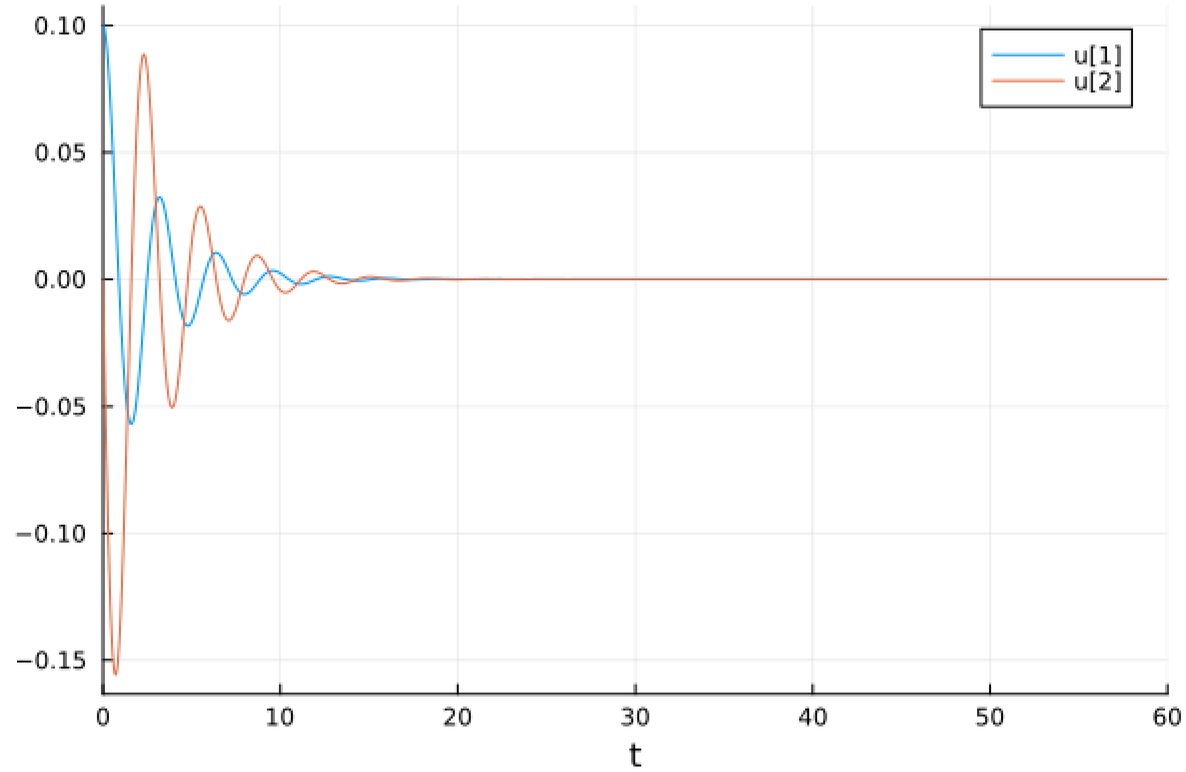


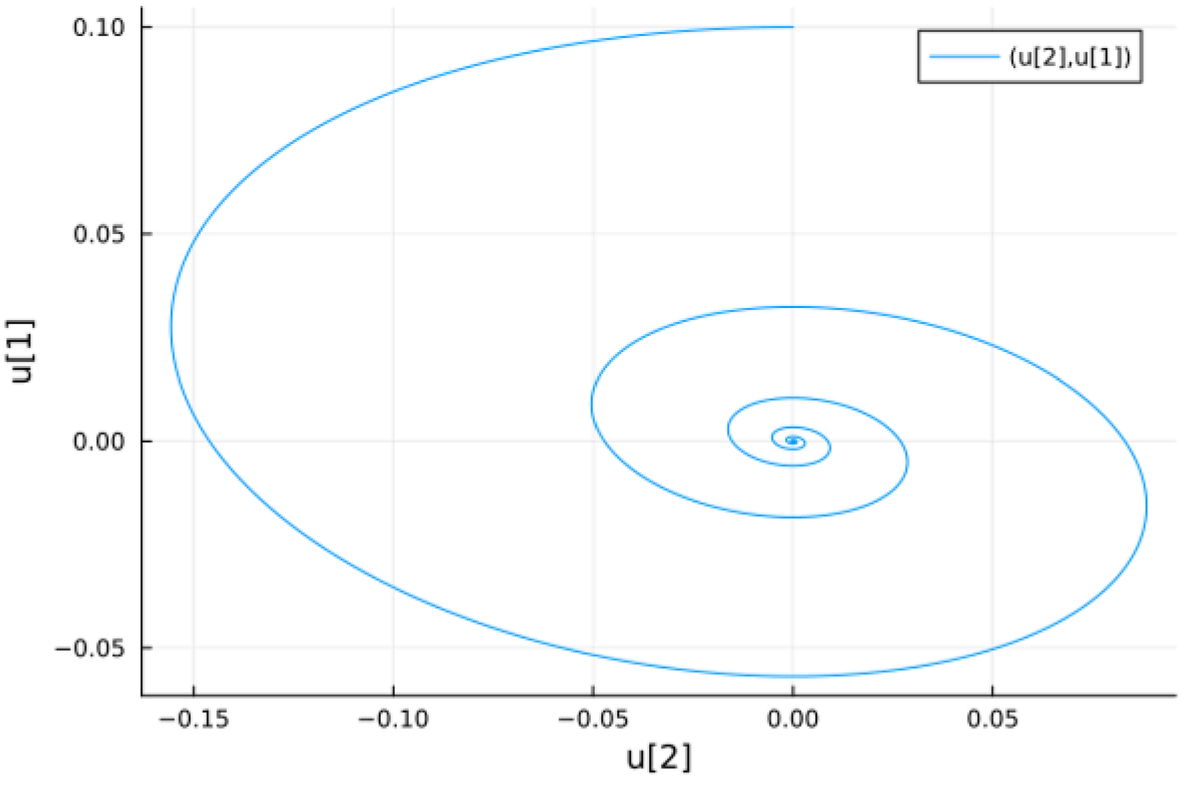


Написал код на Julia для второго случая:

```
#case 2
# x'' + 0.5x' + 4x = 0
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a,b = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*du[1] - b*u[1]
end

const x = 0.1
const y = 0.0
u0 = [x, y]

p = (sqrt(0.5), 4.0)
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

using Plots; gr()

#решение системы уравнений
plot(sol)
savefig("lab04_julia_02.png")

#фазовый портрет
plot(sol, idxs=(2,1))
savefig("lab04_julia_02_phase.png")
```

Программа выдала следующие результаты:





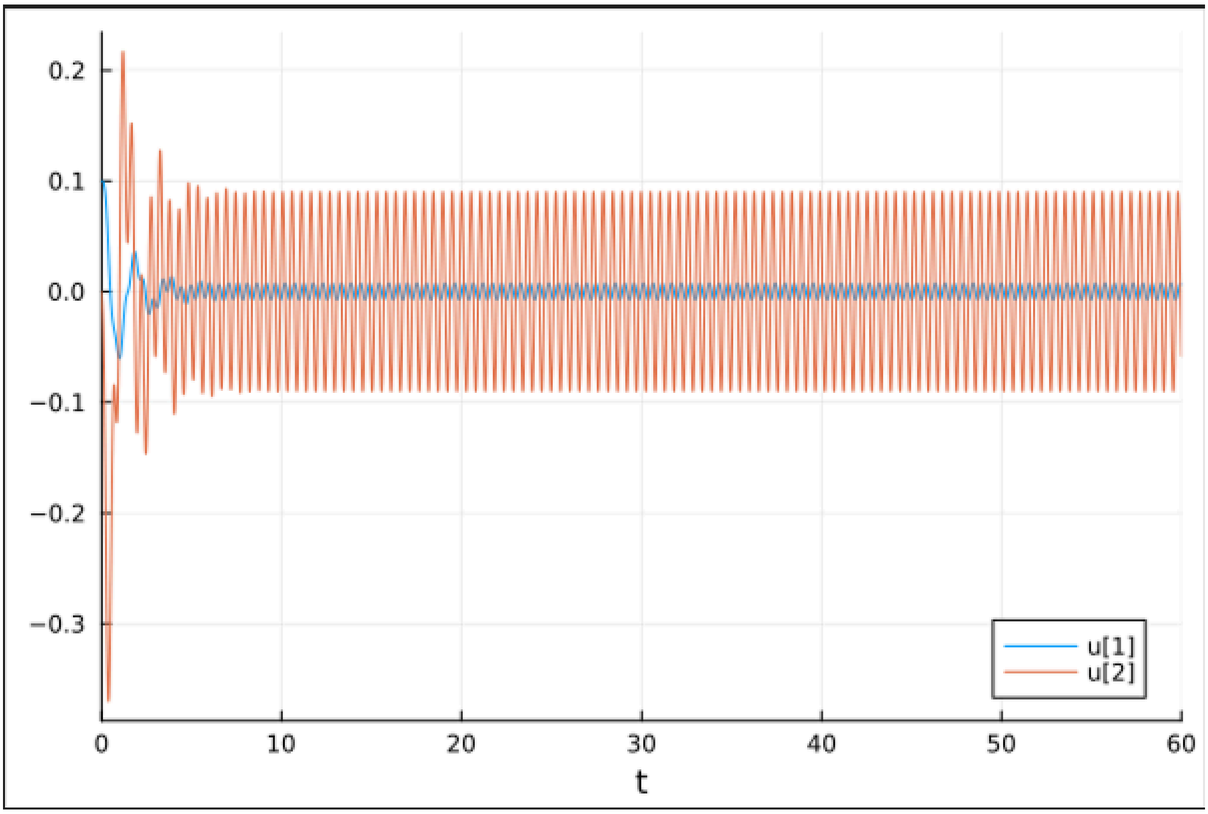
Написал код на Julia для третьего случая:

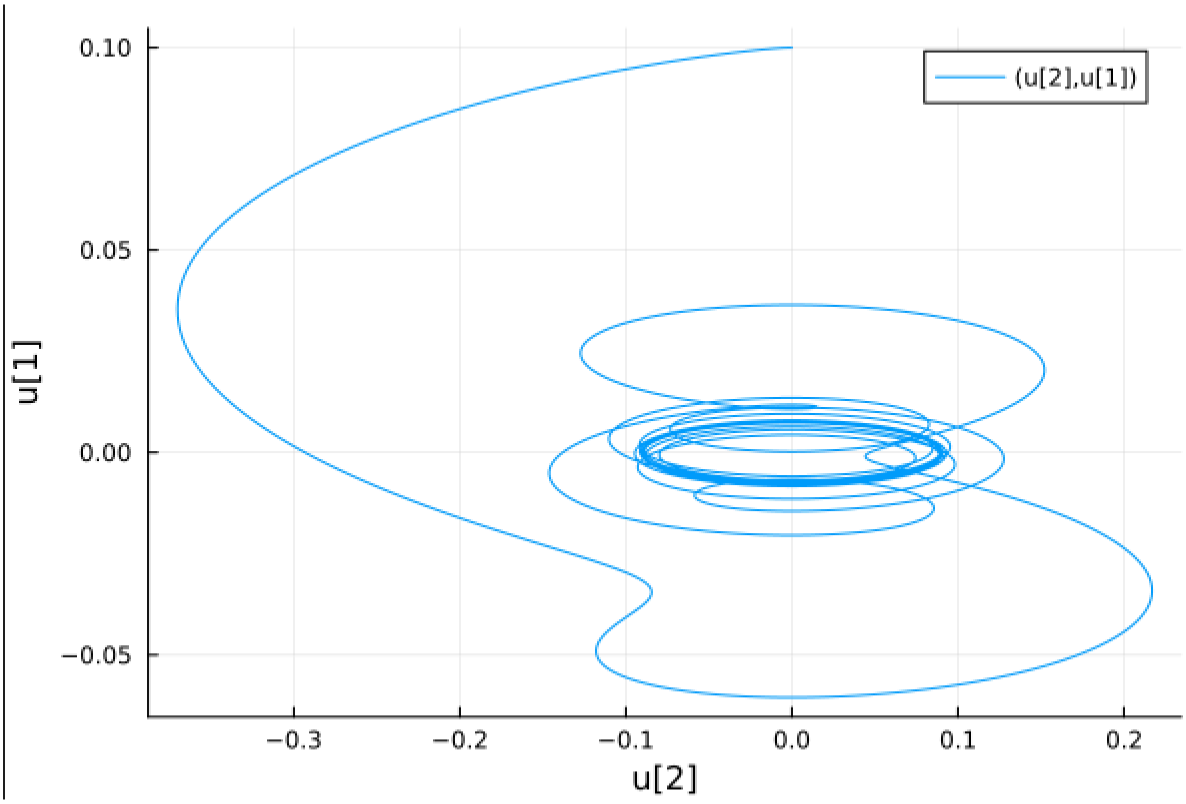
Lab04_03 – Блокнот

Файл Правка Формат Вид Справка

```
#case 3
# x'' + 2x' + 12x = cos(12t)
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a,b = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*du[1] - b*u[1] + cos(12*t)
end

const x = 0.1
const y = 0.0
u0 = [x, y]

p = (sqrt(2), 12.0)
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

using Plots; gr()

#решение системы уравнений
plot(sol)
savefig("lab04_julia_03.png")

#фазовый портрет
plot(sol, idxs=(2,1))
savefig("lab04_julia_03_phase.png")
```

Программа выдала следующие результаты:

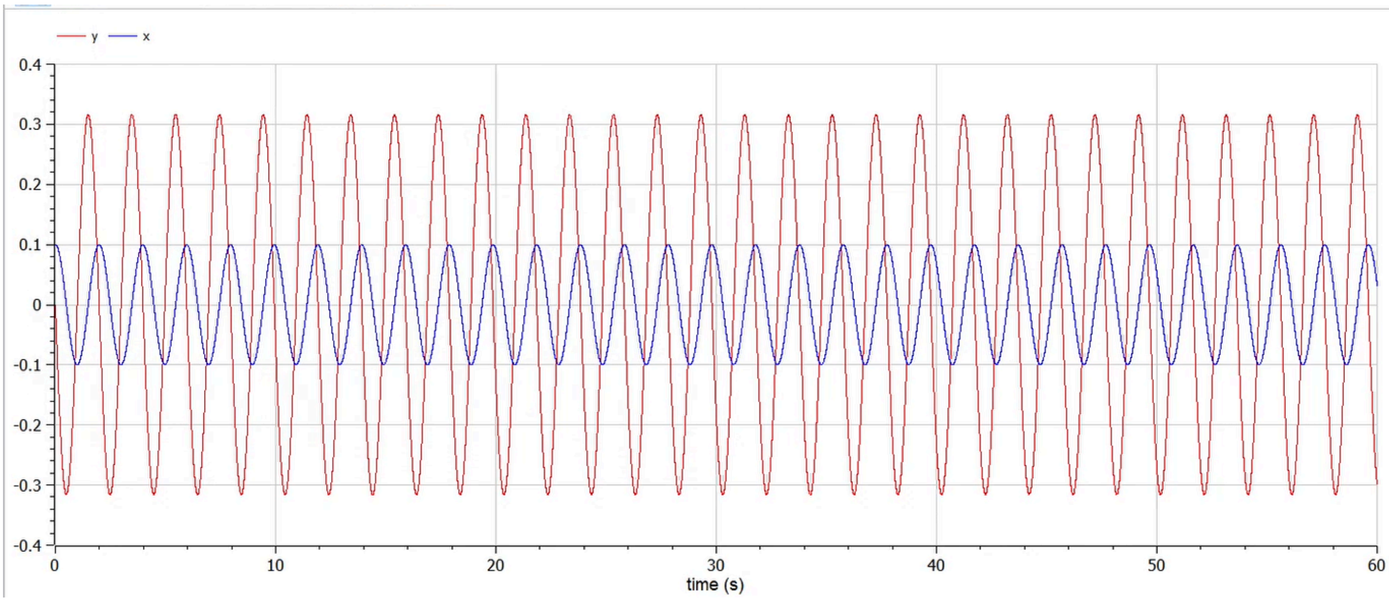




Далее написал код для первого случая и запустил его через OpenModelica:

```
//case1: x''+10.0x = 0
model lab04_case01
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
parameter Real w = sqrt(10.0);
parameter Real g =0;

parameter Real x0 = 0.1;
parameter Real y0 = 0.0;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

// f(t)
function f
input Real t ;
output Real res;
algorithm
res := 0;
end f;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*w*x - g*y + f(time);
end lab04_case01;

```

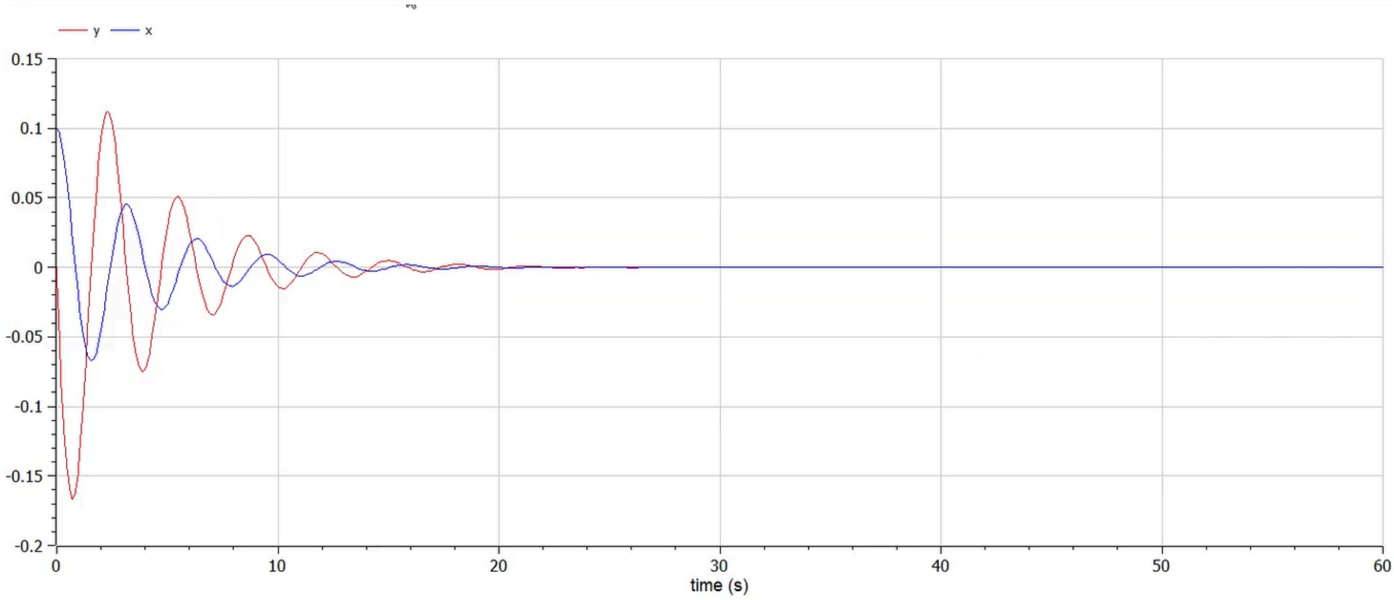
Программа выдала следующий результат:



Написал код для второго случая:

```
//case2: x''+0.5x' + 4x = 0
model lab04_case02
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
parameter Real w = sqrt(4.0);
parameter Real g = 0.5;

parameter Real x0 = 0.1;
parameter Real y0 = 0.0;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

// f(t)
function f
input Real t ;
output Real res;
algorithm
res := 0;
end f;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*w*x - g*y + f(time);
end lab04_case02;
```

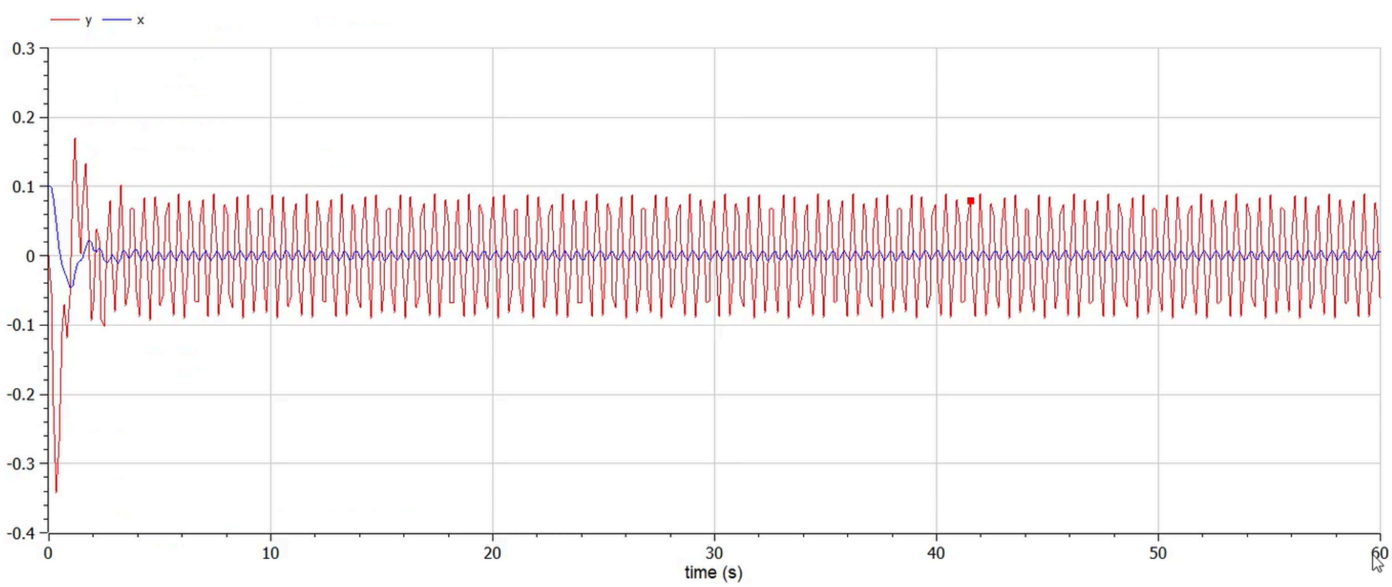
Программа выдала следующий результат:



Написал код для третьего случая:

```
//case3: x''+ 2x' + 12x = cos(12t)
model lab04_case03
//x'' + g* x' + w^2* x = f(t)
//w - частота
//g - затухание
parameter Real w = sqrt(12.0);
parameter Real g = 2.0;

parameter Real x0 = 0.1;
parameter Real y0 = 0.0;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

// f(t)
function f
input Real t ;
output Real res;
algorithm
res := cos(12*t);
end f;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*w*x - g*y + f(time);
end lab04_case03;
```

Программа выдала следующий результат:



Выводы

Я научился строить фазовый портрет гармонического осциллятора и решать уравнения гармонического осциллятора для разных случаев с помощью Julia и OpenModelica.

Список литературы{.unnumbered}

1. Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

2. Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

3. Решение дифференциальных уравнений: https://www.wolframalpha.com/

4. Бутиков И. Е. Собственные колебания линейного осциллятора. 2011.